Examen de Matemáticas 4º de ESO

Diciembre 2003

Problema 1 *(1 puntos)* Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:
2 ; -3 ; $\frac{3}{4}$; $3,7728122812\ldots$; $5,1133111333\ldots$; $\sqrt{3}$; π; $3,230173017\ldots$;

$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; 0

Solución:

- 2 es un número natural $2 \in N$.

- -3 es un número entero $-3 \in Z$.

- $\frac{3}{4}$ es un número racional $\frac{3}{4} \in Q$.

- $3,7728122812\ldots$ es un número racional $3,772\widehat{812} \in Q$.

- $5,1133111333\ldots\ldots$ es un número irracional.

- $\sqrt{3}$ es un número irracional.

- π es un número irracional.
- $3,230173017\ldots$ es un número racional $3,23\widehat{017} \in Q$
- $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ es un número irracional.
- 0 es un número natural $0 \in N$.

Problema 2 *(3 puntos)* Resolverlas siguientes inecuaciones:

1. $\frac{x^2+x-6}{x+1} \leq 0$
2. $\frac{x^2+4x-5}{x-2} \geq 0$
3. $\frac{2x+1}{2} - x < \left(\frac{x-2}{6}\right) x$

Solución:

1.

$$\frac{x^2+x-6}{x+1} = \frac{(x+3)(x-2)}{x+1} \leq 0$$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,2)$	$(2,+\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+3)(x-2)}{x+1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty,-3] \cup (-1,2]$$

2.

$$\frac{x^2+4x-5}{x-2} = \frac{(x+5)(x-1)}{x-2} \geq 0$$

	$(-\infty,-5)$	$(-5,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x^2+4x-5}{x-2}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$[-5,1] \cup (2,+\infty)$$

3.

$$\frac{2x+1}{2} - x < \left(\frac{x-2}{6}\right) x \Longrightarrow 6x+3-6x < x^2-2x$$

$$3 < x^2-2x \Longrightarrow -x^2+2x+3 < 0 \Longrightarrow x^2-2x-3 > 0$$

$$x^2-2x-3 > 0 \Longrightarrow (x+1)(x-3) > 0$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,+\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)(x-3)$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty,-1) \cup (3,\infty)$$

Problema 3 *(2puntos)* Resolver las ecuaciones:

1. $\log(x-1) - \log(x+1) = 1 - \log x$

2. $3^{2x-1} + 3^{x+1} - 2 = 0$

Solución:

1.

$$\log(x-1) - \log(x+1) = 1 - \log x \Longrightarrow \log\frac{x-1}{x+1} = \log\frac{10}{x}$$

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{10}{x} \Longrightarrow x^2 - 11x - 10 = 0 \Longrightarrow$$
$$x = 11,84428877, \quad x = -0,8442887702$$

De las dos soluciones hay una que no es posible ya que no existen logaritmos de números negativos, es decir, de las dos soluciones la única posible es $x = 11,84428877$

2.

$$3^{2x-1} + 3^{x+1} - 2 = 0 \Longrightarrow \frac{3^{2x}}{3} + 3\cdot 3^x - 2 = 0 \Longrightarrow 3^{2x} + 9\cdot 3^x - 6 = 0$$

Haciendo el cambio de variables $u = 2^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$u^2 + 9u - 6 = 0 \Longrightarrow u = 0,6234753829, \quad u = -9,623475382$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$u = 0,6234753829 = 3^x \Longrightarrow \log 0,6234753829 = \log 3^x \Longrightarrow$$

$$x\log 3 = \log 0,6234753829 \Longrightarrow$$
$$x = \frac{\log 0,6234753829}{\log 3} = -0,4300388787$$

En el otro caso, $u = -9,623475382 = 3^x$ no es posible obtener solución.

Problema 4 *(2 puntos)* Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \log\frac{x}{y^2} & = & 3 \\ \log(x^2y) & = & 2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \log\frac{x}{y^2} & = & 3 \\ \log(x^2y) & = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} \log x- & 2\log y = & 3 \\ 2\log x+ & \log y = & 2 \end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrl} u- & 2v = & 3 \\ 2u+ & v = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = \frac{7}{5} \\ v = -\frac{4}{5} \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} \log x = u = \frac{7}{5} \\ \log y = v = -\frac{4}{5} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10^{7/5} = 25,11886431 \\ y = 10^{-4/5} = 0,1584893192 \end{array}\right.$$

Problema 5 *(2 puntos)* Resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2^{x+1}- & 3^{y-1} = & 1 \\ 2^{x-1}+ & 3^{y+1} = & 2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2^{x+1}- & 3^{y-1} = & 1 \\ 2^{x-1}+ & 3^{y+1} = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} 2\cdot 2^x+ & \dfrac{3^y}{3} = & 1 \\ \dfrac{2^x}{2}- & 3\cdot 3^y = & 2 \end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $2^x = u$ y $3^y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2u- & \dfrac{v}{3} = & 1 \\ \dfrac{u}{2}+ & 3v = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} 6u- & v = & 3 \\ u+ & 6v = & 4 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} u = \frac{22}{37} \\ v = \frac{21}{37} \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} 2^x = u = \frac{22}{37} \\ 3^y = v = \frac{21}{37} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\log 2 = \log\frac{22}{37} \\ y\log 3 = \log\frac{21}{37} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{\log\frac{22}{37}}{\log 2} = -0,7500217469 \\ y = \frac{\log\frac{21}{37}}{\log 3} = -0,5155553790 \end{array}\right.$$