

## Álgebra 2º de Bachillerato(Ciencias de la Naturaleza)

### Matrices

matriz $A$	dimensión	Transpuesta $A^T$	dimensión
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$m \times n$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$	$n \times m$
matriz cuadrada	orden	identidad	matriz triangular
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$	$n$	$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

- **Suma:** Tienen que tener la misma dimensión y se suman término a término.
- **Producto de una matriz por un número real:** Se multiplican todos los términos de la matriz por ese número.
- **Producto de dos matrices:** Se desarrolla multiplicando matriz fila por matriz columna de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

El número de columnas de la primera matriz tiene que ser igual al número de filas de la segunda.

### Determinante de una matriz

- La matriz tiene que ser cuadrada

1. De orden dos:  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

2. De orden tres: (Regla de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

- Propiedades:

1. 
$$\begin{vmatrix} a+m & b+n & c+p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n & p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$
2.  $|A^T| = |A|$
3.  $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
4. Si cambiamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo.
5. Si una fila o una columna tiene todos sus elementos igual a cero el determinante vale cero.
6. Si dos filas o dos columnas son iguales el determinante vale cero.
7. Si dos filas o dos columnas son proporcionales el determinante vale cero.
8. Si una fila o columna es combinación lineal de las otras el determinante vale cero.
9. 
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+a & h+b & i+c \end{vmatrix},$$

es decir, si a una fila (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.
10. 
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ xa & xb & xc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+xa & h+xb & i+xc \end{vmatrix},$$

es decir, si a una fila multiplicada por un número (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

### Matriz Adjunta:

- Adjunto del elemento  $a_{ij}$  de una matriz es el valor del determinante resultante de eliminar la fila  $i$  y la columna  $j$  multiplicado por  $(-1)^{i+j}$  y se le denomina  $A_{ij}$ .
- Matriz adjunta.  $Adj(A) = (A_{ij})$

### Cálculo del determinante de una matriz por adjuntos:

Se elige una fila o una columna (cualquiera es válida, siempre será mejor aquella que tenga más ceros), escojo la primera fila para el ejemplo:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

### Inversa de una matriz:

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^T}{|A|}$$

**Una matriz tiene inversa si, y sólo si,  $|A| \neq 0$ .**

A las matrices que tienen inversa se la llama **Regulares** y a las que no la tienen se las llama **Singulares**.

### **Rango de una matriz**

Es el número de filas linealmente independientes.

De forma práctica se calcula por determinantes. Si tenemos una matriz de dimensión  $3 \times 4$  cogemos matrices cuadradas que tengan el mayor orden posible, tendremos cuatro de orden 3, si el determinante de alguna de ellas es distinto de cero el rango es 3 y habremos terminado, si por el contrario todas son cero el rango ya no puede ser 3 y buscaremos menores de orden 2. Si alguno de estos menores es distinto de cero ya habremos terminado, y el rango será 2, si por el contrario todos son cero tendremos que buscar menores de orden 1, y en el momento que encontremos alguno distinto de cero el rango será 1.

### **Sistema de Ecuaciones lineales**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots = \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Matriz del sistema:  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Matriz ampliada:  $\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$

Matriz de variables:  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},$

Matriz de términos independientes:  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Se trata de una ecuación matricial:  $AX = B$ .

Si  $|A| \neq 0 \implies \exists A^{-1}$  y en este caso el sistema se podrá resolver de la siguiente manera  $X = A^{-1}B$

Antes de resolver un sistema estudiar si hay ecuaciones nulas, iguales o proporcionales, para el estudio del rango.

### Teorema de Rouché

- Si  $\text{Rango}(\bar{A}) = \text{Rango}(A) = n^\circ$  de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Determinado (SCD). Y tiene solución única.
- Si  $\text{Rango}(\bar{A}) = \text{Rango}(A) < n^\circ$  de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Indeterminado (SCI). Y tiene infinitas soluciones.
- Si  $\text{Rango}(\bar{A}) \neq \text{Rango}(A)$  se trata de un Sistema Incompatible. Y no tiene solución.

**Sistema homogéneos** Son aquellos en los que  $b_i = 0$ , estos siempre tienen solución  $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$  solución trivial, pero en el caso de que de que  $\text{Rango}(A) < m$  ( $n^\circ$  de incógnitas) estaríamos ante infinitas soluciones, es decir:

- Si  $\text{Rango}(A) = m$  ( $n^\circ$  de incógnitas)  $\implies$  SCD  $\implies x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$  solución trivial.
- Si  $\text{Rango}(A) < m$  ( $n^\circ$  de incógnitas)  $\implies$  SCI  $\implies$  infinitas soluciones.

### Regla de Cramer

Sea  $\bar{A} = (C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, B)$ , entonces sustituimos la columna  $B$  en la matriz  $\bar{A}$  por cada una de las columnas y tendremos:

$$x_1 = \frac{|B, C_2, C_3, \dots, C_n|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|C_1, B, C_3, \dots, C_n|}{|A|}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{|C_1, C_2, \dots, B|}{|A|}$$