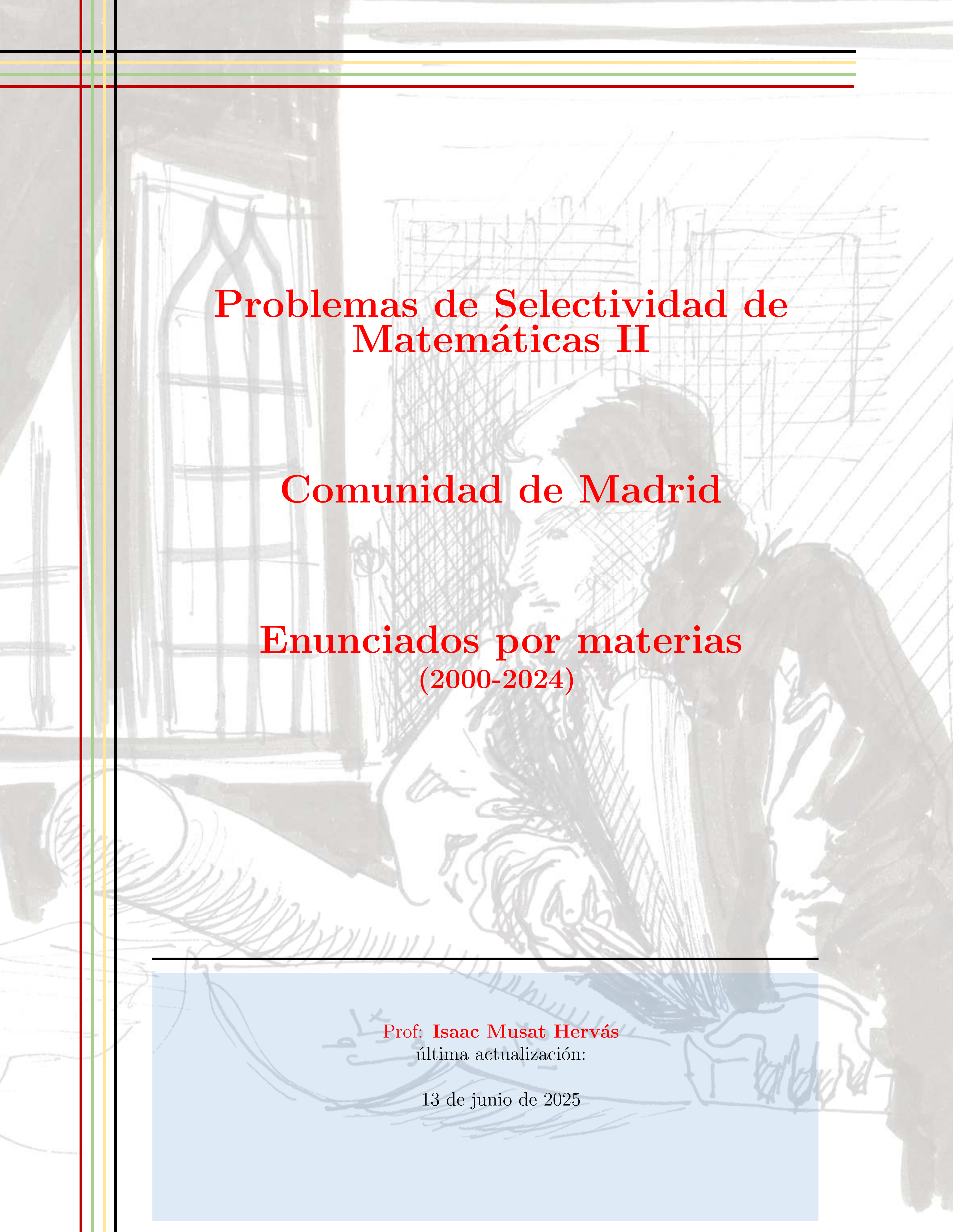


Problemas de Selectividad de Matemáticas II

Comunidad de Madrid

Enunciados por materias

(2000-2024)

Prof: **Isaac Musat Hervás**

última actualización:

13 de junio de 2025

Índice general

Capítulo 1

Álgebra

1.1. Año 2000

1.1.1. Modelo

Opción A

Problema 1.1.1 *(3 puntos)* Sea el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -x+ & \lambda y+ & 2z = & \lambda \\ 2x+ & \lambda y- & z = & 2 \\ \lambda x- & y+ & 2z = & \lambda \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Discutir la compatibilidad del sistema según los diversos valores de λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

c) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = 2$.

Opción B

Problema 1.1.2 *(3 puntos)*

a) (1 punto) Encontrar los valores de λ para los que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es invertible.

b) (1 punto) Para $\lambda = 2$, hallar la inversa de A y comprobar el resultado.

c) (1 punto) Resolver el sistema

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para $\lambda = 1$

1.1.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.1.3 *(3 puntos)* Para una matriz cuadrada, se define su traza como la suma de los elementos de la diagonal principal. En lo que sigue, A y B son matrices cuadradas 2×2.

a) (0,5 puntos) Comprobar que se verifica:

$$Traza(A + B) = Traza(A) + Traza(B)$$

b) (1 punto) Comprobar que

$$Traza(A \cdot B) = Traza(B \cdot A)$$

c) (1 punto) Utilizando los resultados anteriores, demostrar que es imposible tener $AB - BA = I$, donde I denota la matriz identidad.

d) (0,5 puntos) Encontrar dos matrices A y B para las que:

$$Traza(AB) \neq Traza(A) \cdot Traza(B)$$

Opción B

Problema 1.1.4 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrl} ax+ & y+ & z = & (a-1)(a+2) \\ x+ & ay+ & z = & (a-1)^2(a+2) \\ x+ & y+ & az = & (a-1)^3(a+2) \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Comprobar que es compatible para todo valor de a.

b) (1 punto) Describir en términos geométricos el conjunto de soluciones para $a = 1$ y para $a = -2$.

c) (1 punto) Resolverlo para $a = -2$.

1.1.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.1.5 *(3 puntos)* Considerar el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & z = & 1 \\ (\lambda-1)x+ & y+ & z = & \lambda \\ x+ & (\lambda-1)y- & z = & 0 \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro λ.

b) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 0$.

c) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 3$.

Opción B

Problema 1.1.6 *(3 puntos)*

a) (2 puntos) Discutir en función de los valores de k y resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 5z = & 0\\ 2x & - & kz = & 0\\ x- & y+ & z = & 0 \end{array}\right.$$

b) (1 punto) Discutir en función de los valores de λ y resolver en los casos de compatibilidad del sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 5z = & 0\\ 2x & - & 3z = & 0\\ x- & y+ & z = & 0\\ x+ & 2y+ & 2\lambda z = & \lambda \end{array}\right.$$

1.2. Año 2001

1.2.1. Modelo

Opción A

Problema 1.2.1 *(2 puntos)* Comprobar que las siguientes matrices tienen el mismo determinante

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1+a & 1\\ 1 & 1-a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1 \end{vmatrix}\\ & \\ \begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1+b & 1\\ 1 & 1-b \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Problema 1.2.2 *(2 puntos)* Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3\\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) calcular A^{-1}

b) Resolver el sistema $A \cdot \left[\begin{pmatrix} 5\\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x\\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 21\\ 24 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.2.3 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos) Discutir en función de los valores de k y resolver cuando tenga más de una solución, el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y+ & 2z = 3\\ 2x- & y+ & kz = 9\\ x- & y- & 6z = 5 \end{array}\right.$$

b) (1,5 puntos) Si el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & k & 9\\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ es 2, determinar una combinación lineal nula de los vectores fila $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ y $\overrightarrow{F_3}$, así como una combinación lineal nula de los vectores columna $\overrightarrow{C_1}$, $\overrightarrow{C_2}$, $\overrightarrow{C_3}$ y $\overrightarrow{C_4}$.

1.2.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.2.4 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z= & 2\\ 2x- & y+ & 3z= & 2\\ 5x- & y+ & az= & 6\end{array}\right.$$

a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Problema 1.2.5 *(2 puntos)* Sea k un número natural y sean las matrices:

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right),\quad B=\left(\begin{array}{r} 0\\ 1\\ -1\end{array}\right),\quad C=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2\end{array}\right).$$

a) (1 punto) Calcular A^k.

b) (1 punto) Hallar la matriz X que verifica la ecuación $A^kX=BC$.

Opción B

Problema 1.2.6 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda\\ 1 & \lambda & 1\\ \lambda & 1 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x\\ y\\ z\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} \lambda\\ 1\\ 1\\ 1\end{array}\right)$$

a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real λ.

b) (1 punto) Resolverlo para $\lambda=-3$.

c) (1 punto) Resolverlo para $\lambda=1$.

1.2.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.2.7 *(3 puntos)* Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} ax+ & y+ & 4z= & 1\\ -x+ & ay- & 2z= & 1\\ & y+ & z= & a\end{array}\right.$$

a) (1 punto) Discutir el sistema según los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $a=2$.

c) (1 punto) Resolver el sistema para $a=1$.

Opción B

Problema 1.2.8 *(3 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1 punto) Comprobar que verifica la igualdad $A^3 + I = O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula.

b) (1 punto) Justificar que A tiene inversa y obtener A^{-1}.

c) (1 punto) Calcular A^{100}.

(Septiembre 2001 - Opción B)

1.3. Año 2002

1.3.1. Modelo

Opción A

Problema 1.3.1 *(3 puntos)* Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 + 2A = I$, donde I denota la matriz identidad.

a) (1 punto) Demostrar que A es no singular ($det(A) \neq 0$) y expresa A^{-1} en función de A e I.

b) (1 punto) Calcular dos números p y q tales que $A^3 = pI + qA$

c) (1 punto) Si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

cumple la relación de partida, calcular el valor de k.

Opción B

Problema 1.3.2 *(3 puntos)* Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcular A^{-1}.

b) (1 punto) Resolver la ecuación matricial $AX = BA$.

Problema 1.3.3 *(2 puntos)* Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para cada número real O definimos la matriz $B = A - OI$, donde I denota la matriz identidad 2×2.

a) (1 punto) Hallar los valores de O que hacen que el determinante de B sea nulo.

b) (1 punto) Resolver el sistema
$$B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Para los diferentes valores de O.

1.3.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.3.4 *(2 puntos)* Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Problema 1.3.5 *(2 puntos)* Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Opción B

Problema 1.3.6 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:
$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x- & y & & = 2 \\ ax+ & y+ & 2z & = 0 \\ x- & y+ & az & = 1 \end{array} \right.$$
Se pide:

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

b) (0,5 punto) Resolver el sistema para $a = -1$.

c) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 2$.

1.3.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.3.7 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, dependientes del parámetro real λ:
$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x+ & y+ & \lambda z = & \lambda^2 \\ & y- & z = & \lambda \\ x+ & \lambda y+ & z = & \lambda \end{array} \right.$$

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema en los caso en que sea posible.

c) (0,5 puntos) En el caso $\lambda = 2$, indicar la posición relativa de los tres planos cuyas ecuaciones forman el sistema.

Opción B

Problema 1.3.8 *(3 puntos)* Sea A una matriz cuadrada de orden n que verifica la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden n.

Se pide:

a) (1 punto) Expresar A^{-1} en términos de A

b) (1 punto) Expresar A^n en términos de A e I, para cualquier número natural n.

c) (1 punto) Calcular a para que $A^2 = I$, siendo A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

)

1.4. Año 2003

1.4.1. Modelo

Opción A

Problema 1.4.1 *(3 puntos)* Sea M una matriz cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n. Se pide:

a) (1 punto) Estudiar si existe la matriz inversa de M. En caso afirmativo, expresar M^{-1} en términos de M e I.

b) (1 punto) Expresar M^3 como combinación lineal de M e I.

c) (1 punto) Hallar todas las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifican la identidad del enunciado.

Opción B

Problema 1.4.2 *(3 puntos)* Hallar todas las matrices X tales que $XA = AX$, siendo A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Modelo 2003 - Opción B)

Problema 1.4.3 *(2 puntos)* Para cada valor del parámetro real k, se considera el sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrr} x- & y = & 3 \\ 2x- & 3y = & 2k \\ 3x- & 5y = & k^2 \end{array} \right.$$

Se pide:

a) (1 punto) Discutir el sistema según los valores de k.

b) (1 punto) Resolver el sistema en los casos en que sea compatible.

1.4.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.4.4 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrr} (m+2)x+ & (m-1)y- & z=3 \\ mx- & y+ & z=2 \\ x+ & my- & z=1 \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.

b) (2 puntos) Discutirlo para los distintos valores de m.

Opción B

Problema 1.4.5 *(2 puntos)* Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la identidad:

$$\left|\begin{array}{ccc} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = (a-b)^3$$

(Junio 2003 - Opción B)

Problema 1.4.6 *(2 puntos)* Encontrar un número real $\lambda \neq 0$, y todas las matrices B de dimensión 2×2 (distintas de la matriz nula), tales que

$$B \cdot \left(\begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{array}\right) = B \cdot \left(\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{array}\right)$$

1.4.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.4.7 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x+ & 4y+ & 3z=9 \\ mx+ & 2y+ & z=5 \\ x+ & y+ & z=2 \end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Determinar los valores de m para que el sistema dado tenga solución única.

b) (1,5 puntos) Resolverlo para $m = 1$.

Opción B

Problema 1.4.8 *(2 puntos)* Un mayorista del sector turístico vende a la agencia de viajes A, 10 billetes a destinos nacionales, 10 billetes a destinos extranjeros europeos comunitarios, y 10 billetes a destinos internacionales no comunitarios, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 billetes a destinos nacionales y 20 a destinos internacionales no comunitarios, y cobra 13.000 euros. A una tercera agencia C le vende 10 billetes a destinos nacionales y 10 a destinos extranjeros europeos comunitarios, cobrando 7.000 euros. Se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar el precio de cada billete.

b) (0,5 puntos) Por razones de mercado, el mayorista se ve obligado a bajar un 20 por ciento el precio de todos los billetes nacionales. Hallar en qué porcentaje debe incrementar el precio de todos los billetes extranjeros europeos comunitarios (suponiendo que mantiene constante el precio de todos los billetes internacionales no comunitarios) para mantener constantes sus ingresos totales por las ventas a las tres agencias.

Problema 1.4.9 *(2 puntos)*

a) Sean A y B dos matrices invertibles que verifican la identidad $A+B=AB$. Comprobar que entonces se tiene la fórmula:

$$(I-B)^{-1} = -B^{-1}A$$

(Donde I denota la matriz identidad).

b) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

hallar la matriz B para la cual se verifica $A+B=AB$.

1.5. Año 2004

1.5.1. Modelo

Opción A

Problema 1.5.1 *(3 puntos)* Discutir según los valores del parámetro λ, y resolver en los casos que sea posible el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 6x+ & 4y+ & 2\lambda z = & 2 \\ \lambda x+ & y- & z = & 2 \\ 5x+ & 3y+ & 3z = & 2\lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.5.2 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & az = & 4 \\ x+ & ay+ & z = & 2 \\ x+ & 4y- & 5z = & 6 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (2 punto) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resolver el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.

1.5.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.5.3 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrr} (1-a)x- & 2y+ & 4z=0 \\ x- & (1+a)y+ & z=0 \\ -x+ & ay- & z=0 \end{array}\right.$$

a) (1,5 punto) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos) Resolver el sistema anterior cuando sea compatible indeterminado.

Opción B

Problema 1.5.4 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & -1\\ 5 & -1 & 2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto) Hallar A^{-1}.

b) (1 punto) Hallar la matriz X, tal que:

$$A\cdot X\cdot A^T=B$$

(donde A^T significa la matriz traspuesta de A).

Problema 1.5.5 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Dado el sistema $\left\{\begin{array}{rr} x+ & 2y=1\\ 3x- & y=2\end{array}\right.$, escribir una tercera ecuación de la forma $ax+by=c$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.

b) (1 punto) Dado el sistema $\left\{\begin{array}{rrr} 2x+ & 2y- & z=1\\ x+ & y+ & 2z=1\end{array}\right.$, escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x+\beta y+\gamma z=1$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas resultante siga siendo compatible indeterminado.

1.5.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.5.6 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determinar la matriz inversa de B.

b) (1 punto) Determinar una matriz X tal que $A=B\cdot X$.

Problema 1.5.7 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Si A es una matriz tal que $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, ¿cuál es el valor del determinante de A?

b) (1 punto) Calcular un número k tal que:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4\\ 1 & -1\end{pmatrix}-k\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.5.8 *(3 puntos)*

a) (2 puntos) Discutir según los valores del parámetro real λ el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} \lambda x+ & 3y+ & z= & \lambda \\ x+ & \lambda y+ & \lambda z= & 1 \\ x+ & y- & z= & 1 \end{array}\right.$$

b) (1 punto) Resolver el sistema anterior en el caso $\lambda = 2$

1.6. Año 2005

1.6.1. Modelo

Opción A

Problema 1.6.1 *(3 puntos)*

a) (2 punto) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2\lambda x+ & 2y+ & \lambda z= & 1 \\ x+ & \lambda y- & z= & 1 \\ 4x+ & 3y+ & z= & 2\lambda \end{array}\right.$$

b) (1 punto) Resolver el sistema anterior en los casos en que sea compatible.

Opción B

Problema 1.6.2 *(2 puntos)* Considerar el siguiente sistema de ecuaciones, en el que a es un parámetro real:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -ax+ & 4y+ & az= & -a \\ 4x+ & ay- & az= & a \\ -x- & y+ & z= & 1 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (1 punto) Discutir el sistema

b) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 1$.

Problema 1.6.3 *(2 puntos)* Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Comprobar que

$$A^3 - 2A^2 = 0$$

b) (1 punto) Hallar A^n.

1.6.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.6.4 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} (m-1)x+ & y+ & z= & 3 \\ mx+ & (m-1)y+ & 3z= & 2m-1 \\ x+ & 2y+ & (m-2)z= & 4 \end{array}\right.$$

a) (1,5 punto) Discutirlo según los distintos valores de m.

b) (1,5 puntos) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Opción B

Problema 1.6.5 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y+ & 3z=1 \\ 2x+ & y- & z=2 \end{array}\right.$$

b) (1 punto) Hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación: $5x+y+\alpha z=\beta$, el sistema resultante sea compatible indeterminado.

Problema 1.6.6 *(2 puntos)* Hallar una matriz X tal que:

$$A^{-1}XA=B$$

siendo $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

1.6.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.6.7 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Hallar dos constantes α y β tales que $A^2=\alpha A+\beta I$.

b) (1 punto) Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.

c) (1 punto) Hallar todas las matrices X que satisfacen $(A-X)(A+X)=A^2-X^2$.

Opción B

Problema 1.6.8 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Hallar A^{10}.

b) (1 puntos) Hallar la matriz inversa de B.

c) (1 punto) En el caso particular de $k=0$, hallar B^{10}.

1.7. Año 2006

1.7.1. Modelo

Opción A

Problema 1.7.1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y- & z= & k\\ x+ & 2y+ & 3z= & 2\\ kx+ & ky- & 4z= & -1 \end{array}\right.$$

a) (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k.

b) (1 punto) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Opción B

Problema 1.7.2 *(3 puntos)* Se consideran las matrices:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 2 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ -1 & -2 & 2 \end{array}\right)\quad I=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Se pide:

a) (1,5 punto) Hallar $(A-I)^2$.

b) (1,5 punto) Calcular A^4 haciendo uso del apartado anterior.

1.7.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.7.3 *(2 puntos)* Dado el sistema homogéneo

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & ky & -z=0\\ kx- & y & +z=0\\ (k+1)x+ & y & =0 \end{array}\right.$$

averiguar para qué valores de k tiene soluciones distintas de $x=y=z=0$. Resolverlo en tales casos.

Problema 1.7.4 *(2 puntos)* Dada la matriz $A=\left(\begin{array}{cc} 1 & 2\\ 0 & 1 \end{array}\right)$ encontrar todas las matrices

$$P=\left(\begin{array}{cc} a & b\\ c & d \end{array}\right)$$

tales que $AP=PA$.

Opción B

Problema 1.7.5 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro a.

b) (1,5 punto) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M. Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$.

1.7.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.7.6 *(3 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Comprobar que $|A^2| = |A|^2$, y que $|A + I| = |A| + |I|$

b) (0,5 puntos) Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que se cumple $|M^2| = |M|^2$?. Razonar la respuesta.

c) (1,5 puntos) Encontrar todas las matrices cuadradas M, de orden 2, tales que:

$$|M + I| = |M| + |I|$$

Opción B

Problema 1.7.7 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+ \quad y- \quad 3z = 0 \\ 2x+ \quad 3y- \quad z = 5 \end{cases}$$

b) (1 punto) Hallar la solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4.

Problema 1.7.8 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Hallar todas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ distintas de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tales que $A^2 = A$

b) (1 punto) Para cualquiera de las matrices A obtenidas en el apartado 1.), calcular

$$M = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{10}$$

1.8. Año 2007

1.8.1. Modelo

Opción A

Problema 1.8.1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ky+ & k^2z = & 1 \\ x+ & ky- & kz = & k^2 \\ -x+ & ky- & k^2z = & k^2 \end{array}\right.$$

a) (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k.

b) (1 punto) Resolverlo para $k = -1$.

Opción B

Problema 1.8.2 *(3 puntos)* Dada la matriz

$$M = \left(\begin{array}{rrr} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{array}\right)$$

a) (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro λ.

b) (1,5 punto) Determinar para qué valores de λ existe la matriz inversa de M. Calcular dicha inversa para $\lambda = 0$.

1.8.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.8.3 *(2 puntos)* Estudiar el rango de la matriz $\left(\begin{array}{ccc} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{array}\right)$ según los valores del parámetro m.

Problema 1.8.4 *(2 puntos)* Sean las matrices

$$A = \left(\begin{array}{rr} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right) \quad B = \left(\begin{array}{rr} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{array}\right)$$

Hallar una matriz X tal que $XAX^{-1} = B$

Opción B

Problema 1.8.5 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad B = \left(\begin{array}{ccc} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que se verifique $AB = BA$.

b) (1,5 puntos) Para $a = b = c = 1$, calcular B^{10}.

1.8.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.8.6 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & (k+1)y+ & 2z= & -1 \\ kx+ & y+ & z= & k \\ (k-1)x- & 2y- & z= & k+1 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los distintos valores de k.

b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Opción B

Problema 1.8.7 *(2 puntos)* Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica

$$XA^2 + BA = A^2$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 1.8.8 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & 3z= & 3 \\ 2x+ & 3y+ & z= & 5 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular a y b de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $ax+y+bz = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el sistema original.

b) (1 punto) Calcular las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a 4.

1.9. Año 2008

1.9.1. Modelo

Opción A

Problema 1.9.1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & mz= & m+2 \\ 2x+ & (m+1)y+ & (m+1)z= & -m \\ (m+2)x+ & 3y+ & (2m+1)z= & 3m+4 \end{array}\right.$$

a) (2 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real m.

b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Opción B

Problema 1.9.2 *(3 puntos)* Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Hallar una matriz X tal que $AXA^{-1} = B$.

b) (1 punto) Calcular A^{10}.

c) (1 punto) Hallar todas las matrices M que satisfacen

$$(A - M)(A + M) = A^2 - M^2$$

1.9.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.9.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x- & ay = & 2 \\ ax- & y = & a+1 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro a. Resolverlo cuando la solución sea única.

b) (1 punto) Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene solución en la que $y = 2$.

Opción B

Problema 1.9.4 *(3 puntos)* Dada la siguiente matriz de orden n:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_2.

b) (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_3.

c) (2 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_5.

1.9.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.9.5 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar el rango de A según los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos) Decir cuándo la matriz A es invertible. Calcular la inversa para $a = 1$.

Opción B

Problema 1.9.6 *(2 puntos)* Resolver el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} x & -2y & +\ z & -3v & = & -4 \\ x & +2y & +\ z & +3v & = & 4 \\ 2x & -4y & +2z & -6v & = & -8 \\ 2x & & +2z & & = & 0 \end{array} \right.$$

Problema 1.9.7 *(2 puntos)* El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

1.10. Año 2009

1.10.1. Modelo

Opción A

Problema 1.10.1 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrr} x- & y = & 3 \\ 2x- & 3y = & 2k \\ 3x- & 5y = & k \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Discutirlo según los distintos valores del parámetro k.

b) (1 punto) Resolverlo en los casos en que sea posible.

Problema 1.10.2 *(2 puntos)* Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix} = 0$$

Opción B

Problema 1.10.3 *(3 puntos)* Si $A = (C_1, C_2, C_3)$ es una matriz cuadrada de orden 3 con columnas C_1, C_2, C_3, y se sabe que $det(A) = 4$, se pide:

a) (1 punto) Calcular $det(A^3)$ y $det(3A)$.

b) (2 puntos) Calcular $det(B)$ y $det(B^{-1})$, siendo $B = (2C_3, C_1 - C_2, 5C_1)$ la matriz cuyas columnas son:
$$2C_3, C_1 - C_2, 5C_1$$

1.10.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.10.4 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 4x+ & 4\lambda y+ & 2z = & 2\lambda \\ \lambda x+ & y- & \lambda z = & \lambda \\ 4\lambda x+ & 4\lambda y+ & \lambda z = & 9 \end{array}\right. ,$$

Se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

Opción B

Problema 1.10.5 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y = \lambda \\ \lambda x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ

b) (0,5 punto) Resolver el sistema cuando sea posible

Problema 1.10.6 *(2 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{array}\right)$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar el rango de A según los distintos valores del parámetro a.

b) (1 punto) Obtener la matriz inversa de A para $a = -1$

1.10.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.10.7 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

a) (1,25 puntos) Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M es invertible.

b) (0,5 puntos) Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M^{25} es invertible.

c) (1,25 puntos) Para $m = -1$ calcular, si es posible, la matriz inversa M^{-1} de M.

Opción B

Problema 1.10.8 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\begin{cases} \lambda x + 2y + z = 0 \\ \lambda x - y + 2z = 0 \\ x - \lambda y + 2z = 0 \end{cases},$$

se pide:

a) (1 punto) Obtener los valores de parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de:

$$x = y = z = 0$$

b) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = 5$.

Problema 1.10.9 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

obtener una matriz cuadrada X de orden 2 que verifique la ecuación matricial $AXB = A + B$

1.10.4. Reserva

Opción A

Problema 1.10.10 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = \sqrt{3} \\ 3x + 2z = 2\sqrt{5} \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto) Añadir, de forma razonada, una tercera ecuación para que el sistema resultante sea compatible determinado.

b) (1 punto) Añadir, de forma razonada, una tercera ecuación para que el sistema resultante sea compatible indeterminado.

Problema 1.10.11 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz X que verifique la ecuación matricial $XB = A + B$

Opción B

Problema 1.10.12 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} (m+1)x+ & y+ & z = & 0 \\ x+ & (m+1)y+ & z = & m \\ x+ & y+ & (m+1)z = & m^2 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro m.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $m = 0$.

1.11. Año 2010

1.11.1. Modelo

Opción A

Problema 1.11.1 *(2 puntos)* Obtener, para todo número natural n, el valor de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Problema 1.11.2 *(2 puntos)* Discutir razonadamente, en función del parámetro k, el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ky+ & z = & k+2 \\ kx+ & y+ & z = & k \\ x+ & y+ & kz = & -2(k+1) \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.11.3 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & & z = & 2 \\ x+ & \lambda y- & z = & 4 \\ -\lambda x- & y- & z = & -5 \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Discutirlo para los distintos valores del parámetro λ

b) (1 punto) Resolverlo cuando el sistema sea compatible indeterminado.

c) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = -2$.

1.11.2. Ordinaria-General

Opción A

Problema 1.11.4 *(2 puntos)* Dado el sistema homogéneo de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & ky- & z = & 0\\ 2x- & y+ & 2z = & 0\\ x- & 4y+ & kz = & 0 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto) Determinar para qué valores del parámetro k el sistema tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$.

b) (1 punto) Resolverlo para el casa de $k = 3$.

Problema 1.11.5 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar dos constantes a y b, tales que $A^2 = aA + bI$.

b) (1 punto) Sin calcular explícitamente A^3 y A^4, y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5.

Opción B

Problema 1.11.6 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ay- & z = & a\\ ax+ & & 2z = & -2\\ x+ & & z = & -2 \end{array}\right.$$

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resolverlo en el caso de $a = 0$.

1.11.3. Ordinaria-Específica

Opción A

Problema 1.11.7 *(3 puntos)* Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 6 & 0 & 3\\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$, y utilizando las propiedades de los determinantes, calcular:

a) (1 punto) El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6\\ 6 & 0 & 3\\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4$

b) (1 punto) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix}$

c) (1 punto) $\begin{vmatrix} 3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix}$

Opción B

Problema 1.11.8 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & my+ & 3z= & 3 \\ x+ & y- & 2z= & 0 \\ 5x+ & (m+1)y+ & z= & 9 \end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro m.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para el caso de $m=0$.

Problema 1.11.9 *(2 puntos)* Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ estudiar para que valores de a tiene inversa y calcularla siempre que sea posible.

1.11.4. Extraordinaria-General

Opción A

Problema 1.11.10 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (2 puntos). Estudiar el rango de A según los valores del parámetro m

b) (1 punto). En el caso de $m=0$, resolver el sistema

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.11.11 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y-z=0 \\ 2x-y+z=3 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la compatibilidad del sistema

b) (0,5 puntos). Añadir una ecuación para que el sistema sea compatible determinado. Razonar la respuesta.

c) (0,5 puntos). Añadir una ecuación para que el sistema sea incompatible. Razonar la respuesta.

Problema 1.11.12 *(2 puntos)* Dada la matriz:

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de A según los valores del parámetro a.

b) (1 punto). ¿Para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1}? Calcular A^{-1} para $a = 1$.

1.11.5. Extraordinaria-Específica

Opción A

Problema 1.11.13 *(3 puntos)* El sistema $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 5 & a \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

tiene diferentes soluciones según sea la matriz B

a) (1 punto). Determinar, si existen, el valor o valores de a para los que el sistema es compatible determinado (independientemente del valor de B).

b) (0,5 puntos). Si $a = 4$, y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{pmatrix}$, determinar, si existen, el valor o los valores de b para los que el sistema es incompatible.

c) (1,5 puntos). Si $a = 4$, y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 10 \end{pmatrix}$, determinar, si existen, el valor o los valores de c para los que el sistema es compatible indeterminado. Resolver el sistema.

Opción B

Problema 1.11.14 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & kz = & k \\ x+ & ky+ & z = & k^2 \\ kx+ & y+ & z = & 1 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro k.

b) (1 punto). Resolverlo para $k = 0$.

1.12. Año 2011

1.12.1. Modelo

Opción A

Problema 1.12.1 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\begin{cases} \lambda x & & +\ \ \lambda z = & 2 \\ x+ & \lambda y- & z = & 1 \\ x+ & 3y+ & z = & 2\lambda \end{cases}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro λ

b) (1,5 puntos). Resolver el sistema para $\lambda = 1$.

Opción B

Problema 1.12.2 *(3 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto). Calcular $A^2 - 4A + 3I$

b) (1 punto). Demostrar que la matriz inversa A^{-1} de A es $\dfrac{1}{3}(4I - A)$.

c) (1 punto). Hallar la matriz inversa de la matriz $A - 2I$.

1.12.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.12.3 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto). Calcular el rango de A en función de los valores de a.

b) (1 punto). En el caso de $a = 2$, discutir el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ en función de los valores de b, y resolverlo cuando sea posible.

c) (1 punto). En el caso de $a = 1$, resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.12.4 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema de ecuaciones $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & (m-1) \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m+2 \end{pmatrix}$$

según los valores de m.

b) (1,5 puntos). Resolver el sistema en los casos $m = 0$ y $m = 1$.

1.12.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.12.5 *(2 puntos)*. Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \\ a+2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro a.

Problema 1.12.6 *(2 puntos)*. Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz M.

b) (1 punto). Hallar la matriz M^2.

c) (0,5 puntos). Hallar la matriz M^{25}.

Opción B

Problema 1.12.7 *(3 puntos)*. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 2x+ & 4y & & = 4k \\ -k^3x+ & k^2y+ & kz & = 0 \\ x+ & ky & & = k^2 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo en función del valor del parámetro k.

b) (0'5 puntos). Resolver el sistema para $k = 1$.

c) (0'5 puntos). Resolver el sistema para $k = 2$.

1.13. Año 2012

1.13.1. Modelo

Opción A

Problema 1.13.1 *(3 puntos)* Dado el sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 2 \\ -3x+ & 2y+ & 3z = & -2 \\ 2x+ & my- & 5z = & -4 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de m.

b) (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.

Opción B

Problema 1.13.2 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y = & 1 \\ 3x+ & y = & -a \\ -3x+ & 2ay = & 7 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos). Resolver el sistema cuando sea compatible..

1.13.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.13.3 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar el rango de A en función de los valores de k.

b) (0,75 puntos) Para $k = 2$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = B$.

c) (0,75 puntos) Para $k = 1$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = C$.

Opción B

Problema 1.13.4 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2-a & 3+a & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de la matriz B en función de a.

b) (1 punto). Para $a = 0$, calcular la matriz X que verifica $AX = B$.

Problema 1.13.5 *(2 puntos)* Calcular el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

)

1.13.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.13.6 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 3x+ & 2y+ & (a-1)z = & 1 \\ -x+ & ay+ & z = & 0 \\ 2x+ & y- & 2z = & 3 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir sus soluciones según los valores de a.

b) (1 punto). Hallar la solución del sistema para $a = 1$.

Opción B

Problema 1.13.7 *(3 puntos)* . Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1$, calcular los siguientes determinantes:

a) (1,5 puntos) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3x & y & 2z \\ 6 & 3 & 10 \end{vmatrix}$, *b*) (1,5 puntos) $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 2-x & 2-y & -z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

1.13.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.13.8 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x+ & ay+ & 4z= & 6\\ x+ & (a+1)y+ & z= & 3\\ (a-1)x- & ay- & 3z= & -3 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 punto). Discutir el sistema según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo para $a=-1$.

Opción B

Problema 1.13.9 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & & 2z= & 2\\ ax- & y+ & z= & -8\\ 2x+ & & az= & 4 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 punto). Discutir el sistema según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo para $a=-5$.

1.14. Año 2013

1.14.1. Modelo

Opción A

Problema 1.14.1 *(3 puntos)* Dado el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & (m+3)z= & 3\\ x+ & y+ & (4+m-m^2)z= & 3\\ 2x+ & 4y+ & 3(m+2)z= & 8 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de m.

b) (1 punto). Resolverlo para $m=-2$.

Opción B

Problema 1.14.2 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Dada la matriz $A=\left(\begin{array}{cc} 1 & 2\\ 2 & 1\end{array}\right)$ y la matriz $X=\left(\begin{array}{cc} x & y\\ z & t\end{array}\right)$ obtener las relaciones que deben cumplir x, y, z, t para que la matriz X verifique $AX=XA$.

b) (0,5 puntos). Dar un ejemplo de matriz X distinta de la matriz nula y de la matriz identidad que cumpla la igualdad anterior.

c) (0,5 puntos). Calcular la inversa de la matriz A.

Problema 1.14.3 *(2 puntos)* De las matrices cuadradas A y B se sabe que:

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^2-AB+BA-B^2=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto). Calcular la matriz $A-B$.

b) (1 punto). Calcular las matrices A y B.

1.14.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.14.4 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} ax+ & 7y+ & 5z= & 0 \\ x+ & ay+ & z= & 3 \\ & y+ & z= & -2 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $a=4$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $a=2$.

Opción B

Problema 1.14.5 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto). Hallar el valor de λ para el cual la ecuación matricial $XA=B$ tiene solución única.

b) (1 punto). Calcular la matriz X para $\lambda=4$.

c) (1 punto). Calcular el determinante de la matriz A^2B en función de λ.

1.14.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.14.6 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} \lambda x+ & 2y- & 3z= & 2\lambda \\ x+ & y+ & z= & 1 \\ 2x- & 3y+ & 2z= & 2 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutirlo según los valores de λ.

b) (1,5 puntos). Para los valores de λ tales que el sistema tiene solución única, obtener esta solución en función de λ.

Opción B

Problema 1.14.7 *(3 puntos)* Sean A y B matrices 2 con determinantes: $\det A = 5$, $\det B = 3$. Se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar $\det\left[B^{-1}A^2B^2\right]$

b) (0,5 puntos). Hallar $\det\left[A + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A\right]$.

c) (1 punto). Si c_1 y c_2 son las columnas de la matriz A (es decir, $A = (c_1\ c_2)$), hallar la solución del sistema:
$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (c_2)$$

Problema 1.14.8 *(2 puntos)* Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} -3 & \lambda+1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1 punto). Determinar λ para que A sea invertible.

b) (1 punto). Calcular A^{-1} en el caso $\lambda = 1$.

