Examen de Matemáticas 4º de ESO

Funciones (Mayo 2003)

Problema 1 *(2 puntos)*

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{x-2}{(x+2)\sqrt{x-1}}$$

Solución:

Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x - 1 \geq 0 \implies x \geq 1$.
Por otra parte los únicos valores que anulan el denominador de la función serían $x + 2 = 0 \implies x = -2$, valor eliminado en el razonamiento anterior, y $x - 1 = 0 \implies x = 1$, luego eliminando el valor $x = 1$ podemos concluir con que el dominio de la función será: $(1, +\infty)$

2. Si $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ y $g(x) = 2x$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

Solución:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = \sqrt{(2x)^2 - 1} = \sqrt{4x^2 - 1}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x^2 - 1}) = 2\sqrt{x^2 - 1}$

3. Sea $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ en el dominio $R - \{1\}$, calcular $f^{-1}(x)$

Solución:

$f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \Longrightarrow y = \dfrac{x+1}{x-1} \Longrightarrow (x-1)y = x + 1 \Longrightarrow$

$xy - y = x + 1 \Longrightarrow xy - x = y + 1 \Longrightarrow x(y-1) = y + 1 \Longrightarrow x = \dfrac{y+1}{y-1}$
En conclusión:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

4. Estudiar la simetría de la función $f(x) = \dfrac{3x^3}{2x^2 - 1}$

Solución:

$f(-x) = \dfrac{3(-x)^3}{2(-x)^2 - 1} = \dfrac{-3x^3}{2x^2 - 1} = -f(x) \Longrightarrow$ la función es simétrica respecto al origen.

Problema 2 *(3 puntos)*

1. Encuentra los valores de k para los que la función

   $f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 - 2k & si & x < 2 \\ 3kx & si & x \geq 2 \end{array} \right.$ es continua en todo R

   Solución:
   Vamos a calcular los límites laterales:

   $$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2} (x^2 - 2k) = 4 - 2k$$
   $$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2} 3kx = 6k$$

   Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R, salvo en el 2, mejor dicho, en el 2 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos:
   $4 - 2k = 6k \Longrightarrow 8k = 4 \Longrightarrow k = \dfrac{1}{2}$

2. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

   $f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 3 & \text{si} & x < -1 \\ \dfrac{x+3}{2} + 2 & \text{si} & -1 \leq x < 1 \\ x + 3 & \text{si} & x > 1 \end{array} \right.$ en $x = -1$, y en $x = 1$

   En caso de exista alguna discontinuidad, decidir de que tipo es, y escribir, si procede, la extensión por continuidad de $f(x)$.

   Solución:

   Primero estudiamos en $x = -1$

   $$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1} 3 = 3 \\ \lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1} \left(\dfrac{x+3}{2} + 2 \right) = 3 \\ f(-1) = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = 3$$

Luego la función es continua en el punto $x = -1$.

Ahora estudiamos en $x = 1$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} \left(\dfrac{x+3}{2} + 2\right) = 4 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} (x+3) = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) \neq f(0)$$

La función no está definida en $x = 1$

Luego la función no es continua en el punto $x = 1$.

Como los límites laterales coinciden, la discontinuidad es evitable. Bastaría imponer $f(1) = 4$ para que la función sea continua en ese punto y, por tanto, podemos encontrar otra función que será la extensión continua de $f(x)$ imponiendo la nueva condición:

$$F(x) = \left\{\begin{array}{ccrr} 3 & \text{si} & x < & -1 \\ \dfrac{x+3}{2} + 2 & \text{si} & -1 \le x < & 1 \\ 4 & \text{si} & x = & 1 \\ x+3 & \text{si} & x > & 1 \end{array}\right.$$

Problema 3 *(2 puntos)* Calcular las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{5x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

y dibuja aproximadamente la gráfica de la función.

Solución:

1. **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x\longrightarrow 1} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{5x^3 - 1}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

Luego $x = 1$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x\longrightarrow -1} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1} \frac{5x^3 - 1}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

Luego $x = -1$ es una asíntota vertical.

2. **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{5x^3-1}{x^2-1} = \infty$$

Luego no hay asíntotas horizontales.

3. **Asíntotas oblicuas:**
Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{5x^3-1}{x^2-1}}{x} = \frac{5x^3-1}{x^3+x} = 5$$

$$b = \lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x) - a\cdot x) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{5x^3-1}{x^2-1} - 5x\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{-5x-1}{x^2-1} = 0$$

La asíntota oblicua es $y = 5x$

Problema 4 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x\longrightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5} = \lim_{x\longrightarrow 5} \frac{(\sqrt{x^2-9}-4)(\sqrt{x^2-9}+4)}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 5} \frac{(\sqrt{x^2-9})^2-4^2}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+1)} = \lim_{x\longrightarrow 5} \frac{x^2-25}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 5} \frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)\sqrt{x^2-9}+4} \lim_{x\longrightarrow 5} \frac{x+5}{\sqrt{x^2-9}+4} = \frac{5}{4}$$

2. $\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow -5} \frac{x^2+3x-10}{x^2+12x+35} = \lim_{x\longrightarrow -5} \frac{(x-2)(x+5)}{(x+7)(x+5)} = \lim_{x\longrightarrow -5} \frac{x-2}{x+7} = -\frac{7}{2}$$

Problema 5 *(1 puntos)* Definición de infimo, supremo, máximo y mínimo (relativos y absolutos).

Función $f(x)=\dfrac{5x^3-1}{x^2-1}$