

Examen de Matemáticas 4º de ESO.

Enero 2009

Problema 1 (1 punto) Sea $P(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 1$ obtenemos de resto 1, y es divisible por $x + 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(1) = 1 \implies a - b = -2 \\ P(-1) = 0 \implies a + b = -3 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -5/2 \\ b = -1/2 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x - 3$
2. $Q(x) = x^3 - 3x - 2$
3. $R(x) = 2x^4 - x^3 - 14x^2 + 19x - 6$

Solución:

1. $P(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x - 3 = (x + 1)^2(x - 1)(x + 3)$
2. $Q(x) = x^3 - 3x - 2 = (x - 2)(x + 1)^2$
3. $R(x) = 2x^4 - x^3 - 14x^2 + 19x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x + 3)(2x - 1)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

$$P(x) = x^4 - 3x^2 - 2x, \quad Q(x) = 2x^5 + 7x^4 + 7x^3 + 2x^2$$

Solución:

$$P(x) = x^4 - 3x^2 - 2x = x(x + 1)^2(x - 2)$$

$$Q(x) = 2x^5 + 7x^4 + 7x^3 + 2x^2 = x^2(x + 2)(x + 1)(2x + 1)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x + 1)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^2(x + 1)^2(x - 2)(x + 2)(2x + 1)$$

Problema 4 (2 puntos) Simplificar:

1. $\frac{3x^4 + 17x^3 + 31x^2 + 23x + 6}{x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 6x - 9}$
2. $\frac{2x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 8x - 4}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$

Solución:

1. $\frac{3x^4 + 17x^3 + 31x^2 + 23x + 6}{x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 6x - 9} = \frac{(x+1)(3x+2)}{(x-1)(x+3)} = \frac{3x^2 + 5x + 2}{x^2 + 2x - 3}$
2. $\frac{2x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 8x - 4}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{(x+2)(2x+1)}{(x-5)} = \frac{2x^2 + 5x + 2}{x-5}$

Problema 5 (2 puntos) Resolver y simplificar:

1.
$$\frac{x+2}{x-3} - \frac{2x+1}{x^2-x-6} = \frac{x+3}{x+2}$$
2.
$$\left(\frac{x+2}{x^2-5x-6} - 1 \right) : \left(\frac{1}{x-6} - \frac{x}{x+1} \right)$$
3.
$$\left(\frac{4(x+5)}{3x^4} \right) \cdot \left(\frac{9x^3}{10(x+5)} \right)$$

Solución:

1.
$$\frac{x+2}{x-3} - \frac{2x+1}{x^2-x-6} = \frac{x+3}{x+2} \Rightarrow x = -6$$
2.
$$\left(\frac{x+2}{x^2-5x-6} - 1 \right) : \left(\frac{1}{x-6} - \frac{x}{x+1} \right) = \frac{x^2-6x-8}{x^2-7x-1}$$
3.
$$\left(\frac{4(x+5)}{3x^4} \right) \cdot \left(\frac{9x^3}{10(x+5)} \right) = \frac{6}{5x}$$

Problema 6 (1 punto) Si $P(x) = (x+7)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

1. $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 + 7x = x(x+7)$
2. $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x+7)^2x^2(x-3)$

Solución:

$$Q(x) = x(x+7)(x-3) = x^3 + 4x^2 - 21x$$