Examen de Matemáticas 4º de ESO

Junio 2003-Recuperación

Problema 1 Resolver:

1. $\frac{x^2+x-2}{x+3} \geq 0$

   Solución:

$$\frac{x^2+x-2}{x+3} = \frac{(x+2)(x-1)}{x+3} \geq 0$$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+2)(x-1)}{x+3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

   La solución pedida sería:

$$(-3, -2] \cup [1, +\infty)$$

2.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \log \frac{x}{y} & = & 2 \\ \log(x^2y) & = & 3 \end{array}\right.$$

   Solución:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \log \frac{x}{y} & = & 2 \\ \log(x^2y) & = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} \log x- & \log y = & 2 \\ 2\log x+ & \log y = & 3 \end{array}\right.$$

   Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrl} u- & v = & 2 \\ 2u+ & v = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = \frac{5}{3} \\ v = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

   Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} \log x = u = \frac{5}{3} \\ \log y = v = -\frac{1}{3} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10^{\frac{5}{3}} \\ y = 10^{-\frac{1}{3}} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 46,41588833 \\ y = 0,4641588833 \end{array}\right.$$

Problema 2 Dos personas, separadas por una distancia de $6Km$ observan un avión, que vuela de uno de ellos hacia el otro. Uno de ellos lo observa bajo un ángulo de 30º, mientras el otro lo hace bajo un ángulo de 15º. Calcular la altura a la que vuela el avión.

Solución:

Ver dibujo al final

$$\left\{\begin{array}{l} \tan 30^{\circ} = \dfrac{h}{x} \\ \\ \tan 15^{\circ} = \dfrac{h}{6-x} \end{array}\right. \Longrightarrow h = 1,098Km$$

Problema 3 De una progresión geométrica se conoce el tercer término $a_3 = 81$, y el sexto $a_6 = 3$.

1. Calcular r, a_1 y su témino general (a_n).
2. Estudiar si la sucesión es creciente o decreciente
3. Estudiar si la sucesión está acotada
4. La suma y producto de los seis primeros términos
5. La suma total de la progresión

Solución:

1. $a_6 = a_3 \cdot r^{6-3} \Longrightarrow 3 = 81 \cdot r^3 \Longrightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{1}{27}} = \dfrac{1}{3}$

   $a_3 = a_1 \cdot r^2 \Longrightarrow 81 = a_1 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \Longrightarrow a_1 = 81 \cdot 3^2 = 729$

   $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 3^6 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = 3^{7-n}$

2. La sucesión es 3^6, 3^5, 3^4, 3^3, 3^2, 3, $1, \cdots$, que cumplen que: $3^6 \geq 3^5 \geq 3^4 \geq 3^3 \geq 3^2 \geq 3 \geq 3^{-1} \geq \cdots$, luego la sucesión es decreciente.

3. 3^6 es mayor que el resto de los términos, luego la sucesión está acotada superiormente.
   El 0 es menor que todos los términos de la sucesión, luego la sucesión está acotada inferiormente.
   En conclusión, la sucesión está acotada.

4. $P_6 = \sqrt{(a_1 \cdot a_6)^6} = \sqrt{(729 \cdot 3)^6} = 10460353203$

   $S_6 = \dfrac{a_6 \cdot r - a_1}{r-1} = \dfrac{3 \cdot \frac{1}{3} - 3^6}{\frac{1}{3} - 1} = 1092$

5. $S = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{729}{1-\frac{1}{3}} = 1093.5$

Problema 4 Sobre funciones:

1. Calcular las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{2x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$$

Solución:

(a) **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x \longrightarrow 1} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

Luego $x = 1$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x \longrightarrow -1} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1} \frac{2x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

Luego $x = -1$ es una asíntota vertical.

(b) **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \infty$$

Luego no hay asíntotas horizontales.

(c) **Asíntotas oblicuas:**
Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x + 1}{x^3 - x} = 2$$

$$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - a \cdot x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} - 2x \right) =$$

$$= \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$$

La asíntota oblicua es $y = 2x$

2. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccrl} x - 1 & \text{si} & x < & 1 \\ x^2 - 1 & \text{si} & 1 < x \leq & 3 \\ 8 & \text{si} & x > & 3 \end{array} \right. \quad \text{en } x = 1, \text{ y en } x = 3$$

En caso de exista alguna discontinuidad, decidir de que tipo es, y escribir, si procede, la extensión por continuidad de $f(x)$.

Solución:

Primero estudiamos en $x = 3$

$$\left\{\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3}(x^2-1) = 8 & \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3} 8 = 8 & \Longrightarrow \\ f(3) = 8 & \end{array}\right.$$

$$\lim_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = f(3)$$

Luego la función es continua en el punto $x = 3$.

Ahora estudiamos en $x = 1$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1}(x-1) = 0 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1}(x^2-1) = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

La función no está definida en $x = 1$

Luego la función no es continua en el punto $x = 1$.

Como los límites laterales coinciden, la discontinuidad es evitable. Bastaría imponer $f(1) = 0$ para que la función sea continua en ese punto y, por tanto, podemos encontrar otra función que será la extensión continua de $f(x)$ imponiendo la nueva condición:

$$F(x) = \left\{\begin{array}{ccrc} x-1 & \text{si} & x < & 1 \\ 0 & \text{si} & x = & 1 \\ x^2-1 & \text{si} & 1 < x \le & 3 \\ 8 & \text{si} & x > & 3 \end{array}\right.$$

Problema 5 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{1-\sqrt{x-1}}{x-2}$

   Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{1-\sqrt{x-1}}{x-2} = \lim_{x\longrightarrow 2} \frac{(1-\sqrt{x-1})(1+\sqrt{x-1})}{(x-2)(1+\sqrt{x-1})} = \lim_{x\longrightarrow 2} \frac{1-(\sqrt{x-1})^2}{(x-2)(1+\sqrt{x-1})} =$$
$$\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)(1+\sqrt{x-1})} = \lim_{x\longrightarrow 2} \frac{-1}{1+\sqrt{x-1}} = -\frac{1}{2}$$

2. $\lim\limits_{x \longrightarrow -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$

Solución:

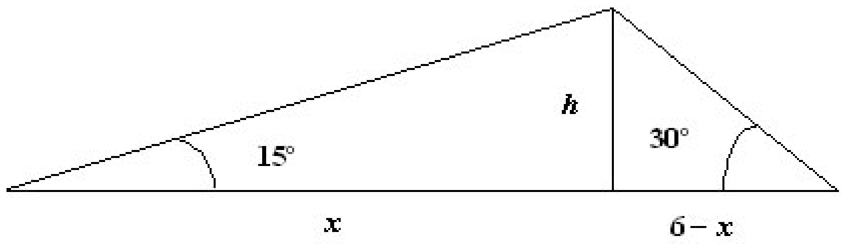
$$\lim_{x \longrightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \longrightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \longrightarrow -1} \frac{x-2}{x-1} = \frac{3}{2}$$

3. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{x^2 - 2x}{x^2 + 1} \right)^{2x}$

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1} \right)^{2x} = [1^{\infty}] = e^{\lambda} = e^{-4}$$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} 2x \left(\frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1} - 1 \right) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{-4x^2 - 2x}{x^2 + 1} = -4$$


h
15°
30°
x
6 − x

Gráfica de la función $f(x)=\dfrac{2x^3-2x+1}{x^2-1}$