Examen de Matemáticas 4º de ESO

Sucesiones (Mayo 2003)

Problema 1 *(3 puntos)* Dada la progresión $2, 6, 18, 54, \cdots$

1. Calcular r, a_6 y su témino general (a_n).
2. Calcular el producto de los seis primeros términos.
3. Calcular la suma de los seis primeros términos.

Solución:

1. $r = \dfrac{6}{2} = \dfrac{18}{6} = \cdots = 3$

   $a_6 = a_1 \cdot r^5 \Longrightarrow a_6 = 2 \cdot 3^5 \Longrightarrow a_6 = 486$

   $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$

2. $P_6 = \sqrt{(a_1 \cdot a_6)^6} = \sqrt{(2 \cdot 486)^6} = 918330048$

3. $S_6 = \dfrac{a_6 \cdot r - a_1}{r - 1} = \dfrac{486 \cdot 3 - 2}{3 - 1} = 728$

Problema 2 *(3 puntos)* Dada la progresión $\dfrac{1}{2}$, 1, $\dfrac{3}{2}$, 2, $\dfrac{5}{2}$, 3, $\cdots$

1. Calcular en término a_{10}, y d.
2. Calcular la suma de los diez primeros términos.

Solución:

1. La diferencia es $d = 1 - \dfrac{1}{2} = 2 - \dfrac{3}{2} = \cdots = \dfrac{1}{2}$

   $a_{10} = a_1 + 9 \cdot d = \dfrac{1}{2} + 9 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right) = 5$

2. $S_{20} = \dfrac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \dfrac{\frac{1}{2} + 5}{2} \cdot 10 = \dfrac{55}{2}$

Problema 3 *(4 puntos)* Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^3 - x^2 + 1}$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3 + 1}$

3. $\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x - 1}{2x^2 - x} \right)^{x^2}$

4. $\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} \right)^{2x}$

Solución:

1. $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^3 - x^2 + 1} = +\infty$

2. $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 + 1} = 0$

3. $\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x - 1}{2x^2 - x} \right)^{x^2} = \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{\infty} \right] = 0$

4. $\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} \right)^{2x} = (1^{\infty}) = e^{\lambda} = e^1$

   $\lambda = \lim_{x \longrightarrow \infty} 2x \left(\frac{2x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} - 1 \right) = \lim_{x \longrightarrow \infty} 2x \left(\frac{2x^2 - 1 - (2x^2 - x - 1)}{2x^2 - x - 1} \right) =$

   $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x^2}{2x^2 - x - 1} = 1$