Problemas de Selectividad de Matemáticas II
Comunidad de Madrid
Enunciados

Isaac Musat Hervás

6 de julio de 2017

Índice general

Capítulo 1

Álgebra

1.1. Año 2000

Problema 1.1.1 *(3 puntos)* Sea el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrl} -x+ & \lambda y+ & 2z = & \lambda \\ 2x+ & \lambda y- & z = & 2 \\ \lambda x- & y+ & 2z = & \lambda \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Discutir la compatibilidad del sistema según los diversos valores de λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

c) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = 2$.

(Modelo 2000 - Opción A)

Problema 1.1.2 *(3 puntos)*

a) (1 punto) Encontrar los valores de λ para los que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es invertible.

b) (1 punto) Para $\lambda = 2$, hallar la inversa de A y comprobar el resultado.

c) (1 punto) Resolver el sistema

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para $\lambda = 1$

(Modelo 2000 - Opción B)

Problema 1.1.3 *(3 puntos)* Para una matriz cuadrada, se define su traza como la suma de los elementos de la diagonal principal. En lo que sigue, A y B son matrices cuadradas 2×2.

a) (0,5 puntos) Comprobar que se verifica:

$$Traza(A + B) = Traza(A) + Traza(B)$$

b) (1 punto) Comprobar que

$$Traza(A \cdot B) = Traza(B \cdot A)$$

c) (1 punto) Utilizando los resultados anteriores, demostrar que es imposible tener $AB - BA = I$, donde I denota la matriz identidad.

d) (0,5 puntos) Encontrar dos matrices A y B para las que:

$$Traza(AB) \neq Traza(A) \cdot Traza(B)$$

(Junio 2000 - Opción A)

Problema 1.1.4 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} ax+ & y+ & z = & (a-1)(a+2) \\ x+ & ay+ & z = & (a-1)^2(a+2) \\ x+ & y+ & az = & (a-1)^3(a+2) \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Comprobar que es compatible para todo valor de a.

b) (1 punto) Describir en términos geométricos el conjunto de soluciones para $a = 1$ y para $a = -2$.

c) (1 punto) Resolverlo para $a = -2$.

(Junio 2000 - Opción B)

Problema 1.1.5 *(3 puntos)* Considerar el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} & y+ & z = & 1 \\ (\lambda - 1)x+ & y+ & z = & \lambda \\ x+ & (\lambda - 1)y- & z = & 0 \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro λ.

b) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 0$.

c) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 3$.

(Septiembre 2000 - Opción A)

Problema 1.1.6 *(3 puntos)*

a) (2 puntos) Discutir en función de los valores de k y resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & 5z = & 0 \\ 2x & - & kz = & 0 \\ x- & y+ & z = & 0 \end{array}\right.$$

b) (1 punto) Discutir en función de los valores de λ y resolver en los casos de compatibilidad del sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & 5z = & 0 \\ 2x & - & 3z = & 0 \\ x- & y+ & z = & 0 \\ x+ & 2y+ & 2\lambda z = & \lambda \end{array}\right.$$

(Septiembre 2000 - Opción B)

1.2. Año 2001

Problema 1.2.1 *(2 puntos)* Comprobar que las siguientes matrices tienen el mismo determinante

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1-a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

(Modelo 2001 - Opción A)

Problema 1.2.2 *(2 puntos)* Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) calcular A^{-1}

b) Resolver el sistema $A \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 21 \\ 24 \end{pmatrix}$

(Modelo 2001 - Opción A)

Problema 1.2.3 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos) Discutir en función de los valores de k y resolver cuando tenga más de una solución, el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y+ & 2z=3 \\ 2x- & y+ & kz=9 \\ x- & y- & 6z=5 \end{array}\right.$$

b) (1,5 puntos) Si el rango de la matriz $A=\left(\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & k & 9 \\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{array}\right)$ es 2, determinar una combinación lineal nula de los vectores fila $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ y $\overrightarrow{F_3}$, así como una combinación lineal nula de los vectores columna $\overrightarrow{C_1}$, $\overrightarrow{C_2}$, $\overrightarrow{C_3}$ y $\overrightarrow{C_4}$.

(Modelo 2001 - Opción B)

Problema 1.2.4 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z= & 2 \\ 2x- & y+ & 3z= & 2 \\ 5x- & y+ & az= & 6 \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

(Junio 2001 - Opción A)

Problema 1.2.5 *(2 puntos)* Sea k un número natural y sean las matrices:

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad B=\left(\begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right), \quad C=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

a) (1 punto) Calcular A^k.

b) (1 punto) Hallar la matriz X que verifica la ecuación $A^kX=BC$.

