

Examen de Matemáticas 4º de ESO.

Enero 2007

Problema 1 (1 puntos) Sea $P(x) = ax^4 - 2x^2 - bx - 1$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x + 1$ obtenemos de resto 3, y es divisible por $x - 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(-1) = 3 \implies a - b - 3 = 0 \\ P(1) = 0 \implies a + b - 6 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 9/2 \\ b = 3/2 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = \frac{9}{2}x^4 - 2x^2 + \frac{3}{2}x - 1$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$
2. $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$
3. $R(x) = 3x^3 - 14x^2 + 17x - 6$

Solución:

1. $P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 = (x - 2)(x - 1)(x + 1)^2$
2. $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = (x + 1)(x - 3)^2$
3. $R(x) = 3x^3 - 14x^2 + 17x - 6 = (x - 1)(x - 3)(3x - 2)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 2x$, $Q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$
2. $P(x) = 2x^4 - x^3 - 4x^2 + 3x$, $Q(x) = 2x^5 - x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 4x - 3$

Solución:

1. $P(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 2x$, $Q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$

$$\begin{aligned} P(x) &= x^5 + x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 2x = x(x + 1)^3(x - 2) \\ Q(x) &= x^5 - x^4 - x^3 + x^2 = x^2(x + 1)(x - 1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x + 1)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^2(x + 1)^3(x - 1)^2(x - 2)$$

$$2. P(x) = 2x^4 - x^3 - 4x^2 + 3x, Q(x) = 2x^5 - x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 4x - 3$$

$$P(x) = 2x^4 - x^3 - 4x^2 + 3x = x(x-1)^2(2x+3)$$

$$Q(x) = 2x^5 - x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 4x - 3 = (x-1)^3(x+1)(2x+3)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = (x-1)^2(2x+3)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x(x-1)^3(x+1)(2x+3)$$

Problema 4 (2 puntos) Simplificar:

$$1. \frac{x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x}{x^4 - 2x^3 + x^2}$$

$$2. \frac{x^5 + 3x^4 - 4x^2}{x^4 + 4x^3 + 4x^2}$$

Solución:

$$1. \frac{x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x}{x^4 - 2x^3 + x^2} = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x}$$

$$2. \frac{x^5 + 3x^4 - 4x^2}{x^4 + 4x^3 + 4x^2} = x - 1$$

Problema 5 (2 puntos) Resolver y simplificar:

$$1. \frac{x}{x+2} - \frac{x-1}{x^2+x-2} + \frac{x-2}{x-1}$$

$$2. \left(\frac{x+2}{x^2-3x-10} - 1 \right) : \left(\frac{x+2}{x-5} - \frac{1}{x+2} \right)$$

$$3. \left(\frac{4(x-1)}{x^2} \right) \cdot \left(\frac{x^3}{8(x-1)} \right)$$

Solución:

$$1. \frac{x}{x+2} - \frac{x-1}{x^2+x-2} + \frac{x-2}{x-1} = \frac{2x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2}$$

$$2. \left(\frac{x+2}{x^2-3x-10} - 1 \right) : \left(\frac{x+2}{x-5} - \frac{1}{x+2} \right) = \frac{-x^2 + 4x + 12}{x^2 + 3x + 9}$$

$$3. \left(\frac{4(x-1)}{x^2} \right) \cdot \left(\frac{x^3}{8(x-1)} \right) = \frac{x}{2}$$

Problema 6 (1 puntos) Si $P(x) = (x+1)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

1. $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 + x = x(x+1)$

2. $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = 2(x+1)^2x^2(x-1)$

Solución:

$$Q(x) = 2x(x+1)(x-1) = 2x^3 - 2x$$