

Examen de Matemáticas 4º de ESO.

Enero 2006

Problema 1 (2 puntos) Sea $P(x) = ax^3 - 2x^2 + bx - 1$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 1$ obtenemos de resto 1, y es divisible por $x + 2$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(1) = 1 \implies a + b - 3 = 1 \\ P(-2) = 0 \implies -8a - 2b - 9 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -17/6 \\ b = 41/6 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = -\frac{17}{6}x^3 - 2x^2 + \frac{41}{6}x - 1$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = 2x^4 - x^3 - 9x^2 + 4x + 4$
2. $Q(x) = 2x^4 + 7x^3 + x^2 - 16x - 12$
3. $R(x) = 3x^4 + 14x^3 + 4x^2 - 30x + 9$

Solución:

1. $P(x) = 2x^4 - x^3 - 9x^2 + 4x + 4 = (x - 1)(x + 2)(x - 2)(2x + 1)$
2. $Q(x) = 2x^4 + 7x^3 + x^2 - 16x - 12 = (x + 1)(x + 2)^2(2x - 3)$
3. $R(x) = 3x^4 + 14x^3 + 4x^2 - 30x + 9 = (x - 1)(x + 3)^2(3x - 1)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 32x - 12$, $Q(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18$
2. $P(x) = 3x^4 + 14x^3 + 19x^2 + 4x - 4$, $Q(x) = 2x^5 + 11x^4 + 23x^3 + 23x^2 + 11x + 2$

Solución:

1. $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 32x - 12$, $Q(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18$

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 32x - 12 = (x + 2)^2(x - 3)(2x + 1) \\ Q(x) &= x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18 = (x - 1)(x + 2)(x - 3)^2 \end{aligned}$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = (x - 3)(x + 2)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = (x - 1)(x + 2)^2(x - 3)^2(2x + 1)$$

$$2. P(x) = 3x^4 + 14x^3 + 19x^2 + 4x - 4, Q(x) = 2x^5 + 11x^4 + 23x^3 + 23x^2 + 11x + 2$$

$$P(x) = 3x^4 + 14x^3 + 19x^2 + 4x - 4 = (x+1)(x+2)^2(3x-1)$$

$$Q(x) = 2x^5 + 11x^4 + 23x^3 + 23x^2 + 11x + 2 = (x+1)^3(x+2)(2x+1)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = (x+1)(x+2)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = (x+1)^3(x+2)^2(2x+1)(3x-1)$$

Problema 4 (2 puntos) Simplificar:

$$1. \frac{3x^3 + 5x^2 - 3x - 5}{x^2 + 7x + 6}$$

$$2. \frac{2x^3 + x^2 - 4x - 3}{2x^2 + x - 6}$$

Solución:

$$1. \frac{3x^3 + 5x^2 - 3x - 5}{x^2 + 7x + 6} = \frac{3x^2 + 2x - 5}{x + 6}$$

$$2. \frac{2x^3 + x^2 - 4x - 3}{2x^2 + x - 6} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 2}$$

Problema 5 (1 puntos) Calcular:

$$1. \left(\frac{3x-1}{x+1} - \frac{x+2}{x-1} \right) : \left(\frac{x+3}{x-1} + \frac{2x+1}{x+1} \right)$$

$$2. \frac{8x}{(x+1)^2} \cdot \frac{3x+3}{4x}$$

Solución:

$$1. \left(\frac{3x-1}{x+1} - \frac{x+2}{x-1} \right) : \left(\frac{x+3}{x-1} + \frac{2x+1}{x+1} \right) = \frac{2x^2 - 7x - 1}{3x^2 + 3x + 2}$$

$$2. \frac{8x}{(x+1)^2} \cdot \frac{3x+3}{4x} = \frac{6x+6}{x^2+2x+1}$$

Problema 6 (1 puntos) Si $P(x) = 2(x-1)x^2$, busca un polinomio de cuarto grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

$$1. \text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 - x = x(x-1)$$

$$2. \text{mcm}(P(x); Q(x)) = 2(x-1)^2x^2(x+2)$$

Solución:

$$Q(x) = x(x-1)^2(x+2) = x^4 - 3x^2 + 2x$$