

Examen de Matemáticas 4º de ESO.
Enero 2011

Problema 1 (1 punto) Sea $P(x) = 2x^3 - ax^2 + bx - 1$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 1$ obtenemos de resto 2, y es divisible por $x + 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(-1) = 0 \implies a + b = -3 \\ P(1) = 2 \implies -a + b = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - x - 1$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$
2. $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$
3. $R(x) = 3x^5 + 5x^4 - 11x^3 - 9x^2 + 16x - 4$

Solución:

1. $P(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x + 1)^2(x - 3)$
2. $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x - 3)(x - 1)^2$
3. $R(x) = 3x^5 + 5x^4 - 11x^3 - 9x^2 + 16x - 4 = (x - 1)^2(x + 2)^2(3x - 1)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

$$P(x) = x^5 + 4x^4 + 3x^3, \quad Q(x) = 2x^5 + 13x^4 + 23x^3 + 3x^2 - 9x$$

Solución:

$$P(x) = x^5 + 4x^4 + 3x^3 = x^3(x + 1)(x + 3)$$

$$Q(x) = 2x^5 + 13x^4 + 23x^3 + 3x^2 - 9x = x(x + 3)^2(x + 1)(2x - 1)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x + 1)(x + 3)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^3(x + 1)(x + 3)^2(2x - 1)$$

Problema 4 (2 puntos) Simplificar:

1. $\frac{x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 4x}{x^5 - 3x^3 - 2x^2}$

$$2. \frac{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3}{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3}$$

Solución:

$$1. \frac{x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 4x}{x^5 - 3x^3 - 2x^2} = \frac{(x-2)^2(x+1)^2x}{(x-2)(x+1)^2x^2} = \frac{x-2}{x}$$

$$2. \frac{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3}{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3} = \frac{(x-1)^2(x-3)(x+1)}{(x+1)^2(x-1)(x-3)} = \frac{x-1}{x+1}$$

Problema 5 (2 puntos) Resolver y simplificar:

$$1. \frac{x+1}{x+2} - \frac{3x-1}{x^2+x-2} = \frac{x+2}{x-1}$$

$$2. \left(\frac{x+3}{x^2-x-2} - 2 \right) : \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x}{x+1} \right)$$

$$3. \left(\frac{4x^2}{3(x-2)^2} \right) \cdot \left(\frac{6(x-2)}{4x^2} \right)$$

Solución:

$$1. \frac{x+1}{x+2} - \frac{3x-1}{x^2+x-2} = \frac{x+2}{x-1} \Rightarrow x = -\frac{4}{7}$$

$$2. \left(\frac{x+3}{x^2-x-2} - 2 \right) : \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x}{x+1} \right) = \frac{2x^2-3x-7}{x^2-3x-1}$$

$$3. \left(\frac{4x^2}{3(x-2)^2} \right) \cdot \left(\frac{6(x-2)}{4x^2} \right) = \frac{2}{x-2}$$

Problema 6 (1 punto) Si $P(x) = (x+6)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

$$1. \text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 + 6x = x(x+6)$$

$$2. \text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x+6)^2x^2(x-1)$$

Solución:

$$Q(x) = x(x+6)(x-1) = x^3 + 5x^2 - 6x$$