

Examen de Matemáticas 4ºESO

Junio 2005(final)

Problema 1 Resolver:

1. $\log(5x + 1) - \log x = 1 - \log(1 - x)$
2. $2^{2x-1} - 2^{x+1} + 2 = 0$
- 3.

$$\begin{cases} 2^{x-1} + 3^{y+1} = 3 \\ 2^{x+1} - 3^{y-1} = 1 \end{cases}$$

Solución:

1.

$$\frac{5x + 1}{x} = \frac{10}{1 - x} \implies 5x^2 + 6x - 1 = 0 \implies$$

$$x = -1,348331477, x = 0,1483314773$$

La solución negativa no es válida.

2.

$$\frac{t^2}{2} - 2t + 2 = 0 \implies t = 2 \implies x = 1$$

3.

$$\begin{cases} u/2 + 3v = 3 \\ 2u - v/3 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} u = 24/37 \\ v = 33/37 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -0,2712129366 \\ y = -0,04522777025 \end{cases}$$

Problema 2 Si $\tan \alpha = 3$ y $\alpha \in$ tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \implies \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{10}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \implies \sin \alpha = -3\sqrt{10}$$

Problema 3 Un paracaidista se va a lanzar desde lo alto de un rascacielos, y tu te encuentras abajo, no muy lejos, para disfrutar con su demostración de valor. Le observas preparar hasta los más mínimos detalles, con un ángulo de 81° , y luego le ves lanzarse al vacío sin el menor asomo de miedo. Todo el mundo contiene la respiración, y por fin despliega el paracaídas, en ese momento tomas aire mientras le observas con un ángulo de 78° . Han sido 30 metros de caída libre, pero no todo va a ser tan espectacular. Allí estaba el pesado de mi profesor de matemáticas para preguntarme por la altura del edificio y por la distancia que nos separaba de él.

Solución:

$$\begin{cases} \tan 81^\circ = \frac{30+x}{y} \\ \tan 78^\circ = \frac{x}{y} \end{cases} \implies \begin{cases} x = 87,71178037 \\ y = 18,64371445 \end{cases}$$

La altura del edificio será de 117,7118 metros, y estamos a 18,6437 metros de él.

Problema 4 Calcular el dominio de la función $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 2x - 3}}$

Solución:

$$(-\infty, -3] \cup (-1, 2] \cup (3, \infty)$$

Problema 5 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+1}{5x} \right)^{2x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 8}$
3. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5x-4} - 4}{x-4}$

Solución:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+1}{5x} \right)^{2x} = e^{2/5}$
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 8} = \frac{5}{6}$
3. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5x-4} - 4}{x-4} = \frac{5}{8}$

Problema 6 Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 4x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3x-2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

En $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (4x + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \end{cases} \implies \text{Discontinua inevitable}$$

En $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = 2 \\ f(1) \text{ no definida} \end{cases} \implies \text{Discontinua evitable}$$

En $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 2x = 4 \\ f(2) = 4 \end{cases} \implies \text{Continua}$$