

Examen de Matemáticas 4º de ESO
Mayo 2005

Problema 1 Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x - 6}{x - 1}}$$

Solución:

$$[-3, 1) \cup [2, \infty)$$

Problema 2 Calcular la simetría de las siguientes funciones

1. $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$

2. $g(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 1}$

3. $h(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 2}$

Solución:

1. $f(-x) = \frac{(-x)^4 - 2(-x)^2 + 1}{(-x)^2 - 1} = f(x) \implies \text{PAR}$

2. $g(-x) = \frac{(-x)^3}{3(-x)^2 + 1} = -g(x) \implies \text{IMPAR}$

3. $h(-x) = \frac{2(-x) - 1}{(-x)^2 + 2} \implies \text{ni PAR ni IMPAR}$

Problema 3 Dadas las funciones f y g calcular $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}, \quad g(x) = x - 1$$

Solución:

1. $g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2x}{x-1}\right) = \frac{2x}{x-1} - 1 = \frac{x+1}{x-1}$

2. $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x-1) = \frac{2(x-1)}{(x-1)-1} = \frac{2(x-1)}{x-2}$

3. $f \circ f(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{2x}{x-1}\right) = \frac{2\frac{2x}{x-1}}{\left(\frac{2x}{x-1}\right)-1} = \frac{4x}{x+1}$

4. $g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x-1) = (x-1) - 1 = x-2$

Problema 4 Calcular la función inversa de $f(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$

Solución:

$$\begin{aligned}y = \frac{3x-1}{2x+1} &\implies 2yx + y = 3x - 1 \implies 2yx - 3x = -(y+1) \implies \\ &\implies x = -\frac{y+1}{2y-3} \implies f^{-1}(x) = -\frac{x+1}{2x-3}\end{aligned}$$

Problema 5 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 - 3x + 1)$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^3 + 2x - 1)$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x^2 + 2x - 1}$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^3 - 3}{x^3 + 1}$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 2}$

Solución:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 - 3x + 1) = \infty$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^3 + 2x - 1) = -\infty$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x^2 + 2x - 1} = 0$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^3 - 3}{x^3 + 1} = \infty$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 2} = \frac{4}{3}$

Problema 6 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-2}{x} \right)^{x^2}$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x - 1}{2x^2 - 1} \right)^{3x^2}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right)^{x^2/2}$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{2x^2 - 2} \right)^{x^2}$$

Solución:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 2}{x} \right)^{x^2} = \infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x - 1}{2x^2 - 1} \right)^{3x^2} = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right)^{x^2/2} = [1^\infty] = e^\lambda = e^{-1/2}$$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} - 1 \right) = -\frac{1}{2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{2x^2 - 2} \right)^{x^2} = [1^\infty] = e^\lambda = e^{3/2}$$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\frac{2x^2 + 1}{2x^2 - 2} - 1 \right) = \frac{3}{2}$$

Problema 7 Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3}$$

Solución:

Corte con el eje OY : Hacemos $x = 0 \implies f(0) = 1 \implies (0, 1)$

Corte con el eje OX : Hacemos $f(x) = 0 \implies x^2 - 2x - 3 = 0 \implies (-1, 0)$ y $(3, 0)$