

Examen de Matemáticas 4º de ESO.

Enero 2005

Problema 1 (2 puntos) Sea $P(x) = ax^3 - bx^2 + x + 2$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 2$ obtenemos de resto 6, y es divisible por $x + 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(-1) = 0 \implies -a - b = -1 \\ P(2) = 6 \implies 8a - 4b = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 1/2 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 2$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3$
2. $Q(x) = x^3 + 9x^2 + 15x - 25$
3. $R(x) = 2x^4 + 9x^3 + 9x^2 - x - 3$

Solución:

1. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2(x - 1)(x - 3)$
2. $Q(x) = x^3 + 9x^2 + 15x - 25 = (x + 5)^2(x - 1)$
3. $R(x) = 2x^4 + 9x^3 + 9x^2 - x - 3 = (x + 1)^2(x + 3)(2x - 1)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - 3x$, $Q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$
2. $P(x) = 3x^5 - 10x^4 + 12x^3 - 6x^2 + x$, $Q(x) = 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x - 1$

Solución:

1. $x^4 - x^3 - 5x^2 - 3x$, $Q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - x^3 - 5x^2 - 3x = x(x + 1)^2(x - 3) \\ Q(x) &= x^5 - x^4 - x^3 + x^2 = x^2(x - 1)^2(x + 1) \end{aligned}$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x + 1)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^2(x + 1)^2(x - 1)^2(x - 3)$$

$$2. P(x) = 3x^5 - 10x^4 + 12x^3 - 6x^2 + x, Q(x) = 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x - 1$$

$$P(x) = 3x^5 - 10x^4 + 12x^3 - 6x^2 + x = x(x-1)^3(3x-1)$$

$$Q(x) = 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x - 1 = (x-1)^2(x+1)(3x-1)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = (x-1)^2(3x-1)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x(x-1)^3(x+1)(3x-1)$$

Problema 4 (2 puntos) Calcular:

1. $\frac{2x}{x-2} + \frac{1}{x^2-4} = \frac{x}{x+2}$
2. $\left(\frac{3x}{x+1} + \frac{x}{x-1}\right) : \left(\frac{x}{x-1} - \frac{2x}{x+1}\right)$
3. $\frac{5x}{x-2} \cdot \frac{2}{x}$

Solución:

1. $\frac{2x}{x-2} + \frac{1}{x^2-4} = \frac{x}{x+2} \implies x = -3 - 2\sqrt{2} = -5,8284; x = -3 + 2\sqrt{2} = -0,1715$
2. $\left(\frac{3x}{x+1} + \frac{x}{x-1}\right) : \left(\frac{x}{x-1} - \frac{2x}{x+1}\right) = \frac{2(2x-1)}{3-x}$
3. $\frac{5x}{x-2} \cdot \frac{2}{x} = \frac{10}{x-2}$

Problema 5 (2 puntos) Si $P(x) = (x-6)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

1. $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 - 6x = x(x-6)$
2. $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x-6)^2x^2(x+5)$

Solución:

$$P(x) = x(x+5)(x-6) = x^3 - x^2 - 30x$$