

Examen de Matemáticas 4º de ESO

Mayo 2004

Problema 1 (2 puntos) Calcular el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 15}}{x - 8}$$

Solución:

Como no existen raíces cuadradas de números negativos, calculamos los intervalos en los que $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3) \geq 0$:

	$(-\infty, -5)$	$(-5, 3)$	$(3, +\infty)$
$x + 5$	-	+	+
$x - 3$	-	-	+
$x^2 + 2x - 15$	+	-	+

Si ahora quitamos el punto que anula el denominador nos queda:

$$\text{Dom } f(x) = (-\infty, -5] \cup [3, 8) \cup (8, +\infty)$$

Problema 2 (1 puntos) Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{x^3}{x^4 - x^2 + 1}$

2. $g(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x^3}$

3. $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4}$

Solución:

1. $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^4 - (-x)^2 + 1} = -f(x) \implies \text{impar}$

2. $g(-x) = \frac{(-x)^2 - (-x) - 1}{(-x)^3} = -\frac{x^2 + x - 1}{x^3} \implies \text{ni par ni impar}$

3. $h(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^4} = h(x) \implies \text{par}$

Problema 3 (1 puntos) Calcular $f \circ g$ y $g \circ f$, siendo

$$f(x) = \frac{2x - 1}{2} \text{ y } g(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Solución:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{1-x^2}) = \frac{2(\sqrt{1-x^2}) - 1}{2}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2x-1}{2}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{2x-1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3+4x-4x^2}}{2}$$

Problema 4 (1 punto) Calcular la función inversa de $f(x) = \frac{2x+2}{3x+2}$

Solución:

$$y = \frac{2x+2}{3x+2}; \quad 3yx+2y = 2x+2; \quad 3yx-2x = -2y+2; \quad (3y-2)x = -2y+2 \implies$$

$$x = \frac{-2y+2}{3y-2} \implies f^{-1}(x) = \frac{2-2x}{3x-2}$$

Problema 5 (1 puntos) Comprobar si la función $f(x) = x^x$ es creciente o decreciente en $x = 2$

Solución:

$$1,9 < 1,99 < 2 < 2,09 < 2,1$$

$$3,385570343 < 3,932942726 < 4 < 4,667730120 < 4,749638091$$

Luego la función es creciente en $x = 2$.

Problema 6 (1 puntos) Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - 5x + 3)$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^3 + 5x + 2)$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 3x - 2}{5x^2 + 3x - 1}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 + 2x + 3}{3x^2 - 2x - 4}$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 2x - 1}{x^5 + 2x}$

Solución:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - 5x + 3) = +\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^3 + 5x + 2) = -\infty$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 3x - 2}{5x^2 + 3x - 1} = \frac{6}{5}$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 + 2x + 3}{3x^2 - 2x - 4} = -\infty$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 2x - 1}{x^5 + 2x} = 0$$

Problema 7 (3 punto) Calcular los siguientes límites:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^4 - x^3 - 1}{2x^4 - 1} \right)^{3x-1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^5 + 2x^2 - 1}{x^5 - 2x + 1} \right)^{x^3-1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4 + 1}{5x^4 + 3x^3 - 1} \right)^{2x^3+1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3 - x - 1}{3x^3 + 2} \right)^{x^2-1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^7 + x^4 - x + 1}{3x^7 - x^2 + 1} \right)^{7x-1}$$

Solución:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^4 - x^3 - 1}{2x^4 - 1} \right)^{3x-1} = e^{-3/2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^5 + 2x^2 - 1}{x^5 - 2x + 1} \right)^{x^3-1} = +\infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4 + 1}{5x^4 + 3x^3 - 1} \right)^{2x^3+1} = 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3 - x - 1}{3x^3 + 2} \right)^{x^2-1} = e^{-1/3}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^7 + x^4 - x + 1}{3x^7 - x^2 + 1} \right)^{7x-1} = 0$$