(Junio 2001 - Opción A)

Problema 1.2.6 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right)$$

a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real λ.

b) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = -3$.

c) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 1$.

(Junio 2001 - Opción B)

Problema 1.2.7 *(3 puntos)* Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} ax+ & y+ & 4z = & 1 \\ -x+ & ay- & 2z = & 1 \\ & y+ & z = & a \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Discutir el sistema según los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 2$.

c) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 1$.

(Septiembre 2001 - Opción A)

Problema 1.2.8 *(3 puntos)* Dada la matriz $A = \left(\begin{array}{rrr} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{array}\right)$ se pide:

a) (1 punto) Comprobar que verifica la igualdad $A^3 + I = O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula.

b) (1 punto) Justificar que A tiene inversa y obtener A^{-1}.

c) (1 punto) Calcular A^{100}.

(Septiembre 2001 - Opción B)

1.3. Año 2002

Problema 1.3.1 *(3 puntos)* Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 + 2A = I$, donde I denota la matriz identidad.

a) (1 punto) Demostrar que A es no singular ($det(A) \neq 0$) y expresa A^{-1} en función de A e I.

b) (1 punto) Calcular dos números p y q tales que $A^3 = pI + qA$

c) (1 punto) Si

$$A = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & k \end{array}\right)$$

cumple la relación de partida, calcular el valor de k.

(Modelo 2002 - Opción A)

Problema 1.3.2 *(3 puntos)* Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcular A^{-1}.

b) (1 punto) Resolver la ecuación matricial $AX = BA$.

(Modelo 2002 - Opción B)

Problema 1.3.3 *(2 puntos)* Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para cada número real O definimos la matriz $B = A - OI$, donde I denota la matriz identidad 2×2.

a) (1 punto) Hallar los valores de O que hacen que el determinate de B sea nulo.

b) (1 punto) Resolver el sistema

$$B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para los diferente valores de O.

(Modelo 2002 - Opción B)

Problema 1.3.4 *(2 puntos)* Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Problema 1.3.5 *(2 puntos)* Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

(Junio 2002 - Opción A)

Problema 1.3.6 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y & = & 2 \\ ax+ & y+ & 2z = & 0 \\ x- & y+ & az = & 1 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

b) (0,5 punto) Resolver el sistema para $a = -1$.

c) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 2$.

(Junio 2002 - Opción B)

Problema 1.3.7 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, dependientes del parámetro real λ:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & \lambda z = & \lambda^2 \\ & y- & z = & \lambda \\ x+ & \lambda y+ & z = & \lambda \end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema en los caso en que sea posible.

c) (0,5 puntos) En el caso $\lambda = 2$, indicar la posición relativa de los tres planos cuyas ecuaciones forman el sistema.

(Septiembre 2002 - Opción A)

Problema 1.3.8 *(3 puntos)* Sea A una matriz cuadrada de orden n que verifica la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden n.

Se pide:

a) (1 punto) Expresar A^{-1} en térmninos de A

b) (1 punto) Expresar A^n en términos de A e I, para cualquier número natural n.

c) (1 punto) Calcular a para que $A^2 = I$, siendo A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

(Septiembre 2002 - Opción B)

1.4. Año 2003

Problema 1.4.1 *(3 puntos)* Sea M una matriz cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n. Se pide:

a) (1 punto) Estudiar si existe la matriz inversa de M. En caso afirmativo, expresar M^{-1} en términos de M e I.

b) (1 punto) Expresar M^3 como combinación lineal de M e I.

c) (1 punto) Hallar todas las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifican la identidad del enunciado.

(Modelo 2003 - Opción A)

Problema 1.4.2 *(3 puntos)* Hallar todas las matrices X tales que $XA = AX$, siendo A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Modelo 2003 - Opción B)

Problema 1.4.3 *(2 puntos)* Para cada valor del parámetro real k, se considera el sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrr} x- & y = & 3 \\ 2x- & 3y = & 2k \\ 3x- & 5y = & k^2 \end{array} \right.$$

Se pide:

a) (1 punto) Discutir el sistema según los valores de k.

b) (1 punto) Resolver el sistema en los casos en que sea compatible.

(Modelo 2003 - Opción B)

Problema 1.4.4 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rrr} (m+2)x+ & (m-1)y- & z = 3 \\ mx- & y+ & z = 2 \\ x+ & my- & z = 1 \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.

b) (2 puntos) Discutirlo para los distintos valores de m.

