Examen de Matemáticas 4º de ESO

Noviembre 2003

Problema 1 *(1 puntos)* Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:
1 ; -5 ; $-\frac{7}{3}$; $4,3327832783278\ldots$; $4,33133113331113333\ldots$; $\sqrt{5}$; π; $7,1203870387\ldots$; $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$

Solución:

- 1 es un número natural $1 \in N$.
- -5 es un número entero $-5 \in Z$.
- $-\frac{7}{3}$ es un número racional $-\frac{7}{3} \in Q$.
- $4,3327832783278\ldots$ es un número racional $4,3\widehat{3278} \in Q$.
- $4,33133113331113333\ldots$ es un número irracional.
- $\sqrt{5}$ es un número irracional.
- π es un número irracional.
- $7,1203870387\ldots$ es un número racional $7,120\widehat{387} \in Q$
- $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$ es un número irracional.

Problema 2 *(3 puntos)* Resolverlas siguientes inecuaciones:

1. $\frac{x^2-6x-7}{x-1} \leq 0$
2. $\frac{x^2-2x-15}{x+1} \geq 0$
3. $\frac{x+2}{3} - 1 \geq \left(\frac{x-1}{6}\right) x$

Solución:

1.

$$\frac{x^2-6x-7}{x-1}=\frac{(x-7)(x+1)}{x-1}\leq 0$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,7)$	$(7,+\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x-7)(x+1)}{x-1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty,-1]\cup(1,7]$$

2.

$$\frac{x^2-2x-15}{x+1}=\frac{(x+3)(x-5)}{x+1}\geq 0$$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,5)$	$(5,+\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+3)(x-5)}{x+1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$[-3,-1)\cup[5,+\infty)$$

3.

$$\frac{x+2}{3}-1\geq\left(\frac{x-1}{6}\right)x\Longrightarrow 2x+4-6\geq(x-1)x$$

$$2x-2\geq x^2-x\Longrightarrow -x^2+3x-2\geq 0$$

$$x^2-3x+2\leq 0\Longrightarrow(x-1)(x-2)\leq 0$$

	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$(x-1)(x-2)$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$[1,2]$$

Problema 3 *(2 puntos)* Resolver las ecuaciones:

1. $\log(2x+1)-\log x=1+\log x$

2. $2^{2x-2} + 2^{x-1} - 1 = 0$

Solución:

1.

$$\log(2x+1) - \log x = 1 + \log x \Longrightarrow \log(2x+1) = \log 10 + 2\log x$$

$$\log(2x+1) = \log(10x^2) \Longrightarrow 10x^2 - 2x - 1 = 0 \Longrightarrow$$

$$x = 0,4316624790, \quad x = -0,2316624790$$

De las dos soluciones hay una que no es posible ya que no existen logaritmos de números negativos, es decir, de las dos soluciones la única posible es $x = 0,4316624790$

2.

$$2^{2x-2} + 2^{x-1} - 1 = 0 \Longrightarrow \frac{2^{2x}}{4} + \frac{2^x}{2} - 1 = 0 \Longrightarrow 2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 4 = 0$$

Haciendo el cambio de variables $u = 2^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$u^2 + 2u - 4 = 0 \Longrightarrow u = 1,236067977, \quad u = -3,236067977$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$u = 1,236067977 = 2^x \Longrightarrow \log 1,236067977 = \log 2^x \Longrightarrow$$

$$x \log 2 = \log 1,236067977 \Longrightarrow$$

$$x = \frac{\log 1,236067977}{\log 2} = 0,3057580863$$

En el otro caso, $u = -3,236067977 = 2^x$ no es posible obtener solución.

Problema 4 *(2 puntos)* Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \log \frac{x^2}{y^3} & = & 1 \\ \log(xy^2) & = & 2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \log \frac{x^2}{y^3} & = & 1 \\ \log(xy^2) & = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} 2\log x- & 3\log y = & 1 \\ \log x+ & 2\log y = & 2 \end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrr} 2u- & 3v = & 1 \\ u+ & 2v = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} 2u- & 3v = & 1 \\ -2u- & 4v = & -4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = \frac{8}{7} \\ v = \frac{3}{7} \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} \log x = u = \frac{8}{7} \\ \log y = v = \frac{3}{7} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10^{\frac{8}{7}} \\ y = 10^{\frac{3}{7}} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 13,89495494 \\ y = 2,682695795 \end{array}\right.$$

Problema 5 *(2 puntos)* Resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\left\{\begin{array}{rrcr} 2^{x-1}+ & 3^{y+1} & = & 4 \\ 2^{x+1}- & 3^{y+1} & = & 5 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrcr} 2^{x-1}+ & 3^{y+1} & = & 4 \\ 2^{x+1}- & 3^{y+1} & = & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrcr} \frac{2^x}{2}+ & 3\cdot 3^y & = & 4 \\ 2\cdot 2^x- & 3\cdot 3^y & = & 5 \end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $2^x = u$ y $3^y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrcr} \frac{u}{2}+ & 3v & = & 4 \\ 2u- & 3v & = & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = \frac{18}{5} \\ v = \frac{11}{15} \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} 2^x = u = \frac{18}{5} \\ 3^y = v = \frac{11}{15} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\log 2 = \log\frac{18}{5} \\ y\log 3 = \log\frac{11}{15} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{\log\frac{18}{5}}{\log 2} = 1,847996906 \\ y = \frac{\log\frac{11}{15}}{\log 3} = -0,2823151820 \end{array}\right.$$