(Junio 2013 (coincidente)- Opción B)

1.14.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.14.9 *(3 puntos)* Dadas las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix};\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix};\quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Calcular el determinante de A. Determinar el rango de A según los valores de a.

b) (0,5 puntos). Resolver el sistema homogéneo $AX = O$ en el caso $a = 1$.

c) (1 punto). Resolver el sistema homogéneo $AX = O$ cuando $a = -1$.

Opción B

Problema 1.14.10 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & \lambda y+ & \lambda z = & 1-\lambda \\ x+ & y+ & (\lambda-1)z = & -2\lambda \\ (\lambda-1)x+ & y+ & z = & \lambda-1 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro λ.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $\lambda = 1$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $\lambda = -1$.

1.14.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.14.11 *(3 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Calcular la matriz inversa A^{-1} de A.

b) (1 punto). ¿Son iguales las matrices $(A^{-1})^2$ y $(A^2)^{-1}$?

c) (1 punto). Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ resolver la ecuación matricial $AX = B$.

Opción B

Problema 1.14.12 *(2 puntos)* Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 6 \\ x-1 & 0 & -6 \\ x^2+2 & x & 12 \end{vmatrix} = 6$$

Problema 1.14.13 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ay- & z = & 0 \\ 3x+ & 2y+ & az = & 0 \\ 7x+ & 9y+ & 9z = & 0 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores de a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo para $a = 5$.

1.15. Año 2014

1.15.1. Modelo

Opción A

Problema 1.15.1 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & k \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar los valores de k para los que existe la matriz inversa A^{-1}.

b) (1 punto). Hallar la matriz A^{-1} para $k = 6$.

c) (1,5 puntos). Resolver la ecuación matricial $AX - A = B$ para $k = 6$.

Opción B

Problema 1.15.2 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrr} (a+2)x+ & (a+1)y = & -6 \\ x+ & 5y = & a \\ x+ & y = & -5 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores de a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo cuando sea posible.

Problema 1.15.3 *(2 puntos)* Sabiendo que el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

es igual a 1, calcular el valor de los determinantes:

a) (1 punto). $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$.

b) (1 punto). $\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

1.15.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.15.4 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Calcula α, β y γ para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $AX = B$.

b) (1 punto). Si $\beta = \gamma = 1$ ¿Qué condición o condiciones debe cumplir α para que el sistema lineal homogéneo $AX = O$ sea compatible determinado?

c) (0,5 puntos). Si $\alpha = -1$, $\beta = 1$ y $\gamma = 0$, resuelve el sistema $AX = B$.

Opción B

Problema 1.15.5 *(2 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{se pide :}$$

a) (1 punto). Hallar el valor o valores de a para que la matriz A tenga inversa.

b) (1 punto). Calcular la matriz inversa A^{-1} de A, en el caso $a = 2$.

Problema 1.15.6 *(2 puntos)* Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado veintidós euros. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y seis bolígrafos, el coste es de catorce euros. Se pide:

a) (1 punto). Expresar, en función del precio de un bolígrafo, lo que costaría un cuaderno y lo que costaría un rotulador.

b) (1 punto). Calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores.

1.15.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.15.7 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x- & y+ & z = & 1 \\ & y- & z = & a \\ x+ & y- & z = & 3a^2 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo cuando sea posible.

Opción B

Problema 1.15.8 *(3 puntos)* Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ tiene determinante igual a 10, se pide calcular justificadamente:

a) (1 punto). El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2a+b & b & c \\ 4 & 2 & 3 \\ 2x+y & y & z \end{pmatrix}$.

b) (1 punto). El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2a & 2b & 2c \end{pmatrix}$.

c) (1 punto). El determinante de la matriz $(BB^t)^3$, donde $B = \begin{pmatrix} a+2 & b+4 & c+6 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ y B^t es la matriz transpuesta de B.

1.15.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.15.9 *(3 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a-1 & a & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto). Determinar el valor o valores de a para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1}.

b) (1 punto). Para $a = -2$, hallar la matriz inversa A^{-1}.

c) (1 punto). Para $a = 1$, calcular todas las soluciones del sistema lineal $AX = O$.

Opción B

Problema 1.15.10 *(2 puntos)* Dada la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde B es una matriz cuadrada de tamaño 2×2, se pide:

a) (1 punto). Calcular el valor o valores de a para los que esta ecuación tiene solución.

b) (1 punto).Calcular B en el caso $a = 1$.

Problema 1.15.11 *(2 puntos)* Estudiar el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro a.

1.16. Año 2015

1.16.1. Modelo

Opción A

Problema 1.16.1 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & m & m \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de A según los valores de m.

b) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz A^{20}.

c) (0,75 puntos). Para $m = -2$, resolver el sistema $AX = O$.

d) (0,75 puntos). Para $m = 0$, resolver el sistema $AX = B$.

Opción B

Problema 1.16.2 *(2 puntos)*

a) (1,5 puntos). Hallar X e Y, matrices 2×2, tales que

$$X + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

b) (0,5 puntos). Hallar Z, matriz invertible 2×2, tal que

$$Z^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

Problema 1.16.3 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rrl} mx+ & y = & 0 \\ x+ & my = & 0 \\ mx+ & my = & 0 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutirlo según los valores de m.

b) (0,5 puntos). Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

1.16.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.16.4 *(3 puntos)*

a) (2 puntos). Discutir, según los valores de m, el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 4x+ & 3y+ & (m-1)z = & 0 \\ x- & 2y+ & mz = & 1 \\ 5x+ & my+ & z = & 1 \end{array}\right.$$

b) (1 punto). Resolver el sistema anterior para el caso $m = 1$.

Opción B

Problema 1.16.5 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular A^{15} y A^{20}

b) (1 punto). Resolver la ecuación matricial $6X = B - 3AX$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3.

Problema 1.16.6 *(2 puntos)* Dadas las matrices:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix}$, e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1,25 puntos). Hallar el rango de A en función de t.

b) (0,75 puntos). Calcular t para que $\det(A - tI) = 0$.

1.16.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.16.7 *(2 puntos)* Dadas las matrices: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
se pide:

a) (1 punto). Calcular la matriz inversa de L.

b) (1 punto). Buscar la matriz A, tal que $LAL^t = I$, donde L^t es la traspuesta de L.

Problema 1.16.8 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de A, según los valores de m, e indicar para qué valores de m admite inversa la matriz A.

b) (1 punto). Sin calcular A^{-1}, hallar m para que $det(A) = det(4A^{-1})$.

Opción B

Problema 1.16.9 *(3 puntos)*

a) (2 puntos). Discutir el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{rrl} 2x+ & y = & 5 \\ x+ & my = & 7 \\ x- & y = & 4 \end{array}\right.$, en función de los valores del parámetro m y hallar la solución del sistema anterior en los casos en los que ésta sea única.

b) (1 punto). Encontrar el valor o valores de k que hacen incompatible el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & kz = & 2 \\ kx- & ky+ & 4z = & -4 \end{array}\right.$$

1.16.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.16.10 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -mx+ & my+ & z = & 0 \\ x- & my+ & 3z = & 4 \\ 2x- & 2y- & z = & 0 \end{array}\right.$$

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro m.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 0$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 2$.

Opción B

Problema 1.16.11 *(2 puntos)* Sabiendo que $\left|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right| = 3$ y usando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de los siguientes determinantes:

a) (1 punto). $\left|\begin{array}{rcc} 2a-2b & c & 5b \\ 2d-2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{array}\right|$

b) (1 punto). $\left|\begin{array}{ccr} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{array}\right|$

Problema 1.16.12 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)$ hallar todas las matrices $B = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)$ que conmutan con A, es decir que cumplen $AB = BA$.

1.16.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.16.13 *(3 puntos)* Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar los valores del parámetro a, para que la matriz M tenga inversa.

b) (1 punto). Hallar la inversa de M, para $a = 2$.

c) (1 punto). Resolver el sistema homogéneo $MX = O$, para $a = 1$.

Opción B

Problema 1.16.14 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} & y+ & z = & 1 \\ (k-1)x+ & y+ & z = & k \\ x+ & (k-1)y+ & z = & 0 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de k.

b) (1 punto). Resolverlo para $k = 0$ y para $k = 1$.

1.17. Año 2016

1.17.1. Modelo

Opción A

Problema 1.17.1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & kz = & 1 \\ 2x+ & 4y+ & z = & 3 \\ kx+ & 2y- & z = & 3 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de k.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $k = 2$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $k = 1$.

Opción B

Problema 1.17.2 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular el valor o valores de λ que hacen que el determinante de la matriz $M - \lambda I$ sea igual a 0.

b) (1 punto). Para $\lambda = -1$, resolver el sistema de ecuaciones lineales: $(M - \lambda I)X = O$.

Problema 1.17.3 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

resolver la ecuación matricial $AX + 3B = B(A^t + 3I)$, donde A^t denota la matriz transpuesta de A.

1.17.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.17.4 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos). Despeje X en la ecuación matricial $X(CD)^{-1} = A + X(D^{-1}C^{-1} - B)$, siendo A; B; C; D matrices cuadradas invertibles. Exprese X de la forma más simple posible.

b) (1,5 puntos). Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ determine la matriz Y tal que $YB = A$.

Opción B

Problema 1.17.5 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrr} 3x+ & y & + & mz & = & 1 \\ x- & y & + & 2z & = & -2 \\ 5x+ & (m+1)y & + & 2z & = & 4 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de m.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 0$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 2$.

1.17.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.17.6 *(3 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar los valores del parámetro a, para que se verifique la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) (1,5 puntos). Para $a = 2$, resolver la ecuación matricial $AXA^{-1} = B$.

c) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz $(2B)^{-1}$.

Opción B

Problema 1.17.7 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrl} ax- & y & + & z = & 0 \\ x+ & y & + & az = & 0 \\ ax+ & 4y & + & 2z = & a \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo, si es posible, para $a = 1$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo, si es posible, para $a = -1$.

1.17.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.17.8 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Determine, si es posible, los parámetros α y β de modo que se verifique la igualdad:

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

b) (1 punto). Determine los posibles valores de λ para que el rango de la matriz A sea 2, donde

$$A = \lambda \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 1.17.9 *(2 puntos)* Cierta fundación ha destinado 247000 euros para la dotación de 115 becas de estudios. El importe de cada beca es de 3000 euros, si el estudiante cursa un grado universitario; de 2000 euros, si cursa formación profesional y de 1500 euros, si realiza estudios de postgrado. Sabiendo que la fundación ha concedido doble número de becas de formación profesional que de postgrado, ¿cuántas becas ha concedido a cada nivel de estudios?

Opción B

Problema 1.17.10 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 2x+ & (a-1)y & - & 2z = & a \\ 2x+ & y & - & az = & 2 \\ -x+ & y & + & z = & 1-a \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo cuando sea posible.

1.18. Año 2017

1.18.1. Modelo

Opción A

Problema 1.18.1 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 4 & 1 \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar el rango de B en función de los valores de m.

b) (1,5 puntos) Calcular la matriz inversa de A y comprobar que verifica $A^{-1} = \frac{1}{5}(A^2 + 3C)$.

Opción B

Problema 1.18.2 *(2 puntos)* A un florista le han encargado preparar 5 ramos iguales para cinco eventos. El precio total acordado es de 610 euros. Ha decidido emplear rosas, tulipanes y lilas. Cada ramo llevará un total de 24 flores y el número de rosas empleado doblará al número total de flores de otras especies. ¿Cuál es el número de flores de cada tipo que usará en cada ramo sabiendo que cada rosa cuesta 6 euros, cada tulipán cuesta 4 y cada lila 3?

1.18.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.18.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} 2x + ay + z = a \\ x - 4y + (a+1)z = 1 \\ 4y - az = 0 \end{array}\right.$, se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo en función de los valores del parámetro real a.

b) (0,5 puntos) Resolverlo en el caso $a = 1$.

c) (0,5 puntos) Resolverlo en el caso $a = 2$.

Opción B

Problema 1.18.4 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto) Determinar la matriz P^{-1}, inversa de la matriz P.

b) (1 punto) Determinar la matriz B^{-1}, inversa de la matriz $B = P^{-1}J^{-1}$.

c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz A^2, siendo $A = PJP^{-1}$.

1.18.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.18.5 *(2 puntos)* En un supermercado tienen tres artículos con ofertas por la compra de una segunda unidad. La segunda unidad del artículo A tiene un descuento del 60 %, la segunda unidad del artículo B tiene un descuento del 75 %, mientras que la segunda unidad del artículo C se oferta con un descuento del 50 %. Si un cliente compra un artículo de cada clase y, por lo tanto, no se beneficia de descuento alguno, debe pagar 26 euros. Si compra dos artículos de cada clase pagará 35,20 euros. Finalmente, si no adquiere el artículo A, pagará lo mismo comprando dos unidades de B y una de C que si compra dos unidades de C y una de B. Determínese el precio de cada artículo.

Problema 1.18.6 *(2 puntos)* Dada la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular su inversa.

b) (1 punto) Calcular la matriz B para que $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $A^2X = B$.

Opción B

Problema 1.18.7 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & my+ & 3z = & 4 \\ x+ & y- & 2z = & -2 \\ 3x & + & (m+1)z = & m+2 \end{array} \right.,$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro real m.

b) (0,5 puntos) Resolverlo para $m = -3$.

c) (0,5 puntos) Para cierto valor de m, que hace que el sistema sea compatible, se ha obtenido una solución con $y = 0$. Determinar x y z para esa solución. ¿Cuál es el valor de m?

1.18.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.18.8 *(2 puntos)* Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta.

	Oro (%)	Plata (%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción del 72 % de oro y una proporción del 16 % de plata, tomando x gramos de A, y gramos de B y z gramos de C. Determínense las cantidades x, y, z.

Opción B

Problema 1.18.9 *(3 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular la matriz $B = (A - I)(2I + 2A)$.

b) (1,5 puntos) Determinar el rango de las matrices $A - I$, $A^2 - I$ y $A^3 - I$.

c) (1 punto) Calcular la matriz inversa de A^6, en caso de que exista.

1.18.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.18.10 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y & = & 1 \\ & ty+ & z = & 0 \\ x+ & (1+t)y+ & tz = & t+1 \end{array}\right.$, se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo en función del parámetro t.

b) (0,5 puntos) Resolverlo para $t = 0$.

c) (0,5 puntos) Resolverlo para $t = -1$.

Opción B

Problema 1.18.11 *(3 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & a \\ 1 & 0 & 5 & 2a \\ 0 & 2 & -4 & 2a \end{pmatrix}$, se considera la matriz B formada por las tres últimas columnas de A y se pide:

a) (1 punto) Estudiar para qué valores del parámetro real a la matriz B es invertible.

b) (1 punto) Obtener el rango de A en función de los valores del parámetro real a.

c) (1 punto) Resolver el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, en el caso $a = 0$.

1.19. Año 2018

1.19.1. Modelo

Opción A

Problema 1.19.1 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, y $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1,5 puntos) Obtener los valores de m para los que la matriz $A - mI$ admite inversa.

b) (1 punto) Calcular la matriz inversa de $A - 2I$.

Opción B

Problema 1.19.2 *(2,5 puntos)* Dada la matriz A y los vectores X y B siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m+1 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2+m \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema lineal $AX = B$ en función de los valores del parámetro m.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema lineal $AX = B$ cuando $m = -1$.

1.19.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.19.3 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, y $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1,5 puntos) Obtener los valores de m para los que la matriz $A - mI$ admite inversa.

b) (1 punto) Calcular la matriz inversa de $A - 2I$.

Opción B

Problema 1.19.4 *(2,5 puntos)* Dada la matriz A y los vectores X y B siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m+1 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2+m \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema lineal $AX = B$ en función de los valores del parámetro m.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema lineal $AX = B$ cuando $m = -1$.

1.19.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.19.5 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular A^tA y AA^t, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

b) (1,25 puntos) Hallar A^{-1} y resolver el sistema lineal $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) (0,75 puntos) Calcular C^2, donde $C = ABA^t$.

Opción B

Problema 1.19.6 *(2,5 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$A = \left\{ \begin{array}{rrrr} 10x- & 20y- & 10z = & 8\alpha + 44 \\ 2x- & 5y+ & 3z = & 4\alpha + 4 \\ 3x- & 7y+ & 2z = & 5\alpha + 9 \end{array} \right. ,$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro real α.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $\alpha = -3$.

1.19.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.19.7 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5\alpha \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 37/2 \\ 11 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1,25 puntos) Discutir el rango de la matriz A, en función de los valores del parámetro α.

b) (0,75 puntos) Para $\alpha = 0$, calcular, si es posible, A^{-1}.

c) (0,5 puntos) Resolver, si es posible, el sistema $AX = B$, en el caso $\alpha = 1$.

Opción B

Problema 1.19.8 *(2,5 puntos)* Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza. En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

1.20. Año 2019

1.20.1. Modelo

Opción A

Problema 1.20.1 *(2,5 puntos)* Para cada uno de los siguientes apartados, proponga un ejemplo de matriz cuadrada A, de dimensión 3×3, con todos sus números distintos de cero y con sus tres filas y columnas diferentes, que cumpla la condición pedida.

a) (0,5 puntos) El determinante de A vale 0.

b) (0,5 puntos) El determinante de A vale 1.

c) (0,5 puntos) La matriz A coincide con su traspuesta.

d) (1 punto) Para una cierta matriz cuadrada C, distinta de la matriz nula y de la identidad, se verifica que $A\cdot C = C\cdot A$. (Debe proponer ejemplos concretos para las dos matrices A y C.)

Opción B

Problema 1.20.2 *(2,5 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x & -my- & z = & 0 \\ mx- & 4y+ & (6-2m)z = & -8m \\ -x+ & 2y+ & z = & 6 \end{array}\right. \text{ se pide:}$$

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema en el caso $m = 6$.

1.20.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.20.3 *(2,5 puntos)*

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; se pide:

a) (1,5 puntos) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.

b) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso $a = 0$.

Opción B

Problema 1.20.4 *(2,5 puntos)* Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros. Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40 % respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

1.20.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.20.5 *(2,5 puntos)* La aerolínea "Air", para uno de sus vuelos, ha puesto a la venta 12 plazas de Clase Preferente (P), a 250 euros cada una, 36 plazas de Clase Turista (T), a 150 euros cada una, y 72 plazas de Clase Económica (E), a 100 euros cada una. Se sabe que ha vendido el 90 % del total de las plazas, recaudando un importe de 13800 euros.

a) (0,25 puntos) Determine el número total de plazas vendidas.

b) (2,25 puntos) Sabiendo que se han vendido el triple de plazas de clase (T) que de clase (P), obtenga el número de billetes vendidos de cada clase y cuánto dinero se ha recaudado de cada clase.

Opción B

Problema 1.20.6 *(2,5 puntos)*

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & m & 2 \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular los valores de $m \in \mathbb{R}$ para los cuales B no tiene inversa.

b) (1 punto) Para $m = 1$, calcular la inversa de la matriz B.

c) (1 punto) Para $m = 2$, calcular la matriz producto $A^t B$ (donde A^t denota la matriz traspuesta de A) y el determinante de la matriz $A^2 B$.

Incluyo el examen de Valencia por la expectación generada con éste.

1.20.4. Ordinaria-Valencia

Opción A

Problema 1.20.7 Se dan la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$ y que depende del parámetro real a, y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$,siendo I la matriz identidad de orden 3.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) (2+2 puntos) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a = 1$.

b) (3 puntos) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a = -1$.

c) (3 puntos) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1} = mB + nI$.

Opción B

Problema 1.20.8 Se da el sistema $\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 4 \\ 3x+ & 4y+ & 5z = & 5 \\ 7x+ & 9y+ & 11z = & \alpha \end{array}\right.$, donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) (4 puntos) Los valores de α para los que el sistema es compatible y los valores de α para los que el sistema es incompatible.

b) (4 puntos) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible.

c) (2 puntos) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente.

1.20.5. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.20.9 *(2,5 puntos)*

Dado el sistema de ecuaciones $A = \left\{\begin{array}{rrrr} kx+ & (k+1)y+ & z = & 0 \\ -x+ & ky- & z = & 0 \\ (k-1)x- & y & = & -(k+1) \end{array}\right.$; se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $k = -1$.

Opción B

Problema 1.20.10 *(2,5 puntos)*

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; se pide:

a) (1 punto) Calcular para qué valores $a \in \mathbb{R}$ se verifica $A^2 - I = 2A$.

b) (0,75 puntos) Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a.

c) (0,75 puntos) Calcular, en función de a, el determinante de la matriz $(AA^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

1.21. Año 2020

1.21.1. Modelo

Opción A

Problema 1.21.1 *(2,5 puntos)* Se quiere construir un invernadero para el cultivo de semillas con ambiente controlado de temperatura, humedad y composición del aire. El aire que hay que suministrar debe contener un 78 % de nitrógeno, un 21 % de oxígeno y un 1 % de argón.

a) (0,5 puntos) Si la capacidad del invernadero es 2000 litros, determine cuántos litros de nitrógeno, cuántos de oxígeno y cuántos de argón son necesarios.

b) (2 puntos) Para suministrar el aire se dispone de tres mezclas gaseosas A, B y C, cuya composición se expresa en la tabla adjunta. Obtenga la cantidad que hay que utilizar de cada mezcla para llenar el invernadero de aire con la composición requerida.

Mezcla	Nitrógeno	Oxígeno	Argón
A	80 %	20 %	0 %
B	70 %	20 %	10 %
C	60 %	40 %	0 %

Opción B

Problema 1.21.2 *(2,5 puntos)* Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3t+3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el rango de la matriz A en función del parámetro t.

b) (1,5 puntos) Resolver el sistema $AX = B$, para los valores de t que lo hagan compatible y determinado.

1.21.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.21.3 *(2,5 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + ay + z = a + 1 \\ -ax + y - z = 2a \\ -y + z = a \end{cases}$$

Se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $a = 0$.

Opción B

Problema 1.21.4 *(2,5 puntos)* Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275,8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63,6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.

1.21.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.21.5 *(2,5 puntos)* Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{c} (k+1)x+3y+kz=1 \\ 3x+(k+1)y+2z=k-1 \\ kx+2y+kz=2 \end{array}\right. ,$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro real k.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $k=-3$.

Opción B

Problema 1.21.6 *(2,5 puntos)* Sean $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y A una matriz que verifica $AB=BC$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular el determinante de A.

b) (1 punto) Calcular BCB^{-1}.

c) (1 punto) Encontrar el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que $BC\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1.21.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.21.7 *(2,5 puntos)* Sea A una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son $(1,1,1,1)$ y $(1,2,3,4)$, y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición pedida, **justificándolo apropiadamente**:

a) (0,5 puntos) La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.

b) (0,5 puntos) Las tres filas de A son linealmente independientes.

c) (0,5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.

d) (0,5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.

e) (0,5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

Opción B

Problema 1.21.8 *(2,5 puntos)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1 puntos) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.

b) (0,5 puntos) Calcular la matriz $C = A^2 - 2I$.

c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

1.22. Año 2021

1.22.1. Modelo

Opción A

Problema 1.22.1 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & x-1 \\ x+1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales A tiene inversa.

b) (1 punto) Para $x = -1$, calcular la inversa de A.

c) (1 punto) Para $x = 1$, hallar $(AB^t)^3$ y $(AB^t)^{2020}$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

Opción B

Problema 1.22.2 *(2,5 puntos)* Dados la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix}$ y el vector $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, determine el valor o valores de a para los que:

a) (1,5 puntos) El sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$ no tenga solución.

b) (1 punto) $A = A^{-1}$.

1.22.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.22.3 *(2,5 puntos)* Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 euros, que corresponden a tres empresas A, B y C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano.

Opción B

Problema 1.22.4 *(2,5 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax - 2y + (a-1)z = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -ax + y - 6z = 6 \end{cases}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema según los diferentes valores de a.

b) (0,5 puntos) Resuelva el sistema para $a = 1$.

1.22.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.22.5 *(2,5 puntos)* Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) (1,25 puntos) Determine los valores del parámetro real m para los que la matriz A es invertible y calcule su inversa en esos casos.

b) (0,75 puntos) Estudie el sistema de ecuaciones $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$ en función del parámetro m.

c) (0,5 puntos) Resuelva el sistema del apartado anterior para el valor $m = 2$.

Opción B

Problema 1.22.6 *(2,5 puntos)* Una tienda online de productos gourmet elabora tres tipos de cafés exclusivos, el Gold Cuvée (a 7,85 euros/kg), el Paradiso (a 13,3 euros/kg) y el Cremissimo (a 24,85 euros/kg). Para ello utiliza solo dos tipos de grano, el Arábica y el Robusta. El Gold Cuvée tiene un 90 % de grano tipo Arábica, el Paradiso un 85 % y el Cremissimo un 80 %.
A lo largo de un mes han necesitado utilizar 27,1 kg de grano del tipo Robusta para atender todos los pedidos y han ingresado un total de 3112,5 euros. Sabiendo que se ha vendido doble cantidad de café Cremissimo que de las otras dos especialidades juntas, se pide calcular los kilogramos de grano del tipo Arábica que se han utilizado a lo largo de ese mes.

1.22.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.22.7 *(2,5 puntos)* Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25 % de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.

Opción B

Problema 1.22.8 *(2,5 puntos)*

a) (0,75 puntos) Encuentre un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x e y, que tenga como soluciones $\{x = 1,\ y = 2\}$ y $\{x = 0,\ y = 0\}$.

b) (1 punto) Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x, y y z cuyas soluciones sean, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda - 2 \\ z = \lambda - 1 \end{cases}$$

c) (0,75 puntos) Encuentre un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, x e y, que solo tenga como solución a $x = 1$ e $y = 2$.

1.23. Año 2022

1.23.1. Modelo

Opción A

Problema 1.23.1 *(2,5 puntos)* En una academia de idiomas se imparten clases de inglés, francés y alemán. Cada alumno está matriculado en un único idioma. El número de alumnos matriculados en inglés representa el 60 % del total de alumnos de la academia. Si diez alumnos de francés se hubiesen matriculado en alemán, ambos idiomas tendrían el mismo número de alumnos. Además, la cuarta parte de los alumnos de inglés excede en ocho al doble de la diferencia entre los alumnos matriculados en francés y alemán. Calcule el número de alumnos matriculados en cada idioma.

Opción B

Problema 1.23.2 *(2,5 puntos)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa.

b) (1 punto) Para $a = 1$, calcular la inversa de la matriz A.

c) (1 punto) Para $a = 2$, resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$.

1.23.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.23.3 *(2,5 puntos)* Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m:

$$\begin{cases} x - 2my + z = 1 \\ mx + 2y - z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de m.

b) (0,5 puntos) Resuelva el sistema para $m = \frac{1}{2}$.

Opción B

Problema 1.23.4 *(2,5 puntos)* Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Además, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio la diferencia entre lo que recibe Pablo y lo que recibe Alicia es de 420 euros, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

1.23.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.23.5 *(2,5 puntos)* Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ mx + (m+1)y - z = m - 1 \\ -x - 2y + (2m-1)z = 1 - m \end{cases}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de m.

b) (0,5 puntos) Resuelva el sistema para el valor $m = 1$.

Opción B

Problema 1.23.6 *(2,5 puntos)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+c & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcular el valor de a para que el sistema de ecuaciones $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sea compatible.

b) (1,5 puntos) Calcular los valores de a, b y c para que la multiplicación de dos de las matrices sea igual a la restante.

1.23.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.23.7 *(2,5 puntos)* En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías. Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos. Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas. Si retiráramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían ciento cinco libros. Calcule el número de libros de cada clase que hay en la estantería.

Opción B

Problema 1.23.8 *(2,5 puntos)* Se consideran las matrices reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcule para qué valores del parámetro k tiene inversa la matriz AB. Calcule la matriz inversa de AB para $k = 1$.

b) (1 punto) Calcule BA y discuta su rango en función del valor del parámetro real k.

c) (0,5 puntos) En el caso $k = 1$, escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea BA.

1.23.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.23.9 *(2,5 puntos)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Se pide:

a) (0,5 puntos) Para $b = a^2$, determinar los valores de a para que la matriz A tenga inversa.

b) (1 punto) Para $b = 4$ y $a = -2$, calcular $A^{-1} \cdot (B + 2A) - (A^{-1} + B^t) \cdot B$.

c) (1 punto) Para $b = 1$, discutir el rango de la matriz $A + B$ en función del parámetro a.

Opción B

Problema 1.23.10 *(2,5 puntos)* Los precios de las entradas para un musical son 8 euros para los asistentes menores de 18 años, 25 euros para los adultos de menos de 60 años, y 10 euros para aquellos de al menos 60 años. Tras el concierto, se sabe que se han vendido tantas entradas de 25 euros como de las otras dos categorías juntas; y también que ha habido 9 asistentes menores de edad por cada uno de aquellos de al menos 60 años. Si la recaudación final fue de 8300 euros, calcule el número de asistentes de cada rango de edad.

1.24. Año 2023

1.24.1. Modelo

Opción A

Problema 1.24.1 *(2,5 puntos)* En la liga de fútbol profesional de Libertonia compiten veinte equipos. Cada equipo debe tener exactamente veinticinco jugadores de los que tres, y no más, han de ser porteros. Se sabe que la tercera parte del número de defensas coincide con la diferencia entre el número de centrocampistas y el número de delanteros. Por otro lado, la suma de la mitad del número de centrocampistas y el doble del número de delanteros excede en 25 unidades al número de defensas. Calcule el número de defensas, el número de centrocampistas y el número de delanteros que juegan en la liga.

Opción B

Problema 1.24.2 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular, si existe, el valor de m para el cual se verifica que $A^tB = C$.

b) (1 punto) Calcular, si existen, los valores de m para los que existe la inversa de AC y calcular para $m = 0$ la inversa de AC.

c) (0,75 puntos) Calcular, si existe, el valor de m para el cual se cumple que $B^2 = B - I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

1.24.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.24.3 *(2,5 puntos)* En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El 10 % de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuánta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

Opción B

Problema 1.24.4 *(2,5 puntos)* Dado el sistema $\begin{cases} (a+1)x + 4y = 0 \\ (a-1)y + z = 3 \\ 4x + 2ay + z = 3 \end{cases}$, se pide Se pide:

a) (1,25 puntos) Discutirlo en función del parámetro a

b) (0,5 puntos) Resolverlo para $a = 3$

c) (0,75 puntos) Resolverlo para $a = 5$.

1.24.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.24.5 (2,5 puntos) Dada la matriz real $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ a & 3 & -6 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar el rango de la matriz A en función del parámetro a.

b) (1 punto) Calcular, en el caso de que exista, la inversa de A para $a = 0$.

c) (0,5 puntos) Resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para el caso $a = 1$.

Opción B

Problema 1.24.6 (2,5 puntos) Un dietista veterinario ha establecido la alimentación diaria (en términos de grasas, carbohidratos y proteínas) de un quebrantahuesos pirenaico que se ha recogido en el hogar de recuperación de fauna en el que trabaja. Se sabe que el quebrantahuesos necesita 500 g de alimento al día y que necesita 2500 Kcal. También se sabe que cada gramo de grasa proporciona 9 Kcal, cada gramo de carbohidratos 4 Kcal y cada gramo de proteínas 4 Kcal. Debido a que el ave ha llegado en un estado de debilidad, el veterinario estima que el consumo de carbohidratos debe ser 40 g más del doble de proteínas. Determine la cantidad de kilocalorías diaria que obtendrá el quebrantahuesos procedentes de grasas, de carbohidratos y de proteínas.

1.24.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.24.7 (2,5 puntos)
Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular el determinante de A^tA.

b) (0,5 puntos) Calcular el rango de BA en función de b.

c) (0,75 puntos) Calcular B^{-1} para $b = 2$.

d) (0,75 puntos) Para $b = 1$, calcular B^5.

Opción B

Problema 1.24.8 (2,5 puntos) Dado el sistema $\begin{cases} -2x + y + kz = 1 \\ kx - y - z = 0 \\ -y + (k-1)z = 3 \end{cases}$, se pide:

a) (1,25 puntos) Discutirlo en función del parámetro k.

b) (0,5 puntos) Resolverlo para $k = 3$.

c) (0,75 puntos) Resolverlo para $k = 3/2$ y especificar, si es posible, una solución particular con $x = 2$.

1.24.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.24.9 (2,5 puntos) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b+c & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} c & 2a+4 \\ 4b+4c+2 & 11 \end{pmatrix}$, Determine los valores de a, b y c sabiendo que dichas matrices verifican simultáneamente estas tres condiciones:

- la matriz AB es simétrica, es decir, coincide con su traspuesta.
- la matriz $A+B$ no tiene inversa.
- la matriz $AB-C$ es igual a la matriz identidad.

Opción B

Problema 1.24.10 (2,5 puntos) Una empresa conservera fabrica latas de macedonia de frutas (melocotón, pera y piña) de 1 kg. Las latas contienen 750 gramos de fruta y el resto es agua y azúcar. Si la empresa utiliza la misma cantidad de todas las frutas, el coste en fruta por lata para la conservera es de 1,8 euros y, si utiliza 0,25 kg de melocotón y 100 gramos más de piña que de pera, el coste en fruta por lata es de 1,9 euros. Si la empresa paga 18000 euros por un lote compuesto de 3000 kg de melocotón, 3000 kg de pera y 2000 kg de piña, calcule el coste para la empresa de cada kg de melocotón, de pera y de piña.

1.25. Año 2024

1.25.1. Modelo

Opción A

Problema 1.25.1 *(2,5 puntos)* La primera interpretación en EE.UU. de la octava sinfonía de Mahler tuvo lugar en Filadelfia en 1916 con la participación de una orquesta, dos coros con el mismo número de miembros, un tercer coro infantil y, además, ocho cantantes solistas invitados especialmente y que no pertenecían a ninguno de los coros. La décima parte del número total de intérpretes de los tres coros era menor en 15 unidades al de miembros de la orquesta. Los miembros de cada uno de los dos coros no infantiles superaban en 140 unidades a la suma de componentes del coro infantil y los de la orquesta. El número de miembros de la orquesta excedía en 21 unidades a la doceava parte del total de intérpretes. ¿Cuántos intérpretes tenía la orquesta y cada uno de los coros? ¿Cuántos intérpretes había en total?

Opción B

Problema 1.25.2 *(2,5 puntos)* Consideremos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar si existe algún valor de m para el cual la matriz BA tiene inversa.

b) (0,75 puntos) Estudiar el rango de la matriz AB en función del parámetro m.

c) (1 punto) Para $m = 1$, discutir el sistema $(A^t A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$, según los valores de a.

1.25.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.25.3 *(2,5 puntos)* Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tanto con dos listones largos y cuatro intermedios como con tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por uno largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.

Opción B

Problema 1.25.4 *(2,5 puntos)* Consideremos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ con $b \neq 0$. Se pide:

a) (1,25 puntos) Encontrar todos los valores de b para los que se verifica $BCB^{-1} = A$.

b) (0,75 puntos) Calcular el determinante de la matriz AA^t.

c) (0,5 puntos) Resolver el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $b = 1$.

1.25.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.25.5 (2,5 puntos) Tras una gran cosecha de sandías en una comarca, la producción se mete en cajas cúbicas de 1 m de lado que se amontonan en una gran pila compacta en forma de ortoedro. Al doble del largo de este ortoedro le faltan 2 m para llegar a ser la suma del ancho y el alto. Pero el largo supera en 8 m al ancho menos el alto. El perímetro de la base es 54 m. ¿Cuántas cajas de sandías ha producido esta cosecha?

Opción B

Problema 1.25.6 (2,5 puntos) Sean X e Y dos matrices reales y cuadradas de orden dos tales que $5X - 3Y = A$ y $3X + 6Y = B$, con $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y, $B = \begin{pmatrix} 39 & 2 \\ -15 & 13 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar X, Y y X^{-1}.

b) (1 punto) Calcular A^{127}.

1.25.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.25.7 *(2,5 puntos)* Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro λ, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
Se pide:

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema en el caso $\lambda = 1$ y encontrar, si es posible, una solución con $x = 5$.

Opción B

Problema 1.25.8 *(2,5 puntos)* Como es bien sabido, la siguiente igualdad de determinantes

$$\det(A + B) = \det A + \det B$$

no es cierta en general.

a) (0,75 puntos) Si A y B son dos matrices para las que $\det(A + B)$ =det$A$+det$B$, pruebe que entonces

$$\det((A + B)^2) = \det(A^2) + \det(B^2) + 2\det(AB).$$

b) (1 punto) Dadas las matrices

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

determine el único valor de α con el que sí se cumple la igualdad $\det(C + D)$ =det$C$+det$D$.

c) (0,75 puntos) Para el valor $\alpha = -1$, resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones lineales que tiene a C como matriz de coeficientes.

