

Examen de Matemáticas 4º de ESO.

Enero 2008

Problema 1 (1 punto) Sea $P(x) = x^3 + ax^2 + x + b$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 2$ obtenemos de resto 1, y es divisible por $x - 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(2) = 1 \implies 4a + b + 10 = 1 \\ P(1) = 0 \implies a + b + 2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -7/3 \\ b = 1/3 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = x^3 - \frac{7}{3}x^2 + x + \frac{1}{3}$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9$
2. $Q(x) = x^3 + 13x^2 + 35x - 49$
3. $R(x) = 2x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 8x - 4$

Solución:

1. $P(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = (x + 1)(x - 1)(x - 3)^2$
2. $Q(x) = x^3 + 13x^2 + 35x - 49 = (x - 1)(x + 7)^2$
3. $R(x) = 2x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 8x - 4 = (x - 2)^2(x + 1)(2x - 1)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 3x^2$, $Q(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 - 12x$
2. $P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + x$, $Q(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1$

Solución:

1. $P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 3x^2$, $Q(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 - 12x$

$$\begin{aligned} P(x) &= x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 3x^2 = x^2(x - 1)^2(x - 3) \\ Q(x) &= x^4 + x^3 - 8x^2 - 12x = x(x + 2)^2(x - 3) \end{aligned}$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x - 3)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^2(x - 1)^2(x + 2)^2(x - 3)$$

$$2. P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + x, Q(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1$$

$$P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + x = x(x+1)^2(2x+1)$$

$$Q(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1 = (x+1)(x-1)^2(2x+1)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = (x+1)(2x+1)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x(x+1)^2(x-1)^2(2x+1)$$

Problema 4 (2 puntos) Simplificar:

$$1. \frac{x^5 + 2x^4 - x^3 - 2x^2}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x}$$

$$2. \frac{x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2}{x^4 + 3x^3 + 2x^2}$$

Solución:

$$1. \frac{x^5 + 2x^4 - x^3 - 2x^2}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x} = x$$

$$2. \frac{x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2}{x^4 + 3x^3 + 2x^2} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$$

Problema 5 (2 puntos) Resolver y simplificar:

$$1. \frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+3x+2} + \frac{x-2}{x+2}$$

$$2. \left(\frac{x+2}{x^2+7x+10} - 1 \right) : \left(\frac{x+2}{x+5} - \frac{1}{x+2} \right)$$

$$3. \left(\frac{25(x-3)}{x} \right) \cdot \left(\frac{x^3}{10(x-3)} \right)$$

Solución:

$$1. \frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+3x+2} + \frac{x-2}{x+2} = \frac{2x^2-1}{x^2+2x-3}$$

$$2. \left(\frac{x+2}{x^2+7x+10} - 1 \right) : \left(\frac{x+2}{x+5} - \frac{1}{x+2} \right) = -\frac{x^2+6x+8}{x^2+3x-1}$$

3.

$$\left(\frac{25(x-3)}{x}\right) \cdot \left(\frac{x^3}{10(x-3)}\right) = \frac{5x^2}{2}$$

Problema 6 (1 punto) Si $P(x) = (x+2)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

1. $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 + 2x = x(x+2)$

2. $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x+2)^2x^2(x-7)$

Solución:

$$Q(x) = x(x+2)(x-7) = x^3 - 5x^2 - 14x$$