

Examen de Matemáticas 4º de ESO

Junio 2006

Problema 1 Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 6x - 7}}$$

Solución:

$$(-\infty, -7) \cup [-5, 1) \cup (3, \infty)$$

Problema 2 Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 6x - 7}$$

Solución:

Corte con el eje OY : Hacemos $x = 0 \implies f(0) = 15/7 \implies (0, 15/7)$

Corte con el eje OX : Hacemos $f(x) = 0 \implies x^2 - 6x - 7 = 0 \implies (-5, 0)$ y $(3, 0)$

Problema 3 Dadas las funciones f y g calcular $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = x - 1$$

Solución:

$$1. \quad f \circ f(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

$$2. \quad g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

$$3. \quad f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x-1) = \frac{1}{x-1}$$

$$4. \quad g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x-1) = x-2$$

Problema 4 Calcular la función inversa de $f(x) = \frac{x-1}{2x-1}$

Solución:

$$y = \frac{x-1}{2x-1} \implies 2yx - y = x - 1 \implies 2yx - x = y - 1 \implies$$

$$\implies x = \frac{y-1}{2y-1} \implies f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2x-1}$$

Problema 5 Calcular la simetría de las siguientes funciones

1. $f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2}$

2. $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

3. $h(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$

Solución:

1. $f(-x) = \frac{(-x)^4 + 2}{(-x)^2} = f(x) \Rightarrow \text{PAR}$

2. $g(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{(-x)} = -g(x) \Rightarrow \text{IMPAR}$

3. $h(-x) = \frac{(-x)^2 + 2}{(-x) - 1} \neq \pm h(x) \Rightarrow \text{ni PAR ni Impar PAR}$

Problema 6 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x+6} \right)^{2x}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 5}}{2x + 3}$

3. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x+4} - 4}{x - 4}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - x^2 - 2}{x^2 - 1}$

Solución:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x+6} \right)^{2x} = e^{-20}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 5}}{2x + 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x+4} - 4}{x - 4} = \frac{3}{8}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - x^2 - 2}{x^2 - 1} = 5$

Problema 7 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x^2} & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ \frac{x+4}{x-1} & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

en los puntos $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

En $x = 1$ es continua, y en $x = 2$ es discontinua evitable.

Problema 8 Encontrar el valor de k que hace que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 2kx^2 - x & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 2k & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

$$2k - 1 = 1 - 2k \implies k = \frac{1}{2}$$