1.25.5. Extraordinaria-coincidente

Opción A

Problema 1.25.9 *(2,5 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes de un parámetro real a, $\begin{cases} 2x - y + az = -a \\ x + 2y + 3z = -2 \\ ax + ay + 2z = -8 \end{cases}$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función del parámetro a.

b) (0,5 puntos) Resuelva el sistema para $a = -10$.

Opción B

Problema 1.25.10 *(2,5 puntos)* Halle un número natural de tres cifras del que se conoce que: sus cifras suman 13; si al número dado se le resta el doble del número que resulta de intercambiar las cifras de las centenas y de las unidades, el resultado es 437; además, la cifra de las decenas excede en una unidad a la media aritmética de las otras dos cifras.

1.26. Año 2025

1.26.1. Modelo

Bloque 1

(Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Problema 1.26.1 (2,5 puntos) Sea λ un número real y considérense las matrices $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Estudiar si existe algún valor de λ para el cual la matriz AB no tenga inversa.

b) (1 punto) Estudiar el rango de la matriz BA en función del parámetro λ.

c) (1 punto) Para $\lambda = 1$, discutir el sistema $(A^t A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ a^2 \\ 2a \end{pmatrix}$, según los valores de a.

Problema 1.26.2 (2,5 puntos) Se tienen garrafas de tres tamaños diferentes para llenar un aljibe. Con seis garrafas pequeñas y 2 L se llenan exactamente una garrafa mediana y una grande. Con dos garrafas grandes llenamos dos medianas, una pequeña y sobra 1 L. El aljibe se llena al completo bien con catorce garrafas pequeñas más seis medianas, bien con cinco medianas junto con cinco grandes. Se pide calcular la capacidad de cada tipo de garrafa y, una vez conocidas estas, la del aljibe.

1.26.2. Ordinaria

Bloque 1

(Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Problema 1.26.3 (2,5 puntos) En el baloncesto existen canastas que valen un punto, otras que valen dos y otras que valen tres puntos. Calcule el número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido sabiendo que:

- El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80 % en tiros de uno, del 50 % en tiros de dos y del 40 % en tiros de tres.
- La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos.
- El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos.

Problema 1.26.4 (2,5 puntos) Sean la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3. Se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular el polinomio $P(\lambda) = det(A - \lambda I)$ y hallar las raíces reales del polinomio.

b) (1,25 puntos) Para $\lambda = 5$, calcular un vector no nulo $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que satisfaga que

$$(A - \lambda I) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

.

1.26.3. Ordinaria-Coincidente

Bloque 1

(Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Problema 1.26.5 (2,5 puntos) Sea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda x - y + 3z = 2 \\ 3x - 2y - z = 9 \\ 5x - 3y + \lambda z = 11 \end{cases}$$

a) (1.5 puntos) Decida en función de los valores del parámetro real λ en qué casos el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) (1 punto) Resuelva el sistema en el caso $\lambda = 2$.

Problema 1.26.6 (2,5 puntos) Una matriz cuadrada se dice estocástica si todos sus elementos son no negativos y la suma de los elementos de cada columna de la matriz es igual a 1.

a) (1,5 puntos) Consideremos la matriz estocástica $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$. Calcule todas las matrices diagonales, $D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, tales que DA sea una matriz estocástica.

b) (1 punto) Sea B una matriz estocástica de orden 3. ¿Existe alguna matriz diagonal D, distinta de la identidad, de tal forma que BD sea estocástica?

Capítulo 2

Geometría

2.1. Año 2000

2.1.1. Modelo

Opción A

Problema 2.1.1 *(2 puntos)* Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (a, 1 + a, 2a)$, $\overrightarrow{v} = (a, 1, a)$ y $\overrightarrow{w} = (1, a, 1)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar los valores de a para que los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ sean linealmente dependientes.

b) (0,5 puntos) Estudiar si el vector $\overrightarrow{c} = (3, 3, 0)$ depende linealmente de los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ para el caso $a = 2$. Justificar la respuesta.

c) (0,5 puntos) Justificar razonadamente si para $a = 0$ se cumple la igualdad

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = 0$$

Nota: el símbolo $\wedge$ significa producto vectorial.

Problema 2.1.2 *(2 puntos)*

a) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia al punto $A(4, 0)$ es el doble de su distancia a la recta $x = 1$.

b) Comprobar que el anterior lugar geométrico es una cónica. Indicar el tipo de cónica que es y hallar sus focos.

Opción B

Problema 2.1.3 *(3 puntos)*

a) (1 punto) Encontrar la distancia del punto $P(1, -1, 3)$ a la recta que pasa por los puntos $Q(1, 2, 1)$ y $R(1, 0, -1)$.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos P, Q y R.

c) (1 punto) Encontrar todos los puntos S del plano determinado por P, Q y R de manera que el cuadrilátero de vértices P, Q, R y S sea un paralelogramo.

2.1.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.1.4 *(2 puntos)* Resolver la siguiente ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{x} \wedge (2, 1, -1) = (1, 3, 5)$$

sabiendo que $|\overrightarrow{x}| = \sqrt{6}$, donde $\wedge$ significa "producto vectorial".

Problema 2.1.5 *(2 puntos)*

a) Determinar el centro y el radio de la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 8z - 4 = 0$$

b) Determinar el centro y el radio de la circunferencia intersección de la esfera del apartado anterior con el plano $z = 0$.

Opción B

Problema 2.1.6 *(3 puntos)* Sean los puntos $P(8, 13, 8)$ y $Q(-4, -11, -8)$. Se considera el plano π, perpendicular al segmento PQ por su punto medio.

a) (1 punto) Obtener la ecuación del plano π.

b) (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del punto $O(0, 0, 0)$ sobre π.

c) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro determinado por los puntos en los que el plano π corta a los ejes coordenados y en el origen de coordenadas.

2.1.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.1.7 *(3 puntos)* Sea la superficie esférica de ecuación $x^2+y^2+z^2-6x-6y-8z+9 = 0$.

a) (0,5 puntos) Determinar su centro y su radio.

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta que contiene al diámetro paralelo al eje OY.

c) (1 punto) Obtener el centro y el radio de la circunferencian que resulta al cortar dicha esfera con el plano $z = 0$.

d) (1 punto) Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera en su punto del eje OX.

Opción B

Problema 2.1.8 *(2 puntos)* Se consideran los puntos $A(1, a, 0)$, $B(1, 1, a - 2)$ y $C(1, -1, a)$.

a) (1 punto) Comprobar que no están alineados, cualquiera que sea el valor que tome el parámetro a.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo que determinan los tres puntos.

Problema 2.1.9 *(2 puntos)* Sean la recta

$$r : \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$$

y el plano

$$\pi : 2x - y + kz = 0$$

a) (1 punto) Calcular m y k para que la recta sea perpendicular al plano.

b) (1 punto) Calcular m y k para que la recta esté contenida en el plano.

2.2. Año 2001

2.2.1. Modelo

Opción A

Problema 2.2.1 *(3 puntos)* Sea la parábola $x^2 = 4y$. Sean u y v las rectas tangentes a la parábola en los puntos P de abscisa a y Q de abscisa b, (a_1, b), $(a_1, 0)$, $(b_1, 0)$.

a) (1,5 puntos) Hallar las coordenadas del punto R de intersección de u y v.

b) (1 punto) Hallar la relación entre a y b para que las rectas u y v sean perpendiculares.

c) (0,5 puntos) Probar que en el caso del apartado anterior, el punto R está en la directriz de la parábola.

Opción B

Problema 2.2.2 *(2 puntos)* Los vértices de un triángulo son $A(-2, -1)$, $B(7, 5)$ y $C(x, y)$.

a) Calcular el área del triángulo en función de x e y.

b) Encontrar el lugar geométrico de los puntos (x, y) tales que la anterior área es 36.

Problema 2.2.3 *(2 puntos)* Sea $A(1, 1)$ y $B(-1, 1)$ dos puntos del plano.

a) Determinar las ecuaciones de todas las circunferencias que pasan por los puntos A y B razonando dónde están situados sus centros.

b) De entre las circunferencias del apartado anterior hallar el centro y el radio de la que es tangente a la recta $y = x$.

2.2.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.2.4 *(3 puntos)* Dado el plano $\pi : x + y + x = 1$, la recta $r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1)$, y el punto $P(1, 1, 0)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta s que sea perpendicular a r y pase por P.

b) (1 punto) Hallar el punto P', simétrico de P respecto de r.

c) (1 punto) Hallar el punto P'', simétrico de P respecto de π.

Opción B

Problema 2.2.5 *(3 puntos)* Sean las rectas

$$r: x-2=\frac{y-1}{k}=\frac{z+1}{-2} \quad s:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=2-\lambda\\ z=2\lambda\end{array}\right.$$

a) (1 punto) Hallar k para que r y s sean coplanarias.

b) (1 punto) Para el valor anterior de k, hallar la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

c) (1 punto) Para el valor anterior de k, hallar la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas dadas.

2.2.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.2.6 *(2 puntos)* Determinar la ecuación cartesiana de los puntos del lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$ es igual a 9. Si se trata de una curva cerrada, calcular el área que encierra.

Problema 2.2.7 *(2 puntos)* Sean A, B y C tres puntos del espacio tridimensional que verifican la relación

$$\overrightarrow{CB}=-3\overrightarrow{CA}$$

a) (1 punto) Calcular el valor que toma k en la expresión $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$

b) (1 punto) Si $A(1,2,-1)$ y $B(3,6,9)$, hallar las coordenadas del punto C que cumple la relación de partida.

Opción B

Problema 2.2.8 *(3 puntos)* Se considera el tetraedro cuyos vértices son $A(1,0,0)$, $B(1,1,1)$, $C(-2,1,0)$ y $D(0,1,3)$.

a) (1 punto) Hallar el área del triángulo ABC y el volumen del tetraedro $ABCD$.

b) (1 punto) Calcular la distancia de D al plano determinado por los puntos A, B y C.

c) (1 punto) Hallar la distancia entre las rectas AC y BD.

2.3. Año 2002

2.3.1. Modelo

Opción A

Problema 2.3.1 *(2 puntos)* Se considera una varilla $\overline{AB}$ de longitud 1. El extremo A de esta varilla recorre completamente la circunferencia de ecuación: $x^2+y^2-4x-2y+1=0$; la varilla se mantiene en todo momento tangente a dicha circunferencia.

a) (1 punto) Determinar el lugar geométrico descrito por el extremo B de la varilla.

b) (1 punto) Obtener la ecuación cartesiana de dicho lugar geométrico.

Problema 2.3.2 *(2 puntos)* Sean las rectas:

$$r : \left\{ \begin{array}{c} x - 2y - 6z = 1 \\ x + y = 0 \end{array} \right. \qquad s : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{a} = z$$

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de r y s según los valores de a.

b) (1 punto) Calcular la distancia entre las rectas r y s cuando $a = -2$:

Opción B

Problema 2.3.3 *(3 puntos)* Sea la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

a) (1 punto) Hallar su centro y su radio y dibujarla.

b) (1 punto) Hallar el punto de la curva, de abscisa cero, más alejado del origen; hallar también la recta tangente a la curva en ese punto.

c) (1 punto) Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $P(3, 0)$ razonando la respuesta.

2.3.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.3.4 *(3 puntos)* Se consideran las cónicas C_1 y C_2 cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \quad ; \quad C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144$$

a) (2 puntos) Identificar C_1 y C_2. Especificar, para cada una de ellas, sus elementos característicos: vértices, focos, excentricidad, y asíntotas (si existen).

b) (1 punto) Hallar una ecuación cartesiana de la parábola de eje horizontal, abierta hacia la derecha y que pasa por tres de los vértices de la cónica C_1.

Opción B

Problema 2.3.5 *(2 puntos)* Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r:

$$x = 1 + t \quad , \quad y = -1 + 2t \quad , \quad z = t$$

y es perpendicular al plano π:

$$2x + y - z = 2.$$

Problema 2.3.6 *(2 puntos)* Los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(1, 3, 3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.
Se pide:

a) (1 punto) Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y calcular el área de dicho paralelogramo.

b) (1 punto) Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

2.3.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.3.7 *(3 puntos)* Se consideran las rectas

$$r: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{2} \quad s: \frac{x-2}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$$

a) (1 punto) Calcular la distancia entre r y s.

b) (1 punto) Hallar las ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular común a r y s y que corta a ambas.

c) (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que corta a r y s y que pasa por el punto $P(1,0,0)$.

Opción B

Problema 2.3.8 *(2 puntos)* Hallar una ecuación cartesiana del lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los puntos $A(0,3)$ y $B(0,-1)$ es igual a 1. Identificar dicho lugar geométrico.

Problema 2.3.9 *(2 puntos)* Para cada valor del parámetro real a, se consideran los tres planos siguientes:

$$\pi_1: x+y+az=-2; \quad \pi_2: x+ay+z=-1; \quad \pi_2: ax+y+z=3$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular los valores de a para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.

b) (0,5 puntos) Para los valores de a calculados, hallar unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.

2.4. Año 2003

2.4.1. Modelo

Opción A

Problema 2.4.1 *(3 puntos)* Se consideran el plano π y la recta r siguientes:

$$\pi: x+y-2z=6; \quad r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$$

Se pide:

a) (1,5 punto) Hallar el punto simétrico de $M(1,1,1)$ respecto del plano π.

b) (1,5 punto) Hallar el punto simétrico de $M(1,1,1)$ respecto de la recta r.

Opción B

Problema 2.4.2 *(3 puntos)* Se consideran los puntos:

$$A(1,1,1),\ \ B(0,-2,2)\ \ C(-1,0,2)\ \ D(2,-1,-2).$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

b) (1 punto) Calcular la distancia del punto D al plano determinado por los puntos A, B y C.

c) (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano determinado por los puntos A, B y C.

2.4.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.4.3 *(3 puntos)* Dadas las rectas en el espacio:

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$$

$$s: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

a) (1,5 punto) Hallar la distancia entre las dos rectas.

b) (1,5 puntos) Determinar las ecuaciones de la perpendicular común a r y s.

Opción B

Problema 2.4.4 *(3 puntos)* Dados el plano

$$\pi: x + 3y - z = 1$$

y la recta

$$s: \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

a) (1,5 punto) Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

b) (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π, π'.

2.4.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.4.5 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(1,0,1)$ y $B(0,2,0)$, y el plano $\pi \equiv x-2y-z-7 = 0$, determinar el plano que es perpendicular al plano π y pasa por los puntos A y B.

Problema 2.4.6 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-k}{1}$$

$$s: \left\{ \begin{array}{rrr} x- & y+ & z=3 \\ 3x+ & & z=1 \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Hallar el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.

b) (1 puntos) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.

Opción B

Problema 2.4.7 *(3 puntos)* Dado el plano

$$\pi : x + y + z = 0$$

y la recta

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto Q en el que se cortan el plano π y la recta r.

b) (2 puntos) Encontrar un plano π', paralelo a π, tal que el punto Q' en el que se cortan el plano π' y la recta r esté a distancia 2 del punto Q hallado en el apartado anterior.

2.5. Año 2004

2.5.1. Modelo

Opción A

Problema 2.5.1 *(3 puntos)* Dado el plano:

$$\pi : x + y + az + 1 = 0$$

y las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{array} \right. \quad r' : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2t \\ z = t \end{array} \right. \quad r'' : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 3t \\ z = t \end{array} \right.$$

Se pide:

a) Calcular el valor de a para que los puntos de corte del plano π con las rectas r, r' y r'' estén alineados (1,5 puntos).

b) Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por esos tres puntos (0,75 puntos).

c) Calcula la distancia de dicha recta al origen (0,75 puntos).

Opción B

Problema 2.5.2 *(2 puntos)* Se consideran las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - y = 2 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} 2x - z + 2 = 0 \\ 2y - mz = 6 \end{array} \right.$$

a) Hallar el valor de m para que r y s sean paralelas.

b) Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación del plano que contiene las rectas r y s.

Problema 2.5.3 *(2 puntos)* Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(3,-1,0)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=3+2\lambda\\ y=4+\lambda\\ z=5+3\lambda \end{array}\right.$$

2.5.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.5.4 *(3 puntos)* Se consideran la recta y los planos siguientes:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=2-3\lambda\\ y=1+2\lambda\\ z=4-\lambda \end{array}\right. ;\quad \pi_1: 2-3x+2y-z=0;\quad \pi_2: 3+2x+2y-2z=0$$

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.

b) (1 punto) Determinar la posición relativa de los dos planos.

c) (1 punto) Calcular la distancia de r a π_2.

Opción B

Problema 2.5.5 *(3 puntos)*

a) (2 puntos) Determinar la posición relativa de los siguientes planos, para los distintos valores del parámetro k:

$$\begin{array}{rrrrr} \pi_1: & 2x+ & 3y+ & kz= & 3\\ \pi_2: & x+ & ky- & z= & -1\\ \pi_3: & 3x+ & y- & 3z= & -k \end{array}$$

b) (1 punto) En los casos en que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta.

2.5.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.5.6 *(3 puntos)* Sea el plano $\pi: x+2y+3z=6$.

a) (1 punto) Hallar el punto simétrico del $(0,0,0)$ respecto de π.

b) (1 punto) Hallar el plano perpendicular a π que contiene a OZ.

c) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de π con los ejes de coordenados.

Opción B

Problema 2.5.7 *(2 puntos)*

a) (1,5 puntos) Hallar el conjunto formado por los puntos del plano $z = 0$ que distan 3 unidades del plano de ecuación $2x - y + 2z = 4$.

b) (0,5 puntos) Describir dicho conjunto.

Problema 2.5.8 *(2 puntos)* El plano $\pi : 2x - 2y + z = -2$ determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen.

b) (0,5 puntos) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a dicha altura.

c) (1 punto) Calcular el área de la cara del tetraedro que está contenida en el plano π.

2.6. Año 2005

2.6.1. Modelo

Opción A

Problema 2.6.1 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(-1, 1, 1)$, $B(1, -3, -1)$ y $C(1, 0, 3)$, hallar las coordenadas de un punto D perteneciente a la recta:

$$r : x - 1 = \frac{y - 1}{-1} = z - 1$$

de manera que el tetraedro $ABCD$ tenga un volumen igual a 2.

Opción B

Problema 2.6.2 *(3 puntos)* Se considera la recta: $r : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y - 4}{3} = \dfrac{z - 5}{2}$ y la familia de rectas dependientes del parámetro m:

$$s : \begin{cases} 3x - y = 8 - 12m \\ y - 3z = 7 - 3m \end{cases}$$

a) (2 puntos) Determinar el valor de m para el que las dos rectas r y s se cortan.

b) (1 punto) Para el caso de $m = 0$, hallar la distancia entre las dos rectas.

2.6.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.6.3 *(3 puntos)* Dado el punto $P(1, 3, -1)$, se pide:

a) (1 punto) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x, y, z)$ cuya distancia a P sea igual a 3.

b) (2 puntos) Calcular los puntos de la recta

$$\left\{\begin{array}{lrr} x = & & 3\lambda \\ y = & 1+ & \lambda \\ z = & 1- & 4\lambda \end{array}\right.$$

cuya distancia a P es igual 3.

Opción B

Problema 2.6.4 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4} \quad s : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$$

a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta t que corta a las dos y es perpendicular a ambas.

b) (1,5 puntos) Calcular la mínima distancia entre r y s.

2.6.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.6.5 *(2 puntos)* Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos

$$\begin{array}{l} \pi_1 : x + z = \lambda \\ \pi_2 : 4x + (\lambda - 2)y + (\lambda + 2)z = \lambda + 2 \\ \pi_3 : 2(\lambda + 1)x - (\lambda + 6)z = -\lambda \end{array}$$

Problema 2.6.6 *(2 puntos)* Se consideran las rectas

$$r : \left\{\begin{array}{llr} x- & y & = 3 \\ x+ & y & -z = 0 \end{array}\right. , \quad s : \left\{\begin{array}{llr} x- & & z = 4 \\ 2x- & y & = 7 \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Hallar la recta t, perpendicular a r y a s, que pasa por el origen.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta s con la recta t obtenida en el apartado anterior.

Opción B

Problema 2.6.7 *(3 puntos)* Se considera la familia de planos:

$$mx + (m-2)y + 3(m+1)z + (m+1) = 0$$

siendo m un parámetro real.

Se pide:

a) (1 punto) Determinar la recta común a todos los planos de la familia.

b) (1 punto) Determinar el plano de esta familia que pasa por el punto $P(1, 1, 0)$.

c) (1 punto) Determinar el plano de esta familia que es paralelo a la recta:

$$\left\{\begin{array}{llll} x- & & 2z+ & 1 = 0 \\ - & y+ & z+ & 1 = 0 \end{array}\right.$$

2.7. Año 2006

2.7.1. Modelo

Opción A

Problema 2.7.1 *(2 puntos)* Un punto de luz situado en $P(0,1,1)$ proyecta la sombra de la recta:

$$x = y = -z$$

sobre el plano $\pi : x - z = 0$.

Calcular las coordenadas del punto de esta proyección que pertenece al plano $z = 1$.

Problema 2.7.2 *(2 puntos)* Se consideran las rectas:

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-5}{2} \qquad s : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -4 + 3\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $P(2,-1,1)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.

Opción B

Problema 2.7.3 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{1} \qquad s : \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

b) (1,5 puntos) Calcular la distancia de s al plano anterior.

2.7.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.7.4 *(3 puntos)* Sean las rectas:

$$r : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \qquad \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

(Junio 2006 - Opción A)

a) (1,5 punto) Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.

b) (1,5 puntos) Hallar la recta perpendicular común a las rectas r y s.

Opción B

Problema 2.7.5 *(2 puntos)* Sea r la recta que pasa por el origen de coordenadas O y tiene como vector director $\overrightarrow{v} = (4,3,1)$. Hallar un punto P contenido en dicha recta, tal que si se llama Q a su proyección sobre el plano $\pi : z = 0$, el triángulo OPQ tenga área 1.

2.7.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.7.6 *(3 puntos)* Se consideran los puntos $A(0,1,0)$ y $B(1,0,1)$. Se pide:

a) (1 punto) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x,y,z)$ que equidistan de A y B.

b) (0,5 puntos) Determinar la ecuación que verifican los puntos $X(x,y,z)$ cuya distancia a A es igual a la distancia de A a B.

c) (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta formada por los puntos $C(x,y,z)$ del plano $x+y+z=3$ tales que el triángulo ABC es rectángulo con el ángulo recto en el vértice A.

Opción B

Problema 2.7.7 *(3 puntos)* Un plano π corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,\lambda,0)$ y $C(0,0,4)$. Se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar el valor de $\lambda > 0$ de manera que el volumen del tetraedro $OABC$ (donde O es el origen), sea 2.

b) (1,5 puntos) Para el valor de λ obtenido en el apartado 1.), calcular la longitud de la altura del tetraedro $OABC$ correspondiente al vértice O.

2.8. Año 2007

2.8.1. Modelo

Opción A

Problema 2.8.1 *(2 puntos)* Se considera la recta $\left\{\begin{array}{c} x-y=0 \\ x+2y+3z=0 \end{array}\right.$ y el punto $P(1,1,1)$. Dado el punto $Q(0,0,0)$ de r, hallar todos los puntos A contenidos en r tales que el triángulo de vértices A, P y Q tenga área 1.

Problema 2.8.2 *(2 puntos)*

a) (1,5 puntos) Calcula la ecuación general de un plano π_1 que contiene a la recta

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

y es perpendicular al plano $\pi_2: 2x+y-z=2$.

b) (0,5 puntos) Determinar la ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

Opción B

Problema 2.8.3 *(3 puntos)* Se consideran el punto $P(1,0,1)$ y la recta:

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

y el plano $\pi: x+y+z=0$. Se pide:

a) (1,5 puntos) Obtener un punto P', simétrico de P respecto del plano π.

b) (1,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta s que contiene al punto P, corta a la recta r y es paralela al plano π.

2.8.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.8.4 *(3 puntos)* Dados el punto $A(1,-2,-3)$, la recta $r: \left\{ \begin{array}{l} x+y+1=0 \\ z=0 \end{array} \right.$ y el plano $\pi: x-2y-3z+1=0$, se pide:

a) (1,5 puntos) Ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.

b) (1,5 puntos) Ecuación de la recta que pasa por A, corta a r y es paralela a π.

Opción B

Problema 2.8.5 *(3 puntos)* Sean los puntos

$$A(\lambda,2,\lambda), \quad B(2,-\lambda,0), \quad C(\lambda,0,\lambda+2)$$

a) (1 punto) ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos A, B y C están alineados?

b) (1 punto) Comprobar que si A, B y C no están alineados el triángulo que forman es isósceles.

c) (1 punto) Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para el valor $\lambda=0$ y hallar la distancia de este plano al origen coordenadas.

2.8.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.8.6 *(2 puntos)* Hallar los puntos de la recta $r: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z+1}{1}$ cuya distancia al plano $\pi: 2x-y+2z+1=0$ es igual a 1.

Problema 2.8.7 *(2 puntos)* Sea consideran las rectas:

$$r: \left\{ \begin{array}{c} x-y=3 \\ x+y-z=0 \end{array} \right. \qquad s: \left\{ \begin{array}{c} x-z=4 \\ 2x-y=7 \end{array} \right.$$

Hallar la ecuación continua de la recta que contiene al punto $P(2,-1,2)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.

Opción B

Problema 2.8.8 *(3 puntos)* Sean las rectas

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}, \quad s : \left\{ \begin{array}{l} x - 3y - 5 = 0 \\ x - 3z - 8 = 0 \end{array} \right.$$

a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

b) (1,5 puntos) Calcular la distancia entre el plano π y la recta s.

2.9. Año 2008

2.9.1. Modelo

Opción A

Problema 2.9.1 *(3 puntos)* Sean los puntos $A(1, 0, 2)$ y $B(1, 1, -4)$.

a) (1 punto) Determinar las coordenadas de los puntos P y Q que divide al segmento AB en tres partes iguales.

b) (1 punto) Si P es el punto del apartado anterior más próximo al punto A, determinar la ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a la recta AB.

c) (1 punto) Determinar la posición relativa del plano π y la recta

$$r : \frac{x-3}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$$

Opción B

Problema 2.9.2 *(2 puntos)* Hallar los puntos de la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} 2x + z = 0 \\ x - y + z = 3 \end{array} \right.$ cuya distancia al plano $\pi : 3x + 4y = 4$ es igual a $\frac{1}{3}$.

Problema 2.9.3 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(1, 3, -2)$, $B(2, 2k+1, k)$ y $C(k+1, 4, 3)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar para qué valor de k el triángulo BAC es rectángulo, con el ángulo recto en el vértice A.

b) (1 punto) Para el valor $k = 0$ hallar el área del triángulo ABC.

2.9.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.9.4 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - ay = 2 \\ ay + z = 1 \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x - z = 1 \\ y + z = 3 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Discutir la posición relativa de las dos rectas r, s según los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos) Si $a = 1$, calcular la distancia mínima entre las dos rectas r y s.

Opción B

Problema 2.9.5 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(0,0,1)$, $B(1,0,-1)$, $C(0,1,-2)$ y $D(1,2,0)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios.

b) (1 punto) Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.

c) (0,5 puntos) Hallar la distancia del punto D al plano π.

Problema 2.9.6 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi : 3x+2y-z+10=0$ y el punto $P(1,2,3)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

b) (0,5 puntos) Hallar el punto Q intersección de π con r.

c) (0,5 puntos) Hallar el punto R intersección de π con el eje OY.

d) (0,5 puntos) Hallar el área del triángulo PQR

2.9.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.9.7 *(2 puntos)* Dados los puntos $P(1,1,3)$ y $Q(0,1,0)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R. Describir dicho conjunto de puntos.

b) (1 punto) Hallar todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican $\text{dist}(P,S) = 2\text{dist}(Q,S)$, donde "dist" significa distancia.

Problema 2.9.8 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}, \quad s : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$$

hallar la ecuación de la recta t perpendicular común a ambas.

Opción B

Problema 2.9.9 *(3 puntos)* Dados el plano:

$$\pi_1 : x+y+z=1$$

y la recta:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar el punto P determinado por la intersección de r con π_1.

b) (2 puntos) Hallar el plano π_2 paralelo a π_1 y tal que el segmento de la recta r comprendido entre los planos π_1, π_2 tenga longitud $\sqrt{29}$ unidades.

2.10. Año 2009

2.10.1. Modelo

Opción A

Problema 2.10.1 *(3 puntos)* Dados el plano $\pi : x + 2y - z = 2$, la recta:

$$r : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{4}$$

y el punto $P(-2, 3, 2)$, perteneciente al plano π, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar la posición relativa de π y r.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta t contenida en π, que pasa por el punto P y que corta perpendicularmente a r.

c) (1,5 puntos) Sea Q el punto intersección de r y t. Si s es la recta perpendicular al plano π y que contiene a P, y R es un punto cualquiera de s, probar que la recta determinada por R y Q es perpendicular a r.

Opción B

Problema 2.10.2 *(3 puntos)* Dados el punto $P(1, -1, 2)$ y el plano $\pi : 2x - y + z = 11$, se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar el punto Q de intersección del plano π con la recta perpendicular a π que pasa por P. Hallar el punto simétrico del punto P respecto del plano π.

b) (1,5 puntos) Obtener la ecuación del plano paralelo al plano π que contiene al punto H que se encuentra a $5\sqrt{6}$ unidades del punto P en el sentido del vector $\overrightarrow{PQ}$.

2.10.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.10.3 *(3 puntos)* Dado el plano $\pi : x + 3y + z = 4$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto simétrico P del punto $O(0, 0, 0)$ respecto del plano π.

b) (1 punto) Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano $z = 0$.

c) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π, y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Opción B

Problema 2.10.4 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}, \quad s : \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1},$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

b) (1 punto) Determinar la distancia entre las rectas r y s.

c) (1 punto) Estudiar si la recta t paralela a r y que pasa por $O(0, 0, 0)$ corta a la recta s.

2.10.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.10.5 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{a}, \quad s: \frac{x-3}{b} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1},$$

determinar los valores de los parámetros a, b para los cuales las rectas r, s se cortan perpendicularmente.

Problema 2.10.6 *(2 puntos)* Dado el plano $\pi: 2x - y + 2z + 1 = 0$ hallar las ecuaciones de los planos paralelos a π que se encuentran a 3 unidades de π.

Opción B

Problema 2.10.7 *(3 puntos)* Dada la recta:

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

y el plano $\pi: x + y - 2z + 1 = 0$, hallar la ecuación de la recta s simétrica de la recta r respecto del plano π.

2.10.4. Reserva

Opción A

Problema 2.10.8 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{1}, \quad s: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-\lambda}{2}$$

se pide:

a) (1 punto) Determinar para qué valor, o valores, del parámetro λ las rectas r, s se cortan en un punto.

b) (1 punto) Para $\lambda = 23$ calcular las coordenadas del punto P intersección de las rectas r, s.

c) (1 punto) Para $\lambda = 23$ hallar la ecuación general del plano π determinado por las rectas r y s.

Opción B

Problema 2.10.9 *(3 puntos)* Se pide:

a) (1 punto) Demostrar que si tres vectores v_1, v_2 y v_3 son perpendiculares entre sí entonces se verifica que:

$$|\overrightarrow{v_1} + v\overrightarrow{_2} + \overrightarrow{v_3}|^2 = |\overrightarrow{v_1}|^2 + |\overrightarrow{v_2}|^2 + |\overrightarrow{v_3}|^2,$$

donde $|w|$ denota módulo del vector $\overrightarrow{w}$

b) (1 punto) Dados los vectores $\overrightarrow{v_1}(1, 1, -1)$, $\overrightarrow{v_2} = (1, 0, 1)$ hallar un vector $\overrightarrow{v_3}$ tal que:

$$|\overrightarrow{v_1} + v\overrightarrow{_2} + \overrightarrow{v_3}|^2 = |\overrightarrow{v_1}|^2 + |\overrightarrow{v_2}|^2 + |\overrightarrow{v_3}|^2.$$

c) (1 punto) Dado el vector $\overrightarrow{v}(1,2,3)$, hallar los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ que cumplan las tres condiciones siguientes:

   a) $\overrightarrow{v_1}$ tiene sus tres coordenadas iguales y no nulas;
   b) $\overrightarrow{v_1}$ es perpendicular a $\overrightarrow{v_2}$;
   c) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$

2.11. Año 2010

2.11.1. Modelo

Opción A

Problema 2.11.1 *(3 puntos)* Se consideran las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

$$s \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

a) (1,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta t que corta a r y s, y que contiene al origen de coordenadas.

b) (1,5 puntos) Determinar la mínima distancia entre las rectas r y s.

Opción B

Problema 2.11.2 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(2,2,3)$ y $B(0,-2,1)$, hallar el punto, o los puntos, de la recta:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{2}$$

que equidistan de A y de B.

Problema 2.11.3 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv 5x - 4y + z = 0$ y la recta:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

contenida en π, obtener la recta s contenida en π que es perpendicular a r, y que pasa por el origen de coordenada $O(0,0,0)$.

2.11.2. Ordinaria-General

Opción A

Problema 2.11.4 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-1}, \quad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$$

se pide:

a) (2 puntos) Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s

b) (1 puntos) Calcular la mínima distancia entre las rectas r y s.

Opción B

Problema 2.11.5 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}, \quad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x+z=3 \\ 2x-y=2 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano π determinado por r y s.

b) (1 punto) Hallar la distancia desde el punto $A(0,1,-1)$ a la recta s.

Problema 2.11.6 *(2 puntos)* Sea el plano π que contiene a los puntos $P(1,0,0)$, $Q(0,2,0)$ y $R(0,0,3)$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos P, Q y R.

b) (1 punto) Calcular las coordenadas del punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π.

2.11.3. Ordinaria-Específica

Opción A

Problema 2.11.7 *(3 puntos)* Dadas la recta:

$$r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$$

y el punto $P(2,0,-1)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta r.

b) (2 puntos) Hallar las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de la recta r.

Opción B

Problema 2.11.8 *(3 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv 2x + ay + 4z + 25 = 0$ y la recta:

$$r \equiv x+1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{5}$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular los valores de a para los que la recta r está contenida en el plano π.

b) (1 punto) Para el valor de $a=-2$, hallar el punto (o los puntos) que pertenecen a la recta perpendicular a π que pasa por $P(-3/2, 0, -11/2)$, y que dista (o distan) $\sqrt{6}$ unidades de π.

c) (1 punto) Para $a=-2$, halla el seno del ángulo que forman r y π.

2.11.4. Extraordinaria-General

Opción A

Problema 2.11.9 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ z = 3 \end{array} \right. \quad r_2 \equiv \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Hallar la ecuación de la recta t que corta a r_1 y r_2 y es perpendicular a ambas.

b) (1 puntos). Hallar la mínima distancia entre las rectas r_1 y r_2.

Opción B

Problema 2.11.10 *(3 puntos)* Dados el plano

$$\pi_1 \equiv\ 2x - 3y + z = a$$

y el plano π_2 determinado por el punto $P(0, 2, 4)$ y los vectores $v_1 = (0, 2, 6)$ y $v_2 = (1, 0, b)$, se pide:

a) (1 punto). Calcular los valores de a y b para que π_1 y π_2 sean paralelos.

b) (1 punto). Para $a = 1$ y $b = 0$ determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2.

c) (1 punto). Para $a = 4$ y $b = -2$ determinar los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2.

2.11.5. Extraordinaria-Específica

Opción A

Problema 2.11.11 *(3 puntos)* Se consideran las rectas:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = -1 \\ x + y = -2 \end{array} \right.$$

Determinar la ecuación de la recta t que pasa por el punto $P(0, 1, -2)$ y corta a las rectas r y s.

Opción B

Problema 2.11.12 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \left\{ \begin{array}{r} 2x + y - z = -2 \\ x - 2y = -1 \end{array} \right. \quad s : \frac{x + 1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z - 1}{2}$$

Se pide:

a) (1 punto). Dados los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(a, 3, -3)$, determinar el valor de a para que la recta t que pasa por los puntos A y B, sea paralela a s.

b) (1 punto). Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

Problema 2.11.13 *(2 puntos)* Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos:

$$\pi_1 : 5x - y - 7z = 1, \quad \pi_2 : 2x + 3y + z = 5$$

2.12. Año 2011

2.12.1. Modelo

Opción A

Problema 2.12.1 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}, \quad s \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{1}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de la rectas r y s.

b) (1 punto). Determinar la ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s.

