

Examen de Matemáticas 4º de ESO.

Enero 2012

Problema 1 (1 punto) Sea $P(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + 2$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 1$ obtenemos de resto -6 , y es divisible por $x + 2$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(1) = -6 \implies a + b = -6 \\ P(-2) = 0 \implies -4a - b = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = -7 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = x^3 - 2x^2 - 7x + 2$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 12$
2. $Q(x) = x^3 - 5x^2 - 13x - 7$
3. $R(x) = 5x^5 - 41x^4 + 118x^3 - 142x^2 + 69x - 9$

Solución:

1. $P(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 12 = (x - 1)(x + 2)(x - 6)$
2. $Q(x) = x^3 - 5x^2 - 13x - 7 = (x - 7)(x + 1)^2$
3. $R(x) = 5x^5 - 41x^4 + 118x^3 - 142x^2 + 69x - 9 = (x - 1)^2(x - 3)^2(5x - 1)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

$$P(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4, \quad Q(x) = 3x^6 - 14x^5 + 23x^4 - 16x^3 + 4x^2$$

Solución:

$$P(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4 = x^4(x - 1)(x - 2)$$

$$Q(x) = 3x^6 - 14x^5 + 23x^4 - 16x^3 + 4x^2 = x^2(x - 1)^2(x - 2)(3x - 2)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2(x - 1)(x - 2)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^3(x - 2)(x - 1)^2(3x - 2)$$

Problema 4 (2 puntos) Simplificar:

$$1. \frac{x^6 - 10x^5 + 33x^4 - 40x^3 + 16x^2}{x^6 - 6x^5 + 9x^4 - 4x^3}$$

$$2. \frac{x^5 - 3x^3 + 2x^2}{x^5 + x^4 - 2x^3}$$

Solución:

$$1. \frac{x^6 - 10x^5 + 33x^4 - 40x^3 + 16x^2}{x^6 - 6x^5 + 9x^4 - 4x^3} = \frac{(x-1)^2(x-4)^2x^2}{(x-4)(x-1)^2x^3} = \frac{x-4}{x}$$

$$2. \frac{x^5 - 3x^3 + 2x^2}{x^5 + x^4 - 2x^3} = \frac{(x-1)^2(x+2)x^2}{(x+2)(x-1)x^3} = \frac{x-1}{x}$$

Problema 5 (2 puntos) Resolver y simplificar:

$$1. \frac{x+3}{x+2} - \frac{7x-1}{x^2+x-2} = \frac{x+2}{x-1}$$

$$2. \left(\frac{x-5}{x^2-x-2} - 1 \right) : \left(\frac{2x}{x-2} - \frac{x}{x+1} \right)$$

$$3. \left(\frac{16x^2}{9(x-2)^2} \right) \cdot \left(\frac{27(x-2)}{4x^2} \right)$$

Solución:

$$1. \frac{x+3}{x+2} - \frac{7x-1}{x^2+x-2} = \frac{x+2}{x-1} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$2. \left(\frac{x-5}{x^2-x-2} - 1 \right) : \left(\frac{2x}{x-2} - \frac{x}{x+1} \right) = -\frac{x^2-2x+3}{x^2+4x}$$

$$3. \left(\frac{16x^2}{9(x-2)^2} \right) \cdot \left(\frac{27(x-2)}{4x^2} \right) = \frac{12}{x-2}$$

Problema 6 (1 punto) Si $P(x) = (x-8)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

$$1. \text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 - 8x = x(x-8)$$

$$2. \text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x-8)^2x^2(x-1)$$

Solución:

$$Q(x) = x(x-8)(x-1) = x^3 - 9x^2 + 8x$$