

Examen de Matemáticas 4º de ESO.

Enero 2012

Problema 1 (1 punto) Sea $P(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + 2$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 2$ obtenemos de resto 6, y es divisible por $x + 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(2) = 6 \implies 8a + 2b - 6 = 6 \\ P(-1) = 0 \implies -a - b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x + 2$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$
2. $Q(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$
3. $R(x) = 4x^5 + 5x^4 - 18x^3 - 7x^2 + 28x - 12$

Solución:

1. $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 2)(x + 1)(x - 3)$
2. $Q(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 7 = (x - 7)(x - 1)^2$
3. $R(x) = 4x^5 + 5x^4 - 18x^3 - 7x^2 + 28x - 12 = (x - 1)^2(x + 2)^2(4x - 3)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

$$P(x) = x^6 - 5x^5 + 6x^4, \quad Q(x) = 2x^5 - 15x^4 + 39x^3 - 40x^2 + 12x$$

Solución:

$$P(x) = x^6 - 5x^5 + 6x^4 = x^4(x - 2)(x - 3)$$

$$Q(x) = 2x^5 - 15x^4 + 39x^3 - 40x^2 + 12x = x(x - 2)^2(x - 3)(2x - 1)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x - 2)(x - 3)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^4(x - 3)(x - 2)^2(2x - 1)$$

Problema 4 (2 puntos) Simplificar:

$$1. \frac{x^7 + 2x^6 - 11x^5 - 12x^4 + 36x^3}{x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 18x^2}$$

$$2. \frac{x^6 + 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 4x^2}{x^5 + 4x^4 + 5x^3 + 2x^2}$$

Solución:

$$1. \frac{x^7 + 2x^6 - 11x^5 - 12x^4 + 36x^3}{x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 18x^2} = \frac{(x-2)^2(x+3)^2x^3}{(x-2)(x+3)^2x^2} = x(x-2)$$

$$2. \frac{x^6 + 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 4x^2}{x^5 + 4x^4 + 5x^3 + 2x^2} = \frac{(x-1)^2(x+2)^2x^2}{(x+2)(x+1)^2x^2} = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$$

Problema 5 (2 puntos) Resolver y simplificar:

$$1. \frac{x+5}{x+2} - \frac{x-3}{x^2+x-2} = \frac{x+5}{x-1}$$

$$2. \left(\frac{x+7}{x^2-x-2} - 3 \right) : \left(\frac{2x}{x-2} - \frac{x}{x+1} \right)$$

$$3. \left(\frac{6x^3}{9(x-2)^2} \right) \cdot \left(\frac{12(x-2)}{8x^3} \right)$$

Solución:

$$1. \frac{x+5}{x+2} - \frac{x-3}{x^2+x-2} = \frac{x+5}{x-1} \Rightarrow x = -3$$

$$2. \left(\frac{x+7}{x^2-x-2} - 3 \right) : \left(\frac{2x}{x-2} - \frac{x}{x+1} \right) = -\frac{3x^2-4x-13}{x^2+4x}$$

$$3. \left(\frac{6x^3}{9(x-2)^2} \right) \cdot \left(\frac{12(x-2)}{8x^3} \right) = \frac{1}{x-2}$$

Problema 6 (1 punto) Si $P(x) = (x-5)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

$$1. \text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 - 5x = x(x-5)$$

$$2. \text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x-5)^2x^2(x-1)$$

Solución:

$$Q(x) = x(x-5)(x-1) = x^3 - 6x^2 + 5x$$