(Junio 2003 - Opción A)

Problema 1.4.5 *(2 puntos)* Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

(Junio 2003 - Opción B)

Problema 1.4.6 *(2 puntos)* Encontrar un número real $\lambda \neq 0$, y todas las matrices B de dimensión 2×2 (distintas de la matriz nula), tales que

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

(Junio 2003 - Opción B)

Problema 1.4.7 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rrr} 3x+ & 4y+ & 3z = 9 \\ mx+ & 2y+ & z = 5 \\ x+ & y+ & z = 2 \end{array} \right.$$

a) (1,5 puntos) Determinar los valores de m para que el sistema dado tenga solución única.

b) (1,5 puntos) Resolverlo para $m = 1$.

(Septiembre 2003 - Opción A)

Problema 1.4.8 *(2 puntos)* Un mayorista del sector turístico vende a la agencia de viajes A, 10 billetes a destinos nacionales, 10 billetes a destinos extranjeros europeos comunitarios, y 10 billetes a destinos internacionales no comunitarios, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 billetes a destinos nacionales y 20 a destinos internacionales no comunitarios, y cobra 13.000 euros. A una tercera agencia C le vende 10 billetes a destinos nacionales y 10 a destinos extranjeros europeos comunitarios, cobrando 7.000 euros. Se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar el precio de cada billete.

b) (0,5 puntos) Por razones de mercado, el mayorista se ve obligado a bajar un 20 por ciento el precio de todos los billetes nacionales. Hallar en qué porcentaje debe incrementar el precio de todos los billetes extranjeros europeos comunitarios (suponiendo que mantiene constante el precio de todos los billetes internacionales no comunitarios) para mantener constantes sus ingresos totales por las ventas a las tres agencias.

(Septiembre 2003 - Opción B)

Problema 1.4.9 *(2 puntos)*

a) Sean A y B dos matrices invertibles que verifican la identidad $A+B = AB$. Comprobar que entonces se tiene la fórmula:

$$(I-B)^{-1} = -B^{-1}A$$

(Donde I denota la matriz identidad).

b) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

hallar la matriz B para la cual se verifica $A + B = AB$.

(Septiembre 2003 - Opción B)

1.5. Año 2004

Problema 1.5.1 *(3 puntos)* Discutir según los valores del parámetro λ, y resolver en los casos que sea posible el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 6x+ & 4y+ & 2\lambda z = & 2 \\ \lambda x+ & y- & z = & 2 \\ 5x+ & 3y+ & 3z = & 2\lambda \end{array}\right.$$

(Modelo 2004 - Opción A)

Problema 1.5.2 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & az = & 4 \\ x+ & ay+ & z = & 2 \\ x+ & 4y- & 5z = & 6 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (2 punto) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resolver el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.

(Modelo 2004 - Opción B)

Problema 1.5.3 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrr}(1-a)x- & 2y+ & 4z=0\\ x- & (1+a)y+ & z=0\\ -x+ & ay- & z=0\end{array}\right.$$

a) (1,5 punto) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos) Resolver el sistema anterior cuando sea compatible indeterminado.

(Junio 2004 - Opción A)

Problema 1.5.4 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$A=\left(\begin{array}{rrr}1&0&0\\-3&1&-1\\5&-1&2\end{array}\right);\quad B=\left(\begin{array}{rrr}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

Se pide:

a) (1 punto) Hallar A^{-1}.

b) (1 punto) Hallar la matriz X, tal que:

$$A\cdot X\cdot A^T=B$$

(donde A^T significa la matriz traspuesta de A).

(Junio 2004 - Opción B)

Problema 1.5.5 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Dado el sistema $\left\{\begin{array}{rr}x+&2y=1\\3x-&y=2\end{array}\right.$, escribir una tercera ecuación de la forma $ax+by=c$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.

b) (1 punto) Dado el sistema $\left\{\begin{array}{rrr}2x+&2y-&z=1\\x+&y+&2z=1\end{array}\right.$, escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x+\beta y+\gamma z=1$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas resultante siga siendo compatible indeterminado.

(Junio 2004 - Opción B)

Problema 1.5.6 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determinar la matriz inversa de B.

b) (1 punto) Determinar una matriz X tal que $A = B \cdot X$.

