

Examen de Matemáticas 4º de ESO.
Enero 2011

Problema 1 (1 punto) Sea $P(x) = 2x^3 - ax^2 + bx - 1$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 2$ obtenemos de resto 1, y es divisible por $x - 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(2) = 1 \implies 2a - b = 7 \\ P(1) = 0 \implies a - b = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 6 \\ b = 5 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x - 1$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$
2. $Q(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$
3. $R(x) = 2x^5 - 13x^4 + 22x^3 + 4x^2 - 24x + 9$

Solución:

1. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = (x - 1)^2(x + 5)$
2. $Q(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x + 1)^2(x - 3)$
3. $R(x) = 2x^5 - 13x^4 + 22x^3 + 4x^2 - 24x + 9 = (x - 1)(x + 1)(x - 3)^2(2x - 1)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

$$P(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 + 3x^2, \quad Q(x) = 2x^5 + 7x^4 - 5x^3 - 19x^2 + 15x$$

Solución:

$$P(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 + 3x^2 = x^2(x - 1)^2(x + 3)$$

$$Q(x) = 2x^5 + 7x^4 - 5x^3 - 19x^2 + 15x = x(x + 3)(x - 1)^2(2x + 5)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x - 1)^2(x + 3)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^2(x - 1)^2(x + 3)(2x + 5)$$

Problema 4 (2 puntos) Simplificar:

1. $\frac{x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 12x^2 + 4x}{x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 2x^2}$

$$2. \frac{x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 6x - 5}{x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 27x + 10}$$

Solución:

$$1. \frac{x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 12x^2 + 4x}{x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 2x^2} = \frac{(x-2)^2(x-1)^2x}{(x-2)(x-1)^2x^2} = \frac{x-2}{x}$$

$$2. \frac{x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 6x - 5}{x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 27x + 10} = \frac{(x-1)^2(x-5)(x+1)}{(x-1)^2(x-5)(x-2)} = \frac{x+1}{x-2}$$

Problema 5 (2 puntos) Resolver y simplificar:

$$1. \frac{x+1}{x-1} - \frac{x}{x^2+x-2} = \frac{2x}{x+2}$$

$$2. \left(\frac{x}{x^2-x-2} - 1 \right) : \left(\frac{x}{x-2} - \frac{2}{x+1} \right)$$

$$3. \left(\frac{2x^4}{7(x+1)^2} \right) \cdot \left(\frac{14(x+1)}{2x^3} \right)$$

Solución:

$$1. \frac{x+1}{x-1} - \frac{x}{x^2+x-2} = \frac{2x}{x+2} \implies x = 2 \pm \sqrt{6}$$

$$2. \left(\frac{x}{x^2-x-2} - 1 \right) : \left(\frac{x}{x-2} - \frac{2}{x+1} \right) = -\frac{x^2-2x-2}{x^2-x+4}$$

$$3. \left(\frac{2x^4}{7(x+1)^2} \right) \cdot \left(\frac{14(x+1)}{2x^3} \right) = \frac{2x}{x+1}$$

Problema 6 (1 punto) Si $P(x) = (x-5)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

$$1. \text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 - 5x = x(x-5)$$

$$2. \text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x-5)^2x^2(x-1)$$

Solución:

$$Q(x) = x(x-5)(x-1) = x^3 - 6x^2 + 5x$$