

Examen de Matemáticas 4º de ESO. Enero 2009

Problema 1 (1 punto) Sea $P(x) = ax^3 - x^2 + x + b$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 1$ obtenemos de resto 2, y es divisible por $x + 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(1) = 2 \implies a + b = 2 \\ P(-1) = 0 \implies a - b = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = -x^2 + x + 2$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$
2. $Q(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$
3. $R(x) = 3x^4 + 7x^3 - 6x^2 - 12x + 8$

Solución:

1. $P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = (x - 1)^3(x + 2)$
2. $Q(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x + 3)(x - 1)^2$
3. $R(x) = 3x^4 + 7x^3 - 6x^2 - 12x + 8 = (x + 2)^2(x - 1)(3x - 2)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

$$P(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 + 3x^2, \quad Q(x) = 2x^5 + 11x^4 + 11x^3 - 15x^2 - 9x$$

Solución:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^5 + x^4 - 5x^3 + 3x^2 = x^2(x - 1)^2(x + 3) \\ Q(x) &= 2x^5 + 11x^4 + 11x^3 - 15x^2 - 9x = x(x + 3)^2(x - 1)(2x + 1) \\ \text{MCD}(P(x), Q(x)) &= x(x - 1)(x + 3) \end{aligned}$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^2(x - 1)^2(x + 3)^2(2x + 1)$$

Problema 4 (2 puntos) Simplificar:

$$1. \frac{3x^4 - x^3 - 17x^2 - 19x - 6}{x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9}$$

$$2. \frac{3x^4 + 11x^3 + 6x^2 - 12x - 8}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$$

Solución:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{3x^4 - x^3 - 17x^2 - 19x - 6}{x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9} = \frac{(x+1)(3x+2)}{(x-1)(x-3)} = \frac{3x^2 + 5x + 2}{x^2 - 4x + 3} \\ 2. \quad & \frac{3x^4 + 11x^3 + 6x^2 - 12x - 8}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} = \frac{(x+2)(3x+2)}{x-3} = \frac{3x^2 + 8x + 4}{x-3} \end{aligned}$$

Problema 5 (2 puntos) Resolver y simplificar:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{x+1}{x+5} - \frac{3x+2}{x^2+4x-5} = \frac{x-5}{x-1} \\ 2. \quad & \left(\frac{x+2}{x^2-3x-10} - 1 \right) : \left(\frac{1}{x-5} - \frac{x}{x+2} \right) \\ 3. \quad & \left(\frac{5x^4}{2(x+1)^2} \right) \cdot \left(\frac{6(x+1)}{5x^4} \right) \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{x+1}{x+5} - \frac{3x+2}{x^2+4x-5} = \frac{x-5}{x-1} \implies x = 22/3 \\ 2. \quad & \left(\frac{x+2}{x^2-3x-10} - 1 \right) : \left(\frac{1}{x-5} - \frac{x}{x+2} \right) = \frac{x^2-4x-12}{x^2-6x-2} \\ 3. \quad & \left(\frac{5x^4}{2(x+1)^2} \right) \cdot \left(\frac{6(x+1)}{5x^4} \right) = \frac{3}{x+1} \end{aligned}$$

Problema 6 (1 punto) Si $P(x) = (x+8)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

1. $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 + 8x = x(x+8)$
2. $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x+8)^2x^2(x-1)$

Solución:

$$Q(x) = x(x+8)(x-1) = x^3 + 7x^2 - 8x$$