(Septiembre 2004 - Opción A)

Problema 1.5.7 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Si A es una matriz tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ¿cuál es el valor del determinante de A?

b) (1 punto) Calcular un número k tal que:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 2004 - Opción A)

Problema 1.5.8 *(3 puntos)*

a) (2 puntos) Discutir según los valores del parámetro real λ el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrl} \lambda x+ & 3y+ & z = & \lambda \\ x+ & \lambda y+ & \lambda z = & 1 \\ x+ & y- & z = & 1 \end{array}\right.$$

b) (1 punto) Resolver el sistema anterior en el caso $\lambda = 2$

(Septiembre 2004 - Opción B)

1.6. Año 2005

Problema 1.6.1 *(3 puntos)*

a) (2 punto) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2\lambda x+ & 2y+ & \lambda z = & 1 \\ x+ & \lambda y- & z = & 1 \\ 4x+ & 3y+ & z = & 2\lambda \end{array}\right.$$

b) (1 punto) Resolver el sistema anterior en los casos en que sea compatible.

(Modelo 2005 - Opción A)

Problema 1.6.2 *(2 puntos)* Considerar el siguiente sistema de ecuaciones, en el que a es un parámetro real:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -ax+ & 4y+ & az = & -a \\ 4x+ & ay- & az = & a \\ -x- & y+ & z = & 1 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (1 punto) Discutir el sistema

b) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 1$.

(Modelo 2005 - Opción B)

Problema 1.6.3 *(2 puntos)* Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Comprobar que

$$A^3 - 2A^2 = 0$$

b) (1 punto) Hallar A^n.

(Modelo 2005 - Opción B)

Problema 1.6.4 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} (m-1)x+ & y+ & z = & 3 \\ mx+ & (m-1)y+ & 3z = & 2m-1 \\ x+ & 2y+ & (m-2)z = & 4 \end{array}\right.$$

a) (1,5 punto) Discutirlo según los distintos valores de m.

b) (1,5 puntos) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

(Junio 2005 - Opción A)

Problema 1.6.5 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+ & 2y+ & 3z = 1 \\ 2x+ & y- & z = 2 \end{cases}$$

b) (1 punto) Hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación: $5x + y + \alpha z = \beta$, el sistema resultante sea compatible indeterminado.

(Junio 2005 - Opción B)

Problema 1.6.6 *(2 puntos)* Hallar una matriz X tal que:

$$A^{-1}XA = B$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(Junio 2005 - Opción B)

Problema 1.6.7 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Hallar dos constantes α y β tales que $A^2 = \alpha A + \beta I$.

b) (1 punto) Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.

c) (1 punto) Hallar todas las matrices X que satisfacen $(A-X)(A+X) = A^2 - X^2$.

(Septiembre 2005 - Opción A)

Problema 1.6.8 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Hallar A^{10}.

b) (1 puntos) Hallar la matriz inversa de B.

c) (1 punto) En el caso particular de $k = 0$, hallar B^{10}.

(Septiembre 2005 - Opción B)

1.7. Año 2006

Problema 1.7.1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y- & z = & k \\ x+ & 2y+ & 3z = & 2 \\ kx+ & ky- & 4z = & -1 \end{array}\right.$$

a) (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k.

b) (1 punto) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

(Modelo 2006 - Opción A)

Problema 1.7.2 *(3 puntos)* Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1,5 punto) Hallar $(A - I)^2$.

b) (1,5 punto) Calcular A^4 haciendo uso del apartado anterior.

(Modelo 2006 - Opción B)

Problema 1.7.3 *(2 puntos)* Dado el sistema homogéneo

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & ky & -z = 0 \\ kx- & y & +z = 0 \\ (k+1)x+ & y & = 0 \end{array}\right.$$

averiguar para qué valores de k tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$. Resolverlo en tales casos.
(Junio 2006 - Opción A)

Problema 1.7.4 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar todas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tales que $AP = PA$.
(Junio 2006 - Opción A)

Problema 1.7.5 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro a.

b) (1,5 punto) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M. Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$.

(Junio 2006 - Opción B)

Problema 1.7.6 *(3 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Comprobar que $|A^2| = |A|^2$, y que $|A + I| = |A| + |I|$

b) (0,5 puntos) Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que se cumple $|M^2| = |M|^2$?. Razonar la respuesta.

c) (1,5 puntos) Encontrar todas las matrices cuadradas M, de orden 2, tales que:

$$|M + I| = |M| + |I|$$

(Septiembre 2006 - Opción A)

Problema 1.7.7 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrl} x+ & y- & 3z = 0 \\ 2x+ & 3y- & z = 5 \end{array} \right.$$

b) (1 punto) Hallar la solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4.