Problema 2.12.2 *(2 puntos)* Dados los planos $\alpha \equiv 2x + y + 2z + 1 = 0$ y $\beta \equiv x - 2y + 6z = 0$, se pide:

a) (1 punto). Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r determinada por la intersección de α con β.

b) (1 punto). Determinar el plano γ que es paralelo al plano α y pasa por el punto $(\sqrt{2}, 1, 0)$

Opción B

Problema 2.12.3 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(1, -3, 0)$, $B(3, 1, -2)$,$C(7, 2, 3)$, $D(5, -2, 5)$ y $E(1, 0, 2)$, se pide:

a) (1 punto). Demostrar que los puntos A, B, C y D son coplanarios.

b) (1 punto). Demostrar que el polígono $ABCD$ es un paralelogramo y calcular su área.

c) (1 punto). Hallar la distancia del punto E al plano π determinado por los puntos A, B, C y D

2.12.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.12.4 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos). Hallar el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas

$$r_1 \equiv\ x = y = z, \ \ r_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right., \ \ r_3 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

con el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24$.

b) (1,5 puntos). Hallar la recta s que corta perpendicularmente a las rectas

$$r_4 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-2}, \ \ r_5 \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

Opción B

Problema 2.12.5 *(3 puntos)* Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + y - 2z = 1, \quad \pi_2 \equiv x - y + 2z = 1$$

se pide:

a) (0,5 puntos). Estudiar su posición relativa.

b) (1,5 puntos). En caso de que los planos sean paralelos hallar la distancia entre ellos, en caso de que se corten, hallar un punto y un vector de dirección de la recta que determinan.

Problema 2.12.6 *(2 puntos)* Se pide:

a) (0,75 puntos). Hallar la ecuación del plano π_1 que pasa por los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.

b) (0,75 puntos). Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene al punto $P(1, 2, 3)$ y es perpendicular al vector $\overrightarrow{v} = (-2, 1, 1)$.

c) (0,5 puntos). Hallar el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P.

2.12.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.12.7 *(3 puntos).* Dados los planos

$$\pi_1 : 2x + 3y + z - 1 = 0; \quad \pi_2 : 2x + y - 3z - 1 = 0,$$

y la recta

$$r : \frac{x-1}{2} = y + 1 = \frac{z+2}{2};$$

se pide:

a) (1 punto). El punto o puntos de r que equidistan de π_1 y π_2.

b) (1 punto). El volumen del tetraedro que π_1 forma con los planos coordenados XY, XZ e YZ.

c) (1 punto). La proyección ortogonal de r sobre el plano π_2.

Opción B

Problema 2.12.8 *(3 puntos).* Dado el punto $P(0, 1, 1)$ y las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}, \quad s : \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Determinar las coordenadas del punto simétrico de P respecto a r.

b) (1,5 puntos). Determinar la recta que pasa por el punto P, tiene dirección perpendicular a la recta r y corta a la recta s.

2.13. Año 2012

2.13.1. Modelo

Opción A

Problema 2.13.1 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(1,-1,2)$, $B(2,0,-1)$, $C(0,1,3)$, se pide:

a) (2 puntos). Hallar todos los puntos que equidistan de A, B y C. ¿Cuáles de ellos pertenecen al plano $\pi : 2x + 2y + 2z + 1 = 0$?

b) (1 punto). Hallar la ecuación del plano que pasa por A, B y C.

Opción B

Problema 2.13.2 *(3 puntos)* Dados los planos de ecuaciones:

$$\pi : x - 2y + 2z + 4 = 0, \quad \pi' = 2x + 2y - z - 2 = 0$$

se pide:

a) (1 punto). Obtener la ecuación en forma continua de la recta que determinan.

b) (1 punto). Hallar todos los puntos que equidistan de π y π'.

Problema 2.13.3 *(2 puntos)* Dadas las rectas

$$r : \frac{x+3}{-6} = \frac{y-9}{4} = \frac{z-8}{4}, \quad s : \frac{x-3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{x-8}{-2}$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar la posición relativa de las rectas r y s.

b) (1 punto). Hallar la distancia mínima entre r y s.

2.13.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.13.4 *(3 puntos)* Dados los puntos $P_1(1,3,-1)$, $P_2(a,2,0)$, $P_3(1,5,4)$ y $P_4(2,0,2)$, se pide:

a) (1 punto). Hallar el valor de a para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.

b) (1 punto). Hallar los valores de a para que el tetraedro con vértices en P_1, P_2, P_3, P_4 tenga volumen igual a 7.

c) (1 punto). Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3.

Opción B

Problema 2.13.5 *(3 puntos)* Dadas las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z}{2}, \quad r_2 \equiv \left\{ \begin{array}{c} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 5 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar su posición relativa.

b) (2 puntos). Hallar la mínima distancia de r_1 a r_2.

2.13.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.13.6 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Dados los puntos $P(2,1,-1)$, $Q(1,0,2)$ y la recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 \end{array} \right.$$

determinar los puntos de r que equidistan de P y Q.

b) (1 punto). Determinar la ecuación del plano π que pasa por el punto Q y es perpendicular a r.

Problema 2.13.7 *(2 puntos)* Una de las caras del paralelepípedo H tiene vértices en los puntos $A(4,2,8)$, $B(6,4,12)$, $C(6,0,10)$ y $D(8,2,14)$.

a) (1 punto). Si el punto $E(6,8,28)$ es otro de los vértices, hallar el volumen de H.

b) (1 punto). Hallar el punto E' simétrico de E respecto del plano que contiene a la cara $ABCD$.

Opción B

Problema 2.13.8 *(3 puntos)* Dadas la recta r y la familia de rectas s, mediante

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{c} x + 2y = -3 \\ z = 1 \end{array} \right. \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{c} 2x + 2y + z = a \\ x + z = 0 \end{array} \right. ,$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Hallar el valor de a para que ambas rectas se corten. Calcular el punto de corte.

b) (1,5 puntos). Hallar la ecuación del plano determinado por ambas rectas cuando estas se cortan.

2.13.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.13.9 *(2 puntos)* Se dan la recta r y el plano π, mediante

$$r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}, \quad \pi \equiv 2x + y - 2z - 7 = 0$$

Obtener los puntos de la recta cuya distancia al plano es igual a uno.

Problema 2.13.10 *(2 puntos)* Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}, \quad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y = 4 \\ 2x + z = 4 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(2,3,4)$ y es paralelo a las rectas r y s.

b) (0,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta que pasa por $B(4,-1,2)$ y es perpendicular al plano hallado anteriormente.

Opción B

Problema 2.13.11 *(3 puntos)* Dado el punto $P(2,1,-1)$, se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar el punto P' simétrico de P respecto del punto $Q(3,0,2)$.

b) (1,25 puntos). Hallar el punto P'' simétrico de P respecto de la recta $r \equiv x - 1 = y - 1 = z$.

c) (1,25 puntos). Hallar el punto P''' simétrico de P respecto del plano $\pi \equiv x + y + z = 3$.

2.14. Año 2013

2.14.1. Modelo

Opción A

Problema 2.14.1 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Hallar el punto de corte entre el plano $\pi_1 \equiv 6x - y + 3z = -2$ y la recta r que pasa por el punto $P(1;2;0)$ y es perpendicular al plano $\pi_2 \equiv 2x + 3y - z = 8$.

b) (1 punto). Hallar el punto común a los tres planos π_3; π_4; π_5 siguientes:

$$\pi_3 \equiv 5x + 2y + 7z = 4; \quad \pi_4 \equiv x + 2y - 3z = 10$$

y π_5 el plano definido por las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+3}{3} = z + 3; \quad r_2 \equiv x + 2 = y = \frac{z+7}{2}$$

Problema 2.14.2 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x - y + 2z = 1$ y la recta

$$r \equiv \frac{x}{-6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar la posición relativa entre el plano π y la recta r.

b) (1 punto). Determinar el plano que contenga a r y pase por $P(1; 1; 1)$.

Opción B

Problema 2.14.3 *(3 puntos)*

a) (1 punto). Hallar, si existe, el punto de corte de las rectas

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{c} x - y = 2 \\ x + y + z = 3 \end{array} \right. \quad ; \quad r_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right.$$

b) (1 punto). Determinar el valor de a para que los planos

$$\begin{array}{cc} \pi_1 : x + 2y + z = 3 & \pi_2 : 2x + 3y - z = 5 \\ \pi_3 : 2x + 2y + 4z = 3 & \pi_4 : x + 3y = a \end{array}$$

tengan un único punto en común.

c) (1 punto). Hallar la recta paralela a los planos

$$\pi_5 : 2x + 5y - z = 2; \quad \pi_6 : 6x - y + z = 8$$

que pasa por el punto $P(1; 5; -3)$.

2.14.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.14.4 *(3 puntos)* Dados el punto $P(-1, 0, 2)$ y las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - z = 1 \\ y - z = -1 \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar la posición relativa de r y s.

b) (1 punto). Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y corta a r y s.

c) (1 punto). Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s.

Opción B

Problema 2.14.5 *(2 puntos)* Dados el punto $P(1,0,-1)$, plano $\pi \equiv 2x - y + z - 1 = 0$ y la recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} -2x + y - 1 = 0 \\ 3x - z - 3 = 0 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Determinar la ecuación del plano que pasa por P es paralelo a r y perpendicular al plano π.

b) (0,5 puntos). Hallar el ángulo entre r y π.

2.14.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.14.6 *(3 puntos)* Dada la familia de rectas $r_a : \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ x - ay - 3 = 0 \end{array} \right.$, (variando a en $\mathbb{R}$ se obtiene toda la familia), se pide:

a) (0,75 puntos). Probar que todas las rectas de la familia se cortan en un mismo punto y calcular dicho punto.

b) (1,5 puntos). Dado el punto $P(0,0,1)$, calcular la ecuación del plano π_a que pasa por P y contiene a la recta r_a. Probar que la recta que pasa por P y por el punto $Q(3,0,0)$ está contenida en el plano π_a para todos los valores de a.

c) (0,75 puntos). Determinar para qué valores de a la distancia del punto $O(0,0,0)$ al plano de ecuación $x - ay + 3z = 3$ es $1/2$.

Opción B

Problema 2.14.7 *(3 puntos)* Dadas las rectas: $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 4x + y + 5z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \end{array} \right.$ y $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} y - z - 3 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{array} \right.$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa entre ellas.

b) (1 punto). Hallar la mínima distancia entre r y s.

c) (1 punto). Hallar el punto simétrico del origen respecto de la recta s.

2.14.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.14.8 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(2;-2;1)$, $B(0;1;-2)$, $C(-2;0;-4)$, $D(2;-6;2)$, se pide:

se pide:

a) (1 punto) Probar que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio (tiene dos lados paralelos) y hallar la distancia entre los dos lados paralelos.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo ABC.

Problema 2.14.9 *(2 puntos)* Dados el punto $P(1;2;-1)$ y el plano $\pi \equiv x + 2y - 2z + 2 = 0$, sea S la esfera que es tangente al plano π en un punto P' de modo que el segmento PP' es uno de sus diámetros. Se pide:

a) (1 punto). Hallar el punto de tangencia P'.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de S.

Opción B

Problema 2.14.10 *(3 puntos)* Sean r_A la recta con vector dirección $(1;\lambda;2)$ que pasa por el punto $A(1;2;1)$, r_B la recta con vector dirección $(1;1;1)$ que pasa por $B(1;-2;3)$, y r_C la recta con vector dirección $(1;1;-2)$ que pasa por $C(4;1;-3)$. Se pide:

a) (1 punto). Hallar λ para que las rectas r_A y r_B se corten.

b) (1,5 puntos). Hallar λ para que las rectas r_A sea paralela al plano definido por r_B y r_C.

c) (0,5 puntos). Hallar el ángulo que forman r_B y r_C.

2.14.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.14.11 *(3 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x-2y+z = 6$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{m} = z$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y π según los valores de m.

b) (1 punto). Para $m = -2$, determinar el plano que contiene a r y es perpendicular a π.

c) (1 punto). Para $m = -2$, determinar el punto de corte de r y π.

Opción B

Problema 2.14.12 *(3 puntos)* Dado el haz de planos de $\mathbb{R}^3$ definido por: $\pi_a \equiv x+2y+az-1 = 0$ (al variar a en $\mathbb{R}$ se obtienen todos los planos del haz) y la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = y+3 = \dfrac{z}{2}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar para qué valores de a la recta r es paralela al plano π_a .

b) (1 punto). Razonar si hay algún valor de a tal que la recta r es perpendicular al plano π_a, y en caso afirmativo calcular dichos valores de a.

c) (1 punto). Si $a = 1$, obtener los puntos de la recta r cuya distancia al plano π_1 es $\sqrt{6}$

2.15. Año 2014

2.15.1. Modelo

Opción A

Problema 2.15.1 *(3 puntos)* Dados el punto $P(1;1;1)$ y los planos

$$\pi_1 \equiv 3x + ay + z = 0; \quad \pi_2 \equiv ax + y + 2z = 0; \quad \pi_3 \equiv x + y - z = 0;$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular los valores de a para los que los planos se cortan en una recta.

b) (1 punto). Para $a = 2$, hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

c) (1 punto). Hallar el punto P' proyección de P sobre el plano π_3.

Opción B

Problema 2.15.2 *(3 puntos)*

a) (1 punto) Determinar si se puede construir un triángulo que tenga dos de sus lados sobre la rectas

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = -6 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right. \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y - 4 = 0 \\ 2x + z - 6 = 0 \end{array} \right.$$

b) (2 puntos) Encontrar la ecuación de la recta perpendicular común a las dos rectas anteriores.

2.15.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.15.3 *(3 puntos)* Dados el punto $P(1,0,1)$, el plano $\pi \equiv x + 5y - 6z = 1$ y la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$, se pide:

a) (1 punto). Calcular el punto P' simétrico a P respecto de π.

b) (1 punto). Hallar la distancia de P a r.

c) (1 punto). Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas $O(0,0,0)$ y las intersecciones de π con los ejes coordenados OX, OY y OZ.

Opción B

Problema 2.15.4 *(3 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv 2x - y = 2$, y la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{r} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{array} \right.$

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y π.

b) (1 punto). Determinar el plano que contiene a r y es perpendicular a π.

c) (1 punto). Determinar la recta que pasa por $A(-2,1,0)$, corta a r, y es paralela a π.

2.15.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.15.5 *(2 puntos)* Dado el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 1$, se pide:

a) (1 punto). Obtener las rectas que pasan por el origen de coordenadas, son paralelas al plano π y cortan al plano $z = 0$ con un ángulo de 45 grados.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de la esfera de centro el origen $O(0, 0, 0)$ que es tangente a π.

Problema 2.15.6 *(2 puntos)* Sean los puntos $A(2, 1, 0)$ y $B(0, 1, -4)$. Se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación del plano π respecto del cual A y B son simétricos.

b) (1 punto). Calcular los puntos situados sobre la recta determinada por A y B que están a $\sqrt{6}$ unidades de distancia de $P(2, -1, 1)$.

Opción B

Problema 2.15.7 *(3 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv 5x - 3y + 4z - 10 = 0$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+6}{1} = \dfrac{z-8}{-3}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la distancia de la recta al plano.

b) (1 punto). Hallar la proyección del punto $P(5, -2, 1)$ sobre el plano π.

c) (1 punto). Hallar la proyección del punto $Q(-1, 7, 3)$ sobre la recta r.

2.15.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.15.8 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(2, 0, -2)$, $B(3, -4, -1)$, $C(5, 4, -3)$ y $D(0, 1, 4)$, se pide:

a) (1 punto). Calcular el área del triángulo de vértices A, B y C.

b) (1 punto). Calcular el volumen del tetraedro $ABCD$.

Problema 2.15.9 *(2 puntos)* Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + z - 1 = 0, \quad \pi_2 \equiv x + z + 2 = 0, \quad \pi_3 \equiv x + 3y + 2z - 3 = 0,$$

se pide:

a) (1 punto). Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π_1 y π_2.

b) (1 punto). Calcular el seno del ángulo que la recta del apartado anterior forma con el plano π_3.

Opción B

Problema 2.15.10 *(3 puntos)* Dados el plano π y la recta r siguientes:

$$\pi \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0, \quad r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = 1 + t, \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y π.

b) (1 punto). Calcular la distancia entre r y π.

c) (1 punto). Obtener el punto P' simétrico de $P(3, 2, 1)$ respecto del plano π.

2.16. Año 2015

2.16.1. Modelo

Opción A

Problema 2.16.1 *(2 puntos)* Dadas las rectas: $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$; $s : \begin{cases} x + y = 1 \\ y = z \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa entre ellas. Determinar, en su caso, la intersección entre ambas y el ángulo que forman sus vectores directores.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta perpendicular a las direcciones de r y s, y que pasa por el punto $(0, 0, 0)$.

Problema 2.16.2 *(2 puntos)* Dados los puntos $P_1(1, -1, 2)$, $P_2(2, -3, 0)$ y $P_3(3, 1, 2)$, se pide:

a) (0,5 puntos). Determinar la ecuación del plano π que contiene los tres puntos.

b) (0,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta r que pasa por P_1 y es perpendicular a π.

c) (1 punto). Hallar la ecuación de las dos superficies esféricas de radio $\sqrt{17}$ que son tangentes al plano π en el punto P_1.

Opción B

Problema 2.16.3 *(3 puntos)* Dados el punto $P(1, 2, -1)$ y las rectas:

$$r : \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y - 3z = -2 \end{cases} \quad ; \quad s : \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular la mínima distancia entre r y s.

b) (1 punto). Determinar el punto P' simétrico de P respecto de r.

c) (1 punto). Determinar los puntos de la recta r que equidistan de los planos XY e YZ.

2.16.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.16.4 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Dados vectores $\overrightarrow{u} = (2, 3, 4)$, $\overrightarrow{v} = (-1, -1, -1)$ y $\overrightarrow{w} = (-1, \lambda, -5)$, encontrar los valores de λ que hacen que el paralelepípedo P generado por $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ tenga volumen 6.

b) (1 punto). Obtener la ecuación de la recta incluida en el plano $z = 0$, con dirección perpendicular a $\overrightarrow{u} = (2, -1, 4)$ y que pasa por el punto $(1, 1, 0)$.

Problema 2.16.5 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi : x - 2y + 2z + 1 = 0$ y la superficie esférica $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$, hallar los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano π.

Opción B

Problema 2.16.6 *(3 puntos)* Dados el punto $P(-4, 6, 6)$, el origen de coordenadas O, y la recta $r : \left\{\begin{array}{l} x = -4 + 4\lambda \\ y = 8 + 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{array}\right.$ se pide:

a) (1 punto). Determinar un punto Q de la recta r, de modo que su proyección Q' sobre $\overline{OP}$ sea el punto medio de este segmento.

b) (1 punto). Determinar la distancia de P a r.

c) (1 punto). ¿Existe algún punto R de la recta r, de modo que los puntos O, P y R estén alineados? En caso afirmativo, encontrar el punto (o los puntos) con esa propiedad o, en caso negativo, justificar la no existencia.

2.16.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.16.7 *(3 puntos)* Dados la recta $r \equiv \left\{\begin{array}{c} x - y + az = 0 \\ ay - z = 4 \end{array}\right.$, con $a \in \mathbb{R}$, y el plano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$, se pide:

a) (1 punto). Hallar todos los valores de a para los que la recta r es paralela al plano π.

b) (1 punto). Para $a = 2$, determinar la distancia de la recta r al plano π.

c) (1 punto). Para $a = 1$, hallar el seno del ángulo que forman r y π.

Opción B

Problema 2.16.8 *(2 puntos)* Dadas las rectas $r \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 3 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{array}\right.$ y $s \equiv \dfrac{x+1}{2} = y - 5 = -(z+2)$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y s.

b) (1 punto). Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1,6,-3)$, está contenida en el plano que determinan r y s y es perpendicular a r.

Problema 2.16.9 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x+y-z+1=0$ y la recta $r \equiv (x,y,z) = (0,0,1)+\lambda(2,1,0)$, se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,0,-1)$ y es paralelo a π.

b) (1 punto). Determinar la distancia del origen de coordenadas a la recta r.

c) (0,5 puntos). Determinar la distancia del origen de coordenadas al plano π.

2.16.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.16.10 *(3 puntos)* La recta r pasa por $P(2,-1,0)$ y tiene vector director $(1,\lambda,-2)$; la recta s pasa por $Q(1,0,-1)$ y tiene vector director $(2,4,2)$.

a) (2 puntos). Calcular $\lambda > 0$ para que la distancia entre r y s sea $\dfrac{9}{\sqrt{59}}$.

b) (1 punto). Calcular λ para que r sea perpendicular a la recta que pasa por P y Q.

Opción B

Problema 2.16.11 *(3 puntos)* Dados los puntos $P(-1,-1,1)$, $Q(1,0,2)$ y los planos

$$\pi_1 \equiv x-z=0; \quad \pi_2 \equiv my-6z=0; \quad \pi_3 \equiv x+y-mz=0$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular los valores de m para los que los tres planos se cortan en una recta.

b) (1 punto). Para $m=3$, hallar la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta de intersección de los planos π_1 y π_2.

c) (1 punto). Hallar la distancia entre los puntos Q y P', siendo P' el punto simétrico de P respecto al plano π_1.

2.16.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.16.12 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(2,1,1)$, $B(0,0,-3)$ y $P(1,1,1)$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación del plano que contiene a P y a la recta que pasa por A y B.

b) (1 punto). Hallar el área del triángulo formado por A, B y P.

c) (1 punto). Hallar las coordenadas del punto C que forma con A y B un triángulo rectángulo en C, sabiendo que C está en el eje OX y tiene primera coordenada negativa.

Opción B

Problema 2.16.13 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x - y + 2z + 3 = 0$, el punto $A(-1, 4, 1)$ y la recta $r \equiv x - 1 = y + 1 = \dfrac{z-1}{2}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar el seno del ángulo formado por π y r.

b) (1 punto). Hallar las ecuaciones de la recta s que pasa por A y es perpendicular a π.

Problema 2.16.14 *(2 puntos)* Dado el vector $\overrightarrow{v} = (1, 0, -2)$, se pide:

a) (1 punto). Obtener todos los vectores de módulo $\sqrt{5}$ que son perpendiculares al vector $\overrightarrow{v}$ y tienen alguna coordenada nula.

b) (1 punto). Obtener los vectores $\overrightarrow{w}$ tales que $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (2, -3, 1)$ y tienen módulo $\sqrt{6}$.

2.17. Año 2016

2.17.1. Modelo

Opción A

Problema 2.17.1 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - z = 5$ y la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{array} \right.$ se pide:

a) (1 punto). Determinar la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto $P(1, 0, 1)$.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto $Q(2, 1, 1)$.

Problema 2.17.2 *(2 puntos)* Dados los puntos $P(1, 1, 3)$ y $Q(0, 1, 1)$, se pide:

a) (1 punto). Hallar todos los puntos R que equidistan de P y Q. Describir dicho conjunto de puntos.

b) (1 punto). Hallar los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifiquen que $d(P, S) = 2d(Q, S)$.

Opción B

Problema 2.17.3 *(3 puntos)* Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 3x + 4y - 5z - 7 = 0, \quad \pi_2 \equiv x - 2y + z - 3 = 0$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar un vector unitario cuya dirección sea paralela a los planos π_1 y π_2.

b) (1 punto). Hallar la distancia del punto $P(3, -1, 2)$ al plano π_1.

c) (1 punto). Hallar el coseno del ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

2.17.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.17.4 *(2 puntos)* Dados los planos $\pi_1 \equiv ax+y-z+1=0$ y $\pi_2 \equiv x+ay+z-2=0$, determine, en caso de que existan, el valor o posibles valores del parámetro a, para cada uno de los siguientes supuestos:

a) (0,5 puntos). Que π_1 y π_2 sean paralelos.

b) (0,5 puntos). Que π_1 y π_2 sean perpendiculares.

c) (1 punto). Que la recta intersección de π_1 y π_2 sea perpendicular al plano $x=y$.

Problema 2.17.5 *(2 puntos)* Dado el punto $P(2,1,-1)$, determine el punto simétrico de P respecto al plano que pasa por los puntos $A(0,2,-1)$; $B(1,-3,0)$ y $C(2,1,1)$.

Opción B

Problema 2.17.6 *(3 puntos)* Se consideran los puntos $A(0,5,3)$, $B(0,6,4)$, $C(2,4,2)$ y $D(2,3,1)$ y se pide:

a) (1 punto). Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios y que el polígono $ABCD$ es un paralelogramo.

b) (1 punto). Calcular el área de dicho paralelogramo.

c) (1 punto). Determinar el lugar geométrico de los puntos P cuya proyección sobre el plano $ABCD$ es el punto medio del paralelogramo.

2.17.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.17.7 *(3 puntos)* Dadas las rectas $r_1 \equiv \left\{ \begin{array}{ll} x= & z-1 \\ y= & 2-3z \end{array} \right.$ y $r_2 \equiv \left\{ \begin{array}{ll} x= & 4+5z \\ y= & 4z-3 \end{array} \right.$, se pide:

a) (1,5 puntos). Estudiar su posición relativa y hallar la distancia entre ellas.

b) (1,5 puntos). Hallar la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a r_1 y a r_2.

Opción B

Problema 2.17.8 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x-y+2z+3=0$, el punto $A(1,1,3)$ y la recta $r \equiv x=y-2=\dfrac{z}{2}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la distancia del punto A a la recta r.

b) (1 punto). Hallar la proyección del punto A sobre el plano π.

Problema 2.17.9 *(2 puntos)* Dada una recta r cuyo vector director es $\overrightarrow{v}=(a,b,c)$ con $a,b,c>0$, se pide:

a) (1,5 puntos). Si r forma un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con el eje OX y de $\frac{\pi}{4}$ con el eje OY, determinar el ángulo que forma la recta con el eje OZ.

b) (0,5 puntos). Si $\overrightarrow{v}=(1,5,3)$, hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta y que contiene al punto $A(3,0,1)$.

2.17.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.17.10 *(3 puntos)* Dadas las rectas $r : \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$ y $s : \{(2 + \lambda, 1 - 3\lambda, \lambda); \lambda \in R\}$

a) (1 punto). Obtener la recta que pasa por el punto $P(1, 0, 5)$ y corta perpendicularmente a r.

b) (1 punto). Obtener el plano que contiene a la recta r y es paralelo a s.

c) (1 punto). Hallar la distancia entre las rectas r y s.

Opción B

Problema 2.17.11 *(2 puntos)* Sea π el plano que contiene a los puntos $A(0, 2, 1)$, $B(1, 0, 1)$ y $C(-1, -2, -1)$. Calcule el volumen del tetraedro que forma el origen de coordenadas con los puntos de intersección de π con cada uno de los ejes coordenados.

Problema 2.17.12 *(2 puntos)* Dado el plano $\pi : 3x + 3y + z - 9 = 0$, se pide:

a) (1 punto). Determinar la ecuación del plano perpendicular a π que contiene al eje OX.

b) (1 punto). Determinar el punto del plano π más cercano al origen de coordenadas.

2.18. Año 2017

2.18.1. Modelo

Opción A

Problema 2.18.1 *(3 puntos)* Dadas las rectas $r \equiv \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 \end{cases}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Comprobar que se cruzan y calcular la distancia entre ellas.

b) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

c) (0,5 puntos) Hallar el ángulo que forma la recta r con el plano $y = 0$.

Opción B

Problema 2.18.2 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(2, 1, 1)$, $B(0, 0, -3)$, y $P(1, 1, 1)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por A, B y P.

c) (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta que pasa por A y B.

2.18.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.18.3 *(3 puntos)* Dados los puntos $P(1,-2,1)$, $Q(-4,0,1)$, $R(-3,1,2)$, $S(0,-3,0)$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación del plano que contiene a P, Q y R.

b) (1 punto). Estudiar la posición relativa de la recta r, que pasa por los puntos P y Q, y la recta s, que pasa por R y S.

c) (1 punto). Hallar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R.

Opción B

Problema 2.18.4 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Determine la distancia entre las rectas

$$r_1 \equiv x = y = z \ \text{ y } \ r_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{array} \right.$$

b) (1 punto). Obtenga el punto de corte de la recta $s \equiv x = 2 - y = z - 1$ con el plano perpendicular a s, que pasa por el origen.

2.18.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.18.5 *(3 puntos)* Dada la recta $r \equiv x - 1 = y = z$, se pide:

a) (1 punto) Calcular la ecuación de una recta r', con dirección perpendicular a r, que esté contenida en el plano OXY y pase por el punto $(1,2,0)$.

b) (1 punto) Hallar un plano perpendicular a OXY, que contenga a la recta r.

c) (1 punto) Calcular la distancia del origen de coordenadas $O(0,0,0)$ a la recta r.

Opción B

Problema 2.18.6 *(3 puntos)* Dado el punto $P(5,7,10)$ y el plano de ecuación $\pi \equiv x + 2y + 3z = 7$; se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto P', simétrico de P respecto de π.

b) (1 punto) Hallar la posición relativa del plano π y la recta que pasa por el punto $Q(1,1,1)$ y tiene dirección $\overrightarrow{v} = (-10,2,2)$.

c) (1 punto) Calcular el área del triángulo que tiene por vértices a los puntos P, Q y al origen de coordenadas $O(0,0,0)$.

2.18.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.18.7 *(3 puntos)* Dadas las rectas $r_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} 6x - y - z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \end{array} \right.$ y $r_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} 3x - 5y - 2z = 3 \\ 3x + y + 4z = 3 \end{array} \right.$ se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de r_1 y r_2.

b) (1 punto) Calcular la distancia entre las dos rectas.

c) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a r_1 y al punto $P(1, 2, 3)$.

Opción B

Problema 2.18.8 *(2 puntos)* Sea r la recta que pasa por los puntos $P_1(3, 2, 0)$ y $P_2(7, 0, 2)$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto $Q(3, 5, -3)$ a la recta r.

b) (1 punto) Hallar el punto de corte de la recta r con el plano perpendicular a r que pasa por el punto Q.

Problema 2.18.9 *(2 puntos)* Se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1, 3, -1)$, $B(3, 1, 0)$ y $C(2, 5, 1)$ y se pide

a) (1 punto) Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.

b) (1 punto) Obtener las medidas de sus tres ángulos.

2.18.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.18.10 *(2 puntos)* Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + y - z = 1 \;\; \text{y} \;\; \pi_2 \equiv x + 2y + z = 3$$

, se pide:

a) (1 punto) Calcular el plano o planos formados por los puntos que equidistan de π_1 y π_2.

b) (1 punto) Calcular la recta paralela a π_1, paralela a π_2 y que pasa por el punto $A(1, 1, 1)$.

Opción B

Problema 2.18.11 *(3 puntos)* Dados los puntos $P_1(1, 1, 3)$, $P_2(0, 0, 3)$, $P_3(4, -3, 1)$ y $O(0, 0, 0)$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar el plano π que contiene los puntos P_1, P_2, P_3.

b) (1 punto) Hallar el punto simétrico de O respecto del plano $\pi' \equiv x + y - z + 3 = 0$.

c) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro con vértices O, P_1, P_2, P_3.

2.19. Año 2018

2.19.1. Modelo

Opción A

Problema 2.19.1 *(2,5 puntos)* Dados los planos $\pi_1 \equiv 3x+y+2z-1=0$, $\pi_2 \equiv 2x-y+3z-1=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1-2t \\ y = -1+t \\ z = 1+t \end{cases}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar los puntos de la recta r equidistantes de π_1 y π_2.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo que forma el punto $P(-2,3,2)$ con los puntos de intersección de r con π_1 y π_2.

Opción B

Problema 2.19.2 *(2,5 puntos)* Dados los planos $\pi_1 \equiv x+y=0$, $\pi_2 \equiv x=0$ y el punto $B(-1,1,1)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el punto B', simétrico de B respecto del plano π_2.

b) (1 punto) Obtener una ecuación de la recta r, contenida en el plano π_1, paralela al plano π_2 y que pasa por el punto B.

c) (0,5 puntos) Hallar el ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

2.19.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.19.3 *(2,5 puntos)* Dados los planos $\pi_1 \equiv 4x+6y-12z+1=0$;, $\pi_2 \equiv -2x-3y+6z-5=0$ se pide:

a) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.

b) (1,5 punto) Para el cuadrado de vértices consecutivos $ABCD$, con $A(2;1;3)$ y $B(1;2;3)$, calcular los vértices C y D, sabiendo que C pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x-y+z=2$.

Opción B

Problema 2.19.4 *(2,5 puntos)* Dados el punto $P(1,1,1)$ y las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x+y=2 \\ 5x+z=6 \end{cases}$, $s \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{1/3}$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta r.

b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s.

c) (0,5 puntos) Hallar el plano perpendicular a la recta s y que pasa por el punto P.

2.19.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.19.5 *(2,5 puntos)* Se consideran los puntos $P(1,1,1)$, $Q(1,0,1)$, $R(0,0,1)$ y la recta r que pasa por los puntos $A(0,0,-1)$ y $B(0,1,0)$. Se pide:

a) (1 punto) Encontrar el punto de intersección de r con el plano que contiene a P, Q y R.

b) (0,75 puntos) Hallar un punto T de r, tal que los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PT}$ sean linealmente dependientes.

c) (0,75 puntos) Calcular el volumen del tetraedro cuyos vértices son $O(0;0;0)$ y los puntos P, Q, R.

Opción B

Problema 2.19.6 *(2,5 puntos)* Dadas las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right.$, $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} -x + y + 2z + 4 = 0 \\ -x + 2y + 3z + 5 = 0 \end{array} \right.$ y el punto $P(-1,2,-1)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de las rectas r y s.

b) (0,75 puntos) Hallar la ecuación implícita del plano que pasa por P y es paralelo a r y a s.

c) (0,75 puntos) Calcular el área del triángulo que tiene por vértices el origen de coordenadas, el punto P y el punto P' proyección de P sobre el plano $z = 0$.

2.19.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.19.7 *(2,5 puntos)* Se consideran los vectores $\overrightarrow{u} = (-1,2,3)$, $\overrightarrow{v} = (2,0,-1)$ y el punto $A(-4,4,7)$. Se pide:

a) (1 punto) Determinar un vector $\overrightarrow{w_1}$ que sea ortogonal a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, unitario y con tercera coordenada negativa.

b) (0,75 puntos) Hallar un vector no nulo $\overrightarrow{w_2}$ que sea combinación lineal de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ y ortogonal a $\overrightarrow{v}$.

c) (0,75 puntos) Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ y una de sus diagonales es el segmento $\overrightarrow{OA}$.

Opción B

Problema 2.19.8 *(2,5 puntos)* Dados el punto $P(0,-1,1)$ y la recta r, que pasa por el punto $Q(1,0,1)$ y tiene como vector director $\overrightarrow{v} = (0,1,2)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar la ecuación implícita del plano que contiene a r y pasa por P.

b) (0,5 puntos) Encontrar el punto S contenido en r tal que el vector $\overrightarrow{SP}$ sea perpendicular a la recta r.

c) (1,5 punto) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el punto P y dos puntos T_1, T_2, contenidos en la recta r, que están a distancia $\sqrt{5}$ de P.

2.20. Año 2019

2.20.1. Modelo

Opción A

Problema 2.20.1 *(2,5 puntos)* Dados los puntos $A(1,2,-3)$; $B(1,5,0)$; $C(5,6,-1)$ y $D(4,-1,3)$, se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular el plano π que contiene a los puntos A, B, C y la distancia del punto D a dicho plano.

b) (0,5 puntos) Calcular el volumen del tetraedro definido por los cuatro puntos dados.

c) (0,5 punto) Calcular el área del triángulo definido por A, B y C.

Opción B

Problema 2.20.2 *(2,5 puntos)* Dadas las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{array} \right.$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} x - y = 2 \\ y + z = 1 \end{array} \right.$ se pide:

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de r y s.

b) (1 punto) Obtener un plano que contenga a las dos rectas.

c) (0,5 puntos) Dado el punto $A(3,1,0)$, de la recta s, obtener un punto B, de la recta r, de modo que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular a la recta r.

2.20.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.20.3 *(2,5 puntos)* Dadas la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = z$ y y la recta s que pasa por el punto $(2,-5,1)$ y tiene dirección $(-1,0,-1)$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.

b) (1 punto) Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s.

c) (0,5 puntos) Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

Opción B

Problema 2.20.4 *(2,5 puntos)* Dados el punto $A(2,1,0)$ y el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 4z = 36$, se pide:

a) (0,75 puntos) Determinar la distancia del punto A al plano π.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A.

c) (0,75 puntos) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.

