

Examen de Matemáticas 4º de ESO.

Enero 2012

Problema 1 (1 punto) Sea $P(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + 2$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 1$ obtenemos de resto 6, y es divisible por $x - 2$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(1) = 6 \implies a + b = 6 \\ P(2) = 0 \implies 4a + b = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -1 \\ b = 7 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = -x^3 - 2x^2 + 7x + 2$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$
2. $Q(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 5$
3. $R(x) = 5x^5 + 22x^4 - 2x^3 - 64x^2 + 21x + 18$

Solución:

1. $P(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5 = (x - 1)(x + 1)(x - 5)$
2. $Q(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 5 = (x - 5)(x - 1)^2$
3. $R(x) = 5x^5 + 22x^4 - 2x^3 - 64x^2 + 21x + 18 = (x - 1)^2(x + 3)^2(5x + 2)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

$$P(x) = x^5 + 6x^4 + 5x^3, \quad Q(x) = 2x^5 + 21x^4 + 59x^3 + 15x^2 - 25x$$

Solución:

$$P(x) = x^5 + 6x^4 + 5x^3 = x^3(x + 1)(x + 5)$$

$$Q(x) = 2x^5 + 21x^4 + 59x^3 + 15x^2 - 25x = x(x + 5)^2(x + 1)(2x - 1)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x + 1)(x + 5)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^3(x + 1)(x + 5)^2(2x - 1)$$

Problema 4 (2 puntos) Simplificar:

$$1. \frac{x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 4x}{x^5 - 3x^3 + 2x^2}$$

$$2. \frac{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3}{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3}$$

Solución:

$$1. \frac{x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 4x}{x^5 - 3x^3 + 2x^2} = \frac{(x+2)^2(x-1)^2x}{(x+2)(x-1)^2x^2} = \frac{x+2}{x}$$

$$2. \frac{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3}{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3} = \frac{(x+1)^2(x-3)(x-1)}{(x-1)^2(x+1)(x-3)} = \frac{x+1}{x-1}$$

Problema 5 (2 puntos) Resolver y simplificar:

$$1. \frac{x-1}{x+2} - \frac{5x-1}{x^2+x-2} = \frac{x+3}{x-1}$$

$$2. \left(\frac{x+5}{x^2-x-2} - 2 \right) : \left(\frac{x}{x-2} - \frac{x}{x+1} \right)$$

$$3. \left(\frac{8x^2}{3(x-2)^2} \right) \cdot \left(\frac{9(x-2)}{4x^2} \right)$$

Solución:

$$1. \frac{x-1}{x+2} - \frac{5x-1}{x^2+x-2} = \frac{x+3}{x-1} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$2. \left(\frac{x+5}{x^2-x-2} - 2 \right) : \left(\frac{x}{x-2} - \frac{x}{x+1} \right) = -\frac{2x^2-3x-9}{3x}$$

$$3. \left(\frac{8x^2}{3(x-2)^2} \right) \cdot \left(\frac{9(x-2)}{4x^2} \right) = \frac{6}{x-2}$$

Problema 6 (1 punto) Si $P(x) = (x+7)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

$$1. \text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 + 7x = x(x+7)$$

$$2. \text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x+7)^2x^2(x-1)$$

Solución:

$$Q(x) = x(x+7)(x-1) = x^3 + 6x^2 - 7x$$