(Septiembre 2006 - Opción B)

Problema 1.7.8 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Hallar todas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ distintas de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tales que $A^2 = A$

b) (1 punto) Para cualquiera de las matrices A obtenidas en el apartado 1.), calcular
$$M = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{10}$$

(Septiembre 2006 - Opción B)

1.8. Año 2007

Problema 1.8.1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ky+ & k^2z = & 1 \\ x+ & ky- & kz = & k^2 \\ -x+ & ky- & k^2z = & k^2 \end{array}\right.$$

a) (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k.

b) (1 punto) Resolverlo para $k = -1$.

(Modelo 2007 - Opción A)

Problema 1.8.2 *(3 puntos)* Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro λ.

b) (1,5 punto) Determinar para qué valores de λ existe la matriz inversa de M. Calcular dicha inversa para $\lambda = 0$.

(Modelo 2007 - Opción B)

Problema 1.8.3 *(2 puntos)* Estudiar el rango de la matriz $\begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro m.
(Junio 2007 - Opción A)

Problema 1.8.4 *(2 puntos)* Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz X tal que $XAX^{-1} = B$
(Junio 2007 - Opción A)

Problema 1.8.5 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que se verifique $AB = BA$.

b) (1,5 puntos) Para $a = b = c = 1$, calcular B^{10}.

Problema 1.8.6 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & (k+1)y+ & 2z = & -1 \\ kx+ & y+ & z = & k \\ (k-1)x- & 2y- & z = & k+1 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los distintos valores de k.

b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

(Septiembre 2007 - Opción A)

Problema 1.8.7 *(2 puntos)* Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica

$$XA^2 + BA = A^2$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(Septiembre 2007 - Opción B)

Problema 1.8.8 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & 3z = & 3 \\ 2x+ & 3y+ & z = & 5 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular a y b de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $ax + y + bz = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el sistema original.

b) (1 punto) Calcular las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a 4.

(Septiembre 2007 - Opción B)

1.9. Año 2008

Problema 1.9.1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & mz = & m+2 \\ 2x+ & (m+1)y+ & (m+1)z = & -m \\ (m+2)x+ & 3y+ & (2m+1)z = & 3m+4 \end{array}\right.$$

a) (2 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real m.

b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

(Modelo 2008 - Opción A)

Problema 1.9.2 *(3 puntos)* Sean las matrices:

$$A=\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right), \quad B=\left(\begin{array}{cc} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{array}\right)$$

a) (1 punto) Hallar una matriz X tal que $AXA^{-1}=B$.

b) (1 punto) Calcular A^{10}.

c) (1 punto) Hallar todas las matrices M que satisfacen

$$(A-M)(A+M)=A^2-M^2$$

(Modelo 2008 - Opción B)

Problema 1.9.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & ay = & 2 \\ ax- & y = & a+1 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro a. Resolverlo cuando la solución sea única.

b) (1 punto) Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene solución en la que $y=2$.

(Junio 2008 - Opción A)

Problema 1.9.4 *(3 puntos)* Dada la siguiente matriz de orden n:

$$A_n=\left(\begin{array}{rrrcrr} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 9 \end{array}\right)$$

se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_2.

b) (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_3.

c) (2 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_5.

(Junio 2008 - Opción B)

Problema 1.9.5 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar el rango de A según los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos) Decir cuándo la matriz A es invertible. Calcular la inversa para $a = 1$.

(Septiembre 2008 - Opción A)

Problema 1.9.6 *(2 puntos)* Resolver el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrr} x & -2y & +\ z & -3v & = & -4 \\ x & +2y & +\ z & +3v & = & 4 \\ 2x & -4y & +2z & -6v & = & -8 \\ 2x & & +2z & & = & 0 \end{array} \right.$$

(Septiembre 2008 - Opción B)

Problema 1.9.7 *(2 puntos)* El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.
(Septiembre 2008 - Opción B)

1.10. Año 2009

Problema 1.10.1 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrr} x- & y = & 3 \\ 2x- & 3y = & 2k \\ 3x- & 5y = & k \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Discutirlo según los distintos valores del parámetro k.

b) (1 punto) Resolverlo en los casos en que sea posible.

