

Examen de Matemáticas 4º de ESO.

Diciembre 2006

Problema 1 (2 puntos) Sea $P(x) = ax^3 - 2x^2 + bx - 1$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 1$ obtenemos de resto 2, y es divisible por $x - 2$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(1) = 2 \implies a + b = 5 \\ P(2) = 0 \implies 8a + 2b = 9 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -1/6 \\ b = 31/6 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = -\frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + \frac{31}{6}x - 1$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$
2. $Q(x) = x^3 + 7x^2 + 8x - 16$
3. $R(x) = 2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2$

Solución:

1. $P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = (x + 1)(x - 1)(x - 2)^2$
2. $Q(x) = x^3 + 7x^2 + 8x - 16 = (x - 1)(x + 4)^2$
3. $R(x) = 2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = (x - 1)^2(x - 2)(2x - 1)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2$, $Q(x) = x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x$
2. $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 + x$, $Q(x) = 3x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 1$

Solución:

1. $P(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2$, $Q(x) = x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x$

$$\begin{aligned} P(x) &= x^5 - 3x^3 + 2x^2 = x^2(x - 1)^2(x + 2) \\ Q(x) &= x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x = x(x + 2)^2(x - 5) \end{aligned}$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x + 2)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^2(x - 1)^2(x + 2)^2(x - 5)$$

$$2. P(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 + x, Q(x) = 3x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 1$$

$$P(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 + x = x(x-1)^2(3x+1)$$

$$Q(x) = 3x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x-1)^2(3x+1)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = (x-1)^2(3x+1)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x(x+1)(x-1)^2(3x+1)$$

Problema 4 (2 puntos) Simplificar:

1. $\frac{2x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 8x + 4}{2x^4 - x^3 - 6x^2 + 7x - 2}$
2. $\frac{3x^4 + 11x^3 + 11x^2 + x - 2}{3x^4 + 14x^3 + 19x^2 + 4x - 4}$

Solución:

1. $\frac{2x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 8x + 4}{2x^4 - x^3 - 6x^2 + 7x - 2} = \frac{x+2}{x-1}$
2. $\frac{3x^4 + 11x^3 + 11x^2 + x - 2}{3x^4 + 14x^3 + 19x^2 + 4x - 4} = \frac{x+1}{x+2}$

Problema 5 (2 puntos) Si $P(x) = (x-7)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

1. $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 - 7x = x(x-7)$
2. $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x-7)^2x^2(x+1)$

Solución:

$$P(x) = x(x+1)(x-7) = x^3 - 6x^2 - 7x$$