

Problemas de Matemáticas 4º de ESO

Límites

1 Límites de sucesiones

1.1 Idea intuitiva

1. Utiliza la calculadora para comprobar que los términos de la sucesión

$(a_n) = \left(\frac{3n^2 + 3}{n^2}\right)$ se aproximan a 3. Calcular para ello los valores de $a_1, a_4, a_{10}, a_{40}, a_{100}$ y a_{1000}

2. Utilizar la calculadora para calcular a que valor se aproximan las siguientes sucesiones. Calcular para ello los valores de $a_1, a_4, a_{10}, a_{40}, a_{100}$ y a_{1000}

(a) $(a_n) = \left(\frac{n + 3}{n^2 + 1}\right)$

(b) $(a_n) = \left(\frac{3n + 4}{3n - 1}\right)$

(c) $(a_n) = \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{5}, \frac{7}{8}, \frac{9}{11}, \dots\right\}$

(d) $(a_n) = \left(\sqrt{\frac{4n + 3}{n + 1}}\right)$

1.2 Definición:

1. Averigua a partir de que término de la sucesión $a_n = \frac{4n - 3}{3n}$ se cumple

que $\left|a_n - \frac{4}{3}\right| < \frac{1}{1000}$.

2. La sucesión $(a_n) = \left(\frac{1}{n+4}\right)$ tiene de límite 0. ¿A partir de que término de esta sucesión todos los siguientes se diferencian del límite menos de una milésima?

3. Hallar un término de la sucesión $(a_n) = \left(\frac{1-3n}{2n+1}\right)$ a partir del cual todos los términos siguientes se diferencien del límite menos de una milésima.

1.3 Sucesiones que tienden a infinito

1. Utiliza la calculadora para averiguar que ocurre con los términos de las siguientes sucesiones al dar valores a n cada vez mayores.

(a) $(a_n) = (4^{n-1})$

(b) $(b_n) = \left(\frac{1-n^3}{n}\right)$

(c) $(c_n) = ((-1)^n \cdot (n+3)^2)$

2. Dado $k = 121$, averiguar a partir de que término de la sucesión $(a_n) = (4n - 3)$ todos los siguientes son mayores que k . Compruébalo calculando algún término posterior.

3. Dado $k = -213$, averiguar a partir de que término de la sucesión $(a_n) = (3 - 6n)$ todos los siguientes son menores que k . Compruébalo calculando algún término posterior.

1.4 Cálculo de Límites de sucesiones

1. Dadas las sucesiones $(a_n) = (n^2 + 2)$ y $(b_n) = (1 - n^2)$, calcular los siguientes límites:

(a) $\lim a_n$

(b) $\lim b_n$

(c) $\lim(a_n - b_n)$

(d) $\lim(a_n + b_n)$

(e) $\lim(a_n \cdot b_n)$

(f) $\lim \frac{a_n}{b_n}$

2. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim \frac{2n + 1}{4n + 7}$

(b) $\lim \frac{2n^2 + 1}{3n^3 + 2}$

(c) $\lim \frac{n^3 - 2n^2 + 1}{3n^3 + 2}$

(d) $\lim \frac{2n^3 + 2n^2 + 1}{3n^2 + 1}$

(e) $\lim \frac{2n^3 + 2n^2 + 1}{3n^2 + 1}$

3. Calcular los siguientes límites:

$$(a) \lim \sqrt{\frac{8n+1}{2n+5}}$$

$$(b) \lim \sqrt{\frac{3n+1}{n^2-1}}$$

$$(c) \lim \sqrt{\frac{3n^2+2n+1}{n^2-2}}$$

1.5 Número e

1. Calcular los cinco primeros términos de la sucesión de término general $a_n = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n}$. Calcular también los términos a_{200} y a_{1000} . Relacionar esta sucesión con el número e .

2. Calcula los siguientes límites:

$$(a) \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$$

$$(b) \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5}$$

$$(c) \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{3}}$$

$$(d) \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n+2}$$

2 Límites de funciones

2.1 Límite de una función en un punto

1. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Calcular:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

2. Utilizar la calculadora para calcular a que valores se acercan las siguientes funciones en los puntos indicados:

(a) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ en $x = 3$

(b) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3}$ en $x = -3$

2.2 Límite de una función en el infinito

1. Para las siguientes funciones, calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(a) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^3}$

(b) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 5}$

(c) $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$

(d) $f(x) = 3^x$

2. Calcular los límites de las siguientes funciones polinómicas:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 4x - 1)$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 4x - 1)$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 1)$

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 1)$

(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^5 - 7)$

(f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^5 - 7)$

2.3 Cálculo de límites de funciones racionales

1. Calcular los siguientes límites y, en caso de que no existan, calcular los laterales.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 5}{x - 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2}{x + 3}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 1}{x - 3}$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-1}{x+2}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-x}{x-3}$$

2. Calcular los siguientes límites simplificando fracciones:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-4}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{3x^4-x^3}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x-\sqrt{3}}{x^2-3}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow -7} \frac{x^2+14x+49}{x^2-49}$$

3. Calcular los siguientes límites

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3x+4}{x^2-3}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4-2x-2}{3x^4+1}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+5x-1}{x^2+2}$$