(Modelo 2009 - Opción A)

Problema 1.10.2 *(2 puntos)* Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix} = 0$$

(Modelo 2009 - Opción A)

Problema 1.10.3 *(3 puntos)* Si $A = (C_1, C_2, C_3)$ es una matriz cuadrada de orden 3 con columnas C_1, C_2, C_3, y se sabe que $det(A) = 4$, se pide:

a) (1 punto) Calcular $det(A^3)$ y $det(3A)$.

b) (2 puntos) Calcular $det(B)$ y $det(B^{-1})$, siendo $B = (2C_3, C_1 - C_2, 5C_1)$ la matriz cuyas columnas son:

$$2C_3, C_1 - C_2, 5C_1$$

(Modelo 2009 - Opción B)

Problema 1.10.4 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 4x+ & 4\lambda y+ & 2z = & 2\lambda \\ \lambda x+ & y- & \lambda z = & \lambda \\ 4\lambda x+ & 4\lambda y+ & \lambda z = & 9 \end{array}\right. ,$$

Se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

(Junio 2009 - Opción A)

Problema 1.10.5 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y = \lambda \\ \lambda x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ

b) (0,5 punto) Resolver el sistema cuando sea posible

(Junio 2009 - Opción B)

Problema 1.10.6 *(2 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar el rango de A según los distintos valores del parámetro a.

b) (1 punto) Obtener la matriz inversa de A para $a = -1$

(Junio 2009 - Opción B)

Problema 1.10.7 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

a) (1,25 puntos) Determinar los valores del prámetro m para los cuales la matriz M es invertible.

b) (0,5 puntos) Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M^{25} es invertible.

c) (1,25 puntos) Para $m = -1$ calcular, si es posible, la matriz inversa M^{-1} de M.

(Septiembre 2009 - Opción A

Problema 1.10.8 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\begin{cases} \lambda x + 2y + z = 0 \\ \lambda x - y + 2z = 0 \\ x - \lambda y + 2z = 0 \end{cases},$$

se pide:

a) (1 punto) Obtener los valores de parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de:

$$x = y = z = 0$$

b) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = 5$.

(Septiembre 2009 - Opción B)

Problema 1.10.9 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

obtener una matriz cuadrada X de orden 2 que verifique la ecuación matricial $AXB = A + B$
(Septiembre 2009 - Opción B)

Problema 1.10.10 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = \sqrt{3} \\ 3x + 2z = 2\sqrt{5} \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1 punto) Añadir, de forma razonada, una tercera ecuación para que el sistema resultante sea compatible determinado.

b) (1 punto) Añadir, de forma razonada, una tercera ecuación para que el sistema resultante sea compatible indeterminado.

(Septiembre 2009 - Opción A (Reserva))

Problema 1.10.11 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz X que verifique la ecuación matricial $XB = A + B$
(Septiembre 2009 - Opción A (Reserva))

Problema 1.10.12 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} (m+1)x+ & y+ & z = & 0 \\ x+ & (m+1)y+ & z = & m \\ x+ & y+ & (m+1)z = & m^2 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro m.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $m = 0$.

(Septiembre 2009 - Opción B (Reserva))

1.11. Año 2010

Problema 1.11.1 *(2 puntos)* Obtener, para todo número natural n, el valor de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

(Modelo 2010 - Opción A)

Problema 1.11.2 *(2 puntos)* Discutir razonadamente, en función del parámetro k, el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ky+ & z = & k+2 \\ kx+ & y+ & z = & k \\ x+ & y+ & kz = & -2(k+1) \end{array}\right.$$

(Modelo 2010 - Opción A)

Problema 1.11.3 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & & z = & 2 \\ x+ & \lambda y- & z = & 4 \\ -\lambda x- & y- & z = & -5 \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Discutirlo para los distintos valores del parámetro λ

b) (1 punto) Resolverlo cuando el sistema sea compatible indeterminado.

c) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = -2$.

(Modelo 2010 - Opción B)

Problema 1.11.4 *(2 puntos)* Dado el sistema homogéneo de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ky- & z = & 0 \\ 2x- & y+ & 2z = & 0 \\ x- & 4y+ & kz = & 0 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto) Determinar para qué valores del parámetro k el sistema tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$.

b) (1 punto) Resolverlo para el casa de $k = 3$.

(General-Junio 2010 - Opción A)

Problema 1.11.5 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar dos constantes a y b, tales que $A^2 = aA + bI$.

b) (1 punto) Sin calcular explícitamente A^3 y A^4, y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5.

(General-Junio 2010 - Opción A)

Problema 1.11.6 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ay- & z = & a \\ ax+ & & 2z = & -2 \\ x+ & & z = & -2 \end{array}\right.$$

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resolverlo en el caso de $a = 0$.