2.20.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.20.5 *(2,5 puntos)* Dados los vectores $\overrightarrow{v} = (1, 0, -1)$ y $\overrightarrow{w} = (1, 1, 0)$, se pide:

a) (1 punto) Calcular un vector que sea ortogonal (perpendicular) a $\overrightarrow{v}$ y a $\overrightarrow{w}$, que tenga módulo $\sqrt{3}/2$, y cuya tercera coordenada sea negativa.

b) (0,5 puntos) Calcular un vector $\overrightarrow{u}$ ortogonal a $\overrightarrow{v}$ y tal que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ sean linealmente independientes.

c) (1 punto) Hallar la proyección del punto $P(5, 1, -1)$ sobre el plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$.

Opción B

Problema 2.20.6 *(2,5 puntos)* Dadas la rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - y = 5 \\ y + z = 1 \end{array} \right.$ y $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + z = 3 \\ y + z = 4 \end{array} \right.$, se pide:

a) (1,25 puntos) Escribir unas ecuaciones paramétricas de cada una de las dos rectas y determinar la posición relativa de ambas.

b) (1,25 puntos) Dado el punto $P(5, 0, 1)$, de la recta r, obtener un punto Q, de la recta s, de modo que el triángulo OPQ sea rectángulo, con ángulo recto en $O(0, 0, 0)$, y calcular las longitudes de los tres lados de dicho triángulo.

Incluyo el examen de Valencia por la expectación generada con éste.

2.20.4. Ordinaria-Valencia

Opción A

Problema 2.20.7 Consideramos en el espacio las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{array} \right.$ y $s : x = y + 1 = \dfrac{z - 2}{2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) (3 puntos) La ecuación del plano que contiene las rectas r y s.

b) (4 puntos) La recta que pasa por $P(0, -1, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta r.

c) (3 puntos) El valor que deben tener los parámetros reales a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi : x - 2y + az = b$.

Opción B

Problema 2.20.8 Sea π el plano de ecuación $9x + 12y + 20z = 180$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) (4 puntos) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π.

b) (4 puntos) Los puntos A, B y C intersección del plano π con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

c) (2 puntos) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen O de coordenadas y los puntos A, B y C.

2.20.5. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.20.9 *(2,5 puntos)* Dados los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,3,-3)$ y $C(-3,-1,1)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.

b) (0,5 puntos) Obtener un punto D (distinto de A, B y C) tal que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes.

c) (1 punto) Encontrar un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P sea igual a 1.

Opción B

Problema 2.20.10 *(2,5 puntos)* Dados el plano, $\pi : 2x+3y-z = 4$, y las rectas $r : \left\{\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ x+y+z=2 \end{array}\right.$ y $s : (x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(1,0,1)$, con $\lambda \in \overline{R}$, se pide

a) (1 punto) Calcular el punto simétrico de $P(1,2,3)$ respecto de π.

b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π, que pasa por el punto intersección de las rectas r y s.

c) (0,5 puntos) Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s.

2.21. Año 2020

2.21.1. Modelo

Opción A

Problema 2.21.1 *(2,5 puntos)* Dadas las rectas $r_1 : \left\{\begin{array}{l} x = z-1 \\ y = 2-3z \end{array}\right.$ y $r_2 : \left\{\begin{array}{l} x = 4+5z \\ y = 4z-3 \end{array}\right.$, se pide:

a) (1,5 puntos) Estudiar su posición relativa y hallar la distancia entre ellas.

b) (1 punto) Hallar el punto de corte entre la recta r_2 y el plano que contiene a r_1 y pasa por el origen de coordenadas.

Opción B

Problema 2.21.2 *(2,5 puntos)* Dados los puntos $A(1,1,-2)$, $B(3,-1,4)$ y la recta $r : \left\{\begin{array}{l} x = 1+3\lambda \\ y = -2+5\lambda \\ z = 3 \end{array}\right.$, se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular el área del triángulo OPQ, siendo $O(0,0,0)$, P el punto medio del segmento AB y Q la intersección de la recta que pasa por A y B y el plano $\pi : z = 7$.

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a la recta r.

c) (0,5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman la recta r y la recta que pasa por A y B.

2.21.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.21.3 *(2,5 puntos)* Dadas las rectas

$$r:\left\{\begin{array}{l} x-y=2 \\ 3x-z=-1 \end{array}\right. \quad \text{y } s:\left\{\begin{array}{l} x=-1+2\lambda \\ y=-4-\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right. ,$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular la posición relativa de las rectas r y s.

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $P(2,-1,5)$.

c) (1 punto) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s.

Opción B

Problema 2.21.4 *(2,5 puntos)* Dados los puntos $P(-3,1,2)$ y $Q(-1,0,1)$ y el plano π de ecuación $x+2y-3z=4$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la proyección de Q sobre π.

b) (0,5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P.

c) (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q.

2.21.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.21.5 *(2,5 puntos)* Se consideran los puntos $A(0,-4,2)$, $B(3,-2,3)$ y $C(-1,-3,3)$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Comprobar que el triángulo de vértices A, B y C es rectángulo, identificando los catetos y la hipotenusa.

b) (0,75 puntos) Determinar una ecuación del plano π que contiene a los tres puntos.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico de A respecto de la recta que pasa por los puntos B y C.

Opción B

Problema 2.21.6 *(2,5 puntos)* Dadas la recta $r:\left\{\begin{array}{l} x-z=0 \\ x+2y-z=4 \end{array}\right.$ y la recta s que pasa por $A\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ y tiene dirección $(-1,1,0)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Estudiar la posición relativa de ambas rectas.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de un plano que contiene a la recta r y a un vector perpendicular a r y a s.

c) (1 punto) Encontrar una perpendicular común a r y a s.

2.21.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.21.7 *(2,5 puntos)* Dados el punto $P(3,3,0)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{0}$, se pide:

a) (0,75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.

b) (1 punto) Calcular el punto simétrico de P respecto de r.

c) (0,75 puntos) Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A.

Opción B

Problema 2.21.8 *(2,5 puntos)* Del paralelogramo $ABCD$, se conocen los vértices consecutivos $A(1,0,-1)$, $B(2,1,0)$ y $C(4,3,-2)$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.

c) (0,5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

2.22. Año 2021

2.22.1. Modelo

Opción A

Problema 2.22.1 *(2,5 puntos)* Se consideran los puntos $A(3,1,2)$, $B(0,3,4)$ y $P(-1,1,0)$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Determinar las coordenadas de un punto Q sabiendo que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente dependientes, tienen sentidos opuestos y tienen el mismo módulo.

b) (1 punto) Determinar las coordenadas del punto de intersección de la recta r que contiene a A y P, y de la recta s que contiene a B y al punto $C(2,-1,-2)$.

c) (0,75 puntos) Calcular el coseno del ángulo formado por $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$.

Opción B

Problema 2.22.2 *(2,5 puntos)* Dadas las rectas $r : \begin{cases} x+2z=1 \\ y+z=2 \end{cases}$, $s : \begin{cases} x=-3+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar la distancia del origen a la recta s.

b) (0,5 puntos) Determinar la posición relativa de r y s.

c) (0,75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene a la recta r y al vector perpendicular a r y a s.

d) (0,75 puntos) Escribir la ecuación de una recta perpendicular común a r y a s.

2.22.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.22.3 *(2,5 puntos)* Sean la recta $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular el ángulo que forman r y π.

b) (1 punto) Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $z - y = 0$.

c) (0,75 puntos) Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

Opción B

Problema 2.22.4 *(2,5 puntos)* Sean los planos $\pi_1 \equiv x + y = 1$ y $\pi_2 \equiv x + z = 1$.

a) (1,5 puntos) Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.

b) (0,5 puntos) Halle la recta que pasa por el punto $(0, 2, 0)$ y es perpendicular al plano π_2.

c) (0,5 puntos) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes x e y.

2.22.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.22.5 *(2,5 puntos)* Desde el punto $P_1 = (1, 1, -1)$ se ha trazado una recta, r, perpendicular a un plano, π. El punto de intersección del plano con la recta es $P_2 = (0, 0, 0)$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar una ecuación de la recta r.

b) (1 punto) Hallar una ecuación del plano π.

c) (0,5 puntos) Hallar la distancia de P_1 al plano π.

Opción B

Problema 2.22.6 *(2,5 puntos)* En un laboratorio se lanza un rayo láser desde el punto $P(2, 3, -5)$ en la dirección del vector $\overrightarrow{v} = (-1, -2, 2)$, para que impacte en una placa metálica plana de ecuación $\pi \equiv 3x - 2y - 2z = 1$, con el fin de perforar un orificio.

a) (0,75 puntos) Calcule las coordenadas del punto de impacto.

b) (0,75 puntos) Si el ángulo entre el láser y el plano es menor a 45°, el rayo será reflejado y no se realizará el orificio. Determine si ese es el caso.

c) (1 punto) Para optimizar la velocidad de perforación, se decide lanzar el rayo desde P en dirección perpendicular a π, y lanzar simultáneamente otro rayo, también perpendicular a π, desde un punto situado al otro lado del plano y a la misma distancia de π que P. ¿Dónde habría que situar el origen del segundo rayo para que ambos impacten en el mismo punto del plano?

2.22.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.22.7 *(2,5 puntos)* Dado el punto $A(1,0,-1)$, la recta $r \equiv x-1 = y+1 = \frac{z-2}{2}$ y el plano $\pi \equiv x+y-z=6$, se pide:

a) (0,75 puntos) Hallar el ángulo que forman el plano π y el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.

b) (0,75 puntos) Determinar la distancia entre la recta r y el plano π.

c) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por A, forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π.

Opción B

Problema 2.22.8 *(2,5 puntos)* Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}, \quad s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases}$$

a) (1,5 puntos) Escriba una ecuación de la recta perpendicular común a r y a s.

b) (1 punto) Calcule la distancia entre r y s.

2.23. Año 2022

2.23.1. Modelo

Opción A

Problema 2.23.1 *(2,5 puntos)* Una sonda planetaria se lanza desde el punto $P(1,0,2)$ y sigue una trayectoria rectilínea que pasa por el punto $Q(3,1,0)$ antes de impactar en una zona plana de la superficie del planeta, que tiene por ecuación $\pi \equiv 2x-y+2z+5=0$. Se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular las coordenadas del punto de impacto y el coseno del ángulo entre la trayectoria de la sonda y el vector normal al plano π.

b) (1 punto) Sabiendo que la alarma de proximidad se dispara antes de llegar a la superficie cuando la distancia al planeta es 1, determinar en qué punto estará la sonda al sonar la alarma.

Opción B

Problema 2.23.2 *(2,5 puntos)* Dados los planos $\pi_1 \equiv x - 2y + 3z = 6$ y $\pi_2 \equiv 3x - z = 2$ y el punto $A(1,7,1)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Comprobar que π_1 y π_2 son perpendiculares.

b) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga una cara en el plano π_1, otra cara en el plano π_2, y un vértice en el punto A.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico de A respecto de π_1.

2.23.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.23.3 *(2,5 puntos)* Con un dispositivo láser situado en el punto $P(1,1,1)$ se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta de ecuaciones $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{array} \right.$

a) (0,5 puntos) Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano $z = 0$.

b) (1,25 puntos) Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.

c) (0,75 puntos) Determine el ángulo entre el plano de ecuación $x + y = 2$ y la recta r.

Opción B

Problema 2.23.4 *(2,5 puntos)* Sean el plano $\pi \equiv x+y+z = 1$, la recta $r_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 \end{array} \right. , \lambda \in \mathbb{R}$ y el punto $P(0,1,0)$.

a) (0,5 puntos) Verifique que la recta r_1 está contenida en el plano π y que el punto P pertenece al mismo plano.

b) (0,75 puntos) Halle una ecuación de la recta contenida en el plano π que pase por P y sea perpendicular a r_1.

c) (1,25 puntos) Calcule una ecuación de la recta, r_2, que pase por P y sea paralela a r_1. Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las rectas r_1 y r_2.

2.23.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.23.5 *(2,5 puntos)* Sea la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array} \right. , \ \lambda \in \mathbb{R}$ y el punto $P(1,1,0)$.

a) (1 punto) Halle los puntos pertenecientes a la recta r que distan de P una unidad.

b) (1,5 puntos) Halle unas ecuaciones de las rectas que pasan por P, son perpendiculares a r y forman un ángulo $\frac{\pi}{3}$ radianes con la normal al plano $x = 0$.

Opción B

Problema 2.23.6 *(2,5 puntos)*

a) (0,5 puntos) Calcule el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{u} = (0, 0, 1)$ y $\overrightarrow{v} = (0, 1, \sqrt{3})$.

b) (1 punto) Sea O el origen de coordenadas, y los puntos $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ y $C(0, 2, 2\sqrt{3})$. Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por las tres aristas concurrentes $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$.

c) (1 punto) Calcule una ecuación de la recta perpendicular común a las rectas r y s, siendo r la recta que pasa por O y por C y s la recta de ecuaciones $y - 3 = 0$, $z = 0$.

2.23.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.23.7 *(2,5 puntos)* Sean el plano $\pi \equiv z = x$ y los puntos $A(0, -1, 0)$ y $B(0, 1, 0)$ pertenecientes al plano π.

a) (1,25 puntos) Si los puntos A y B son vértices contiguos del cuadrado con vértices $\{A, B, C, D\}$ que se encuentra en el plano π, encuentre los posibles puntos C y D.

b) (1,25 puntos) Si los puntos A y B son vértices opuestos de un cuadrado con vértices $\{A, B, C, D\}$ que se encuentra en el plano π, encuentre los puntos C y D.

Opción B

Problema 2.23.8 *(2,5 puntos)* Sean las rectas

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{array} \right. , \quad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - 2t \\ y = 5 + 2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{array} \right.$$

.

a) (1,5 puntos) Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcule la distancia entre ellas.

b) (0,5 puntos) Determine una ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s.

c) (0,5 puntos) Sean P y Q los puntos de las rectas r y s, respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación $z = 0$. Calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

2.23.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.23.9 *(2,5 puntos)* Un tetraedro tiene por vértices los puntos $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 3)$.

a) (0,75 puntos) Calcule el área de la cara dada por el triángulo de vértices A, B y C.

b) (0,75 puntos) Calcule el volumen del tetraedro.

c) (1 punto) Calcule una ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C. Determine el punto simétrico respecto de π del punto O.

Opción B

Problema 2.23.10 *(2,5 puntos)* Se consideran la recta r y los planos π_1, π_2, de ecuaciones

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}, \quad \pi_1 \equiv y + z = -1, \quad \pi_2 \equiv 2x - y + z = -3$$

Sea s la recta determinada por la intersección de los planos π_1 y π_2.

a) (0,5 puntos) Halle el ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

b) (1,5 puntos) Determine la posición relativa de las rectas r y s.

c) (0,5 puntos) Encuentre una ecuación del plano perpendicular a s que corta a la recta r en el punto con segunda coordenada nula.

2.24. Año 2023

2.24.1. Modelo

Opción A

Problema 2.24.1 *(2,5 puntos)* Un depósito en forma de paralelepípedo, de base cuadrada $ABCD$, apoya completamente su base sobre una rampa en un local, quedando una arista superior pegada al techo. Se considera un sistema de ejes, con los semiejes positivos en un rincón del local. La arista inferior paralela a la que se apoya en el techo y no en su misma cara, tiene vértices de coordenadas $A(1,1,1)$ y $B(1,3,1)$. La ecuación del plano que contiene a la rampa es $4x - 3z = 1$ y el vértice sobre el punto A es $A'(1,1,6)$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular una ecuación del plano que contiene a las aristas AB y AA'.

b) (1 punto) Calcular los otros dos vértices, C y D, de la base.

c) (1 punto) Calcular el volumen del depósito.

Opción B

Problema 2.24.2 *(2,5 puntos)* Se consideran las siguientes rectas:

- r, la recta que pasa por el punto $P(1,1,2)$ y tiene como vector director $\overrightarrow{u} = (0,1,2)$;
- s, la recta de ecuaciones $s \equiv \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x - 2z + 2 = 0 \end{cases}$;
- t, la recta paralela a s que contiene al punto P.

a) (0,75 puntos) Estudie la posición relativa de r y s.

b) (0,75 puntos) Calcule el ángulo que forman las rectas r y t.

c) (1 punto) Calcule la proyección ortogonal del punto P sobre la recta s.

2.24.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.24.3 *(2,5 puntos)* Sean los puntos $A(1,-2,3)$, $B(0,2,-1)$ y $C(2,1,0)$. Se pide:

a) (1,25 puntos) Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.

b) (0,75 puntos) Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano $z=1$.

c) (0,5 puntos) Calcular el perímetro de triángulo T.

Opción B

Problema 2.24.4 *(2,5 puntos)* Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, el plano $\pi \equiv x - z = 2$ y el punto $A(1,1,1)$, se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.

b) (0,75 puntos) Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico del punto A respecto a la recta r.

2.24.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.24.5 (2,5 puntos) Sean los planos $\pi_1 : y = x$, $\pi_2 : y = x+1$, $\pi_3 : z = -1$ y $\pi_4 : z = 1$.

a) (0,5 puntos) Compruebe que son paralelos los planos π_1 y π_2, y que son paralelos los planos π_3 y π_4.

b) (0,5 puntos) Compruebe que los planos π_1 y π_2 son perpendiculares a los planos π_3 y π_4.

c) (0,5 puntos) Halle una recta que sea paralela a los cuatro planos y pase por el punto $(1,0,2)$.

d) (1 punto) Halle dos planos perpendiculares a π_1, π_2, π_3 y π_4, que cumplan que el volumen del paralelepípedo comprendido entre los seis planos sea 1.

Opción B

Problema 2.24.6 (2,5 puntos) Dadas la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ y los planos $\pi \equiv x + 2y + 2z - 1 = 0$ y $\pi' \equiv 2x + 2y + z + 4 = 0$, se pide:

a) (0,75 puntos) Comprobar que los planos π y π' se cortan. Hallar el ángulo que forman.

b) (0,75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π. Hallar, si es posible, el punto de corte.

c) (1 punto) Hallar los puntos de la recta r que equidistan de los planos π y π'.

2.24.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.24.7 (2,5 puntos) Sean el plano $\pi : z = 1$, los puntos $P(1,1,1)$ y $Q(0,0,1)$ y la recta r que pasa por los puntos P y Q.

a) (0,25 puntos) Verifique que los puntos P y Q pertenecen al plano π.

b) (1 punto) Halle una recta paralela a r contenida en el plano $z = 0$.

c) (1,25 puntos) Halle una recta que pase por P y tal que su proyección ortogonal sobre el plano π sea la recta r, con la cual forme un ángulo $\frac{\pi}{4}$ radianes.

Opción B

Problema 2.24.8 (2,5 puntos) Dados el plano $\pi : x + 3y + 2z + 14 = 0$ y la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ z = 5 \end{array} \right.$, se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar el punto del plano π más próximo al origen de coordenadas.

b) (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano π.

c) (1 punto) Hallar la recta con dirección perpendicular a r, que esté contenida en π, y que corte al eje OZ.

2.24.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.24.9 (2,5 puntos) Consideremos las rectas

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}; \quad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + 2z = 1 \\ y - z = 1 \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Determine la posición relativa de las rectas r y s, y calcule su intersección si existe.

b) (1 punto) Calcule una ecuación del plano que contiene a r y s.

c) (0,5 puntos) Indique el ángulo que forman las rectas r y s.

Opción B

Problema 2.24.10 (2,5 puntos) Dada la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - z = 4 \end{array} \right.$ y el punto A$(4, -3, 4)$, se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular la distancia del punto A a la recta r. ¿En qué punto de la recta se alcanza?

b) (1,25 puntos) Calcular el volumen del tetraedro determinado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y el plano perpendicular a r que pasa por el punto A.

2.25. Año 2024

2.25.1. Modelo

Opción A

Problema 2.25.1 *(2,5 puntos)* Sea la recta $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi : z = 0$.

a) (1 punto) Halle una ecuación de la recta paralela al plano π cuya dirección sea perpendicular a r y que pase por el punto $(1, 1, 1)$.

b) (1,5 puntos) Halle una ecuación de una recta que forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes con la recta r, que esté contenida en el plano π y pase por el punto $(0, 0, 0)$.

Opción B

Problema 2.25.2 *(2,5 puntos)* Dados los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, 0, -1)$, $D(1, 1, 2)$, se pide:

a) (0,75 puntos) Comprobar que los puntos A, B, C y D no son coplanarios y hallar el volumen del tetraedro que forman.

b) (0,75 puntos) Hallar el área del triángulo que forman los puntos B, C y D y el ángulo $\widehat{B}$ del mismo.

c) (1 punto) Hallar uno de los puntos E del plano determinado por A, B y C tales que el cuadrilátero $ABCE$ sea un paralelogramo. Hallar el área de dicho paralelogramo.

2.25.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.25.3 *(2,5 puntos)* Dados los puntos $A(0, 0, 1)$ y $B(1, 1, 0)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z = 0$.

b) (1,5 puntos) Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2, que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x + z = 1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.

Opción B

Problema 2.25.4 *(2,5 puntos)* Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento. Se sabe que $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(2, 1, 0)$ y $P_3(1, 3, 2)$, pero del cuarto punto $P_4(3, a, 3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

a) (1,5 puntos) A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es $V = 1$. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a.

b) (1 punto) Dado el punto $Q(3, 3, 3)$, se quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos P_1P_2, P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador?

2.25.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.25.5 (2,5 puntos) Dados el punto $P(-1,2,6)$, el plano $\pi : 3x-2y+z-5=0$ y la recta $s : \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-0}{-1}$:.

a) (1,5 puntos) Halle una ecuación de la recta que pasa por P, es secante a s y paralela al plano π.

b) (1 punto) Halle el simétrico del punto P respecto al plano π.

Opción B

Problema 2.25.6 (2,5 puntos) En el punto $A(1,0,-1)$ se encuentra un emisor láser que dispara un rayo de luz (unidimensional) apuntando hacia el punto $B(3,1,0)$. Dicho rayo incide en un punto P del plano $\pi : \begin{cases} x = 2-\alpha \\ y = 2+2\beta \\ z = \alpha - 2\beta \end{cases}$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Llamamos al punto P el punto de incidencia del rayo de luz sobre el plano π. Se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular una ecuación del plano de incidencia, es decir, el plano perpendicular a π que contiene al rayo de luz.

b) (0,75 puntos) Calcular la distancia que recorre el rayo de luz desde el emisor hasta el punto P.

c) (0,5 puntos) Calcular el ángulo que debería girar el emisor para que la distancia entre él y el nuevo punto de incidencia sobre π sea mínima.

2.25.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.25.7 *(2,5 puntos)* Sean los puntos $P(1,-1,3)$ y $Q(2,1,-1)$:

a) (1 punto) Determine una ecuación del plano respecto del cual ambos puntos son simétricos.

b) (1,5 puntos) El segmento PQ es uno de los tres lados del triángulo cuya suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es 34 y el tercer vértice se encuentra en la recta $r \equiv x-2 = y = z$. Calcule las coordenadas del tercer vértice sabiendo que ninguna de sus coordenadas es nula.

Opción B

Problema 2.25.8 *(2,5 puntos)* Dado el punto $P(5,-1,2)$ y las rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{1}, \quad s \equiv \begin{cases} x-y=5 \\ x+z=3 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas.

b) (1,5 puntos) Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r.

2.25.5. Extraordinaria-coincidente

Opción A

Problema 2.25.9 *(2,5 puntos)* Los vértices de un triángulo son $A(-1,0,1)$, $B(0,1,0)$ y un punto C situado sobre la recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ x + z = -1 \end{array} \right.$$

a) (1,5 puntos) Calcule las posibles coordenadas de C sabiendo que el área del triángulo es $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) (1 punto) Determine una ecuación de la recta que pasa por $P(2,1,-1)$ y es paralela a la recta dada r.

Opción B

Problema 2.25.10 *(2,5 puntos)* Sea la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 2 \end{array} \right.$

a) (0,5 puntos) Calcule el ángulo que forma la recta r con el vector normal al plano $z = 0$.

b) (1,25 puntos) Sean π_1 y π_2 dos planos que se cortan en la recta r. Calcule unas ecuaciones de ambos planos sabiendo que π_1 pasa por el punto $P(1,2,3)$ y que π_2 no corta al eje OZ.

c) (0,75 puntos) Estudie la posición relativa de la recta r y la recta s de ecuación $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{3}$

2.26. Año 2025

2.26.1. Modelo

Bloque 3

(Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Problema 2.26.1 (2,5 puntos) Sean los puntos $A(0,0,0)$ y $B(1,1,1)$, y la recta $r \equiv (x,y,z) = (\lambda, \lambda, \lambda + 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) (1 punto) Halle una ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.

b) (1 punto) Halle una ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto B.

c) (0,5 puntos) Halle una ecuación de una recta que sea paralela a r y pase por A.

Problema 2.26.2 (2,5 puntos) Dados los tres planos $\pi_1 : -2x - 2y + z = 0$; $\pi_2 : -2x + y - 2z = 0$ y $\pi_3 : x - 2y - 2z = 0$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el ángulo que forman los planos dos a dos. Determinar la intersección de los tres planos.

b) (1,5 puntos) Determinar el punto P en el espacio del que se sabe que su proyección ortogonal sobre π_1 es el punto $Q_1(1/3, 4/3, 10/3)$ y que su proyección ortogonal sobre π_2 es el punto $Q_2(-1/3, 8/3, 5/3)$. Determinar la proyección ortogonal Q_3 del punto P sobre el plano π_3.

2.26.2. Ordinaria

Bloque 3

(Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Problema 2.26.3 (2,5 puntos) Dados la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ y el plano $\pi \equiv x+2y-3z = 1$, se pide:

a) (0,75 puntos) Hallar una ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

b) (0,75 puntos) Hallar una ecuación de la recta contenida en π que corta perpendicularmente a r.

c) (1 punto) Calcular los puntos de la recta r cuya distancia al plano π es $\sqrt{14}$.

Problema 2.26.4 (2,5 puntos) Sean el punto $P(0,1,1)$ y el plano $\pi : x+y = 2$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar la distancia del punto P al plano π.

b) (1 punto) Determinar el punto Q del plano π cuya distancia a P es igual que la distancia de P a π.

c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por P y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

2.26.3. Ordinaria-Coincidente

Bloque 3

(Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Problema 2.26.5 (2,5 puntos) Sara está revisando una estructura de vigas metálicas. Para ello, utiliza un programa de cálculo estructural que lleva integrado un módulo de diseño asistido por ordenador. El programa trata las vigas como segmentos entre dos puntos. Cuando dos segmentos comparten algún punto, se fijan simulando una soldadura. Para introducir un segmento basta indicar las coordenadas de los extremos del mismo.
Sara se ha dado cuenta de que una parte de la estructura no es lo suficientemente resistente. En concreto, ha encontrado dos vigas, no soldadas entre sí, que deben reforzarse, por lo que decide añadir otra viga que, soldándola a ambas, solucione el problema. Las dos vigas en cuestión son V_1 cuyos extremos son los puntos $A(1,2,-3)$ y $B(1,6,1)$ y V_2 cuyos extremos son los puntos $C(-2,-8,7)$ y $D(10,-4,7)$.

a) (1,25 puntos) Como primera solución, Sara decide que la viga añadida esté soldada a los puntos medios de V_1 y V_2. Calcule las coordenadas de los extremos de la viga añadida y los cosenos de los ángulos que forman dicha viga con V_1 y con V_2.

b) (1.25 puntos) Haciendo un análisis más detallado, Sara encuentra que la resistencia es mayor si la viga añadida es perpendicular tanto a V_1 como a V_2. Calcule, en el caso de que sea posible, las coordenadas de los extremos de la viga añadida si se adopta esta solución.

Capítulo 3

Análisis

3.1. Año 2000

3.1.1. Modelo

Opción A

Problema 3.1.1 *(3 puntos)* Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} + 2 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ k & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en $x = 0$?

b) (1 punto) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea derivable en $x = 0$?

c) (1 punto) Determinar sus asíntotas.

Opción B

Problema 3.1.2 *(2 puntos)* De una función derivable $f(x)$ se conoce que pasa por el punto $A(-1, -4)$ y que su derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Hallar la expresión de $f(x)$.

b) Obtener la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

Problema 3.1.3 *(2 puntos)* Se consideran las curvas $y = x^2$ e $y = a$ donde a es un número real comprendido entre 0 y 1 ($0 < a < 1$). Ambas curvas se cortan en un punto (x_0, y_0) con abscisa positiva. Hallar a sabiendo que el área encerrada entre ambas curvas desde $x = 0$ hasta $x = x_0$ es igual a la encerrada entre ellas desde $x = x_0$ hasta $x = 1$.

3.1.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.1.4 *(3 puntos)* Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$, y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$.

a) (2 puntos) Determinar a, b, c y d.

b) (1 punto) ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

Opción B

Problema 3.1.5 *(2 puntos)* Sean las funciónes:

$$f(x) = x^2 \text{ y } g(x) = x^3$$

Determinar el área encerrada por las gráficas de ambas funciónes y la recta $x = 2$.

Problema 3.1.6 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Si es posible, dibujar de forma clara la gráfica de una función continua en el intervalo $[0, 4]$ que tenga al menos un máximo relativo en el punto $(2, 3)$ y un mínimo relativo en el punto $(3, 4)$.

b) (1 punto) Si la función fuera polinómica, ¿cuál ha de ser como mínimo su grado?

3.1.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.1.7 *(2 puntos)* Sea la función $f(x) = 2x + \sin 2x$

a) (1 punto) Determinar si tiene asíntotas de algún tipo.

b) (1 punto) Estudiar su monotonía y la existencia de extremos relativos.

Problema 3.1.8 *(2 puntos)* Dados tres números reales cualesquiera r_1, r_2 y r_3, hallar el número real x que minimiza la función

$$D(x) = (r_1 - x)^2 + (r_2 - x)^2 + (r_3 - x)^2$$

Opción B

Problema 3.1.9 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$.

a) (1,5 puntos) Determinar los puntos de corte de su gráfica con los ejes y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) (0,5 puntos) Esbozar la gráfica de la función.

c) (1 punto) Calcular el área determinada por la gráfica de f, el eje horizontal y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

3.2. Año 2001

3.2.1. Modelo

Opción A

Problema 3.2.1 *(3 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$$

a) (1 punto) Indicar el dominio de definición de la función f y hallar sus asíntotas.

b) (1 punto) Hallar los extremos relativos de la función f y sus intervalos de concavidad y convexidad.

c) (1 punto) Dibujar la gráfica de f y hallar su máximo y su mínimo absolutos en el intervalo $[-1, 1]$.

Opción B

Problema 3.2.2 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos) Hallar el valor de la integral definida

$$\int_{-10}^{-1} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1 - e^x}}$$

b) (1,5 puntos) Calcular la integral indefinida de la función

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^x}$$

mediante un cambio de variable.

3.2.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.2.3 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = \sin x$

a) (0,5 puntos) Calcular $a > 0$ tal que el área encerrada por la gráfica de f, el eje $y = 0$, y la recta $x = a$, sea $\frac{1}{2}$.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$

c) (1,5 puntos) Calcular el área de la superficie encerrada por la tangente anterior, la gráfica de la función f y las rectas $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$.

Opción B

Problema 3.2.4 *(2 puntos)* Sea la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} (2-x)^3 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) (0,5 puntos) Razonar si la función es continua en toda la recta real.

b) (0,5 puntos) Razonar si f es derivable en toda la recta real.

c) (1 punto) Determinar el área encerrada por la gráfica de f y por las tres rectas $y = 8$, $x = 0$, $x = 2$.

Problema 3.2.5 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Determinar los extremos relativos de la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$. Dibujar su gráfica

b) (1 punto) Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto $P(3, -5)$.

3.2.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.2.6 *(3 puntos)* Se consideran las funciónes $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = ax^2 + b$

a) (1 punto) Calcular a y b para que las gráficas de f y g sean tangentes en el punto de abscisa $x = 2$.

b) (1 punto) Para los valores de a y b calculados en el apartado anterior, dibujar las gráficas de ambas funciónes y hallar la ecuación de la recta tangente común.

c) (1 punto) Para los mismos valores de a y b, hallar el área limitada por las gráficas de las funciónes y el eje vertical.

Opción B

Problema 3.2.7 *(2 puntos)* Sean la función $f(t) = \dfrac{1}{1+e^t}$

a) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int f(t)dt$

b) (1 punto) Se definen $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Calcular $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$

Problema 3.2.8 *(2 puntos)* Sea $P(x)$ un polinomio de grado 4 tal que:

- $P(x)$ es una función par.
- Dos de sus raíces son $x = 1$ y $x = \sqrt{5}$.
- $P(0) = 5$.

Se pide:

a) (1 punto) Hallar sus puntos de inflexión.

b) (1 punto) Dibujar su gráfica.

3.3. Año 2002

3.3.1. Modelo

Opción A

Problema 3.3.1 *(3 puntos)* Dada la parábola $y = 4 - x^2$, se considera el triángulo rectángulo $T(r)$ formado por los ejes de coordenadas y la tangente a la parábola en el punto de abscisa $x = r > 0$.

a) (2 puntos) Hallar r para que $T(r)$ tenga área mínima.

b) (1 punto) Calcular el área de la región delimitada por la parábola, su tangente en el punto de abscisa $x = 1$, y el eje vertical.

Opción B

Problema 3.3.2 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x) = xe^{3x}$

a) (1,5 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f.

b) (1,5 puntos) Sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de f y el eje OX entre $x = 0$ y $x = p$ $(p > 0)$ vale $1/9$, calcular el valor de p.

3.3.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.3.3 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$$

a) (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abscisa positiva de la gráfica de f.

b) (2 puntos) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, la recta anterior y el eje $x = 0$.

Opción B

Problema 3.3.4 *(3 puntos)* Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+1}{x} & si \quad x \ge -1 \\ \\ \frac{2x}{x-1} & si \quad x < -1 \end{cases}$$

a) (0,5 punto) Estudiar el dominio y la continuidad de f.

b) (1,5 puntos) Hallar las asíntotas de la gráfica de f.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado y limitado por la gráfica de f y las rectas $y = 0$ $x = 1$, $x = 2$.

3.3.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.3.5 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

a) (1 punto) Determinar sus máximos y mínimos relativos.

b) (1 punto) Calcular el valor de $a > 0$ para el cual se verifica la igualdad

$$\int_0^a f(x)\,dx = 1$$

Problema 3.3.6 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \sqrt[3]{x-2} & \text{si} & x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si} & x < 2 \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Estudiar su continuidad y derivabilidad.

b) (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(3, 1)$.

Opción B

Problema 3.3.7 *(3 puntos)* Sea $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos los puntos y tal que:

$$f(0) = 1; \quad f(1) = 2; \quad f'(0) = 3; \quad f'(1) = 4.$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular $g'(0)$, siendo $g(x) = f(x + f(0))$.

b) (2 punto) Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$

3.4. Año 2003

3.4.1. Modelo

Opción A

Problema 3.4.1 *(2 puntos)* Determinar los valores de las constantes A, B, C y D para los cuales la gráfica de la función real de variable real

$$f(x) = A\sin x + Bx^2 + Cx + D$$

tiene tangente horizontal en el punto $(0, 4)$ y además su derivada segunda es $f''(x) = 3\sin x - 10$

Problema 3.4.2 *(2 puntos)* Calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{x^2+4}{x^2-5x+6}\,dx$$

Opción B

Problema 3.4.3 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$$

a) (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.

b) (0,5 puntos) Hallar los puntos donde la gráfica de f tiene tangente vertical.

c) (0,5 puntos) Representar gráficamente la función.

d) (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas $x = -1$, $x = 1$.

Nota: Para obtener las asíntotas puede ser de utilidad la igualdad:

$$A - B = \frac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2}$$

3.4.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.4.4 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites (donde "ln"significa logaritmo neperiano).

a) (1 punto) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

b) (1 punto) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x}$

Problema 3.4.5 *(2 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6}$$

a) (1 punto) Encontrar los puntos de discontinuidad de f. Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.

b) (1 punto) Estudiar si f tiene alguna asíntota vertical.

Opción B

Problema 3.4.6 *(3 puntos)*

a) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función $g(x) = e^x - x$

b) (1 punto) Calcular el dominio de definición de $f(x) = \dfrac{1}{e^x - x}$ y su comportamiento para $x \longrightarrow \infty$ y $x \longrightarrow -\infty$.

c) (1 punto) Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición.

