

Examen de Matemáticas 4º de ESO.

Enero 2011

Problema 1 (1 punto) Sea $P(x) = 2x^3 - ax^2 + bx - 1$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 2$ obtenemos de resto 7, y es divisible por $x - 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(2) = 7 \implies 2a - b = 4 \\ P(1) = 0 \implies a - b = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^3 - 5x^2 - 13x - 7$
2. $Q(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 5$
3. $R(x) = 2x^5 + 9x^4 + 4x^3 - 23x^2 - 12x + 20$

Solución:

1. $P(x) = x^3 - 5x^2 - 13x - 7 = (x + 1)^2(x - 7)$
2. $Q(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 5 = (x - 1)^2(x - 5)$
3. $R(x) = 2x^5 + 9x^4 + 4x^3 - 23x^2 - 12x + 20 = (x - 1)^2(x + 2)^2(2x + 5)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

$$P(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3, \quad Q(x) = 3x^5 - 17x^4 + 34x^3 - 28x^2 + 8x$$

Solución:

$$P(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 = x^3(x - 1)(x - 2)$$

$$Q(x) = 3x^5 - 17x^4 + 34x^3 - 28x^2 + 8x = x(x - 2)^2(x - 1)(3x - 2)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x - 1)(x - 2)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^3(x - 1)(x - 2)^2(3x - 2)$$

Problema 4 (2 puntos) Simplificar:

1. $\frac{x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 4x}{x^5 - 3x^3 - 2x^2}$

$$2. \frac{x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2}{x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 6x - 5}$$

Solución:

$$1. \frac{x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 4x}{x^5 - 3x^3 - 2x^2} = \frac{(x-2)^2(x+1)^2x}{(x-2)(x+1)^2x^2} = \frac{x-2}{x}$$

$$2. \frac{x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2}{x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 6x - 5} = \frac{(x-1)^2(x-2)(x+1)}{(x-1)^2(x+1)(x-5)} = \frac{x-2}{x-5}$$

Problema 5 (2 puntos) Resolver y simplificar:

$$1. \frac{x-1}{x+1} - \frac{x-3}{x^2-x-2} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$2. \left(\frac{x-2}{x^2+x-2} - 1 \right) : \left(\frac{3}{x+2} - \frac{x}{x-1} \right)$$

$$3. \left(\frac{8x^4}{7(x-2)^2} \right) \cdot \left(\frac{21(x-2)}{4x^3} \right)$$

Solución:

$$1. \frac{x-1}{x+1} - \frac{x-3}{x^2-x-2} = \frac{x-1}{x-2} \implies x = \frac{3}{2}$$

$$2. \left(\frac{x-2}{x^2+x-2} - 1 \right) : \left(\frac{3}{x+2} - \frac{x}{x-1} \right) = \frac{x^2}{x^2-x+3}$$

$$3. \left(\frac{8x^4}{7(x-2)^2} \right) \cdot \left(\frac{21(x-2)}{4x^3} \right) = \frac{6x}{x-2}$$

Problema 6 (1 punto) Si $P(x) = (x-9)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

$$1. \text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 - 9x = x(x-9)$$

$$2. \text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x-9)^2x^2(x+3)$$

Solución:

$$Q(x) = x(x-9)(x+3) = x^3 - 6x^2 - 27x$$