(General-Junio 2010 - Opción B)

Problema 1.11.7 *(3 puntos)* Sabiendo que $\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right| = 3$, y utilizando las propiedades de los determinantes, calcular:

a) (1 punto) El determinante de la matriz $\left(\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right)^4$

b) (1 punto) $\left|\begin{array}{ccc} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{array}\right|$

c) (1 punto) $\left|\begin{array}{ccc} 3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{array}\right|$

(Específica-Junio 2010 - Opción A)

Problema 1.11.8 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & my+ & 3z = & 3 \\ x+ & y- & 2z = & 0 \\ 5x+ & (m+1)y+ & z = & 9 \end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro m.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para el caso de $m = 0$.

(Específica-Junio 2010 - Opción B)

Problema 1.11.9 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ estudiar para que valores de a tiene inversa y calcularla siempre que sea posible.
(Específica-Junio 2010 - Opción B)

Problema 1.11.10 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (2 puntos). Estudiar el rango de A según los valores del parámetro m

b) (1 punto). En el caso de $m = 0$, resolver el sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(General-Septiembre 2010 - Opción A)

Problema 1.11.11 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la compatibilidad del sistema

b) (0,5 puntos). Añadir una ecuación para que el sistema sea compatible determinado. Razonar la respuesta.

c) (0,5 puntos). Añadir una ecuación para que el sistema sea incompatible. Razonar la respuesta.

(General-Septiembre 2010 - Opción B)

Problema 1.11.12 *(2 puntos)* Dada la matriz:

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de A según los valores del parámetro a.

b) (1 punto). ¿Para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1}? Calcular A^{-1} para $a = 1$.

(General-Septiembre 2010 - Opción B)

Problema 1.11.13 *(3 puntos)* El sistema $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 5 & a \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

tiene diferentes soluciones según sea la matriz B

a) (1 punto). Determinar, si existen, el valor o valores de a para los que el sistema es compatible determinado (independientemente del valor de B).

b) (0,5 puntos). Si $a = 4$, y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{pmatrix}$, determinar, si existen, el valor o los valores de b para los que el sistema es incompatible.

c) (1,5 puntos). Si $a = 4$, y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 10 \end{pmatrix}$, determinar, si existen, el valor o los valores de c para los que el sistema es compatible indeterminado. Resolver el sistema.

(Específica-Septiembre 2010 - Opción A)

Problema 1.11.14 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & kz = & k \\ x+ & ky+ & z = & k^2 \\ kx+ & y+ & z = & 1 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro k.

b) (1 punto). Resolverlo para $k = 0$.

(Específica-Septiembre 2010 - Opción B)

1.12. Año 2011

Problema 1.12.1 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} \lambda x & + & \lambda z = & 2 \\ x+ & \lambda y- & z = & 1 \\ x+ & 3y+ & z = & 2\lambda \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro λ

b) (1,5 puntos). Resolver el sistema para $\lambda = 1$.

(Modelo 2011 - Opción A)

Problema 1.12.2 *(3 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto). Calcular $A^2 - 4A + 3I$

b) (1 punto). Demostrar que la matriz inversa A^{-1} de A es $\dfrac{1}{3}(4I - A)$.

c) (1 punto). Hallar la matriz inversa de la matriz $A - 2I$.

(Modelo 2011 - Opción B)

Problema 1.12.3 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto). Calcular el rango de A en función de los valores de a.

b) (1 punto). En el caso de $a = 2$, discutir el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ en función de los valores de b, y resolverlo cuando sea posible.

c) (1 punto). En el caso de $a = 1$, resolver el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(Junio 2011 - Opción A)

Problema 1.12.4 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema de ecuaciones $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & (m-1) \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m+2 \end{pmatrix}$$

según los valores de m.

b) (1,5 puntos). Resolver el sistema en los casos $m = 0$ y $m = 1$.

(Junio 2011 - Opción B)

Problema 1.12.5 *(2 puntos).* Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \\ a+2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro a.
(Septiembre 2011 - Opción A)

Problema 1.12.6 *(2 puntos).* Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz M.

b) (1 punto). Hallar la matriz M^2.

c) (0,5 puntos). Hallar la matriz M^{25}.

(Septiembre 2011 - Opción A)

Problema 1.12.7 *(3 puntos).* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & 4y & = & 4k \\ -k^3x+ & k^2y+ & kz = & 0 \\ x+ & ky & = & k^2 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo en función del valor del parámetro k.

b) (0'5 puntos). Resolver el sistema para $k = 1$.

c) (0'5 puntos). Resolver el sistema para $k = 2$.

(Septiembre 2011 - Opción B)

1.13. Año 2012

Problema 1.13.1 *(3 puntos)* Dado el sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 2 \\ -3x+ & 2y+ & 3z = & -2 \\ 2x+ & my- & 5z = & -4 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de m.

b) (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.

