

Examen de Matemáticas 4º de ESO.

Enero 2010

Problema 1 (1 punto) Sea $P(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 1$ obtenemos de resto 2, y es divisible por $x + 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(-1) = 0 \implies a + b = -3 \\ P(1) = 2 \implies a - b = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$
2. $Q(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$
3. $R(x) = 3x^5 - 10x^4 + x^3 + 18x^2 - 4x - 8$

Solución:

1. $P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x - 1)^2(x + 3)$
2. $Q(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x + 1)^2(x + 2)$
3. $R(x) = 3x^5 - 10x^4 + x^3 + 18x^2 - 4x - 8 = (x - 1)(x + 1)(x - 2)^2(3x + 2)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

$$P(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2, \quad Q(x) = 2x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 6x$$

Solución:

$$P(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 = x^2(x - 1)^2(x + 2)$$

$$Q(x) = 2x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 6x = x(x + 2)(x - 1)^2(2x + 3)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x - 1)^2(x + 2)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^2(x - 1)^2(x + 2)(2x + 3)$$

Problema 4 (2 puntos) Simplificar:

$$1. \frac{x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 9x}{x^5 + x^4 - 5x^3 + 3x^2}$$

$$2. \frac{x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2}{x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2}$$

Solución:

$$1. \frac{x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 9x}{x^5 + x^4 - 5x^3 + 3x^2} = \frac{(x+3)^2(x-1)^2x}{(x+3)(x-1)^2x^2} = \frac{x+3}{x(x-1)}$$

$$2. \frac{x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2}{x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2} = \frac{(x-1)^2(x-2)(x+1)}{(x+1)^2(x-1)(x-2)} = \frac{x-1}{x+1}$$

Problema 5 (2 puntos) Resolver y simplificar:

$$1. \frac{x+1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+x-2} = \frac{x}{x+2}$$

$$2. \left(\frac{x-1}{x^2-x-2} - 1 \right) : \left(\frac{x}{x-2} - \frac{3}{x+1} \right)$$

$$3. \left(\frac{3x^4}{5(x+1)^2} \right) \cdot \left(\frac{10(x+1)}{3x^3} \right)$$

Solución:

$$1. \frac{x+1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+x-2} = \frac{x}{x+2} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$2. \left(\frac{x-1}{x^2-x-2} - 1 \right) : \left(\frac{x}{x-2} - \frac{3}{x+1} \right) = \frac{-x^2+2x+1}{x^2-2x+6}$$

$$3. \left(\frac{3x^4}{5(x+1)^2} \right) \cdot \left(\frac{10(x+1)}{3x^3} \right) = \frac{2x}{x+1}$$

Problema 6 (1 punto) Si $P(x) = (x+7)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

$$1. \text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 + 7x = x(x+7)$$

$$2. \text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x+7)^2x^2(x+1)$$

Solución:

$$Q(x) = x(x+7)(x+1) = x^3 + 8x^2 + 7x$$