

Examen de Matemáticas 4º de ESO

Junio 2006

Problema 1 Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4x - 12}{x^2 - 10x + 21}}$$

Solución:

$$(-\infty, -2] \cup (3, 6] \cup (7, \infty)$$

Problema 2 Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 6x - 7}$$

Solución:

Corte con el eje OY : Hacemos $x = 0 \implies f(0) = 15/7 \implies (0, 15/7)$

Corte con el eje OX : Hacemos $f(x) = 0 \implies x^2 - 6x - 7 = 0 \implies (-5, 0)$ y $(3, 0)$

Problema 3 Dadas las funciones f y g calcular $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

$$f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

Solución:

$$1. f \circ f(x) = f(f(x)) = f((2x + 1)) = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3$$

$$2. g \circ f(x) = g(f(x)) = g((2x + 1)) = \frac{1}{2x + 1}$$

$$3. f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x} + 1 = \frac{2 + x}{x}$$

$$4. g \circ g(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

Problema 4 Calcular la función inversa de $f(x) = \frac{x + 3}{2x - 1}$

Solución:

$$y = \frac{x + 3}{2x - 1} \implies 2yx - y = x + 3 \implies 2yx - x = y + 3 \implies$$

$$\implies x = \frac{y + 3}{2y - 1} \implies f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{2x - 1}$$

Problema 5 Calcular la simetría de las siguientes funciones

1. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

2. $g(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3}$

3. $h(x) = \frac{x^2 + 2}{x^4 + 1}$

Solución:

1. $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -f(x) \Rightarrow \text{IMPAR}$

2. $g(-x) = \frac{(-x)^3 - 1}{(-x)^3} \neq \pm g(x) \Rightarrow \text{ni PAR ni Impar}$

3. $h(-x) = \frac{(-x)^2 + 2}{(-x)^4 + 1} = h(x) \Rightarrow \text{PAR}$

Problema 6 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 3}{2x} \right)^{x+1}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 5}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x - 6} - 3}{x - 3}$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + x + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x - 4}$

Solución:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 3}{2x} \right)^{x+1} = e^{-3/2}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 5}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = 2$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x - 6} - 3}{x - 3} = \frac{5}{6}$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + x + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x - 4} = \frac{1}{6}$

Problema 7 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x-1}{2} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 5 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{4x+2}{2x-1} & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

en los puntos $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

En $x = 0$ hay una discontinuidad inevitable(salto), y en $x = 1$ es discontinua evitable.

Problema 8 Encontrar el valor de k que hace que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + kx + 1 & \text{si } x < 1 \\ 1 - 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

$$2k + 1 = 1 - 2 \implies k = -1$$