

Examen de Matemáticas 4º de ESO.

Enero 2010

Problema 1 (1 punto) Sea $P(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 1$ obtenemos de resto 4, y es divisible por $x + 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(-1) = 0 \implies a + b = -3 \\ P(1) = 4 \implies a - b = -5 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -4 \\ b = 1 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 2$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^3 + 7x^2 + 11x + 5$
2. $Q(x) = x^3 + 5x^2 - 13x + 7$
3. $R(x) = 5x^5 + 7x^4 - 21x^3 - 11x^2 + 32x - 12$

Solución:

1. $P(x) = x^3 + 7x^2 + 11x + 5 = (x + 1)^2(x + 5)$
2. $Q(x) = x^3 + 5x^2 - 13x + 7 = (x - 1)^2(x + 7)$
3. $R(x) = 5x^5 + 7x^4 - 21x^3 - 11x^2 + 32x - 12 = (x - 1)^2(x + 2)^2(5x - 3)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

$$P(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 - 3x^2, \quad Q(x) = 2x^5 - 7x^4 - 5x^3 + 19x^2 + 15x$$

Solución:

$$P(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 - 3x^2 = x^2(x + 1)^2(x - 3)$$

$$Q(x) = 2x^5 - 7x^4 - 5x^3 + 19x^2 + 15x = x(x - 3)(x + 1)^2(2x - 5)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x + 1)^2(x - 3)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^2(x + 1)^2(x - 3)(2x - 5)$$

Problema 4 (2 puntos) Simplificar:

$$1. \frac{x^5 + 8x^4 + 22x^3 + 24x^2 + 9x}{x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 3x^2}$$

$$2. \frac{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3}{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3}$$

Solución:

$$1. \frac{x^5 + 8x^4 + 22x^3 + 24x^2 + 9x}{x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 3x^2} = \frac{(x+3)^2(x+1)^2x}{(x+3)(x+1)^2x^2} = \frac{x+3}{x}$$

$$2. \frac{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3}{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3} = \frac{(x-1)^2(x-3)(x+1)}{(x+1)^2(x-1)(x-3)} = \frac{x-1}{x+1}$$

Problema 5 (2 puntos) Resolver y simplificar:

$$1. \frac{x-2}{x+2} - \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{x}{x-2}$$

$$2. \left(\frac{x-1}{x^2-x-6} - 1 \right) : \left(\frac{2}{x+2} - \frac{x}{x-3} \right)$$

$$3. \left(\frac{7x^4}{2(x+5)^2} \right) \cdot \left(\frac{4(x+5)}{7x^3} \right)$$

Solución:

$$1. \frac{x-2}{x+2} - \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{x}{x-2} \Rightarrow x = \frac{3}{7}$$

$$2. \left(\frac{x-1}{x^2-x-6} - 1 \right) : \left(\frac{2}{x+2} - \frac{x}{x-3} \right) = \frac{x^2-2x-5}{x^2+6}$$

$$3. \left(\frac{7x^4}{2(x+5)^2} \right) \cdot \left(\frac{4(x+5)}{7x^3} \right) = \frac{2x}{x+5}$$

Problema 6 (1 punto) Si $P(x) = (x+4)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

$$1. \text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 + 4x = x(x+4)$$

$$2. \text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x+4)^2x^2(x-5)$$

Solución:

$$Q(x) = x(x+4)(x-5) = x^3 - x^2 - 20x$$