Geometría 2º de Bachillerato(Ciencias de la Naturaleza)

Vectores

Sean $\overrightarrow{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\overrightarrow{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\overrightarrow{w}=(w_1,w_2,w_3)$

- $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente independientes si $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$. En caso contrario uno de los vectores es combinación lineal de los otros.
- Producto escalar: $\begin{cases} \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3 \\ \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{u}|\cos\alpha \end{cases}$
- Producto vectorial: $\overrightarrow{t}=\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$; el vector $\overrightarrow{t}$ es perpendicular a los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$. Se cumple $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|=|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\sin\alpha$. $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|=S$ donde S es el área del paralelogramo que describen los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ por paralelelismo. (El área de un triángulo será $\dfrac{1}{2}S$)
- Producto mixto: $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}=V$, donde V es el volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores por paralelismo. El volumen de un paralelepípedo es también $V=S_{\text{base}}\cdot$ Altura. Para calcular el volumen de un tetraedro tenemos dos fórmulas: $V_{\text{tetraedro}}=\frac{1}{6}V_{\text{paralelepípedo}}$ y $V_{\text{tetraedro}}=\frac{1}{3}S_{\text{base}}\cdot$ Altura

Ecuaciones

Sea la recta $r:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(u_1,u_2,u_3) \\ P_r(a,b,c) \end{cases}$

Vectorial	Paramétrica	Continua	General
$\overrightarrow{x}=P_r+\lambda\overrightarrow{u_r}$	$\begin{cases} x=a+\lambda u_1 \\ y=b+\lambda u_2 \\ z=c+\lambda u_3 \end{cases}$	$\dfrac{x-a}{u_1}=\dfrac{y-b}{u_2}=\dfrac{z-c}{u_3}$	No hay

Sea el plano $\pi:\begin{cases} \overrightarrow{u}=(u_1,u_2,u_3) \\ \overrightarrow{v}=(v_1,v_2,v_3) \\ P(a,b,c) \end{cases}$

Vectorial	Paramétrica	Continua	General
$\overrightarrow{x}=P+\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}$	$\begin{cases} x=a+\lambda u_1+\mu v_1 \\ y=b+\lambda u_2+\mu v_2 \\ z=c+\lambda u_3+\mu v_3 \end{cases}$	No hay	$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x-a \\ u_2 & v_2 & y-b \\ u_3 & v_3 & z-c \end{vmatrix}=0$ $Ax+By+Cz+D=0$

Ideas:

- Tres puntos $P_1(a_1,b_1,c_1)$, $P_2(a_2,b_2,c_2)$ y $P_3(a_3,b_3,c_3)$ no están alineados si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$
- El vector $\overrightarrow{u_r}$ y la recta r tienen la misma dirección.
- El vector $\overrightarrow{u_\pi} = (A,B,C)$ y el plano $\pi : Ax+By+Cz+D=0$ son perpendiculares.

Posiciones de rectas y planos:

- Dos rectas: $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{cases}$, $s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} \\ P_s \end{cases}$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$. Construimos la matriz $A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \\ \overrightarrow{P_rP_s} \end{pmatrix}$.
  Si Rango$(A) = 3 \Longrightarrow$ Se cruzan.
  Si Rango$(A) = 2$: $\begin{cases} \text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow \text{Se cortan} \\ \text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 1 \Longrightarrow \text{Son paralelas} \end{cases}$.
  Si Rango$(A) = 1 \Longrightarrow$ Coinciden.
- De una recta $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{cases}$ y un plano $\pi : Ax+By+Cz+D=0$: Se pasa la recta a paramétricas y se sustituye en el plano: $A(a+\lambda u_1)+B(b+\lambda u_2)+C(c+\lambda u_3)+D=0$ Al resolver esta ecuación pueden ocurrir tres casos:
  1. Encuentro un valor de $\lambda = k \Longrightarrow$ se cortan. El punto de corte se encuentra sustituyendo el valor de λ en la ecuación paramétrica de la recta.
  2. Encuentro infinitos valores de $\lambda \Longrightarrow$ la recta se encuentra contenida en el plano. (La solución de la ecuación queda de la forma $0 = 0$)
  3. No existen valores de $\lambda \Longrightarrow$ la recta es paralela al plano. (La solución de la ecuación queda de la forma $7 = 0$)
- De dos planos $\pi_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1$ y $\pi_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2$. Puede ocurrir:
  1. $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ o $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ o $\dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ en cualquiera de ellos los dos planos se cortan en una recta.

2. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$ en este caso son paralelos.
3. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$ en este caso coinciden.

- De tres planos $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2$ y $\pi_3 : A_3x + B_3y + C_3z + D_3$. Se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y se discute por el teorema de Roché. Si el sistema tiene solución única los tres planos se cortan en un punto. En el caso de que tenga infinitas soluciones se analizan los planos dos a dos. En el caso de que no tenga soluciones se analizan los planos dos a dos.

Fórmulas:

- Distancia entre dos puntos: $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$
- Distancia de un punto a una recta: $d(P, r) = \dfrac{|\overrightarrow{PP_r} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}$
- Distancia de un punto a un plano: $d(P, \pi) = \dfrac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
- Distancia entre dos rectas que se cruzan: $d(r, s) = \dfrac{|[\overrightarrow{PP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|}$
- Ángulo entre dos vectores: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|}$
- Ángulo entre dos rectas: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_r}|}$
- Ángulo entre dos planos: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}}}{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}||\overrightarrow{u_{\pi_2}}|}$
- Ángulo entre una recta y un plano: $\sin\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_\pi}|}$
- Punto medio de P y Q es $A = \dfrac{P + Q}{2}$
- Punto simétrico de P respecto de Q es $A = 2Q - P$
- Esfera: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ es una esfera de centro $C(a, b, c)$ y radio$= r$.

Ideas métricas:

- Punto simétrico de P respecto al plano π:
    - Calculo r que pasa por P perpendicular a π, $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi}$.

- Calculo el punto de corte P' de r con π.
- $P'' = 2P' - P$

- Punto simétrico de P respecto a la recta r:
  - Calculo π perpendicular a r que contenga a P, $\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r}$.
  - Calculo el punto de corte P' de r con π.
  - $P'' = 2P' - P$

- Recta perpendicular a otras dos que se cruzan (y las corta): Se calcula como intersección de los dos planos $\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} \\ \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{array} \right. , \quad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} \\ \overrightarrow{u_s} \\ P_s \end{array} \right.$ donde $\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$

- Recta que pasa por un punto P y corta a dos rectas que se cruzan: Se calcula como intersección de los dos planos

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_rP} \\ \overrightarrow{u_r} \\ P_r \text{ o } P \end{array} \right. , \quad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_sP} \\ \overrightarrow{u_s} \\ P_s \text{ o } P \end{array} \right.$$

- Recta paralela a un plano π y que corta a otra recta t que a su vez corta a π y que pas por el punto P:
  - Calculo un plano π' paralelo a π que contenga a P.
  - Calculo P' punto de corte de π' y t.
  - La recta buscada es la que une los puntos P y P'.

- Ecuación de la circunferencia resultante de cortar una esfera con un plano (vertical u horizontal). Si el plano es $z = k$, se sutituye en la ecuación y resulta una circunferencia. Tened cuidado, el centro de esta circunferencia es (a, b, k).

- Plano tangente a una esfera de centro C en el punto de tangencia P: $\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{CP} \\ \text{Contiene a } P \end{array} \right.$

- Encontrar los puntos de una recta r que están a una distancia λ de un punto P: Se calcula la ecuación de una esfera de centro P y radio λ. Se buscan los puntos de corte de esta esfera y la recta r.

- Plano Mediador π entre dos puntos P_1 y P_2: Es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que cumplen $d(P, P_1) = d(P, P_2)$.

- Plano Bisector π entre dos planos π_1 y π_2:Es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que cumplen $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$.