

Examen de Matemáticas 4º de ESO.

Enero 2005

Problema 1 (2 puntos) Sea $P(x) = ax^3 - 2x^2 + bx - 1$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 3$ obtenemos de resto -10 , y es divisible por $x - 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(1) = 0 \implies a + b - 3 = 0 \\ P(3) = -10 \implies 27a + 3b - 19 = -10 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = -2x^2 + 3x - 1$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9$
2. $Q(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 25$
3. $R(x) = 3x^4 + 14x^3 + 16x^2 + 2x - 3$

Solución:

1. $P(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = (x - 3)^2(x - 1)(x + 1)$
2. $Q(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 25 = (x - 5)^2(x + 1)$
3. $R(x) = 3x^4 + 14x^3 + 16x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2(x + 3)(3x - 1)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 5x$, $Q(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$
2. $P(x) = 3x^4 + 7x^3 + 5x^2 + x$, $Q(x) = 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x - 1$

Solución:

1. $P(x) = x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 5x$, $Q(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 5x = x(x - 1)^2(x - 5) \\ Q(x) &= x^5 + x^4 - x^3 - x^2 = x^2(x + 1)^2(x - 1) \end{aligned}$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x - 1)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^2(x + 1)^2(x - 1)^2(x - 5)$$

$$2. P(x) = 3x^4 + 7x^3 + 5x^2 + x, Q(x) = 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x - 1$$

$$P(x) = 3x^4 + 7x^3 + 5x^2 + x = x(x+1)^2(3x+1)$$

$$Q(x) = 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x - 1 = (x+1)^3(x-1)(3x+1)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = (x+1)^2(3x+1)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x(x+1)^3(x-1)(3x+1)$$

Problema 4 (2 puntos) Calcular:

1. $\frac{x}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} = \frac{x}{x+2}$
2. $\left(\frac{3x}{x+1} + \frac{x}{x-1}\right) : \left(\frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1}\right)$
3. $\frac{8x}{x+3} \cdot \frac{3}{2x}$

Solución:

1. $\frac{x}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} = \frac{x}{x+2} \implies x = \frac{1}{4}$
2. $\left(\frac{3x}{x+1} + \frac{x}{x-1}\right) : \left(\frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1}\right) = \frac{2(2x-1)}{3x-1}$
3. $\frac{8x}{x+3} \cdot \frac{3}{2x} = \frac{12}{x+3}$

Problema 5 (2 puntos) Si $P(x) = (x-7)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

1. $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 - 7x = x(x-7)$
2. $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x-7)^2x^2(x+1)$

Solución:

$$P(x) = x(x+1)(x-7) = x^3 - 6x^2 - 7x$$