3.4.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.4.7 *(3 puntos)* Sea la función

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$$

definida en el intervalo cerrado y acotado $[-2\pi, 2\pi]$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular los puntos del intervalo dado donde f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos.

b) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función f en el intervalo dado.

c) (1 punto) Calcular

$$\int_0^{\pi/3} f(x)\,dx$$

Opción B

Problema 3.4.8 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = 2x|4 - x|$.

a) Estudiar su continuidad y su derivabilidad.

b) Dibujar su gráfica.

c) Calcular el área del recinto acotado por la gráfica $y = f(x)$, las rectas $x = 0$, $x = 5$, y el eje OX.

3.5. Año 2004

3.5.1. Modelo

Opción A

Problema 3.5.1 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Calcular el límite de la sucesión cuyo término general es $\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{2n}$.

b) (1 punto) Sean las funciónes $F(x) = \int_1^x \sqrt{5 + e^{t^4}}\,dt$, $g(x) = x^2$. Calcular $(F(g(x)))'$.

Problema 3.5.2 *(2 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x^2 - x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ & \\ a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determinar su dominio, y calcular los límites laterales cuando $x \longrightarrow 1$.

b) (1 punto) Estudiar su continuidad, y hallar el valor de a para el que f es continua en $x = 0$.

Opción B

Problema 3.5.3 *(3 puntos)* Se considera la función:

$$f(x) = \frac{1}{1 + (\sin x)^2}$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular sus puntos críticos en el intervalo abierto $(-\pi, \pi)$.

b) (1 punto) Calcular los extremos relativos y/o absolutos de la función $f(x)$ en el intervalo cerrado $[-\pi, \pi]$.

c) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $(\pi/4, f(\pi/4)$.

3.5.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.5.4 *(2 puntos)* Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Problema 3.5.5 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$$

a) (1 punto) Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.

b) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

Opción B

Problema 3.5.6 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:

a) (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$, donde $0 < a < 1$.

b) (1 punto) Hallar los puntos A y B en los que la recta hallada en el apartado anterior corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.

c) (1 punto) Determinar el valor de $a \in (0, 1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$.

3.5.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.5.7 *(3 puntos)* Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada

$$f'(x) = (x-4)^2(x^2 - 8x + 7)$$

a) (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

b) (1 punto) Hallar los máximos y mínimos relativos de f.

c) (1 punto) ¿Es el punto $x = 4$ un punto de inflexión de f?. Justificar razonadamente la respuesta.

Opción B

Problema 3.5.8 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

a) (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.

b) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función, utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además, que f tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abscisas son $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$, $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función f, el eje OX, la recta $x = 0$, y la recta $x = 2$.

3.6. Año 2005

3.6.1. Modelo

Opción A

Problema 3.6.1 *(2 puntos)*

a) Justificar razonadamente que la gráfica de la función

$$f(x) = x^{15} + x + 1$$

corta al eje OX al menos una vez en el intervalo $[-1, 1]$.

b) Determinar el número exacto de puntos de corte con el eje OX cuando x recorre toda la recta real.

Problema 3.6.2 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Determinar el punto P, contenido en el primer cuadrante, en el que se corta la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$.

b) (1 punto) Calcular el área de la región limitada por la recta que une el origen y el punto P hallado en el apartado anterior, y el arco de la curva $y = \dfrac{x^2}{2}$ comprendido entre el origen y el punto P.

Opción B

Problema 3.6.3 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = \ln(1 + x^2)$, donde ln significa *Logaritmo Neperiano*.

a) (1 punto) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad.

b) (1 punto) Dibujar la gráfica de f.

c) (1 punto). Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en sus puntos de inflexión.

3.6.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.6.4 *(2 puntos)* Sea $f(x)$ una función derivable en $(0,1)$ y continua en $[0,1]$, tal que $f(1) = 0$ y $\displaystyle\int_0^1 2xf'(x)dx = 1$. Utilizar la fórmula de integración por partes para hallar $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

Problema 3.6.5 *(2 puntos)* Calcular un polinomio de tercer grado $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que verifica:

- tiene un máximo relativo en $x = 1$
- tiene un punto de inflexión en el punto de coordenadas $(0,1)$.
- se verifica que
$$\int_0^1 p(x)dx = \frac{5}{4}$$

Opción B

Problema 3.6.6 *(3 puntos)* Calcular los siguientes límites

a) (1,5 puntos)
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right)$$

b) (1,5 puntos)
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} x\left[\arctan\left(e^x\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$

3.6.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.6.7 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a > 0$

b) (1 punto) Hallar los puntos de corte de las recta tangente hallada en el apartado anterior con los ejes coordenados.

c) (1 punto) Hallar el valor de $a > 0$ que hace que las distancias entre los dos puntos hallados en el apartado anterior sea mínima.

Opción B

Problema 3.6.8 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{x-1}$ donde ln significa *logaritmo neperiano*, definida para $x > 1$, hallar un punto $(a, f(a))$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en ese punto sea paralela al eje OX.

Problema 3.6.9 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

a) (1 punto) Calcular los extremos locales y/o globales de la función $f(x)$.

b) (1 punto) Determinar el valor del parámetro a tal que:

$$\int_0^a f(x)dx = \frac{1}{4}$$

3.7. Año 2006

3.7.1. Modelo

Opción A

Problema 3.7.1 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

a) (2 puntos) Hallar sus máximos y mínimos locales y/o globales.

b) (1 punto) Determinar el valor del parámetro $a > 0$ para el cual es:

$$\int_0^a f(x)\, dx = -1$$

Opción B

Problema 3.7.2 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Hallar el punto P en el que se cortan las gráficas de las funciónes:

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad g(x) = +\sqrt{x^2-3}$$

b) (1 punto) Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes en el punto P a cada una de las curvas anteriores y demostrar que son perpendiculares.

Problema 3.7.3 *(2 puntos)* Se considera la función:

$$f(x) = \frac{1}{2+\sin x - \cos x}$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular los extremos locales y/o globales en el intervalo $[-\pi, \pi]$

b) (1 punto) Comprobar la existencia de, al menos, un punto $c \in [-\pi, \pi]$ tal que $f''(c) = 0$. (Sugerencia: utilizar el teorema de Rolle). Demostrar que en c hay un punto de inflexión.

3.7.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.7.4 *(3 puntos)* Se pide:

a) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

b) (1 punto) Demostrar que la función $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$ es monótona creciente.

c) (1 punto) Calcular $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} n^2(a_{n+1} - a_n)$

Opción B

Problema 3.7.5 *(3 puntos)* Se pide:

a) (1,5 punto) Estudiar y representar gráficamente la función:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

b) (1,5 puntos) Hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función anterior y las rectas $y = 1$, $x = 5/2$.

3.7.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.7.6 *(2 puntos)* Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x}$

Problema 3.7.7 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Calcular los valores de a y b para que la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 3x+2 & \text{si} & x<0 \\ x^2+2a\cos x & \text{si} & 0 \le x < \pi \\ ax^2+b & \text{si} & x \ge \pi \end{array} \right.$$

sea continua en todo valor de x.

b) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para todos los valores a y b obtenidos en el apartado anterior.

Opción B

Problema 3.7.8 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = xe^{2x}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

b) (1,5 puntos) Calcular el área comprendida entre el eje OX y la gráfica de $f(x)$ entre $-1 \le x \le 1$.

3.8. Año 2007

3.8.1. Modelo

Opción A

Problema 3.8.1 *(3 puntos)*

a) (1 puntos) Si f es una función continua, obtener $F'(x)$ siendo

$$F(x) = \int_0^x (f(t) + t^2 + t^3)\, dt$$

b) (2 punto) Si $f(1) = 1$ y además $\int_0^1 f(t)dt = 1$, hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto $(1, F(1))$.

Opción B

Problema 3.8.2 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = 6x^2 - x^3$, se pide:

a) (1 punto) Hallar un valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ sea paralela a la recta $y = -15x$.

b) (1 punto) Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de f y la parte positiva del eje OX.

Problema 3.8.3 *(2 puntos)* Obtener el valor de k sabiendo que

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{kx+5} = e^2$$

3.8.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.8.4 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x) = x^2+m$, donde $m > 0$ es una constante.

a) (1,5 puntos) Para cada valor de m hallar el valor de $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.

b) (1,5 puntos) Hallar el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$.

Opción B

Problema 3.8.5 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2-12}{x^2+4}$ calcular el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje OX.

Problema 3.8.6 *(2 puntos)* Dibujar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{|x|}{2-x}$$

indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

3.8.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.8.7 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos) Hallar los máximos y los mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$$

b) (1,5 puntos) Determinar una función $F(x)$ tal que su derivada sea $f(x)$ y además $F(0) = 4$.

Opción B

Problema 3.8.8 *(3 puntos)* Sea $g(x)$ una función continua y derivable para todo valor real de x, de la que se conoce la siguiente información:

- $g'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, mientras que $g'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 2)$.
- $g''(x) > 0$ para todo $x \in (1, 3)$ y $g''(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.
- $g(-1) = 0,\ \ g(0) = 2,\ \ g(2) = 1$.
- $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = 3$

Teniendo en cuenta los datos anteriores, se pide:

a) (1 punto) Analizar razonadamente la posible existencia o no existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

b) (1 punto) Dibujar de manera esquemática la gráfica de la función $g(x)$.

c) (1 punto) Si $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\, dt$ encontrar un valor x_0 tal que su derivada $G'(x_0) = 0$

3.9. Año 2008

3.9.1. Modelo

Opción A

Problema 3.9.1 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

a) (1 punto) Hallar sus asíntotas y sus extremos locales.

b) (1 punto) Calcular los puntos de inflexión de $f(x)$ y dibujar la gráfica de $f(x)$.

Problema 3.9.2 *(2 puntos)* Calcular:

a) (1 punto) $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n}$

b) (1 punto) $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} - \sqrt{n^4 - n}}{n+5}$

Opción B

Problema 3.9.3 *(3 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si} \quad |x| < 2 \\ 1/x^2 & \text{si} \quad |x| \geq 2 \end{cases}$$

Se pide:

a) (1,5 punto) Calcular a y b para que f sea continua y derivable en todo R.

b) (1,5 punto) Para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular el área de la región acotada limitada por la gráfica de f el eje horizontal y las rectas $x = 1$, $x = 3$.

3.9.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.9.4 *(2 puntos)* Estudiar los siguientes límites:

a) (1 punto) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(e^x - x^2)$

b) (1 punto) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x}$

Problema 3.9.5 *(2 puntos)* Obtener los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x(\ln(x))^2$$

siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x.

Opción B

Problema 3.9.6 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos) Para cada valor de $c > 0$, calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función:

$$f(x) = cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1$$

el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 1$.

b) (1,5 puntos) Hallar el valor de c para el cual el área obtenida en el apartado anterior es mínima.

3.9.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.9.7 *(3 puntos)* Dada la función;

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$$

se pide:

a) (2 puntos) Dibujar la gráfica de f, estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

b) (1 punto) Calcular:

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

Opción B

Problema 3.9.8 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos) Calcular:

$$\int x^3 \ln(x)\,dx$$

donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x.

b) (1,5 puntos) Utilizar el cambio de variable

$$x = e^t - e^{-t}$$

para calcular:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$$

<u>*Indicación*</u> : Para deshacer el cambio de variable utilizar:

$$t = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$$

3.10. Año 2009

3.10.1. Modelo

Opción A

Problema 3.10.1 *(3 puntos)* Sea:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} 1-\dfrac{x^2}{4} & \text{si} & x < \dfrac{3}{2} \\ \\ \dfrac{7}{12}\left(1-(x-2)^2\right) & \text{si} & x \ge \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$.

b) (1 punto) Hallar los máximos y mínimos locales de $f(x)$

c) (1 punto) Dibujar la gráfica de $f(x)$.

Opción B

Problema 3.10.2 *(2 puntos)* Sea:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$$

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Estudiar cuándo se verifica que $f'(x) = 0$. Puesto que $f(1) = f(-1)$, ¿existe contradicción con el teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$?

Problema 3.10.3 *(3 puntos)* Sea

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x. Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de $f(x)$, y por la recta $y = 1$.

3.10.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.10.4 *(2 puntos)* Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{(x+1)}$$

según los valores del parámetro α

Problema 3.10.5 *(2 puntos)* Calcular la integral:

$$F(x) = \int_0^x t^2\, e^{-t}\, dt$$

Opción B

Problema 3.10.6 *(3 puntos)* Si la derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = (x-1)^3(x-5)$$

Obtener:

a) (1 punto) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) (1 punto) Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión.

c) (1 punto) La función f sabiendo que $f(0) = 0$

3.10.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.10.7 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+ax)-bx}{x^2} & \text{si} \quad 1+ax>0 \ \text{ y } \ x\neq 0 \\ \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si} \qquad\qquad x=0 \end{cases},$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar los valores de los parámetros a, b para los cuales la función f es continua en $x = 0$.

b) (1,5 puntos) Para $a = b = 1$, estudiar si la función f es derivable en $x = 0$ aplicando la definición de derivada.

Problema 3.10.8 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{a}, \quad s : \frac{x-3}{b} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1},$$

determinar los valores de los parámetros a, b para los cuales las rectas r, s se cortan perpendicularmente.

Opción B

Problema 3.10.9 *(3 puntos)*

a) (1 punto) Dada la función:
$$f(x) = \frac{x}{1-x^2},$$
hallar el punto o los puntos de la gráfica de $f(x)$ en los que la pendiente de la recta tangente sea 1.

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 0$.

c) (1,5 puntos) Sea g una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que $g(0) = 0$, $g(2) = 2$. Demostrar que existe al menos un punto c en el intervalo $(0, 2)$ tal que $g'(c) = 1$.

3.10.4. Reserva

Opción A

Problema 3.10.10 *(3 puntos)* Calcular las derivadas de las siguientes funciónes:

a) (1 punto) $f(x) = (2x)^{3x}$.

b) (1 punto) $g(x) = \cos\dfrac{\pi}{8}$.

c) (1 punto) $h(x) = \displaystyle\int_{5\pi}^{6\pi} e^{\cos t}\, dt$.

Opción B

Problema 3.10.11 *(2 puntos)* Sabiendo que el volumen de un cubo de lado a es $V(a) = a^3$ centímetros cúbicos, calcular el valor mínimo de $V(x) + V(y)$ si $x + y = 5$.

Problema 3.10.12 *(2 puntos)* Calcular las siguientes integrales:

a) (1 punto) $\displaystyle\int (2x+1)^3\,dx$, $\displaystyle\int x^3 e^{x^4}\,dx$

b) (1 punto) $\displaystyle\int 2^x\,dx$, $\displaystyle\int \frac{1+x+x^4}{x^3}\,dx$

3.11. Año 2010

3.11.1. Modelo

Opción A

Problema 3.11.1 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = e^x + a\,e^{-x},$$

siendo a un número real, estudiar los siguientes apartados en función de a:

a) (1,5 puntos) Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) (1 punto) Estudiar para que valor, o valores, de a la función f tiene alguna asíntota horizontal.

c) (0,5 puntos) Para $a \geq 0$, hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

Opción B

Problema 3.11.2 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = x^3 - x$$

Se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, f(-1))$.

b) (1 punto) Determinar los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de f.

c) (1 punto) Calcular el área de la región acotada que está comprendida entre la gráfica de f y la recta obtenida en el apartado anterior.

3.11.2. Ordinaria-General

Opción A

Problema 3.11.3 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$$

se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) (0,75 puntos) Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$.

c) (0,75 puntos) Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de $f(x)$.

d) (0,75 puntos) Hallar el área del recinto acotado que limitan la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $y = x+2$, $x = 1$.

Opción B

Problema 3.11.4 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ x+k & \text{si} \quad x \le 0 \end{cases}$$

donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x, se pide:

a) (1 punto) Determinar el valor de k para que la función sea continua en $\mathbf{R}$.

b) (1 punto) Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

c) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

3.11.3. Ordinaria-Específica

Opción A

Problema 3.11.5 *(2 puntos)* Hallar:

a) (1 punto) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty}\left[\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right]^{25}$

b) (1 punto) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0}(1+4x^3)^{2/x^3}$

Problema 3.11.6 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \ln(x^2+4x-5)$, donde ln significa logaritmo neperiano,se pide:

a) (1 punto) Determinar el dominio de definición de $f(x)$ y las asíntotas verticales de su gráfica.

b) (1 punto) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Opción B

Problema 3.11.7 *(3 puntos)* Dadas las funciónes:

$$y = 9 - x^2, \quad y = 2x + 1$$

se pide:

a) (1 punto) Dibujar las gráficas de las dos funciónes identificando el recinto acotado por ellas.

b) (1 punto) Calcular el área de dicho recinto acotado.

c) (1 punto) Hallar el volumen de un cuerpo de revolución obtenido al hacer girar al rededor del eje OX el recinto acotado por la gráfica de $y = 9 - x^2$ y el eje OX.

3.11.4. Extraordinaria-General

Opción A

Problema 3.11.8 *(2 puntos)* Calcular los límites:

a) (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(1 + \arctan x)^{a/x}$

b) (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{3x + 2e^x}{7x + 5e^x}$.

Problema 3.11.9 *(2 puntos)* Calcular:

a) (1 punto). $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx$

b) (1 punto). $\displaystyle\int_0^\pi x \cos x\, dx$

Opción B

Problema 3.11.10 *(3 puntos)* Los puntos $P(1, 2, 1)$, $Q(2, 1, 1)$ y $A(a, 0, 0)$ con $a > 3$, determinan un plano π que corta a los semiejes positivos de OY y OZ en los puntos B y C respectivamente. Calcular el valor de a para que el tetraedro determinado por los puntos A, B, C y el origen de coordenadas tenga volumen mínimo.

3.11.5. Extraordinaria-Específica

Opción A

Problema 3.11.11 *(2 puntos)* Obtener el valor de a para que

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3}\right)^{ax^2} = 4$$

Problema 3.11.12 *(2 puntos)* Hallar:

a) (0,5 puntos). $\displaystyle\int_{14}^{16} (x - 15)^8\, dx$

b) (1,5 puntos). $\displaystyle\int_9^{11} (x - 10)^{19}(x - 9)\, dx$

Opción B

Problema 3.11.13 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Estudiar y obtener las asíntotas.

b) (1 punto). Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad.

c) (0,5 puntos). Representar gráficamente la función.

3.12. Año 2011

3.12.1. Modelo

Opción A

Problema 3.12.1 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{x - 1}{(x + 1)^2}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Obtener, si existen, los máximos y mínimos relativos, y las asíntotas.

b) (1,5 puntos). Calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 3$.

Opción B

Problema 3.12.2 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites:

a) (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} xe^{1/x}$

b) (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}{x}$

Problema 3.12.3 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{2} - \sin x$, calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.

3.12.2. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.12.4 *(2 puntos)* Se pide:

a) (1 punto). Calcular la integral $\displaystyle\int_1^3 x\sqrt{4 + 5x^2}\, dx$.

b) (1 punto). Hallar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = \sqrt{12 - 3x^2}$.

Opción B

Problema 3.12.5 *(2 puntos)* Se pide:

a) (1 punto). Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

b) (1 punto). Demostrar que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ sólo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número m. Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan.

Problema 3.12.6 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{ax^4 + 1}{x^3}$$

Se pide:

a) (1 punto). Determinar el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x = 1$. Para este valor de a obtener los otros puntos en que f tiene un extremo relativo.

b) (1 punto). Obtener las asíntotas de la gráfica de $y = f(x)$ para $a = 1$.

c) (1 punto). Esbozar la gráfica de la función para $a = 1$.

3.12.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.12.7 *(3 puntos).*

a) (1 punto) Calcular los límites:

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{2}{4+e^{-(x+1)}} \quad \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{2}{4+e^{-(x+1)}}$$

b) (1 punto) Calcular la integral: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+3x^2}\,dx$

c) (1 punto) Hallar el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 9x + 14}$. Hallar el conjunto de puntos en los que la función f tiene derivada.

Opción B

Problema 3.12.8 *(2 puntos).* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{si} \quad x < 0 \\ k & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{\cos x - 1}{\sin x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

hallar el valor de k para que f sea continua en $x = 0$. Justificar la respuesta.

Problema 3.12.9 *(2 puntos).*

a) (1 punto). Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x) = -\sin x$ y el eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

b) (1 punto). Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de $f(x) = -\sin x$ alrededor del eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

3.13. Año 2012

3.13.1. Modelo

Opción A

Problema 3.13.1 *(2 puntos)* Halla el valor de λ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda x^2} - 1}{3x^2} & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ \dfrac{\sin 2x}{x} & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

sea continua. Razonar la respuesta.

Problema 3.13.2 *(2 puntos)* Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, obtener los valores de a, b y c de modo que se verifiquen las condiciones siguientes:

- El polinomio $P(x)$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisas $x = -1/3$, $x = -1$.
- La recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto $(0, P(0))$ sea $y = x + 3$.

Opción B

Problema 3.13.3 *(3 puntos)* Sabiendo que la función $F(x)$ tiene derivada $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[2, 5]$, y, además, que:

$$F(2) = 1, \quad F(3) = 2, \quad F(4) = 6, \quad F(5) = 3, \quad f(3) = 3 \ \text{ y } \ f(4) = -1;$$

Hallar:

a) (0,5 puntos). $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx$

b) (1 punto). $\displaystyle\int_2^3 (5f(x) - 7)\,dx$

c) (1,5 puntos). $\displaystyle\int_2^4 F(x)f(x)\,dx$.

3.13.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.13.4 *(2 puntos)* Hallar a, b, c de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x = 3$ un punto de inflexión.

Problema 3.13.5 *(2 puntos)* Calcular razonadamente las siguientes integrales definidas:

- (1 punto). $\displaystyle\int_0^\pi e^{2x}\cos x\,dx$
- (1 punto). $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 2x}\,dx$

Opción B

Problema 3.13.6 *(3 puntos)* Dadas las funciónes

$$f(x) = \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2 - 3}}, \ \ g(x) = (lnx)^x, \ \ h(x) = sen(\pi - x)$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar el dominio de $f(x)$ y el $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$.

b) (1 punto). Calcular $g'(e)$.

c) (1 punto). Calcular, en el intervalo $(0, 2\pi)$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas y las coordenadas de los extremos relativos de $h(x)$.

3.13.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.13.7 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \cos^2 x$, se pide:

a) (1 punto). Calcular los extremos relativos de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$

b) (1 punto). Calcular los puntos de inflexión de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$

c) (1 punto). Hallar la primitiva $g(x)$ de $f(x)$ tal que $g(\pi/4) = 0$.

Opción B

Problema 3.13.8 *(2 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar $\lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -3^-} f(x)$

b) (1 punto) Hallar $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$

Problema 3.13.9 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Sea $f(x)$ una función continua tal que $\displaystyle\int_1^8 f(u)\, du = 3$. Hallar

$$\int_1^2 f(x^3)x^2\, dx$$

b) (1 punto) Hallar el dominio de definición y las abscisas de los puntos donde la función

$$F(x) = \sqrt{(x-3)(9-x)^2}$$

alcanza sus máximos y mínimos relativos.

3.13.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.13.10 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + A & \text{si} \quad x \leq 3 \\ -4 + 10x - x^2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar el valor de A para que $f(x)$ sea continua. ¿Es derivable para ese valor de A?

b) (1 punto). Hallar los puntos en los que $f'(x) = 0$.

c) (1 punto). Hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[4, 8]$.

Opción B

Problema 3.13.11 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = x^2 \sin x$, se pide:

a) (1 punto). Determinar, justificando la respuesta, si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $(\pi/2, \pi)$.

b) (1 punto). Calcular la integral de f en el intervalo $[0, \pi]$.

c) (1 punto). Obtener la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(\pi, f(\pi))$. Recuérdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

3.14. Año 2013

3.14.1. Modelo

Opción A

Problema 3.14.1 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + 3x}{x - 1} & \text{si} \quad x < 0 \\ a & \text{si} \quad x = 0 \\ e^{-1/x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$.

b) (1 punto). Para ese valor de a, estudiar la derivabilidad de f en $x = 0$.

c) (1 punto). Hallar, si las tiene, las asíntotas de la gráfica $y = f(x)$.

Opción B

Problema 3.14.2 *(3 puntos)*

a) (0,5 puntos). Representar gráficamente el recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \ln x$ y el eje OX entre las abscisas $x = 1/e$, $x = e$.

b) (1,25 puntos). Calcular el área de dicho recinto.

c) (1,25 puntos). Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar dicho recinto alrededor del eje OX.

3.14.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.14.3 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-3)^2}$, se pide se pide:

a) (1 punto). Hallar las asíntotas de su gráfica.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Problema 3.14.4 *(2 puntos)* Calcular las siguientes integrales:

$$\text{a)} \int \frac{x-3}{x^2+9}\,dx \qquad \text{b)} \int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3}\,dx$$

Opción B

Problema 3.14.5 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = 2\cos^2 x$, se pide:

a) (1 punto). Calcular los extremos absolutos de $f(x)$ en $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

b) (1 punto). Calcular los puntos de inflexión de $f(x)$ en $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$

3.14.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.14.6 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = e^{-x} - x$, se pide:

a) (1 punto). Determinar el polinomio de segundo grado, $P(x) = ax^2 + bx + c$, que verifica simultáneamente las tres condiciones siguientes: $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$, $P''(0) = f''(0)$.

b) (1 punto). Usar los teoremas de Bolzano y Rolle para demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución real.

Problema 3.14.7 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \begin{cases} a & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 + xe^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$ y estudiar, en ese caso, la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto). Calcular, en función de a, la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Opción B

Problema 3.14.8 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\[2ex] \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

donde ln significa logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (1 punto). Calcular $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x), \lim_{x\longrightarrow \infty} f(x)$

c) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f', donde sea posible.

3.14.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.14.9 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2}$$

se pide:

a) (0,75 puntos). Hallar las asíntotas de su gráfica.

b) (1,75 puntos). Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcular sus puntos de inflexión.

c) (0,5 puntos). Esbozar la gráfica de la función.

Opción B

Problema 3.14.10 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$.

b) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\,dx$.

Problema 3.14.11 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = e^{1/x}$, se pide:

a) (1 punto). Calcular $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$ y estudiar la existencia de $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} f(x)$.

b) (1 punto). Esbozar la gráfica $y = f(x)$ determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus asíntotas.

3.14.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.14.12 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, se pide:

a) (1,5 puntos). Hallar los valores de a, b y c para que la gráfica de la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$, un punto de inflexión en el de abscisa $x = 2/3$ y corte el eje OY en el punto de ordenada $y = 1$.

b) (0,5 puntos). ¿Es el extremo relativo un máximo o un mínimo?

Problema 3.14.13 *(2 puntos)*Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 25 & \text{si} \quad x \le 1 \\ 5\sqrt{(2+x)^2 + (5-x)^2} & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ \frac{5\ln(1+x^2)}{\ln 5} & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$.

b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$.

Opción B

Problema 3.14.14 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 + \alpha}{x^2 + 1}$, se pide:

a) (1 punto). Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$.

b) (0,5 puntos). Hallar el valor de α para el que esta recta tangente es horizontal.

c) (1,5 puntos). Representar gráficamente la función $y = f(x)$ para $\alpha = 2$, estudiando sus asíntotas y su crecimiento y decrecimiento.

3.15. Año 2014

3.15.1. Modelo

Opción A

Problema 3.15.1 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites:

a) (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\arctan x - x}{x^3}$

b) (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} [1 - \sin x]^{1/x}$

Problema 3.15.2 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Sea $g(x)$ una función derivable que cumple $g(6) = \displaystyle\int_5^6 g(x)\,dx$. Hallar

$$\int_5^6 (x-5)g'(x)\,dx$$

b) (1 punto). Sea $f(x)$ una función continua que verifica $\displaystyle\int_1^e f(u)\,du = \frac{1}{2}$. Hallar

$$\int_0^2 f(e^{x/2})e^{x/2}\,dx.$$

Opción B

Problema 3.15.3 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+6}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (0,75 puntos). Estudiar su continuidad.

b) (1 punto). Estudiar la existencia de asíntotas de su gráfica y, en su caso, calcularlas.

c) (1,25 puntos). Hallar los extremos relativos y esbozar de su gráfica.

3.15.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.15.4 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Sea $f : R \longrightarrow R$ una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto de abscisa $x = -2$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ y que la recta de ecuación $y = 16x + 16$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en dicho punto, determinar:

$$f(-2), \quad f'(-2) \text{ y } f''(-2)$$

b) (1 punto). Determinar el área de la región acotada limitada por la gráfica de la función $g(x) = x^4 + 4x^3$ y el eje OX.

Problema 3.15.5 *(2 puntos)* Calcular justificadamente:

a) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1 - 2x - e^x + \sin(3x)}{x^2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{(5x^2+2)(x-6)}{(x^2-1)(2x-1)}$

Opción B

Problema 3.15.6 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} a + \ln(1-x) & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(donde ln denota logaritmo neperiano) se pide:

a) (1 punto). Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)$.

b) (1 punto). Calcular el valor de a, para que $f(x)$ sea continua en todo R.

c) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f', donde sea posible.

3.15.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.15.7 *(3 puntos)* Dada la función $f(x)=\dfrac{mx^3-1}{x^2}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar el valor de m para el que f tiene un extremo relativo en $x=1$.

b) (1 punto). Obtener las asíntotas de f para el caso $m=-2$.

c) (1 punto). En el caso $m=-2$, estudiar los intervalos de crecimiento de f y calcular los puntos de corte con los ejes. Esbozar la gráfica de f y sus asíntotas.

Opción B

Problema 3.15.8 *(2 puntos)* Sea $f(x)$ una función con derivada continua tal que $f(0)=1$ y $f'(0)=2$. Se considera la función $g(x)=2(f(x))^2$ y se pide:

a) (1 punto). Hallar la recta tangente a la curva $y=g(x)$ en $x=0$.

b) (1 punto). Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{f(x)-1}{e^{-x}-1}$.

Problema 3.15.9 *(2 puntos)* Calcular:

a) (1 punto). $\displaystyle\int_1^{3/2}\frac{dx}{1-4x^2}$

b) (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$, donde ln denota logaritmo neperiano.

3.15.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.15.10 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+4},$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar el dominio de f y sus asíntotas.

b) (1 punto). Calcular $f'(x)$ y determinar los extremos relativos de $f(x)$.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Opción B

Problema 3.15.11 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5\sin x}{2x} + \frac{1}{2} & \text{si} \quad x < 0 \\ a & \text{si} \quad x = 0 \\ xe^x + 3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) (1 punto). Hallar, si existe, el valor de a para que $f(x)$ sea continua.

b) (1 punto). Decidir si la función es derivable en $x = 0$ para algún valor de a.

c) (1 punto). Calcular la integral:

$$\int_1^{\ln 5} f(x)\, dx,$$

donde ln denota logaritmo neperiano.

3.16. Año 2015

3.16.1. Modelo

Opción A

Problema 3.16.1 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$, se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar el dominio de $f(x)$.

b) (1 punto). Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

c) (1,5 puntos). El área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = \pm 1/2$.

Opción B

Problema 3.16.2 *(3 puntos)* Hallar

a) (1 punto). $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$.

b) (1 punto). $\displaystyle\int (3x + 5) \cos x\, dx$.

c) (1 punto). Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función

$$f(x) = \frac{ex - e^x}{x}$$

.

3.16.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.16.3 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{\ln(x + 1)}{x + 1}$$

donde ln denota logaritmo neperiano, se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.

b) (0,75 puntos) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.

c) (0,75 puntos) Calcular $\displaystyle\int f(x)\, dx$.

Opción B

Problema 3.16.4 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ xe^x + 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de f.

b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_1^3 f(x)\, dx$.

3.16.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.16.5 *(3 puntos)*

a) (2 punto). Determinar los valores a, b, c para que la función $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x = 0 \\ ax - b & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ x^2 + bx + c & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$

sea continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$.

b) (1 punto). Aplicar, si es posible, el Teorema del Valor Medio a la función $g(x) = x^2 + x$ en el intervalo $[1, 2]$ y calcular, en tal caso, un punto de dicho intervalo en el que $g'(x)$ tome el valor predicho por el Teorema del Valor Medio.

Opción B

Problema 3.16.6 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = x^2e^{-x}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar su dominio, asíntotas y cortes con los ejes.

b) (1 punto). Calcular su derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.

c) (1 punto). Determinar los puntos de inflexión y dibujar la curva $y = f(x)$.

3.16.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.16.7 *(2 puntos)*

a) (0,5 puntos). Estudiar el crecimiento de la función $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.

b) (1,5 puntos). Demostrar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución real y localizar un intervalo de longitud 1 que la contenga.

Problema 3.16.8 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Calcular la integral definida $\displaystyle\int_1^4 (1-x)e^{-x}\,dx$

b) (1 punto) Calcular $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}(1-x)e^{-x}$ y $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow-\infty}(1-x)e^{-x}$

Opción B

Problema 3.16.9 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} a + x\ln(x)\text{si} & x > 0 \\ x^2e^x & \text{si} \quad x \le 0 \end{cases}$$

(donde ln denota logaritmo neperiano y a es un número real) se pide:

a) (1 punto). Calcular el valor de a para que $f(x)$ sea continua en todo R.

b) (1 punto). Calcular $f'(x)$ donde sea posible.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,dx$.

3.16.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.16.10 *(2 puntos)* Dada $f(x)$, función derivable, con derivada continua, tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, se define la función $g(x) = (f(x))^2 - e^{f(x)}$ y se pide:

a) (1 punto). Hallar $g(0)$, $g'(0)$ y $(fg)'(0)$.

b) (0,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.

c) (0,5 puntos). Obtener el valor de $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(x)}{x}$

Problema 3.16.11 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$, se pide:

a) (1 punto). Calcular $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{f(x)}{x}$.

b) (1 punto). Justificar que f está definida en todo x del intervalo $[0, 1]$ y calcular $\displaystyle\int_0^1 (x-2)f(x)\,dx$.

Opción B

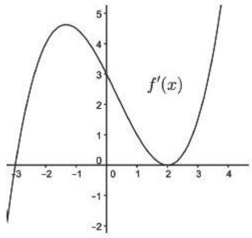
Problema 3.16.12 *(3 puntos)* Sea $f(x)$ una función con derivada de orden dos continua para todo número real y cuya gráfica contiene al origen.

La función derivada $f'(x)$ (representada en el gráfico adjunto) es positiva para todo $x > 2$ y negativa para todo $x < -3$. Se pide:

a) (1 punto). Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) (1 punto). Determinar las abscisas de los extremos relativos de $f(x)$ y clasificar dichos extremos.

c) (1 punto). Demostrar que $f(x)$ tiene un punto de inflexión en el intervalo $(-3, 2)$.



3.17. Año 2016

3.17.1. Modelo

Opción A

Problema 3.17.1 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = 2x^2 - \dfrac{x^3}{3}$, se pide:

a) (0,75 puntos). Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) (0,5 puntos). Determinar las coordenadas de sus extremos relativos.

c) (0,75 puntos). El valor máximo que puede tener la pendiente de una recta tangente a la gráfica de $f(x)$.

d) (1 punto). El volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función en torno al eje OX, entre los puntos de corte de la misma con dicho eje.

Opción B

Problema 3.17.2 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si} \quad x < 1 \\ xe^{1-x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Estudiar su continuidad y derivabilidad y calcular la función derivada f' donde sea posible.

b) (0,5 puntos). Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

3.17.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.17.3 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll}\dfrac{\ln(1-x)}{1-x} & \text{si} & x<0\\ xe^{-x} & \text{si} & x\ge 0\end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de f y calcular $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$.

b) (0,5 puntos). Calcular la recta tangente a la curva $y=f(x)$, en $x=2$.

c) (1,5 punto). Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Opción B

Problema 3.17.4 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Determine el polinomio $f(x)$, sabiendo que $f'''(x)=12$, para todo $x\in R$ y además verifica: $f(1)=3$; $f'(1)=1$; $f''(1)=4$.

b) (1 punto). Determine el polinomio $g(x)$, sabiendo que $g''(x)=6$, para todo $x\in R$ y que además verifica:
$$\int_0^1 g(x)\,dx=5;\quad \int_0^2 g(x)\,dx=14$$

Problema 3.17.5 *(2 puntos)* Estudie la continuidad y la derivabilidad en $x=0$ y en $x=1$ de $f(x)=\left\{\begin{array}{ccc}0 & \text{si} & x\le 0\\ |x\ln x| & \text{si} & x>0\end{array}\right.$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

3.17.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.17.6 *(2 puntos)* Los estudiantes de un centro docente han organizado una rifa benéfica, con la que pretenden recaudar fondos para una ONG. Han decidido sortear un ordenador portátil, que les cuesta 600 euros. Quieren fijar el precio de la papeleta, de modo que la recaudación sea máxima. Saben que si el precio de cada una es 2 euros, venderían 5000 papeletas, pero que, por cada euro de incremento en dicho precio, venderán 500 papeletas menos. ¿A qué precio deben vender la papeleta?
Si el único gasto que tienen es la compra del ordenador, ¿cuánto dinero podrán donar a la ONG?

