

Examen de Matemáticas 4º de ESO.

Enero 2010

Problema 1 (1 punto) Sea $P(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 2$ obtenemos de resto 10, y es divisible por $x - 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(1) = 0 \implies a - b = -1 \\ P(2) = 10 \implies 2a - b = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = x^3 + x - 2$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$
2. $Q(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$
3. $R(x) = 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 2x + 3$

Solución:

1. $P(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x + 1)^2(x - 3)$
2. $Q(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = (x - 1)^2(x + 5)$
3. $R(x) = 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 2x + 3 = (x - 1)^2(x + 1)^2(2x + 3)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

$$P(x) = x^5 - x^4 - 2x^3, \quad Q(x) = 2x^5 - 7x^4 + 3x^3 + 8x^2 - 4x$$

Solución:

$$P(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 = x^3(x + 1)(x - 2)$$

$$Q(x) = 2x^5 - 7x^4 + 3x^3 + 8x^2 - 4x = x(x - 2)^2(x + 1)(2x - 1)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x + 1)(x - 2)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^3(x + 1)(x - 2)^2(2x - 1)$$

Problema 4 (2 puntos) Simplificar:

$$1. \frac{x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 12x^2 + 4x}{x^5 + 4x^4 + 5x^3 + 2x^2}$$

$$2. \frac{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3}{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3}$$

Solución:

$$1. \frac{x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 12x^2 + 4x}{x^5 + 4x^4 + 5x^3 + 2x^2} = \frac{(x+2)^2(x+1)^2x}{(x+2)(x+1)^2x^2} = \frac{x+2}{x}$$

$$2. \frac{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3}{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3} = \frac{(x+1)^2(x-3)(x-1)}{(x-1)^2(x+1)(x-3)} = \frac{x+1}{x-1}$$

Problema 5 (2 puntos) Resolver y simplificar:

$$1. \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+2}{x^2-x-2} = \frac{x+1}{x-2}$$

$$2. \left(\frac{x+1}{x^2+x-2} - 1 \right) : \left(\frac{1}{x+2} - \frac{3x}{x-1} \right)$$

$$3. \left(\frac{4x^4}{7(x-1)^2} \right) \cdot \left(\frac{21(x-1)}{4x^3} \right)$$

Solución:

$$1. \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+2}{x^2-x-2} = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow x = -\frac{1}{6}$$

$$2. \left(\frac{x+1}{x^2+x-2} - 1 \right) : \left(\frac{1}{x+2} - \frac{3x}{x-1} \right) = \frac{x^2-3}{3x^2+5x+1}$$

$$3. \left(\frac{4x^4}{7(x-1)^2} \right) \cdot \left(\frac{21(x-1)}{4x^3} \right) = \frac{3x}{x-1}$$

Problema 6 (1 punto) Si $P(x) = (x-8)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

$$1. \text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 - 8x = x(x-8)$$

$$2. \text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x-8)^2x^2(x+3)$$

Solución:

$$Q(x) = x(x-8)(x+3) = x^3 - 5x^2 - 24x$$