Examen de Matemáticas 4º de ESO

Octubre 2003

Problema 1 *(1 puntos)* Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:
-1 ; $0,71$; 0 ; $\sqrt{2}$; $1,1133111333\dots$; $-\frac{1}{7}$; 2; $9,262626\dots$;
$3,21213214215\dots$; $3,333\dots$

Solución:
-1 es un número entero $-1 \in Z$.
$0,71$ es un número racional $0,71 \in Q$.
0 es un número natural $0 \in N$.
$\sqrt{2}$ es un número irracional.
$1,1133111333\dots$ es un número irrracional.
$-\frac{1}{7}$ es un número racional $-\frac{1}{7} \in Q$.
15 es un número natural $15 \in N$.
$9,262626\dots$ es un número racional $9,\widehat{26} \in Q$.
$3,21213214215\dots$ es un número irracional.
$3,333\dots$ es un número racional $3,\widehat{3} \in Q$

Problema 2 *(2 puntos)* Dibuja los siguientes intervalos en la recta real:

1. $\{x \in R : -2 \le x < 6\}$
2. $\{x \in R : 1 < x < 9\}$
3. $\{x \in R : x \ge 1\}$
4. $\{x \in R : x < -3\}$
5. $\{x \in R : |x - 2| \le 5\}$
6. $\{x \in R : |x + 1| < 3\}$

(Recuerda la definición de entorno, $E(a, r) = \{x \in R : |x - a| < r\}$.

Solución:

1. $\{x \in R : -2 \le x < 6\} = [-2, 6)$
2. $\{x \in R : 1 < x < 9\} = (1, 9)$
3. $\{x \in R : x \ge 1\} = [1, +\infty)$
4. $\{x \in R : x < -3\} = (-\infty, -3)$
5. $\{x \in R : |x - 2| \le 5\} = [2 - 5, 2 + 5] = [-3, 7]$
6. $\{x \in R : |x + 1| < 3\} = (-1 - 3, -1 + 3) = (-4, 2)$

Problema 3 *(2 puntos)* Resolver las ecuaciones:

1. $\log 10(x+2) - \log(x^2) = 1$
2. $\log x + \log x^2 = 3$

Solución:

1.
$$\log \frac{10(x+2)}{x^2} = \log 10$$
$$\frac{10(x+2)}{x^2} = 10$$
$$10x + 20 = 10x^2$$
$$x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2, \;\; x = -1$$

2.
$$\log x + 2\log x = 3$$
$$3\log x = 3$$
$$\log x = 1 \Longrightarrow x = 10$$

Problema 4 *(2 puntos)*Racionalizar las siguientes expresiones:

1. $\dfrac{3}{\sqrt{7}}; \dfrac{5}{\sqrt{5}}$
2. $\dfrac{1}{1+\sqrt{7}}; \dfrac{3}{7-\sqrt{7}}$

Solución:

1. $\dfrac{3}{\sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

   $\dfrac{5}{\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

2. $\dfrac{1}{1+\sqrt{7}} = \dfrac{1-\sqrt{7}}{(1+\sqrt{7})(1-\sqrt{7})} = \dfrac{1-\sqrt{7}}{(1-(\sqrt{7})^2)} = \dfrac{1-\sqrt{7}}{1-7} = -\dfrac{1-\sqrt{7}}{6}$

   $\dfrac{3}{7-\sqrt{7}} = \dfrac{3(7+\sqrt{7})}{(7-\sqrt{7})(7+\sqrt{7})} = \dfrac{3(7+\sqrt{7})}{(7^2-(\sqrt{7})^2)} = \dfrac{3(7+\sqrt{7})}{42} = \dfrac{7+\sqrt{7}}{14}$

Problema 5 *(3 puntos)* Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log x - \log y^2 & = 3 \\ \log(x^2 \cdot y) & = 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} \log x - \log y^2 & = 3 \\ \log(x^2 \cdot y) & = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \log x- & 2\log y = & 3 \\ 2\log x+ & \log y = & 1 \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\begin{cases} u- & 2v = & 3 \\ 2u+ & v = & 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = -1 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\begin{cases} \log x = u = 1 \\ \log y = v = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 10^1 = 10 \\ y = 10^{-1} = 0,1 \end{cases}$$