Problema 3.17.7 *(3 puntos)* Se consideran las funciónes $f(x) = 2 + x - x^2$ y $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$, definida para $x \neq -1$. Se pide:

a) (1,5 punto). Hallar el área del recinto del primer cuadrante limitado por las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

b) (0,5 punto). Calcular $\lim\limits_{x \longrightarrow -1} f(x)g(x)$.

Opción B

Problema 3.17.8 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{2x-4} + 2x - 1 & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 0 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar las asíntotas de la curva $y = f(x)$.

b) (1 punto). Determinar los posibles extremos relativos y puntos de inflexión de $y = f(x)$.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

3.17.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.17.9 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = (6-x)e^{x/3}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar su dominio, asíntotas y cortes con los ejes.

b) (1 punto). Calcular su derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.

c) (1 punto). Determinar el área del triángulo que forman los ejes coordenados con la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = 0$.

Opción B

Problema 3.17.10 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5-x} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{5+x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de f y determinar sus asíntotas.

b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular $f'(x)$ donde sea posible.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

3.18. Año 2017

3.18.1. Modelo

Opción A

Problema 3.18.1 *(2 puntos)* Los estudiantes de un centro docente han organizado una rifa benéfica, con la que pretenden recaudar fondos para una ONG. Han decidido sortear un ordenador portátil, que les cuesta 600 euros. Quieren fijar el precio de la papeleta, de modo que la recaudación sea máxima. Saben que si el precio de cada una es 2 euros, venderían 5000 papeletas, pero que, por cada euro de incremento en dicho precio, venderán 500 papeletas menos. ¿A qué precio deben vender la papeleta?
Si el único gasto que tienen es la compra del ordenador, ¿cuánto dinero podrán donar a la ONG?

Problema 3.18.2 *(2 puntos)* Calcular el área comprendida entre las curva $y = (x-1)e^x$ y la recta $y = x - 1$.

Opción B

Problema 3.18.3 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x) = xe^{-x}$ y se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar el dominio y las asíntotas de f.

b) (1,5 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y hallar sus extremos relativos.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

3.18.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.18.4 *(2 puntos)* Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = te^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

Problema 3.18.5 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2+x+6}{x-2}$, se pide:

a) (0,5 puntos). Determinar su dominio y asíntotas verticales.

b) (0,5 puntos). Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,dx$.

Opción B

Problema 3.18.6 *(3 puntos)* Dadas las funciónes $f(x) = \dfrac{2}{x}$ y $g(x) = \sin x$, se pide:

a) (1 punto). Calcular $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0}\left(f(x) - \frac{2}{g(x)}\right)$.

b) (0,75 puntos). Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$.

c) (1,25 puntos). Calcular el área delimitada por la curva $y = f(x)$ y la recta $y = -x + 3$.

3.18.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.18.7 *(3 puntos)* Dadas las funciónes $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-4}$, definidas para $x \in (-2, 4)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar el valor o valores de x para los que $f'(x) = g'(x)$.

b) (1 punto) Hallar el punto x del intervalo $(-2, 4)$ en el que la diferencia $f(x) - g(x)$ es mínima y determinar el valor de esta diferencia mínima.

c) (0,5 puntos) Hallar $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -2^+}(f(x) - g(x))$ y $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 4^-}(f(x) - g(x))$.

d) (1 punto) Hallar $F(x)$, primitiva de la función $f(x) - g(x)$, que cumple la condición $F(2) = 2 + \ln 2$.

Opción B

Problema 3.18.8 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{4\sin^2 x - 5\sin x\cos x}{3\sin^2 x\cos x + 2\sin x}; \quad \lim_{x\longrightarrow \infty}(\sqrt{x} - \sqrt{2x+7}).$$

b) (1 punto) Calcule las siguientes integrales:

$$\int (3u+1)\cos(2u)\,du; \quad \int_2^5 \frac{7}{4x+1}\,dx.$$

3.18.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.18.9 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \begin{cases} xe^{2x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ donde ln significa logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (1 punto) Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} f(x)$.

c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

Opción B

Problema 3.18.10 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^2+1}$ y se pide:

a) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) (1 punto) Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función f y, en su caso, determinarlas.

c) (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.

3.18.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.18.11 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ xe^x + 2 & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$ se pide:

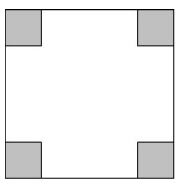
a) (1 punto) Estudiar la continuidad de f en todo $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Obtener la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = -\pi$

c) (1 punto) Calcular la integral $\displaystyle\int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

Opción B

Problema 3.18.12 *(2 puntos)* Se dispone de una plancha de cartón cuadrada cuyo lado mide 1,2 metros. Determínense las dimensiones de la caja (sin tapa) de volumen máximo que se puede construir, recortando un cuadrado igual a cada esquina de la plancha y doblando adecuadamente para unir las aristas resultantes de los cortes.



Problema 3.18.13 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2+1}$, calcúlese el área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y la recta $y = 1 - x$.

3.19. Año 2018

3.19.1. Modelo

Opción A

Problema 3.19.1 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = 2\cos(x) + |x - 1|$, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar el valor de $f'(0)$.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi$.

c) (1 punto) Hallar el área del recinto plano limitado por la la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = \pi$ y $x = 2\pi$.

Opción B

Problema 3.19.2 *(2,5 puntos)* El dibujo adjunto muestra la gráfica de la función

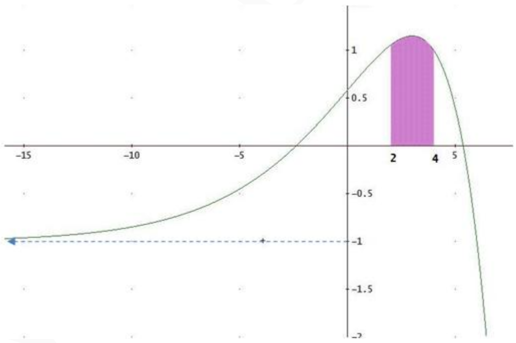
$$f(x) = (6 - x)e^{\frac{x-4}{3}} - 1$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular el área de la región sombreada.

b) (1 punto) Determinar la abscisa del punto de la gráfica donde la recta tangente tiene pendiente máxima.

c) (0,5 puntos) Efectuando los cálculos necesarios, obtener la ecuación de la asíntota que se muestra en el dibujo (flecha discontinua inferior).



3.19.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.19.3 *(2,5 puntos)*

a) (1,5 puntos) En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes: $m_1 = 0,92$; $m_2 = 0,94$; $m_3 = 0,89$; $m_4 = 0,90$; $m_5 = 0,91$. Se tomará como resultado el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función $E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + \cdots + (x - m_5)^2$ alcanza el mínimo. Calcule dicho valor x.

b) (1 punto) Aplique el método de integración por partes para calcular la integral $\int_1^2 x^2 \ln(x)dx$, donde ln significa logaritmo neperiano.

Opción B

Problema 3.19.4 *(2,5 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$$

se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de $f(x)$.

b) (0,75 puntos) Calcular $f'(4)$.

c) (1,25 puntos) Hallar el área del recinto limitado por la la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

3.19.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.19.5 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = 3x^2e^{-x}$, se pide:

a) (1 punto) Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) (0,75 puntos) Calcular $\int_0^1 \frac{f(x)}{x}\,dx$.

c) (0,75 puntos) Calcular los límites: $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$.

Opción B

Problema 3.19.6 *(2,5 puntos)* Una firma de alta perfumería pretende sacar al mercado un frasco de un perfume exclusivo que contenga 12 ml de esencia pura más una cantidad variable, x, de alcohol. El precio de la esencia pura es de 48 euros el mililitro. Al añadir alcohol a la esencia, el precio de la mezcla resultante disminuye. Sabiendo que por cada mililitro de alcohol añadido el precio del mililitro de mezcla se reduce 3 euros, se pide:

a) (0,25 puntos) Determinar el precio del frasco de perfume en el caso $x = 0$ (el frasco sólo contiene los 12 ml de esencia).

b) (0,5 puntos) Expresar en función de x el precio del frasco que contiene $(12+x)$ ml de mezcla.

c) (0,5 puntos) Deducir con qué valor de x el precio de la mezcla se hace cero.

d) (1,25 puntos) Sin tener en cuenta otros costes, determinar el valor de x para el que se obtiene el frasco de perfume (mezcla) de precio máximo. Indicar en este caso la capacidad del frasco y el precio resultante.

3.19.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.19.7 *(2,5 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 8e^{2x-4} & \text{si} \quad x \leq 2 \\ \frac{x^3-4x}{x-2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

se pide:

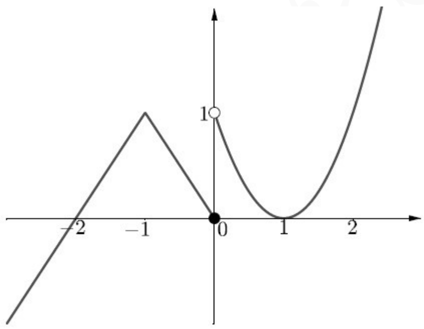
a) (0,75 puntos) Estudiar la continuidad de f en $x = 2$.

b) (1 punto) Calcular las asíntotas horizontales de $f(x)$. ¿Hay alguna asíntota vertical?

c) (0,75 puntos) Calcular $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

Opción B

Problema 3.19.8 *(2,5 puntos)* El dibujo adjunto muestra la gráfica de una función $y = f(x)$. Usando la información de la figura, se pide:



a) (0,5 puntos) Indicar los valores de $f(-1)$ y $f'(1)$.

b) (1 punto) Justificar, usando límites laterales, si f es continua en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.

c) (0,5 puntos) Indicar razonadamente si f es derivable en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.

d) (0,5 puntos) Determinar el valor de $\displaystyle\int_{-2}^0 f(x)\,dx$

(Julio 2018 (extraordinaria)- Opción B)

3.20. Año 2019

3.20.1. Modelo

Opción A

Problema 3.20.1 *(2,5 puntos)* La contaminación por dióxido de nitrógeno, NO_2, en cierta estación de medición de una ciudad, durante el pasado mes de abril, se puede modelar por la función

$c(t) = 80 - 6t + \dfrac{23t^2}{20} - \dfrac{t^3}{30}\ mg/m^3$ donde $t \in [0, 30]$ representa el tiempo, **expresado en días**, transcurrido desde las 0 horas del día 1 de abril.

a) (0,5 puntos) ¿Qué nivel de NO_2, había a las 12 horas del día 10 de abril?

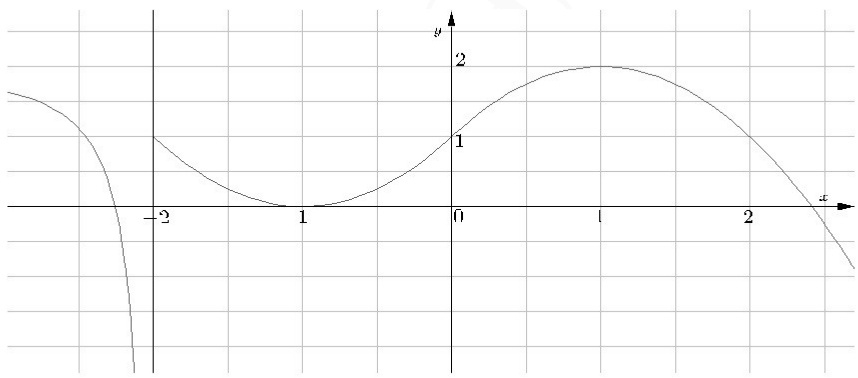
b) (1,25 puntos) ¿En qué momento se alcanzó el máximo nivel de NO_2?, ¿cuál fue ese nivel máximo?

c) (0,75 puntos) Calcule, mediante $\dfrac{1}{30}\displaystyle\int_0^{30} c(t)dt$, el nivel promedio del mes.

Opción B

Problema 3.20.2 *(2,5 puntos)*

a) (1 punto) A partir de la siguiente gráfica de la función f, determine los valores de: $f'(-1)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow -2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\longrightarrow -2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)$.



b) (1,5 puntos) Calcule $\displaystyle\int_{-3}^{\pi} g(x)\,dx$, donde $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si} \quad -3 \le x \le 0 \\ 1 + \sin x & \text{si} \quad 0 < x \le 4 \end{cases}$

3.20.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.20.3 *(2,5 puntos)* Dada $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$, donde ln denota el logaritmo neperiano, definida para $x > 0$, se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$.

b) (1 punto) Encontrar un punto de la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$ y $x = e$.

Opción B

Problema 3.20.4 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar su dominio.

b) (1,5 puntos) Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) (0,5 puntos) Calcular los límites laterales. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{f(x)}{x}$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$

3.20.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.20.5 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2\sin\left(\dfrac{\pi x^2}{2}\right) & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$, se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$.

b) (0,75 puntos) Determinar, si existe, $f'(1)$.

c) (1 punto) Calcular el valor de $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx$.

Opción B

Problema 3.20.6 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{2(x-1)}$, se pide:

a) (1,25 puntos) Determinar las asíntotas de la curva $y = f(x)$ y estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

b) (1,25 puntos) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y la recta $2x + 4y = 7$.

Incluyo el examen de Valencia por la expectación generada con éste.

3.20.4. Ordinaria-Valencia

Opción A

Problema 3.20.7 Se considera la función $f(x) = xe^{-x^2}$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) (3 puntos) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

b) (2 puntos) La representación gráfica de la curva $y = f(x)$.

c) (1 punto) El valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo [0,1] a la función $g(x) = f(x) + ax$.

d) (4 puntos) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)\,dx$ e $\int xe^{-x}\,dx$

Opción B

Problema 3.20.8 *(2,5 puntos)* Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son $(0,0)$ y $(250,0)$, respectivamente, siendo 1 km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1, 0) y (0, 1). El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) (2 puntos) La distancia $f(t)$ entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse.

b) (4 puntos) El tiempo T que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f a lo largo del trayecto.

c) (4 puntos) Los valores de t para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima.

3.20.5. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.20.9 *(2,5 puntos)*

a) (1,25 puntos) Sean f y g dos funciónes derivables de las que se conocen los siguientes datos:

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = 2, \quad g(1) = 3, \quad g'(1) = 4$$

Dada $h(x) = f((x+1)^2)$, use la regla de la cadena para calcular $h'(0)$. Dada $k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, calcule $k'(1)$.

b) (1,25 puntos) Calcule la integral $\displaystyle\int (\sin x)^4 (\cos x)^3 \, dx$. (Se puede usar el cambio de variables $t = \sin x$.)

Opción B

Problema 3.20.10 *(2,5 puntos)* Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ tal que $F'(t) = t^2(10 - t)$

a) (1 punto) Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función $F(t)$.

b) (1 punto) Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.

c) (0,5 puntos) Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.

3.21. Año 2020

3.21.1. Modelo

Opción A

Problema 3.21.1 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = e^{3x-2}$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el punto en el que la tangente a la curva $y = f(x)$ tiene pendiente igual a $\dfrac{3}{e}$ y escribir la ecuación de esta recta tangente.

b) (0,5 puntos) Calcular $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 2/3} \frac{1 - f(x)}{6x - 4}$.

c) (1 punto) Calcular el área de la superficie acotada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = 0$, $y = 1$.

Opción B

Problema 3.21.2 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 2$.

b) (0,75 puntos) Determinar las posibles asíntotas de la curva $y = f(x)$ y estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

c) (0,75 puntos) Calcular $\displaystyle\int_0^2 x f(x)\, dx$.

3.21.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.21.3 *(2,5 puntos)* Dadas las funciónes $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, se pide:

a) (0,5 puntos) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo $[1, 10]$ en el que ambas funciónes toman el mismo valor.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente mínima.

c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\, dx$.

Opción B

Problema 3.21.4 *(2,5 puntos)* Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ (x-1)^3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) (0,5 puntos) Estudie su continuidad en $[-4, 4]$.

b) (1 punto) Analice su derivabilidad y crecimiento en $[-4, 4]$.

c) (1 punto) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en $x = 1$.

3.21.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.21.5 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{2} - \sin x + x\cos x$, se pide:

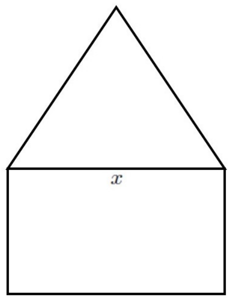
a) (1,25 puntos) Estudiar su crecimiento en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Justificar, usando el teorema adecuado, que la función se anula en algún punto de ese intervalo. Justificar razonadamente que ese punto es único.

b) (1,25 puntos) Calcular $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

Opción B

Problema 3.21.6 *(2,5 puntos)* Disponemos de 10 metros de una barra metálica.

Con ella queremos construir una estructura formada por un rectángulo que está rematado por arriba por un triángulo equilátero. La base del triángulo coincide con el lado superior del rectángulo, como se observa en la figura. Para construir la estructura, se cortan 6 trozos de la barra original de longitudes adecuadas y se sueldan para obtener la forma pedida.



Se pide:

a) (0,5 puntos) Si denotamos por x la base del triángulo, calcular su altura en función de x.

b) (2 puntos) Determinar cómo debemos cortar la barra original para que la estructura resultante encierre un área total máxima.

3.21.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.21.7 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si} \quad x < 1,\ x \neq -1 \\ \dfrac{x^2+1}{4x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular $f(0)$ y $(f \circ f)(0)$.

b) (1,25 puntos) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.

c) (0,75 puntos) Estudiar sus asíntotas.

Opción B

Problema 3.21.8 *(2,5 puntos)* La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t) = 25te^{-t^2/4}$, donde $t > 0$ es el tiempo de funcionamiento.

a) (0,5 puntos) Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.

b) (0,75 puntos) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.

c) (1,25 puntos) La energía total generada por la pila hasta el instante t, $E(t)$, se relaciona con la potencia mediante $E'(t) = P(t)$, con $E(0) = 0$. Calcular la energía producida por la pila entre el instante $t = 0$ y el instante $t = 2$.

3.22. Año 2021

3.22.1. Modelo

Opción A

Problema 3.22.1 *(2,5 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x+1} & \text{si} \quad x \leq 1, \; x \neq -1 \\ \\ \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) (0,5 puntos) Estudie la continuidad de f en $x = 1$.

b) (1 punto) Halle las asíntotas de f, si existen.

c) (1 punto) Determine el valor de $x_0 < 1$ que verifica que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene pendiente $-\dfrac{1}{2}$. Escriba la ecuación de dicha recta tangente.

Opción B

Problema 3.22.2 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = x^6 - 4x^4$, se pide:

a) (0,5 puntos) Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) (1 punto) Encontrar sus máximos y mínimos relativos, y determinar si son o no absolutos.

c) (1 punto) Hallar el área de la región acotada limitada por el eje $y = 0$ y la gráfica de f.

3.22.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.22.3 *(2,5 puntos)* Calcule el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = 2 + x - x^2, \quad g(x) = 2x^2 - 4x$$

Opción B

Problema 3.22.4 *(2,5 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si} \quad x < 0 \\ xe^x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) (0,75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $(-\pi, 2)$ Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0, 1]$ de manera que $f(x_0) = 2$.

c) (0,75 puntos) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx$.

3.22.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.22.5 *(2,5 puntos)* Se quiere construir un acuario con forma de paralelepípedo recto, con tapa y base cuadradas. La tapa es de metacrilato, la base es de un material metálico y las caras verticales, de cristal. El metacrilato tiene un precio de 15 euros/m^2, el material metálico, de 90 euros/m^2, y el cristal, de 25 euros/m^2.

a) (0,75 puntos) Exprese la altura del acuario en función del lado de la base, x, y del coste total del material utilizado, C.

b) (1,75 puntos) Con un presupuesto de 1260 euros, ¿cuál es el volumen máximo del acuario que se puede construir con estas características?

Opción B

Problema 3.22.6 *(2,5 puntos)* Sea la función $f(x) = \sqrt[5]{(x-2)^2}$.

a) (0,5 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad en $[-2, 4]$.

b) (1,25 puntos) Analice crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos absolutos de f en $[-2, 4]$.

c) (0,75 puntos) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ es continua en $x = 2$ y si tiene recta tangente en dicho punto.

3.22.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.22.7 *(2,5 puntos)*

a) (1,25 puntos) Calcule, en caso de existir, el valor de los siguientes límites:

a.1 (0,5 puntos) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\sin x}$ a.2 (0,75 puntos) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{3}{x} - \frac{2}{\sin\frac{1}{x}}\right)$

(**Indicación:** use el cambio de variable $t = \frac{1}{x}$ donde sea necesario).

b) (1,25 puntos) Calcule las siguientes integrales:

b.1 (0,5 puntos) $\int \frac{x}{x^2-1}\,dx$

b.2 (0,75 puntos) $\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx$

Opción B

Problema 3.22.8 *(2,5 puntos)* Sea la función

$$f(x) = x^3 - |x| + 2$$

a) (0,75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en la recta real.

c) (0,75 puntos) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de f, el eje de abcisas $y = 0$, y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

3.23. Año 2022

3.23.1. Modelo

Opción A

Problema 3.23.1 *(2,5 puntos)* Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ xe^{4-x^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) (0,75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en $(0, \infty)$.

c) (0,75 punto) Calcule $\int_0^2 f(x)\,dx$

Opción B

Problema 3.23.2 *(2,5 puntos)* Sea $f(x) = x + x^2$, se pide:

a) (1 punto) Hallar el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f y la recta $y = 2x$.

b) (1,5 puntos) Una partícula en movimiento parte del origen y sigue la trayectoria determinada por la gráfica de f. En el punto $(1, f(1))$ la partícula sale despedida en la dirección de la recta tangente. Determinar en qué punto choca con la recta vertical $x = 2$.

3.23.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.23.3 *(2,5 puntos)* Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3e^{-1/x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (0,5 puntos) Estudie si $f(x)$ presenta algún tipo de simetría par o impar.

c) (1 punto) Calcule la siguiente integral: $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6}\, dx$.

Opción B

Problema 3.23.4 *(2,5 puntos)* Sea

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

a) (0,5 puntos) Compruebe si $f(x)$ verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo $[-1, 1]$.

b) (1 punto) Calcule y clasifique los extremos relativos de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

c) (1 punto) Determine el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[-1, 1]$.

3.23.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.23.5 *(2,5 puntos)* Sea la función $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

a) (1 punto) Determine el dominio y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$.

b) (1,5 puntos) Dada la función $g(x) = \frac{5-x}{2}$, halle el área de la región acotada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Opción B

Problema 3.23.6 *(2,5 puntos)* Sea $f(x)$ una función continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ tal que $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f'(1) = 1$ y $f'(2) = 2$. Se consideran, además, las funciones $g(x) = (f(x))^2$ y $h(x) = (f \circ f)(x)$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular $g(2)$ y $g'(2)$.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $h(x)$ en el punto $x = 1$.

c) (1 punto) Probar, utilizando el Teorema del Valor Medio, que existe un punto en el intervalo $(1, 2)$ en el que el valor de la derivada de $f(x)$ es -1.

3.23.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.23.7 *(2,5 puntos)* Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) (0,75 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

b) (0,25 puntos) ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 0$? Justifique la respuesta.

c) (0,75 puntos) Calcule, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.

d) (0,75 puntos) Determine para $x \in (0, \infty)$ el punto de la gráfica de $f(x)$ en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto. En el punto obtenido, ¿alcanza $f(x)$ algún extremo relativo? En caso afirmativo, clasifíquelo.

Opción B

Problema 3.23.8 *(2,5 puntos)* Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \le 0 \\ x \ln x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) (0,5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$, así como los máximos y mínimos relativos.

c) (1 punto) Calcule $\int_1^2 f(x)\,dx$

3.23.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.23.9 *(2,5 puntos)* Sea la función $f(x) = x^3 + \cos(\pi x)$. Se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$ y probar, utilizando el Teorema de Bolzano, que dicha recta tangente corta a la gráfica de $f(x)$ en algún punto entre $x = -3$ y $x = -2$.

b) (1,25 puntos) Calcular $\int x f(x)\,dx$.

Opción B

Problema 3.23.10 *(2,5 puntos)* Sea $f(x) = xe^x - e^x$.

a) (0,5 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$ y clasifique sus extremos relativos.

c) (1 punto) Sea $g(x) = -e^x$. Calcule el área del recinto acotado que está limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, 1]$.

3.24. Año 2023

3.24.1. Modelo

Opción A

Problema 3.24.1 *(2,5 puntos)* Para la función $f(x) = \begin{cases} \frac{xe-e}{e^x-e} & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ \frac{1}{4x-3} & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar su continuidad y determinar, en el caso de que existan, las ecuaciones de sus asíntotas.

b) (0,5 puntos) Para la función $g(x) = (e^x - e)f(x)$, calcular el valor de $g'(0)$.

c) (1 punto) Calcular $\int_1^5 \sqrt{f(x)}\, dx$

Opción B

Problema 3.24.2 *(2,5 puntos)* Un ayuntamiento ha dividido en parcelas parte del terreno municipal no urbanizable y lo ha cedido a los vecinos para su cultivo. Uno de los vecinos ha decidido que en su parcela asignada utilizará como huerto una zona rectangular de 72 metros cuadrados, dejando el resto para plantar frutales e instalar una caseta donde guardar las herramientas necesarias. La zona de huerto estará dividida en dos partes: la parte dedicada al cultivo de hortalizas será un rectángulo interior separado de los lados que delimitan el huerto. La separación será de medio metro entre cada uno de los lados de mayor longitud y un metro entre cada uno de los lados de menor longitud. La franja que delimita la zona de hortalizas la dedicará al cultivo de flores y plantas aromáticas.

a) (2 puntos) Calcule las dimensiones del huerto para que el área de la zona para el cultivo de hortalizas sea máxima.

b) (0,5 puntos) Calcule el área de la zona de cultivo de hortalizas.

3.24.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.24.3 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$, se pide:

a) (0,25 puntos) Estudiar si es par o impar.

b) (0,75 puntos) Estudiar su derivabilidad en el punto $x = 1$.

c) (1,5 punto) Estudiar sus extremos relativos y absolutos.

Opción B

Problema 3.24.4 *(2,5 puntos)* Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2+x^2} & \text{si} \quad x \le -1 \\ \\ \frac{2x^2}{3-3x} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$, se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar la continuidad de la función en $\mathbb{R}$

b) (0,75 puntos) Calcular el siguiente límite $\lim_{x\to-\infty} f(x)^{2x^2-1}$

c) (1 punto) Calcular la siguiente integral $\int_{-1}^0 f(x)\, dx$

3.24.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.24.5 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = x^3 + x^2 + x$, se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ con mínima pendiente.

b) (1,25 puntos) Calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica $f(x)$ y la recta $y = x$.

Opción B

Problema 3.24.6 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{|x^2-x-2|}{x^2+2x+1}$, se pide:

a) (1 punto) Hallar, si existen, las asíntotas de la gráfica de f.

b) (1,5 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y calcular, si existen, sus extremos relativos.

3.24.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.24.7 (2,5 puntos) Un equipo de ingenieros realiza pruebas de consumo de un nuevo vehículo híbrido. El gasto en litros de combustible por cada 100 kilómetros en función de la velocidad, medida en decenas de kilómetros por hora, es

$$c(v) = \begin{cases} \frac{5v}{3} & \text{si} \quad 0 \le v < 3 \\ 14 - 4v + \frac{v^2}{3} & \text{si} \quad v \ge 3 \end{cases}$$

a) (1 punto) Si en una primera prueba el vehículo tiene que circular a más de 3 decenas de kilómetros por hora, ¿a qué velocidad debe ir el vehículo para obtener un consumo mínimo?

b) (1,5 puntos) Si en otra prueba el vehículo debe circular a una velocidad v tal que $1 \le v \le 8$, ¿cuáles serán el máximo y el mínimo consumo posibles del vehículo?

Opción B

Problema 3.24.8 (2,5 puntos) Dadas las funciones

$$f(x) = 2 + 2x - 2x^2 \;\text{ y }\; g(x) = 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3,$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $h(x) = |f(x)|$

b) (1,5 puntos) Hallar el área de la región acotada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ y $x = 2$.

3.24.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.24.9 (2,5 puntos) Se quiere construir un depósito de barro cilíndrico de volumen 432π dm^3 para elaborar un vino artesanal usando técnicas antiguas. El depósito se sitúa verticalmente, apoyado sobre su base circular. Se sabe que al utilizar ese material poroso se produce, con el tiempo, una pérdida de líquido a través de la superficie que está en contacto con el vino. Dicha pérdida a través de la pared lateral es de 10 cl por dm^2 y a través del suelo de 20 cl por dm^2. Calcular las dimensiones que debe tener el depósito para que la filtración de vino sea mínima.

Opción B

Problema 3.24.10 (2,5 puntos) Sea la función $f(x) = x^4 - 4x - 1$.

a) (0,5 puntos) Estudie los máximos y los mínimos relativos de f.

b) (0,5 puntos) Justifique que la función f se anula en un punto del intervalo $[0, 2]$.

c) (0,75 puntos) Justifique que la ecuación $x^4 - 4x - 1 = 0$ solo tiene dos raíces reales.

d) (0,75 puntos) Halle el área comprendida entre la gráfica de la función f y la recta $y = -4x$.

3.25. Año 2024

3.25.1. Modelo

Opción A

Problema 3.25.1 *(2,5 puntos)* Sea la función $f(x) = x\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

a) (0,75 punto) Halle $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{(x-1)^{2/3}}$.

b) (1,75 puntos) Halle el área, en el primer cuadrante, comprendida entre la recta $y = x$ y la gráfica de la función $f(x)$.

Opción B

Problema 3.25.2 *(2,5 puntos)* Dada la función real de variable real $f(x) = x - \frac{4}{(x-1)^2}$, se pide:

a) (0,75 puntos) Hallar el dominio de definición de $f(x)$ y determinar, en el caso de que existan, las ecuaciones de las asíntotas de su gráfica.

b) (1 punto) Determinar los extremos relativos de la función, así como sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) (0,75 puntos) Calcular la ecuación de una recta tangente a la gráfica de $f(x)$ que sea paralela a la recta de ecuación $9x - 8y = 6$.

3.25.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.25.3 *(2,5 puntos)* Para la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$, se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = \pi$.

b) (1 punto) Probar que $f(x)$ tiene, al menos, un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.

c) (1 punto) Si $g(x) = f(-x)$, calcular el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Opción B

Problema 3.25.4 *(2,5 puntos)* Calcule:

a) (1,25 puntos) $\int_1^e (x+2)\ln x\, dx$

b) (1,25 punto) Halle $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\tan\frac{x}{2}\right)^{\left(\frac{1}{\cos x}\right)}$.

3.25.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.25.5 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$, se pide:

a) (1,25 puntos) Hallar su dominio y estudiar las asíntotas de su gráfica.

b) (0,75 puntos) Calcular la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 7/3)$.

c) (0,5 puntos) Encontrar, si es posible, algún punto x_0 tal que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ sea 1.

Opción B

Problema 3.25.6 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Analice la monotonía y los extremos relativos de $f(x)$.

b) (1 punto) Halle el área de la región acotada delimitada por la recta $y = \frac{1}{2}$ y la gráfica de $f(x)$.

3.25.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.25.7 *(2,5 puntos)*

a) (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y = x$ en el punto $(0, 0)$.

b) (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto $(1, 1)$.

c) (0,5 puntos) Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extremos relativos en $\mathbb{R}$.

Opción B

Problema 3.25.8 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

b) (1,75 puntos) Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de $f(x)$ y de $g(x) = x(x-3)$.

3.25.5. Extraordinaria-coincidente

Opción A

Problema 3.25.9 *(2,5 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{si} \quad x < 1 \\ e + \frac{x \ln x}{x^2+1} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

y se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en $x = 1$.

b) (0,75 puntos) Calcular: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

c) (0,75 puntos) Calcular: $\int_0^1 f(x)\,dx$

Opción B

Problema 3.25.10 *(2,5 puntos)*

a) (0,5 puntos) Escriba un ejemplo de una función polinómica de grado 3 cuya gráfica corte al eje de las abscisas en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$. Escriba también un ejemplo de una función polinómica de grado 3 cuya gráfica corte al eje de las abscisas solo en los puntos $x = 1$ y $x = 0$.

b) (1 punto) Escriba un ejemplo de una función polinómica de grado 3 que tenga un máximo relativo en el punto $(0, 0)$ y un mínimo relativo en el punto $(1, -1)$.

c) (1 punto) Justifique si la gráfica de una función polinómica de grado 3 puede no cortar al eje de las abscisas.

3.26. Año 2025

3.26.1. Modelo

Bloque 2

(Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Problema 3.26.1 (2,5 puntos) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & \text{si} \quad x < 2 \\ \sqrt{5x-1} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$.

a) (0,5 puntos) Estudie la continuidad de la función en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Estudie los extremos relativos de la función en el intervalo $(1,3)$.

c) (1 punto) Calcule el área encerrada por la función y el eje OX entre $x=1$ y $x=3$.

Problema 3.26.2 (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, se pide:

a) (0,75 punto) (0.5 puntos) Estudiar la paridad de la función $g(x)=f(xf(x))$

b) (1 punto) Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+3f(x)}-2}{x}$.

c) (1 punto) Calcular $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

3.26.2. Ordinaria

Bloque 2

. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Problema 3.26.3 (2,5 puntos) Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de unos grafiteros. La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right)+2$ para diferenciar dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores distintos. Se sabe que con un bote de spray se pueden pintar 3 metros cuadrados de superficie.

a) (0,75 puntos) Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x)$ en el intervalo $[0,12]$. ¿Está la curva en este intervalo $[0,12]$ contenida completamente en el muro?

b) (1,25 puntos) Halle el área que tienen que pintar de cada color.

c) (0,5 puntos) ¿Cuántos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva $f(x)$?

3.26.3. Ordinaria-Coincidente

Bloque 2

(Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Problema 3.26.4 (2,5 puntos) Para la función $f(x)=\sqrt{x^2+3x}$, se pide:

a) (0,75 puntos) Determinar su dominio y estudiar su paridad.

b) (1 punto) Calcular los límites: $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)$

c) (0,75 puntos) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ para $x=1$.

Problema 3.26.5 (2,5 puntos) Se considera la función

$$f(x)=\frac{x^3-x^2}{x^2+9}.$$

Calcule la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ tal que $F(0)=\ln 3$.

Capítulo 4

Probabilidad

4.1. Año 2017

4.1.1. Modelo

Opción A

Problema 4.1.1 *(2 puntos)* En una población de cierta especie de cérvidos, el 43 % de los adultos son machos y el 57 % hembras. Se sabe que el 11 % de los machos adultos y el 4 % de las hembras adultas sufre alguna afección ocular. Se supone que se captura al azar un ejemplar adulto y se pide:

a) (1 punto) Determinar la probabilidad de que tenga alguna afección ocular.

b) (1 punto) Si el ejemplar capturado padeciere una afección ocular ¿cuál sería la probabilidad de que fuera un macho?

4.1.2. Ordinaria

Opción B

Problema 4.1.2 *(2 puntos)* El 40 % de los sábados Marta va al cine, el 30 % va de compras y el 30 % restante juega a videojuegos. Cuando va al cine, el 60 % de las veces lo hace con sus compañeros de baloncesto. Lo mismo le ocurre el 20 % de las veces que va de compras, y el 80 % de las veces que juega a videojuegos. Se pide:

a) (1 punto). Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto.

b) (1 punto). Si se sabe que Marta ha quedado con los compañeros de baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que vayan al cine?

4.1.3. Ordinaria-Coincidente

Opción B

Problema 4.1.3 *(2 puntos)* En una empresa el 20 % de los empleados son matemáticos, el 50 % ingenieros y el resto no tienen carrera universitaria. Entre los matemáticos el 40 % ocupa un cargo directivo, entre los ingenieros ese porcentaje se reduce a la mitad y entre el resto de empleados el porcentaje es del 5 %. Elegido un empleado al azar, se pide:

a) (1 punto) Determinar la probabilidad de que ocupe un cargo directivo.

b) (1 punto) Si no ocupa un cargo directivo, ¿cuál es la probabilidad de que sea matemático?

4.1.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.1.4 *(2 puntos)* Dados dos sucesos, A y B, de un experimento aleatorio, con probabilidades tales que $p(A) = \frac{4}{9}$, $p(B) = \frac{1}{2}$ y $p(A \cup B) = \frac{2}{3}$ se pide:

a) (1 punto) Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.

b) (1 punto) Calcular $p(\overline{A}|B)$, donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario de A.

