

Examen de Matemáticas 4º de ESO
Mayo 2009

Problema 1 Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2}}$$

Solución:

$$(-\infty, -2) \cup [-1, 1) \cup [3, \infty)$$

Problema 2 Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x - 5}$$

Solución:

Corte con el eje OY : Hacemos $x = 0 \implies f(0) = \frac{3}{5} \implies \left(0, \frac{3}{5}\right)$

Corte con el eje OX : Hacemos $f(x) = 0 \implies x^2 - 2x - 3 = 0 \implies (3, 0)$
el otro punto en $x = -1$ se anula el denominador.

Problema 3 Dadas las funciones f y g calcular $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

$$f(x) = \frac{x+1}{2x}, \quad g(x) = 3x+1$$

Solución:

1. $f \circ f(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x+1}{2x}\right) = \frac{\frac{x+1}{2x} + 1}{2\frac{x+1}{2x}} = \frac{3x+1}{2x+2}$
2. $g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+1}{2x}\right) = 3\frac{x+1}{2x} + 1 = \frac{5x+3}{2x}$
3. $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(3x+1) = \frac{3x+1+1}{2(3x+1)} = \frac{3x+2}{6x+2}$
4. $g \circ g(x) = g(g(x)) = g(3x+1) = 3(3x+1) + 1 = 9x+4$

Problema 4 Calcular la función inversa de $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$

Solución:

$$\begin{aligned} y = \frac{2x-1}{x-2} &\implies yx - 2y = 2x - 1 \implies yx - 2x = 2y - 1 \implies \\ &\implies x = \frac{2y-1}{y-2} \implies f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{x-2} \end{aligned}$$

Problema 5 Comprobar la simetría de las siguientes funciones

$$f(x) = \frac{x^4 - x^2 - 1}{x^2 + 2}; \quad g(x) = \frac{x^6 + 1}{x}; \quad h(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1}$$

Solución:

$$f(x) = \frac{x^4 - x^2 - 1}{x^2 + 2} \text{ es par}$$

$$g(x) = \frac{x^6 + 1}{x} \text{ es impar}$$

$$h(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} \text{ no es ni par ni impar}$$

Problema 6 Calcular los siguientes límites

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^7 - x^4 + 2x - 1)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 2x^4 - 3x + 1}{-x^2 + x + 1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{-x^5 + 4}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^3 + 2x - 1}{3x^4 - x^2 + 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + x - 1}}{2x + 1}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x - 1}}{x + 2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 - 2x} - \sqrt{2x^2 + x})$$

Solución:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^7 - x^4 + 2x - 1) = \infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 2x^4 - 3x + 1}{-x^2 + x + 1} = -\infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{-x^5 + 4} = 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^3 + 2x - 1}{3x^4 - x^2 + 1} = \frac{2}{3}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + x - 1}}{2x + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x+2} = 0$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 - 2x} - \sqrt{2x^2 + x}) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Problema 7 Calcular los siguientes límites

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 - 2} \right)^{x^2-1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 + 5} \right)^{x+2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 1}{2x + 5} \right)^{3x}$$

Solución:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 - 2} \right)^{x^2-1} = \infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 + 5} \right)^{x+2} = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 1}{2x + 5} \right)^{3x} = e^{-6}$$