

Examen de Matemáticas 4º de ESO

Sucesiones (Abril 2003)

Problema 1 (3 puntos) Dada la progresión geométrica cuyo tercer término es 9 y el noveno es 1, calcular

1. El primer término y la razón
2. El término general
3. Estudiar si la sucesión es creciente o decreciente
4. Estudiar si la sucesión está acotada
5. El producto de los nueve primeros términos
6. La suma de los nueve primeros términos
7. La suma total de la progresión

Solución:

$$1. a_9 = a_3 \cdot r^{9-3} \implies 1 = 9 \cdot r^6 \implies r = \sqrt[6]{\frac{1}{9}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = 0.6933612743$$

$$a_3 = a_1 \cdot r^2 \implies 9 = a_1 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^2 \implies a_1 = 9 \cdot \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{8}{3}} = 18.72075440$$

$$2. a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 3^{\frac{8}{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^{n-1} = 3^{\frac{9-n}{3}}$$

3. La sucesión es $3^{8/3}, 3^{7/3}, 3^2, 3^{5/3}, 3^{4/3}, 3, 3^{2/3}, \dots$, que cumplen que:
 $3^{8/3} \geq 3^{7/3} \geq 3^2 \geq 3^{5/3} \geq 3^{4/3} \geq 3 \geq 3^{2/3} \geq \dots$, luego la sucesión es decreciente.

4. $3^{8/3}$ es mayor que el resto de los términos, luego la sucesión está acotada superiormente.

El 0 es menor que todos los términos de la sucesión, luego la sucesión está acotada inferiormente.

En conclusión, la sucesión está acotada.

$$5. P_9 = \sqrt{(a_1 \cdot a_9)^9} = \sqrt{(3^{8/3} \cdot 1)^9} = 3^{12} = 531441$$

$$6. S_9 = \frac{a_9 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{1 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{8}{3}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{3}} - 1} = 58.79033411$$

$$7. S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{3^{\frac{8}{3}}}{1 - \sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = 61.05150081$$

Problema 2 (2 puntos) Dada la progresión $3, \frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \dots$

1. Decidir si la sucesión es una progresión geométrica, aritmética o ninguna de las dos, explicando el porqué.
2. Calcular en término a_{20} , y r o d si procede.
3. Calcular la suma de los veinte primeros términos.

Solución:

1. La diferencia entre dos términos consecutivos es siempre $-\frac{1}{2}$, luego se trata de una progresión aritmética.

2. La diferencia es $d = -\frac{1}{2}$

$$a_{20} = a_1 + 19 \cdot d = 3 + 19 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{13}{2}$$

$$3. S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{3 - \frac{13}{2}}{2} \cdot 20 = -35$$

Problema 3 (1 puntos) Dada la sucesión de término general $a_n = \frac{2n^3 - 4}{n^3 - 1}$ calcular el término de esta sucesión, a partir de cual todos los términos difieren del límite en menos de una milésima.

Solución:

Lo primero que vemos es que $\lim \frac{2n^3 - 4}{n^3 - 1} = 2$

Tenemos que $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ y a partir de un término a_n se tiene que cumplir:

$$\left| \frac{2n^3 - 4}{n^3 - 1} - 2 \right| < \frac{1}{1000} \implies \left| \frac{-2}{n^3 - 1} \right| < \frac{1}{1000} \implies \frac{2}{n^3 - 1} < \frac{1}{1000} \implies$$

$$2000 < n^3 - 1 \implies n > 12.59711028$$

El término buscado es a_{13} .

Problema 4 (4 puntos) Calcular los siguientes límites

$$1. \lim \frac{2n^2 - n + 1}{3n^3 + 1}$$

$$2. \lim \frac{2n^4 - n^2 + 1}{n^3 - 1}$$

$$3. \lim \sqrt{\frac{8n^2 - n + 1}{2n^2 - 1}}$$

$$4. \lim \left(\frac{n^3 + 1}{n^3 - 1} \right)^{2n^3}$$

$$5. \lim \left(\frac{2n^2 + n - 1}{n^2 - 1} \right)^{2n}$$

Solución:

$$1. \lim \frac{2n^2 - n + 1}{3n^3 + 1} = 0$$

$$2. \lim \frac{2n^4 - n^2 + 1}{n^3 - 1} = +\infty$$

$$3. \lim \sqrt{\frac{8n^2 - n + 1}{2n^2 - 1}} = \sqrt{4} = 2$$

$$4. \lim \left(\frac{n^3 + 1}{n^3 - 1} \right)^{2n^3} = (1^\infty) = e^\lambda = e^4$$

$$\lambda = \lim 2n^3 \left(\frac{n^3 + 1}{n^3 - 1} - 1 \right) = \lim \left(\frac{4n^3}{n^3 - 1} \right) = 4$$

$$5. \lim \left(\frac{2n^2 + n - 1}{n^2 - 1} \right)^{2n} = 2^\infty = \infty$$