4.1.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.1.5 *(2 puntos)* Una empresa fabrica móviles de tres marcas distintas: A, N y M. El 20 % de los móviles fabricados son de la marca A y el 40 % de la marca N. Se decide instalar un software oculto que permita espiar a los usuarios de estos móviles. El software espía se instala en el 15 % de los móviles de la marca A, en un 10 % de la marca N y en un 12 % de los móviles de la marca M. Se pide:

a) (1 punto) Determinar la probabilidad de que una persona que compra uno de estos móviles tenga instalado el software espía.

b) (1 punto) Si el móvil de una persona tiene instalado el software espía, calcular la probabilidad de que sea de la marca A.

4.2. Año 2018

4.2.1. Modelo

Opción B

Problema 4.2.1 *(2,5 puntos)* En una bolsa hay 10 caramelos de fresa, 15 de menta y 5 de limón. Se extraen sucesivamente de la bolsa dos caramelos. Se pide:

a) (1 punto) Determinar la probabilidad de que el segundo de ellos sea de fresa.

b) (0,5 puntos) Determinar la probabilidad de que los dos sean de fresa.

c) (1 punto) Sabiendo que el segundo ha sido de fresa, calcular la probabilidad de que lo haya sido también el primero.

4.2.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.2.2 *(2,5 puntos)* El 60 % de las ventas en unos grandes almacenes corresponden a artículos con precios rebajados. Los clientes devuelven el 15 % de los artículos que compran rebajados, porcentaje que disminuye al 8 % si los artículos han sido adquiridos sin rebajas.

a) (1.25 puntos) Determine el porcentaje global de artículos devueltos.

b) (1.25 puntos) ¿Qué porcentaje de artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados?

4.2.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.2.3 *(2,5 puntos)* La directiva de un club de cine ha hecho un estudio sobre los gustos cinematográficos de sus socios. De los 300 socios del club, hay 150 a los que les gustan las películas de acción, 135 a los que les gustan las películas de suspense y 75 a los que no les gustan ninguno de esos géneros cinematográficos. Si se elige un socio cualquiera, calcular las probabilidades de que:

a) (0,25 puntos) No le gusten las películas de acción.

b) (0,75 puntos) Le guste al menos uno de los dos géneros mencionados.

c) (0,75 puntos) Le guste el cine de acción y el de suspense.

d) (0,75 puntos) Le gusten las películas de acción, pero no las de suspense.

Opción B

Problema 4.2.4 *(2,5 puntos)* Sean A y B dos sucesos independientes de un experimento aleatorio, cuyas probabilidades son $P(A) = 0,6$ y $P(B) = 0,2$. Calcule las siguientes probabilidades:

$$P(A \cup B), \quad P(\overline{A} \cup \overline{B}), \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}), \quad P(\overline{A} \cap B), \quad P(\overline{A}|B)$$

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario de S.

4.2.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.2.5 *(2,5 puntos)* Según los datos de la Fundación para la Diabetes, el 13,8 % de los españoles mayores de 18 años tiene diabetes, aunque el 43 % de ellos no sabe que la tiene. Se elige al azar un español mayor de 18 años.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea diabético y lo sepa?, ¿cuál la de que no sea diabético o no sepa que lo es?

b) (1,5 puntos) Cierto test diagnostica correctamente el 96 % de los casos positivos de diabetes, pero da un 2 % de falsos positivos. Si un español mayor de 18 años da positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sea diabético?

4.3. Año 2019

4.3.1. Modelo

Opción B

Problema 4.3.1 *(2,5 puntos)* El grupo de WhatsApp, formado por los alumnos de una escuela de idiomas, está compuesto por un 60 % de mujeres y el resto varones. Se sabe que el 30 % del grupo estudia alemán y que la cuarta parte de las mujeres estudia alemán. Se recibe un mensaje en el grupo. Se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que lo haya enviado una mujer, si se sabe que el o la remitente estudia alemán.

b) (1,25 puntos) Si en el mensaje no hay ninguna información sobre el sexo y estudios del remitente, calcular la probabilidad de que sea varón y estudie alemán.

4.3.2. Ordinaria

Opción B

Problema 4.3.2 *(2,5 puntos)* Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80 % de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10 %. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

a) (1 punto) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.

b) (1,5 puntos) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

4.3.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.3.3 *(2,5 puntos)* Dados dos sucesos aleatorios A y B, con probabilidades respectivas $P(A) = 0,4$ y $P(B) = 0,5$, se denota por $\overline{A}$ y $\overline{B}$ a los sucesos complementarios de A y B. Se pide:

a) (1 punto) Suponiendo que A y B son independientes, calcular $P((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}))$.

b) (1 punto) Suponiendo que A y B son incompatibles, calcular $P((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}))$.

c) (0,5 puntos) Si $P(A \cup B) = 0,9$, ¿son A y B independientes?

4.3.4. Extraordinaria

Opción B

Problema 4.3.4 *(2,5 puntos)* Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alta gama 1/3 de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es del 1,6 %, mientras que para los de alta gama es del 0,9 %. En un control de calidad preventa, se elige al azar un vehículo para examinarlo.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.

b) (1,5 puntos) Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.

4.4. Año 2020

4.4.1. Modelo

Opción A

Problema 4.4.1 *(2,5 puntos)* Dados dos sucesos A y B, se conocen las siguientes probabilidades: $P(A \cup B) = 0,55$, $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,90$ y $P(B|A) = 0,25$. Se pide:

a) (2 puntos) Calcular $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(B)$ y $P(B|\overline{A})$.

b) (0,5 puntos) Deducir de manera razonada si los sucesos A y B son independientes.

4.4.2. Ordinaria

Opción B

Problema 4.4.2 *(2,5 puntos)* Se consideran dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,25$ y $P(A \cap B) = 0,125$. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

a) (0,5 puntos) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B. ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$?

b) (0,5 puntos) ¿Son A y B independientes?

c) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ (donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario al suceso A).

d) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\overline{B}|A)$

4.4.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.4.3 *(2,5 puntos)* De una bolsa con 20 fichas numeradas del 1 al 20 se extraen sucesivamente 2 fichas sin reemplazamiento. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que ambos números sean múltiplos de 3.

b) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que el primer número sea múltiplo de 6 y el segundo sea múltiplo de 3.

c) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que ninguno de los dos números sea múltiplo de 2.

d) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que la segunda ficha sea un número impar, sabiendo que la primera también lo ha sido.

4.4.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.4.4 *(2,5 puntos)* Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas de cada color y la urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.

b) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra. que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

c) (0,5 puntos) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.

4.5. Año 2021

4.5.1. Modelo

Opción B

Problema 4.5.1 *(2,5 puntos)* Una prueba diagnóstica para una enfermedad da resultado negativo el 5 % de las veces que se aplica a un individuo que la padece y da resultado positivo el 10 % de las veces que se aplica a un individuo que no la padece. Las estadísticas muestran que dicha enfermedad afecta a 50 de cada diez mil personas. Si una persona elegida al azar se somete a la prueba diagnóstica, calcule la probabilidad de:

a) (0,5 puntos) Que la prueba dé resultado positivo.

b) (0,75 puntos) Que la persona padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba ha sido positivo.

c) (0,75 puntos) Que la persona no padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba ha sido negativo.

d) (0,5 puntos) Que el resultado de la prueba diagnóstica sea erróneo.

4.5.2. Ordinaria

Opción B

Problema 4.5.2 *(2,5 puntos)* Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0,16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0,33. En los días en los que no se supera el nivel de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0,08.

a) (0,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?

b) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?

c) (0,5 puntos) ¿Son independientes los sucesos "en un día se supera el nivel permitido de NO_2" y "en un día se supera el nivel permitido de partículas"?

d) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2, sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

4.5.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.5.3 *(2,5 puntos)* En el primer cajón de una mesita de noche hay 6 calcetines rojos y 4 verdes. En el segundo cajón de dicha mesita hay 4 calcetines rojos y 10 verdes. Se extrae aleatoriamente uno de los calcetines del primer cajón para introducirlo en el segundo cajón. Se extraen posteriormente dos calcetines del segundo cajón. Calcule la probabilidad de que estos dos calcetines sean del mismo color.

4.5.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.5.4 *(2,5 puntos)* En una urna hay dos bolas blancas y cuatro bolas negras. Se extrae una bola al azar. Si la bola extraída es blanca, se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra, no se devuelve a la urna. A continuación, se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?

b) (1,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?

4.6. Año 2022

4.6.1. Modelo

Opción A

Problema 4.6.1 *(2,5 puntos)* Una urna contiene 7 bolas blancas y 12 bolas negras. Se extrae al azar una bola de la urna y se sustituye por dos del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola de la urna. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea blanca.

b) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea de distinto color que la primera.

c) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido negra, sabiendo que la segunda bola fue blanca.

Opción B

Problema 4.6.2 *(2,5 puntos)* Dos características genéticas A y B aparecen en una especie animal con probabilidades respectivas de 0,2 y 0,3. Sabiendo que la aparición de una de ellas es independiente de la aparición de la otra, se pide calcular:

a) (0,5 puntos) La probabilidad de que un individuo elegido al azar presente ambas características.

b) (0,5 puntos) La probabilidad de que no presente ninguna de ellas.

c) (0,75 puntos) La probabilidad de que presente solamente una de ellas.

d) (0,75 puntos) La probabilidad de que, si elegimos al azar 10 individuos, exactamente 3 de ellos presenten la característica A.

4.6.2. Ordinaria

Opción B

Problema 4.6.3 *(2,5 puntos)* De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar, un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.

b) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.

c) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.

4.6.3. Ordinaria-Coincidente

Opción B

Problema 4.6.4 *(2,5 puntos)* Una *influencer* famosa publica en su Instagram un 20 % de fotografías dedicadas a viajes, un 50 % referentes a temas de moda y el resto sobre maternidad. El 5 % de las publicaciones de viajes reciben menos de 20 000 *Me gusta* y lo mismo ocurre con el 20 % de las de moda y con el 35 % de las que tratan asuntos de maternidad. Elegida una fotografía al azar, se pide:

a) (1,25 puntos) Determinar la probabilidad de que tenga más de 20 000 *Me gusta*.

b) (1,25 puntos) Si tiene menos de 20 000 *Me gusta*, calcular la probabilidad de que el tema tratado en ella haya sido sobre viajes.

4.6.4. Extraordinaria

Opción B

Problema 4.6.5 *(2,5 puntos)* Una empresa comercializa tres tipos de productos A, B y C. Cuatro de cada siete productos son de tipo A, dos de cada siete productos son de tipo B y el resto lo son de tipo C. A la exportación se destina un 40 % de los productos tipo A, un 60 % de los productos tipo B y un 20 % de los productos tipo C. Elegido un producto al azar, se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.

b) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación.

4.6.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.6.6 *(2,5 puntos)* El 60 % de los habitantes de una ciudad utiliza para trabajar un móvil, el 30 % utiliza un ordenador portátil y el 25 % no usa ninguno de los dos dispositivos.

a) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar utilice ambos dispositivos para trabajar.

b) (0,5 puntos) En esa ciudad, ¿es independiente el uso del móvil y del ordenador portátil para trabajar? Justifique la respuesta.

c) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar utilice exclusivamente el ordenador portátil para trabajar.

d) (1 punto) Si elegimos al azar 10 individuos, calcule la probabilidad de que exactamente 8 de ellos utilicen para trabajar un móvil.

Opción B

Problema 4.6.7 *(2,5 puntos)* Sabiendo que $P(A|B) = \frac{1}{3}$, $P(B|A) = \frac{1}{14}$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{7}{15}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Probar razonadamente que $P(A \cap B) = \frac{1}{30}$

b) (1 punto) Calcular $P(A)$ y $P(B)$.

4.7. Año 2023

4.7.1. Modelo

Opción A

Sin problema de probabilidad

Opción B

Problema 4.7.1 *(2,5 puntos)* Sabiendo que $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, $P(\overline{A}) = \frac{9}{20}$ y $P(\overline{B}) = \frac{7}{20}$, se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular razonadamente $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

b) (0,75 puntos) Calcular razonadamente $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

c) (0,5 puntos) Calcular razonadamente $P(A - B)$

d) (0,5 puntos) Determinar si A y B son sucesos independientes.

4.7.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.7.2 *(2,5 puntos)* Se tiene un suceso A de probabilidad $P(A) = 0,3$.

a) (0,75 puntos) Un suceso B de probabilidad $P(B) = 0,5$ es independiente de A. Calcule $P(A \cup B)$.

b) (0,75 puntos) Otro suceso C cumple $P(C|A) = 0,5$. Determine $P(A \cap \overline{C})$.

c) (1 punto) Si se tiene un suceso D tal que $P(\overline{A}|D) = 0,2$ y $P(D|A) = 0,5$, calcule $P(D)$.

Opción B

Sin problema de probabilidad

4.7.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Sin problema de probabilidad

Opción B

Problema 4.7.3 (2,5 puntos) Siete de cada veinte personas que entran en cierta joyería acaban comprando algún artículo. El 75 % de las personas que se marchan sin comprar nada tienen menos de 50 años y el 80 % de las personas que realizan alguna compra tienen al menos 50 años. Entra un cliente en la joyería. Se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea menor de 50 años.

b) (1,25 puntos) Sabiendo que tiene como mínimo 50 años, hallar la probabilidad de que salga de la tienda sin haber comprado nada.

4.7.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.7.4 (2,5 puntos) Sabiendo que $P(A) = 0,5$, $P(A|B) = 0,625$ y $P(A \cup B) = 0,65$, se pide calcular:

a) (1,5 puntos) $P(B)$ y $P(A \cap B)$.

b) (1 punto) $P(A|A \cup B)$ y $P(A \cap B|A \cup B)$.

Opción B

Sin problema de probabilidad

4.7.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.7.5 (2,5 puntos) Se tiene un dado de nueve caras numeradas con los números del 2 al 10, cada uno con igual probabilidad de salir al lanzar el dado.

a) (0,5 puntos) Si se lanza una vez el dado, calcule la probabilidad del suceso “el resultado es un número primo”.

b) (1 punto) Se lanza el dado dos veces consecutivas y se suman los resultados. Calcule la probabilidad de que la suma sea par.

c) (1 punto) Se lanza el dado dos veces consecutivas y la suma de los dos resultados es impar. Calcule la probabilidad de que el resultado del primer lanzamiento haya sido primo.

Opción B

Sin problema de probabilidad

4.8. Año 2024

4.8.1. Modelo

Opción A

Problema 4.8.1 *(2,5 puntos)* La selección española competirá en la Copa Mundial Femenina de Fútbol 2023. En los dos primeros partidos de la fase de grupos, que consta de tres partidos, la probabilidad de ganar cada uno de ellos es del 80 %. Sin embargo, debido al aumento en la moral de las jugadoras, si ganan los dos primeros partidos la probabilidad de ganar el tercero asciende al 90 %. En caso contrario, la probabilidad de ganar el tercer partido se mantendrá en el 80 %. Se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar la probabilidad de que la selección española no gane ningún partido durante la fase de grupos.

b) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la selección gane el tercer partido de la fase de grupos.

c) (1 punto) Si sabemos que la selección ha ganado el tercer partido, determinar la probabilidad de que no haya ganado alguno de los dos encuentros anteriores.

Opción B

Problema 4.8.2 *(2,5 puntos)* En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles, A_1 de probabilidad 0,5 y A_2 de probabilidad 0,3 y se considera $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$. De cierto suceso B de probabilidad 0,4 se sabe que es independiente de A_1 y que la probabilidad del suceso $A_3 \cap B$ es 0,1. Con estos datos se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de A_3.

b) (1,5 puntos) Decidir si B y A_2 son independientes.

4.8.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.8.3 *(2,5 puntos)* Sabiendo que: $P(\overline{A}) = \frac{11}{20}$, $P(A|B) - P(B|A) = \frac{1}{24}$ y $P(A \cap \overline{B}) = \frac{3}{10}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular $P(A \cap B)$ y $P(B)$.

b) (1 punto) Calcular $P(C)$, siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que verifica que $P(A \cup C) = \frac{14}{25}$

Opción B

Problema 4.8.4 *(2,5 puntos)* Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.

b) (1,5 puntos) Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.

4.8.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Sin problema de probabilidad

Opción B

Problema 4.8.5 (2,5 puntos) En la sección de idiomas de una biblioteca municipal se tienen libros, en francés o inglés, de tres categorías: el 50 % son cuentos infantiles, el 30 %, novelas históricas y el resto, manuales técnicos. Uno de cada cinco de los cuentos está en francés y una de cada tres de las novelas, en inglés. Por otra parte, uno de cada siete de los libros en francés es un manual técnico. Se toma un libro al azar y se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que esté en francés si no es un manual técnico.

b) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que esté escrito en francés, y la probabilidad de que si está en inglés sea una novela histórica.

4.8.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.8.6 *(2,5 puntos)* En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles, A_1 y A_2, de igual probabilidad 0,4 y se considera $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$ (por tanto, la probabilidad de A_3 es 0,2). De cierto suceso B se sabe que $P(B|A_1) = P(B|A_2)$ y $P(B|A_3) = 2P(B|A_1)$.Y de un suceso C independiente de A_1 se sabe que $P(C|A_2) = 0,3$ y $P(C|A_3) = 0,6$. Con estos datos se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de B si $P(B|A_1) = 0,25$.

b) (1,5 puntos) Calcular la probabilidad de C y determinar si C es independiente de A_2.

Opción B

Problema 4.8.7 *(2,5 puntos)* Antonio y Benito, compañeros de piso, lanzan alternadamente un dardo cinco veces a una diana para decidir quién friega. Friega quien menos veces acierte el centro de la diana. En caso de empate, friegan juntos. Si Antonio acierta el centro de la diana en el 25 % de sus lanzamientos y Benito en el 30 %, se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quién friega.

b) (1,5 puntos) Aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos.

4.8.5. Extraordinaria-coincidente

Opción A

Problema 4.8.8 *(2,5 puntos)* En un espacio muestral se consideran tres sucesos A, B y C, tales que, $P(A \cup B \cup C) = 1$. Sabiendo que los sucesos B y C son independientes y que $P(A) = 0,5$, $P(\overline{C}) = 0,3$, $P(B \cup C) = 0,73$, $P(A \cap C) = 0,21$ y $P(A \cap B \cap C) = 0,06$. se pide:

a) (1 punto) Estudiar si los sucesos A y $B \cup C$ son independientes.

b) (1,5 puntos) Calcular $P(B)$ y $P(C \cap (A \cup B))$.

Opción B

Sin problema de probabilidad

4.9. Año 2025

4.9.1. Modelo

Sin problema de probabilidad

4.9.2. Ordinaria

Bloque 4

(Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Problema 4.9.1 (2,5 puntos) Sea $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ un espacio muestral y P una medida de probabilidad en E definida por: $P(7) = P(3) = \frac{1}{4}$ y con el resto de sucesos elementales equiprobables.
Se consideran los sucesos $A = \{7, 11, 13, 19\}$, $B = \{2, 5, 7, 13, 17\}$ y $C = \{3, 5, 7, 11, 13\}$. Se pide calcular:

a) (1,25 puntos) $P((\overline{A - C}) \cap B)$.

b) (1,25 puntos) $P((A \cap B)|\overline{C})$.

Problema 4.9.2 (2,5 puntos) Entre los ciudadanos de 14 años o más de cierto país, el 20 % de la población tiene entre 14 y 24 años, el 50 % entre 25 y 64 y el resto más de 64 años. Según datos recogidos por el ministerio de cultura de ese país, el 74 % de sus ciudadanos de entre 14 y 24 es lector habitual, mientras que el porcentaje decrece hasta el 65,8 % entre los de 25 a 64 y al 53,7 % entre los mayores de 64. Elegido un ciudadano al azar del país en cuestión de 14 años o más, se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea lector habitual.

b) (1,25 puntos) Si no es lector habitual, calcular la probabilidad de que tenga entre 25 y 64 años.

4.9.3. Ordinaria-Coincidente

Bloque 4

(Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Problema 4.9.3 (2,5 puntos) En una empresa tecnológica internacional el 70 % de los empleados son europeos, una tercera parte de los empleados no europeos se dedica al desarrollo de *software*, labor a la que se dedican también tres de cada siete de los empleados europeos. Por el cincuenta aniversario la empresa elige al azar un empleado que será agraciado con un importante paquete de acciones de la empresa. Con estos datos se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el empleado agraciado sea uno de los europeos que no realiza desarrollo de *software* en la empresa.

b) (1.5 puntos) En un segundo sorteo se toman al azar 10 empleados distintos y recibirán el mismo paquete de acciones, a repartir, si como mucho 2 de ellos desarrollan *software* para la empresa. Calcular la probabilidad de que la empresa tenga que dar este segundo paquete de acciones.

Problema 4.9.4 (2,5 puntos) Sean A y B dos sucesos en un espacio muestral, $\overline{A}$ y $\overline{B}$ los correspondientes sucesos complementarios. Se sabe que $P(A) = 0,7$, $P(\overline{B}) = 0,2$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,1$.

a) (0,5 puntos) Razone si $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son dos sucesos independientes.

b) (1 punto) Calcule $P(A \cap B)$.

c) (1 punto) Calcule $P(\overline{A}|B)$.

Capítulo 5

Estadística

5.1. Año 2018

5.1.1. Modelo

Opción A

Problema 5.1.1 *(2,5 puntos)* Sabiendo que el peso de los estudiantes varones de segundo de bachillerato se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal, de media 74 kg y desviación típica 6 kg, se pide:

a) (1 punto) Determinar el porcentaje de estudiantes varones cuyo peso está comprendido entre los 68 y 80 kg.

b) (0,5 puntos) Estimar cuántos de los 1500 estudiantes varones, que se han presentado a las pruebas de la EvAU en una cierta universidad, pesan más de 80 kg.

c) (1 punto) Si se sabe que uno de estos estudiantes pesa más de 76 kg, ¿cuál es la probabilidad de que pese más de 86 kg?

5.1.2. Ordinaria

Opción B

Problema 5.1.2 *(2,5 puntos)* En una fábrica se elaboran dos tipos de productos: A y B. El 75 % de los productos fabricados son de tipo A y el 25 % de tipo B. Los productos de tipo B salen defectuosos un 5 % de las veces, mientras que los de tipo A salen defectuosos un 2,5 % de las veces.

a) (1 punto) Si se fabrican 5000 productos en un mes, ¿cuántos de ellos se espera que sean defectuosos?

b) (1,5 puntos) Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo A. Sabiendo que se fabricaron 6000 unidades, determinar, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.

5.1.3. Extraordinaria

Opción B

Problema 5.1.3 *(2,5 puntos)* La variable aleatoria X sigue una distribución normal de media $\mu = 8,5$ y desviación típica $\sigma = 2,5$. Se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular el valor a tal que $P(X \leq a) = 0,05$.

b) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre 8 y 9,3.

5.2. Año 2019

5.2.1. Modelo

Opción A

Problema 5.2.1 *(2,5 puntos)* El examen de oposición a la Administración Local de cierta ciudad consta de 300 preguntas, con respuesta verdadero o falso. Un opositor responde al azar todas las preguntas. Se considera la variable aleatoria X("número de respuestas acertadas") y se pide:

a) (1,5 puntos) Justificar que la variable X se puede aproximar por una normal y obtener los parámetros correspondientes.

b) (1 punto) Utilizando la aproximación por la normal, hallar la probabilidad de que el opositor acierte a lo sumo 130 preguntas y la probabilidad de que acierte exactamente 160 preguntas.

5.2.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.2.2 *(2,5 puntos)* La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10 %. Se pide:

a) (1 punto) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.

b) (1,5 puntos) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

5.2.3. Ordinaria-Coincidente

Opción B

Problema 5.2.3 *(2,5 puntos)* Una compañía de mensajería tiene una probabilidad del 2 % de dañar cada uno de sus envíos. Asumimos que las probabilidades de que varios envíos distintos resulten dañados son independientes entre sí. Se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar la probabilidad de que en un lote de 10 paquetes hayan llegado con desperfectos exactamente 2 envíos.

b) (0,5 puntos) Hallar la probabilidad de que en un lote de 10 paquetes hayan llegado con desperfectos 2 o más envíos.

c) (1,5 puntos) Usando la aproximación por la normal adecuada, hallar la probabilidad de que en un lote de 2000 paquetes hayan llegado exactamente 30 paquetes defectuosos.

5.2.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.2.4 *(2,5 puntos)* Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal.

a) (1,25 puntos) Se sabe que el 40 % del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.

b) (1,25 puntos) Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X, de media $5,6$ y desviación típica σ. Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \leq 8,2$ es $0,67$, calcule σ.

5.3. Año 2020

5.3.1. Modelo

Opción B

Problema 5.3.1 *(2,5 puntos)* En cierta ciudad se estima que la temperatura máxima de cada día, en el mes de junio, sigue una distribución normal de media 30°C y varianza 25. Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que un día cualquiera del mes la temperatura máxima esté entre 28°C y 32°C.

b) (1 punto) Calcular el número esperado de días del mes con máxima superior a 36°C.

c) (0,75 puntos) Determinar la temperatura máxima alcanzada el día 10 de junio, sabiendo que dicha temperatura fue superada exactamente el 50 % de los días del mes.

5.3.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.3.2 *(2,5 puntos)* Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30 %. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40 %, en el tercero del 50 % y en el cuarto del 60 %. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.

b) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.

c) (1 punto) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85 % de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

5.3.3. Ordinaria-Coincidente

Opción B

Problema 5.3.3 *(2,5 puntos)* El peso de las crías recién nacidas de una especie de primates sigue una distribución normal X de media $\mu = 3353$ gramos. Sabiendo que $P(X > 3693) = 0,2$, se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular la desviación típica, σ, de la distribución de pesos.

b) (1 punto) Calcular el valor x_0 tal que $P(X < x_0) = 0,2$.

5.3.4. Extraordinaria

Opción B

Problema 5.3.4 *(2,5 puntos)* En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes X, Y. Sabemos que $P(X) = 0,4$ y que $P(X \cap \overline{Y}) = 0,08$ (donde $\overline{Y}$ es el suceso complementario de Y). Se pide:

a) (1 punto) Calcular $P(Y)$.

b) (0,5 puntos) Calcular $P(X \cup Y)$.

c) (1 punto) Si X es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede X, y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.

5.4. Año 2021

5.4.1. Modelo

Opción A

Problema 5.4.1 *(2,5 puntos)* En un instituto, uno de cada cuatro alumnos practica baloncesto. Se eligen 6 alumnos al azar y se considera la variable aleatoria X que representa el número de estudiantes entre estos 6 que practican baloncesto. Se pide:

a) (1 punto) Identificar la distribución de la variable aleatoria X y calcular $P(X = 0)$.

b) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que al menos 5 de los 6 elegidos practiquen baloncesto.

c) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que al menos 1 de los 6 practique baloncesto.

5.4.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.4.2 *(2,5 puntos)* El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8,8 meses y una desviación típica de 3 meses.

a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?

b) (1 punto) Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses de vida?

c) (0,5 puntos) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8,8-c;8,8+c)$ incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98 % de los individuos de esta especie?

5.4.3. Ordinaria-Coincidente

Opción B

Problema 5.4.3 *(2,5 puntos)* El delantero de un equipo de fútbol, que suele marcar en tres quintas partes de sus disparos a puerta, ha de lanzar una tanda de penaltis en un entrenamiento.

a) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de no marcar si la tanda es de cuatro disparos.

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que marque más de dos penaltis en la tanda de cuatro disparos.

c) (1 punto) Calcule cuántos penaltis debería lanzar para que la probabilidad de marcar al menos un tanto sea mayor que 0,999.

5.4.4. Extraordinaria

Opción B

Problema 5.4.4 *(2,5 puntos)* Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio del 45 % de los días. Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los de los últimos 50 años.

a) (1 punto) Exprese cómo calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.

b) (1,5 puntos) Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.

5.5. Año 2022

5.5.1. Modelo

No hay propuestos. En el problema de probabilidad de este modelo, en la opción B, hay un apartado con distribución binomial.

5.5.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.5.1 *(2,5 puntos)* Según el Instituto Nacional de Estadítica, durante el último trimestre de 2020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27,7 %.
Se reunieron 10 de estos consejeros.

a) (0,75 puntos) Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.

b) (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.

c) (1 punto) Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que en un congreso de doscientos consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35 % de representación femenina.

5.5.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.5.2 *(2,5 puntos)* En una tienda se hace un estudio sobre la venta de dos productos A y B a lo largo de un mes. La probabilidad de que un cliente compre el producto A es de un 62 % y la de que compre el producto B es de un 40 %. Se observa, además, que el 12 % de los clientes compran al mismo tiempo el producto A y el producto B. Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente haya comprado el producto A sabiendo que no ha adquirido el producto B.

b) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente no compre ni el producto A ni el producto B.

c) (1 punto) Sabiendo que a lo largo de un mes visitan la tienda 3000 personas, calcular, utilizando la aproximación de la distribución binomial mediante la distribución normal, cuál es la probabilidad de que compren el producto B más de 1250 personas.

5.5.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.5.3 *(2,5 puntos)* En una comunidad autónoma tres de cada cinco alumnos de segundo de bachillerato están matriculados en la asignatura de Matemáticas II. Se eligen 6 alumnos al azar de entre todos los alumnos de segundo de bachillerato. Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en Matemáticas II.

b) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esté matriculado en Matemáticas II.

c) (1 punto) Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos, calcular, aproximando la distribución binomial mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de 60 de estos alumnos estén matriculados en Matemáticas II.

5.5.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Mirar esta opción en probabilidad

5.6. Año 2023

5.6.1. Modelo

Opción A

Problema 5.6.1 *(2,5 puntos)* Una empresa complementa el sueldo de sus empleados según la consecución de ciertos objetivos valorados en función de una puntuación que sigue una distribución normal $N(100; 35)$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular el porcentaje de empleados con una puntuación comprendida entre 100 y 140.

b) (0,75 puntos) Hallar la probabilidad de que un trabajador obtenga una puntuación inferior a 95 puntos.

c) (1 punto) Determinar la puntuación mínima necesaria para cobrar los objetivos si el 75,17 % de la plantilla ha recibido dicho incentivo.

Opción B

Mirar esta opción en probabilidad

5.6.2. Ordinaria

Opción A

Sin problema de estadística

Opción B

Problema 5.6.2 *(2,5 puntos)* La longitud de la sardina del Pacífico (*Sardinops sagax*) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 mm y desviación típica 25,75 mm.

a) (1 punto) Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?

b) (0,5 puntos) Hallar una longitud $t < 175$ mm tal que entre t y 175 mm están el 18 % de las sardinas capturadas.

c) (1 punto) En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

5.6.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.6.3 (2,5 puntos) En los juegos de rol, cada vez que se lanza un ataque este puede resultar en golpe crítico o no.

a) (1,25 puntos) En cierto juego de rol, para determinar si un ataque es crítico o no, se tira una moneda a cara o cruz. Si se obtiene una cruz, el ataque no será crítico. Por contra, si se obtiene una cara, entonces se lanza un dado de 10 caras numeradas del 1 al 10. Solo en caso de que también se obtenga una puntuación mayor o igual a 9 en el dado el ataque es crítico; en caso contrario el ataque no será crítico. Calcule la probabilidad de que, de entre 5 ataques lanzados, se obtengan 3 o menos golpes críticos.

b) (1,25 puntos) En otro juego de rol se sabe que la probabilidad de ataque crítico es del 20 %. Aproximando mediante una distribución normal, calcule la probabilidad de que, de entre 100 ataques, se obtengan no menos de 15 y no más de 25 golpes críticos.

Opción B

Sin problema de estadística

5.6.4. Extraordinaria

Opción A

Sin problema de estadística

Opción B

Problema 5.6.4 (2,5 puntos) El 65 % de los universitarios de 18 años que intentan superar el examen práctico de conducir lo consigue a la primera. Se escogen al azar 10 universitarios de 18 años que ya han superado el examen práctico de conducir. Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente 3 de ellos necesitaran más de un intento para superar el examen práctico de conducir.

b) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos haya necesitado más de un intento para superar el examen práctico de conducir.

c) (1 punto) Aproximando por una distribución normal, determinar la probabilidad de que, dados 60 de estos universitarios, como mínimo la mitad superase el examen práctico de conducir a la primera.

5.6.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Sin problema de estadística

Opción B

Problema 5.6.5 (2,5 puntos) Un determinado jugador de baloncesto tiene un porcentaje de éxito del 85 % en tiros libres y del 20 % en tiros desde el centro del campo.

a) (1,5 puntos) Para finalizar el calentamiento antes de cada partido el citado jugador lanza cuatro tiros libres y cuatro tiros desde el centro del campo. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte tres de los cuatro tiros libres? ¿Cuál es la probabilidad de que acierte tres de los cuatro tiros desde el centro del campo? ¿Y la de que acierte tres tiros libres y tres desde el centro del campo de los ocho lanzados?

b) (1 punto) Calcule, mediante la aproximación por una normal, la probabilidad de que el citado jugador falle al menos el 20 % de los tiros libres de una serie de 200 tiros libres.

5.7. Año 2024

5.7.1. Modelo

Opción A

Sin problema de estadística

Opción B

Sin problema de estadística

5.7.2. Ordinaria

Opción A

Sin problema de estadística

Opción B

Sin problema de estadística

5.7.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.7.1 (2,5 puntos) Para conocer la opinión de los usuarios sobre su servicio, la empresa de transporte público de una ciudad ha realizado una encuesta. De esa encuesta se desprende que la nota global otorgada al servicio por sus usuarios se puede considerar una normal de media 6,7 y de desviación típica 1,25. Si un usuario da una nota menor que 5 se considera que ve como insatisfactorio el servicio; si la nota está entre 5 y 7,5, que para el usuario el servicio es satisfactorio; y si la nota es mayor que 7,5, que el servicio es excelente.

a) (0,75 puntos) Elegido un usuario al azar, ¿qué probabilidad hay de que crea que el servicio de la empresa de transportes es excelente?

b) (1 punto) Elegido un usuario al azar, ¿qué probabilidad hay de que crea que el servicio de la empresa de transportes es satisfactorio?

c) (0,75 puntos) Para conocer de forma más directa la opinión de sus usuarios, de entre todos ellos la empresa convoca a 25 elegidos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos de entre los convocados consideren el servicio insatisfactorio?

Opción B

Sin problema de estadística

5.7.4. Extraordinaria

Opción A

Sin problema de estadística

Opción B

Mirar el problema de probabilidad

5.7.5. Extraordinaria-coincidente

Opción A

Sin problema de estadística

Opción B

Problema 5.7.2 *(2,5 puntos)* Entre los procesadores que utiliza cierta marca de ordenadores portátiles para un modelo, un 30 % son de una nueva tecnología que promete una mayor efectividad. Se utilizan todos los procesadores, se empaquetan los ordenadores fabricados en palés de 10 portátiles y se envían 20 palés a cada una de sus tiendas. Se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar la distribución, la media y la desviación típica de la variable "número de portátiles con los procesadores de la nueva tecnología en un palé" Calcular la probabilidad de que en un palé haya exactamente dos portátiles con la nueva tecnología.

b) (1 punto) Calcular, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos el 75 % de los portátiles recibidos en una tienda no lleven los procesadores de la nueva tecnología.

5.8. Año 2025

5.8.1. Modelo

Bloque 4

(Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Problema 5.8.1 (2,5 puntos) Según los datos de la Comunidad de Madrid, en la temporada 2021-2022 la cobertura de la vacuna de la gripe entre mayores de 65 años fue de un 73,2 %.

a) (1,5 puntos) Ante una situación de brote epidémico, las autoridades deciden restringir aquellas reuniones en las que la probabilidad de que haya más de una persona no vacunada sea mayor de 0,5. Suponiendo que los asistentes a una reunión suponen una muestra aleatoria, ¿se deberían restringir las reuniones de 5 personas mayores de 65 años? ¿Y las reuniones de 7 personas mayores de 65 años?

b) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria de 500 personas mayores de 65 años. Calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos 350 de ellos estén vacunados contra la gripe.

5.8.2. Ordinaria

Sin problema de estadística

5.8.3. Ordinaria-Coincidente

Mirar los problemas de probabilidad.

Prof: **Isaac Musat Hervás**

Profesor de Matemáticas en el colegio Villaeuropa de Móstoles

Bachillerato y Selectividad en las dos opciones

Ferroviario en la Dirección de Cercanías de Madrid

Diferentes estudios y trabajos

Jubilado en la actualidad

La educación ha sido mi pasión, el recuerdo del aula, el olor a tiza
y el pantalón manchado de polvo blanco lo llevo siempre conmigo.
Las voces con las preguntas de mis alumnos y mis respuestas,
acertadas o no, quedan en nuestros recuerdos valiosos.
He sido un afortunado, mi trabajo ha sido mi diversión favorita.