

Examen de Matemáticas 4º de ESO

Enero 2004

Problema 1 (2 puntos) Sea $P(x) = 2x^3 + ax^2 - bx - 3$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 1$ obtenemos de resto 2, y es divisible por $x + 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(1) = 2 \implies a - b = 3 \\ P(-1) = 0 \implies a + b = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - x - 3$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^5 + 8x^4 + 14x^3 - 8x^2 - 15x$
2. $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$
3. $R(x) = 2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 13x - 6$

Solución:

1. $P(x) = x^5 + 8x^4 + 14x^3 - 8x^2 - 15x = x(x+1)(x-1)(x+3)(x+5)$
2. $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x-1)^2(x-3)$
3. $R(x) = 2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 13x - 6 = (x+1)^2(x-2)(2x+3)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + x$, $Q(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1$
2. $P(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$, $Q(x) = 2x^5 + x^4 - x^3$

Solución:

1. $P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + x$, $Q(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1$

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + x = x(x+1)^2(2x+1) \\ Q(x) &= 2x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1 = (x+1)(x-1)^2(2x+1) \end{aligned}$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = (x+1)(2x+1)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x(x-1)^2(x+1)^2(2x+1)$$

$$2. P(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2, Q(x) = 2x^5 + x^4 - x^3$$

$$P(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2 = x^2(x-1)(x+1)^2$$

$$Q(x) = 2x^5 + x^4 - x^3 = x^3(x+1)(2x-1)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2(x+1)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^3(x-1)(x+1)^2(2x-1)$$

Problema 4 (2 puntos) Efectuar:

$$1. \frac{2x}{x-1} + \frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x+1}$$

$$2. \left(\frac{2x}{x-1} - \frac{3}{x} \right) : \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$3. \frac{2x}{x-1} \cdot \frac{3}{x^2}$$

Solución:

$$1. \frac{2x}{x-1} + \frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2-1}$$

$$2. \left(\frac{2x}{x-1} - \frac{3}{x} \right) : \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{2x^3 - x^2 + 3}{x^2 - 3x}$$

$$3. \frac{2x}{x-1} \cdot \frac{3}{x^2} = \frac{6}{x^2 - x}$$

Problema 5 (2 puntos) Si $P(x) = (x+3)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

$$1. \text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 + 3x = x(x+3)$$

$$2. \text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x+3)^2x^2(x-7)$$

Solución:

$$P(x) = x(x+3)(x-7) = x^3 - 4x^2 - 21x$$