

Examen de Matemáticas 4º de ESO
Mayo 2005

Problema 1 Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}}$$

Solución:

$$(1, 2] \cup [3, \infty)$$

Problema 2 Calcular la simetría de las siguientes funciones

1. $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^6 + x^2 - 1}$

2. $g(x) = \frac{3x^5}{x^2 + 4}$

3. $h(x) = \frac{2x^2 + x}{x - 1}$

Solución:

1. $f(-x) = \frac{(-x)^2 - 3}{(-x)^6 + (-x)^2 - 1} = f(x) \implies \text{PAR}$

2. $g(-x) = \frac{3(-x)^5}{(-x)^2 + 4} = -g(x) \implies \text{IMPAR}$

3. $h(-x) = \frac{2(-x)^2 + (-x)}{(-x) - 1} \implies \text{ni PAR ni IMPAR}$

Problema 3 Dadas las funciones f y g calcular $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

$$f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}, \quad g(x) = x + 1$$

Solución:

1. $g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right) = \frac{x - 1}{x + 1} + 1 = \frac{2x}{x + 1}$

2. $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = \frac{(x + 1) - 1}{(x + 1) + 1} = \frac{x}{x + 2}$

3. $f \circ f(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right) = \frac{\frac{x - 1}{x + 1} - 1}{\frac{x - 1}{x + 1} + 1} = -\frac{1}{x}$

$$4. g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x+1) = (x+1) + 1 = x+2$$

Problema 4 Calcular la función inversa de $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

Solución:

$$\begin{aligned} y = \frac{2x+3}{x-1} &\implies yx - y = 2x + 3 \implies yx - 2x = 3 + y \implies \\ &\implies x = \frac{y+3}{y-2} \implies f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-2} \end{aligned}$$

Problema 5 Calcular los siguientes límites

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^3 + 2x - 1)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^2 + x - 1)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{x^3 + x^2 + 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - 3x + 2}{x^5 - x^4 + 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x - 1}{2x^3 + 1}$$

Solución:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^3 + 2x - 1) = \infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^2 + x - 1) = -\infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{x^3 + x^2 + 1} = 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - 3x + 2}{x^5 - x^4 + 1} = \infty$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x - 1}{2x^3 + 1} = \frac{3}{2}$$

Problema 6 Calcular los siguientes límites

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3 + 2x^2 - 1}{2x^3 + 3} \right)^{3x^2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^5 - 3x - 1}{3x^5 + 1} \right)^{x^3/2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{2x^2 + 5} \right)^{x^2/2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 3}{2x - 1} \right)^{3x}$$

Solución:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3 + 2x^2 - 1}{2x^3 + 3} \right)^{3x^2} = \infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^5 - 3x - 1}{3x^5 + 1} \right)^{x^3/2} = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{2x^2 + 5} \right)^{x^2/2} = [1^\infty] = e^\lambda = e^{-5/4}$$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2} \left(\frac{2x^2}{2x^2 + 5} - 1 \right) = -\frac{5}{4}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 3}{2x - 1} \right)^{3x} = [1^\infty] = e^\lambda = e^{-3}$$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x \left(\frac{2x - 3}{2x - 1} - 1 \right) = -3$$

Problema 7 Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 20}{x^3 + 2}$$

Solución:

Corte con el eje OY : Hacemos $x = 0 \implies f(0) = -10 \implies (0, -10)$

Corte con el eje OX : Hacemos $f(x) = 0 \implies x^2 + x - 20 \implies (-5, 0)$ y $(4, 0)$