

Examen de Matemáticas 4º de ESO

Mayo 2004

Problema 1 (2 puntos) Calcular el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x - 6}}{x - 4}$$

Solución:

Como no existen raíces cuadradas de números negativos, calculamos los intervalos en los que $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3) \geq 0$:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, +\infty)$
$x + 2$	—	+	+
$x - 3$	—	—	+
$x^2 - x - 6$	+	—	+

Si ahora quitamos el punto que anula el denominador nos queda:

$$\text{Dom } f(x) = (-\infty, -2] \cup [3, 4) \cup (4, +\infty)$$

Problema 2 (1 puntos) Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^4 - 1}$

2. $g(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$

Solución:

1. $f(-x) = \frac{(-x)^2 - 2}{(-x)^4 - 1} = f(x) \Rightarrow \text{par}$

2. $g(-x) = \frac{(-x)^3 - 1}{(-x)^2} = \frac{-x^3 - 1}{x^2} \Rightarrow \text{ni par ni impar}$

Problema 3 (1 puntos) Calcular $f \circ g$ y $g \circ f$, siendo

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2} \text{ y } g(x) = \sqrt{x - 1}$$

Solución:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x - 1}) = \frac{(\sqrt{x - 1})^2 - 1}{2} = \frac{x - 2}{2}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x^2 - 1}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{x^2 - 1}{2}\right) - 1} = \sqrt{\frac{x^2 - 3}{2}}$$

Problema 4 (1 punto) Calcular la función inversa de $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

Solución:

$$y = \frac{2x-1}{x+2}; \quad yx+2y = 2x-1; \quad yx-2x = -2y-1; \quad (y-2)x = -(2y+1) \implies$$

$$x = -\frac{2y+1}{y-2} \implies f^{-1}(x) = -\frac{2x+1}{x-2}$$

Problema 5 (1 puntos) Comprobar si la función $f(x) = 10^{-x}$ es creciente o decreciente en $x = 2$

Solución:

$$1,9 < 1,99 < 2 < 2,09 < 2,1$$

$$0,0126 > 0,0102 > 0,01 > 0,008 > 0,0079$$

Luego la función es decreciente en $x = 2$.

Problema 6 (1 puntos) Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - 2x + 1)$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^3 + x - 1)$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 + x - 1}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x - 1}{x^2 + 3x}$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}$

Solución:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - 2x + 1) = +\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^3 + x - 1) = -\infty$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 + x - 1} = 0$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x - 1}{x^2 + 3x} = +\infty$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1} = 3$

Problema 7 (3 puntos) Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right)^{2x^2}$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + x - 1} \right)^{2x}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{2x^2 + x} \right)^{x+1}$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 1}{x - 1} \right)^{2x-2}$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + x}{x^2 - 1} \right)^{2x^2-1}$

Solución:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right)^{2x^2} = e^{-2}$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + x - 1} \right)^{2x} = +\infty$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{2x^2 + x} \right)^{x+1} = 0$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 1}{x - 1} \right)^{2x-2} = e^4$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + x}{x^2 - 1} \right)^{2x^2-1} = +\infty$