Examen de Matemáticas 4º de ESO

Junio 2003

Problema 1 Primera evaluación:

1. Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:
   3 ; $-\sqrt{5}$; $2,125125125\dots$; $-\dfrac{9}{4}$; -1

   Solución:

   3 es un número natural $3 \in N$.

   $-\sqrt{5}$ es un número irracional.

   $2,125125125\dots$ es un número racional $2,\widehat{125} \in Q$.

   $-\dfrac{9}{4}$ es un número racional $-\dfrac{9}{4} \in Q$.

   -1 es un número entero $-1 \in Z$.

2. Resolver la siguiente ecuación:
   $$\log(1+x^2) - 1 = \log(x-2)$$

   Solución:

   $$\log(1+x^2) - 1 = \log(x-2) \Longrightarrow \log(1+x^2) - \log 10 = \log(x-2) \Longrightarrow$$
   $$\log\left(\frac{1+x^2}{10}\right) = \log(x-2)$$
   $$\frac{1+x^2}{10} = x - 2 \Longrightarrow 1 + x^2 = 10x + 10 \Longrightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \Longrightarrow$$
   $$x = 7, \;\; x = 3$$

3. Resolver la siguiente inecuación:
   $$\frac{x^2 - 10x + 21}{x+3} \geq 0$$

   Solución:

   $$\frac{x^2 - 10x + 21}{x+3} = \frac{(x-7)(x-3)}{x+3} \geq 0$$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	$(3,7)$	$(7,+\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x-3)(x-7)}{x+3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-3,3]\cup[7,+\infty)$$

Problema 2 Segunda evaluación:

1. Calcular:

   (a) Expresa el 915$^{\rm o}$ como suma de un número de vueltas y un ángulo menor de 360$^{\rm o}$

   (b) Expresa en grados $\dfrac{3\pi}{4}$radianes

   (c) Expresa en radianes 215$^{\rm o}$

   Solución:

   (a) $915^{\rm o}=2\cdot 360^{\rm o}+195^{\rm o}\Longrightarrow 2$ vueltas y $195^{\rm o}$

   (b) $\dfrac{3\pi}{4}$rad$=\dfrac{3\cdot 180^{\rm o}}{4}=135^{\rm o}$

   (c)

   $$\left\{\begin{array}{lcl} 180^{\rm o} & \longrightarrow & \pi \\ 215^{\rm o} & \longrightarrow & x \end{array}\right. \Longrightarrow x=\frac{215\cdot\pi}{180}=1,194\text{rad}$$

2. Calcular las razones trigonométricas de un ángulo α, que pertenece al tercer cuadrante, y sabiendo que $\sin\alpha=-\dfrac{1}{3}$

   Solución:

   $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Longrightarrow\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+\cos^2\alpha=1\Longrightarrow\cos^2\alpha=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\Longrightarrow$
   $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\Longrightarrow\cos\alpha=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ya que estamos en el segundo cuadrante.

   $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

3. Calcular la altura del pico de una montaña, sabiendo que, en ese momento del día, el sol incide con sus rayos sobre el suelo con un ángulo de 75^{o} y provoca una sombra sobre el suelo de 53 metros.

   Solución:

$$\tan 75^{o} = \frac{h}{53} \Longrightarrow h = 53 \cdot \tan 75^{o} = 197,798 \text{ metros}$$

Problema 3 Tercera evaluación:

1. Dada la progresión 6, 12, 18, 24, 30, $\cdots$

   (a) Decidir si la sucesión es una progresión geométrica, aritmética o ninguna de las dos, explicando el porqué.

   (b) Calcular en término a_n, y r o d si procede.

   (c) Calcular la suma de los diez primeros términos.

   Solución:

   (a) La diferencia entre dos términos consecutivos es siempre 6, luego se trata de una progresión aritmética.

   (b) La diferencia es $d = 6$

   $$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 6 + (n-1) \cdot 6 = 6 + 6n - 6 = 6n$$

   (c) $a_{10} = a_1 + (10-1) \cdot d = 6 + 9 \cdot 6 = 60$

   $$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{6+60}{2} \cdot 10 = 330$$

2. Calcular los siguientes límites

   (a) $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^3-3x+1}$

   (b) $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3-2x}{x^2-1}$

   (c) $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{2x^2+1}{2x^2-x-1}\right)^{2x}$

   Solución:

   (a) $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^3-3x+1} = 0$

   (b) $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3-2x}{x^2-1} = \infty$

(c) $\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+1}{2x^2-x-1} \right)^{2x} = (1^{\infty}) = e^{\lambda} = e^1$

$\lambda = \lim_{x \longrightarrow \infty} 2x \left(\frac{2x^2+1}{2x^2-x-1} - 1 \right) = \lim_{x \longrightarrow \infty} 2x \left(\frac{2x^2+1-(2x^2-x-1)}{2x^2-x-1} \right) =$

$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x^2+4x}{2x^2-x-1} = 1$

3. Encuentra los valores de k para los que la función

$f(x) = \begin{cases} 2kx - 1 & si \quad x < 3 \\ x + 2k & si \quad x \geq 3 \end{cases}$ es continua en todo R

Solución:
Vamos a calcular los límites laterales:

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3} (2kx - 1) = 6k - 1$$
$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3} (x + 2k) = 3 + 2k$$

Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R, salvo en el 2, mejor dicho, en el 2 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos:
$6k - 1 = 3 + 2k \implies 4k = 4 \implies k = 1$

Problema 3º de la 2ª evaluación