

Examen de Matemáticas 4º de ESO.

Enero 2011

Problema 1 (1 punto) Sea $P(x) = 2x^3 - ax^2 + bx - 1$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 2$ obtenemos de resto 5, y es divisible por $x - 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(2) = 5 \implies 2a - b = 5 \\ P(1) = 0 \implies a - b = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 1$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$
2. $Q(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$
3. $R(x) = 3x^5 - 20x^4 + 51x^3 - 62x^2 + 36x - 8$

Solución:

1. $P(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = (x + 1)^2(x + 4)$
2. $Q(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)^2(x - 2)$
3. $R(x) = 3x^5 - 20x^4 + 51x^3 - 62x^2 + 36x - 8 = (x - 1)^2(x - 2)^2(3x - 2)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

$$P(x) = x^5 - 3x^4 - 9x^3 - 5x^2, \quad Q(x) = 2x^5 - 11x^4 - 3x^3 + 35x^2 + 25x$$

Solución:

$$P(x) = x^5 - 3x^4 - 9x^3 - 5x^2 = x^2(x + 1)^2(x - 5)$$

$$Q(x) = 2x^5 - 11x^4 - 3x^3 + 35x^2 + 25x = x(x - 5)(x + 1)^2(2x - 5)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x + 1)^2(x - 5)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^2(x + 1)^2(x - 5)(2x - 5)$$

Problema 4 (2 puntos) Simplificar:

1. $\frac{x^6 + 4x^5 - 2x^4 - 12x^3 + 9x^2}{x^6 + x^5 - 5x^4 + 3x^3}$

$$2. \frac{x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 6x - 5}{x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 27x + 10}$$

Solución:

$$1. \frac{x^6 + 4x^5 - 2x^4 - 12x^3 + 9x^2}{x^6 + x^5 - 5x^4 + 3x^3} = \frac{(x+3)^2(x-1)^2x^2}{(x+3)(x-1)^2x^3} = \frac{x+3}{x}$$

$$2. \frac{x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 6x - 5}{x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 27x + 10} = \frac{(x-1)^2(x-5)(x+1)}{(x-1)^2(x-5)(x-2)} = \frac{x+1}{x-2}$$

Problema 5 (2 puntos) Resolver y simplificar:

$$1. \frac{x-3}{x+2} - \frac{x-1}{x^2-4} = \frac{x}{x-2}$$

$$2. \left(\frac{x}{x^2-x-6} - 2 \right) : \left(\frac{1}{x+2} - \frac{x}{x-3} \right)$$

$$3. \left(\frac{7x^4}{2(x-5)^2} \right) \cdot \left(\frac{4(x-5)}{7x^4} \right)$$

Solución:

$$1. \frac{x-3}{x+2} - \frac{x-1}{x^2-4} = \frac{x}{x-2} \implies x = \frac{7}{8}$$

$$2. \left(\frac{x}{x^2-x-6} - 2 \right) : \left(\frac{1}{x+2} - \frac{x}{x-3} \right) = \frac{2x^2-3x-12}{x^2+x+3}$$

$$3. \left(\frac{7x^4}{2(x-5)^2} \right) \cdot \left(\frac{4(x-5)}{7x^4} \right) = \frac{2}{x-5}$$

Problema 6 (1 punto) Si $P(x) = (x+8)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

$$1. \text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 + 8x = x(x+8)$$

$$2. \text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x+8)^2x^2(x-5)$$

Solución:

$$Q(x) = x(x+8)(x-5) = x^3 + 3x^2 - 40x$$