

Examen de Matemáticas 4º de ESO.

Marzo 2004 (Recuperación)

Problema 1 (2 puntos) Sea $P(x) = ax^3 - bx^2 + 2x + 1$ un polinomio divisible por $x - 1$ y por $x + 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(1) = 0 \implies a - b = -3 \\ P(-1) = 0 \implies -a - b = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - x + 3$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$
2. $Q(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$
3. $R(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

Solución:

1. $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = (x + 1)(x - 1)^2(x + 2)$
2. $Q(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = (x - 1)(x + 3)(x - 5)$
3. $R(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x + 1)(x - 2)(2x - 1)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x$, $Q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$
2. $P(x) = x^4 + 3x^3 - 4x$, $Q(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$

Solución:

1. $P(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x$, $Q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x = x(x + 1)^2(x + 2) \\ Q(x) &= x^5 - x^4 - x^3 + x^2 = x^2(x - 1)^2(x + 1) \end{aligned}$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x + 1)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^2(x - 1)^2(x + 1)^2(x + 2)$$

$$2. P(x) = x^4 + 3x^3 - 4x, Q(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$$

$$P(x) = x^4 + 3x^3 - 4x = x(x+2)^2(x-1)$$

$$Q(x) = x^4 - 3x^2 + 2x = x(x-1)^2(x+2)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x+2)(x-1)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x(x+2)^2(x-1)^2$$

Problema 4 (2 puntos) Efectuar:

$$1. \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{2}{x+1}$$

$$2. \left(\frac{2x}{x-1} - \frac{1}{x} \right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} \right)$$

$$3. \frac{3x}{x-1} \cdot \frac{5}{x}$$

Solución:

$$1. \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{x^2+3x-3}{x^2-1}$$

$$2. \left(\frac{2x}{x-1} - \frac{1}{x} \right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} \right) = -\frac{2x^3+x^2+1}{(x-1)^2}$$

$$3. \frac{3x}{x-1} \cdot \frac{5}{x} = \frac{15}{x-1}$$

Problema 5 (2 puntos) Si $P(x) = (x-2)^3x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

$$1. \text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x-2)^2$$

$$2. \text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x-2)^3x^2(x+1)$$

Solución:

$$Q(x) = x(x-2)^2(x+1) = x^4 - 3x^3 + 4x^2$$