

Examen de Matemáticas 4º de ESO.

Enero 2007

Problema 1 (1 puntos) Sea $P(x) = ax^4 - 2x^2 - bx - 1$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 2$ obtenemos de resto 1, y es divisible por $x - 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(2) = 1 \implies 16a - 2b - 10 = 0 \\ P(1) = 0 \implies a - b - 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2/7 \\ b = -19/7 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = \frac{2}{7}x^4 - 2x^2 - \frac{19}{7}x - 1$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$
2. $Q(x) = x^3 - 3x - 2$
3. $R(x) = 3x^3 + 2x^2 - 11x - 10$

Solución:

1. $P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = (x - 1)(x + 1)(x - 2)^2$
2. $Q(x) = x^3 - 3x - 2 = (x - 2)(x + 1)^2$
3. $R(x) = 3x^3 + 2x^2 - 11x - 10 = (x + 1)(x - 2)(3x + 5)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = x^4 - 3x^2 - 2x$, $Q(x) = x^5 - 3x^3 - 2x^2$
2. $P(x) = 3x^4 + 7x^3 + 5x^2 + x$, $Q(x) = 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x - 1$

Solución:

1. $P(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x$, $Q(x) = 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x - 1$

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - 3x^2 - 2x = x(x + 1)^2(x - 2) \\ Q(x) &= x^5 - 3x^3 - 2x^2 = x^2(x + 1)^2(x - 2) \end{aligned}$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x + 1)^2(x - 2)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^2(x + 1)^2(x - 2)$$

$$2. P(x) = 3x^4 + 7x^3 + 5x^2 + x, Q(x) = 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x - 1$$

$$P(x) = 3x^4 + 7x^3 + 5x^2 + x = x(x+1)^2(3x+1)$$

$$Q(x) = 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x - 1 = (x+1)^3(x-1)(3x+1)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = (x+1)^2(3x+1)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x(x+1)^3(x-1)(3x+1)$$

Problema 4 (2 puntos) Simplificar:

$$1. \frac{x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 2x^3}{x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 4x^2}$$

$$2. \frac{x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x}{x^5 - 7x^4 + 15x^3 - 9x^2}$$

Solución:

$$1. \frac{x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 2x^3}{x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 4x^2} = \frac{x^2 - x}{x - 2}$$

$$2. \frac{x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x}{x^5 - 7x^4 + 15x^3 - 9x^2} = \frac{x - 1}{x^2 - 3x}$$

Problema 5 (2 puntos) Resolver y simplificar:

$$1. \frac{x+5}{x+1} - \frac{x-1}{x^2-4x-5} + \frac{x}{x-5}$$

$$2. \left(\frac{x+2}{x^2+2x-3} - 1 \right) : \left(\frac{x+5}{x+3} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$3. \left(\frac{25(x+3)}{x^3} \right) \cdot \left(\frac{x^2}{5(x+3)} \right)$$

Solución:

$$1. \frac{x+5}{x+1} - \frac{x-1}{x^2-4x-5} + \frac{x}{x-5} = \frac{2(x^2-12)}{x^2-4x-5}$$

$$2. \left(\frac{x+2}{x^2+2x-3} - 1 \right) : \left(\frac{x+5}{x+3} - \frac{1}{x-1} \right) = -\frac{x^2+x-5}{x^2+3x-8}$$

$$3. \left(\frac{25(x+3)}{x^3} \right) \cdot \left(\frac{x^2}{5(x+3)} \right) = \frac{5}{x}$$

Problema 6 (1 puntos) Si $P(x) = (x-2)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

1. $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 - 2x = x(x-2)$

2. $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = 2(x-3)x^2(x-2)^2$

Solución:

$$Q(x) = 2x(x-3)(x-2) = 2x^3 - 10x^2 + 12x$$