(Modelo 2012 - Opción A)

Problema 1.13.2 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y = & 1 \\ 3x+ & y = & -a \\ -3x+ & 2ay = & 7 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema segun los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos). Resolver el sistema cuando sea compatible..

(Modelo 2012 - Opción B)

Problema 1.13.3 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar el rango de A en función de los valores de k.

b) (0,75 puntos) Para $k = 2$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = B$.

c) (0,75 puntos) Para $k = 1$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = C$.

(Junio 2012 - Opción A)

Problema 1.13.4 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2-a & 3+a & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de la matriz B en función de a.

b) (1 punto). Para $a = 0$, calcular la matriz X que verifica $AX = B$.

(Junio 2012 - Opción B)

Problema 1.13.5 *(2 puntos)* Calcular el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(Junio 2012 - Opción B)

Problema 1.13.6 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x+ & 2y+ & (a-1)z = & 1 \\ -x+ & ay+ & z = & 0 \\ 2x+ & y- & 2z = & 3 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir sus soluciones según los valores de a.

b) (1 punto). Hallar la solución del sistema para $a = 1$.

(Junio 2012 (coincidente)- Opción A)

Problema 1.13.7 *(3 puntos)* . Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1$, calcular los siguientes determinantes:

$$a)\ (1,5 \text{ puntos}) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3x & y & 2z \\ 6 & 3 & 10 \end{vmatrix}, \quad b)\ (1,5 \text{ puntos}) \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 2-x & 2-y & -z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

(Junio 2012 (coincidente)- Opción B)

Problema 1.13.8 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x+ & ay+ & 4z = & 6 \\ x+ & (a+1)y+ & z = & 3 \\ (a-1)x- & ay- & 3z = & -3 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 punto). Discutir el sistema según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo para $a = -1$.

(Septiembre 2012 - Opción A)

Problema 1.13.9 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & & 2z = & 2 \\ ax- & y+ & z = & -8 \\ 2x+ & & az = & 4 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 punto). Discutir el sistema según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo para $a = -5$.

(Septiembre 2012 - Opción B)

1.14. Año 2013

Problema 1.14.1 *(3 puntos)* Dado el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & (m+3)z = & 3 \\ x+ & y+ & (4+m-m^2)z = & 3 \\ 2x+ & 4y+ & 3(m+2)z = & 8 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de m.

b) (1 punto). Resolverlo para $m = 2$.

(Modelo 2013 - Opción A)

Problema 1.14.2 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ obtener las relaciones que deben cumplir x, y, z, t para que la matriz X verifique $AX = XA$.

b) (0,5 puntos). Dar un ejemplo de matriz X distinta de la matriz nula y de la matriz identidad que cumpla la igualdad anterior.

c) (0,5 puntos). Calcular la inversa de la matriz A.

(Modelo 2013 - Opción B)

Problema 1.14.3 *(2 puntos)* De las matrices cuadradas A y B se sabe que:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^2 - AB + BA - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto). Calcular la matriz $A - B$.

b) (1 punto). Calcular las matrices A y B.

(Modelo 2013 - Opción B)

Problema 1.14.4 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax+ & 7y+ & 5z = & 0 \\ x+ & ay+ & z = & 3 \\ & y+ & z = & -2 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $a = 4$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $a = 2$.

(Junio 2013 - Opción A)

Problema 1.14.5 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto). Hallar el valor de λ para el cual la ecuación matricial $XA = B$ tiene solución única.

b) (1 punto). Calcular la matriz X para $\lambda = 4$.

c) (1 punto). Calcular el determinante de la matriz A^2B en función de λ.

(Junio 2013 - Opción B)

Problema 1.14.6 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} \lambda x+ & 2y- & 3z = & 2\lambda \\ x+ & y+ & z = & 1 \\ 2x- & 3y+ & 2z = & 2 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutirlo según los valores de λ.

b) (1,5 puntos). Para los valores de λ tales que el sistema tiene solución única, obtener esta solución en función de λ.

(Junio 2013 (coincidente)- Opción A)

Problema 1.14.7 *(3 puntos)* Sean A y B matrices 2 con determinantes: $\det A = 5$, $\det B = 3$. Se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar $\det\left[B^{-1}A^2B^2\right]$

b) (0,5 puntos). Hallar $\det\left[A + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A\right]$.

c) (1 punto). Si c_1 y c_2 son las columnas de la matriz A (es decir, $A = (c_1\ c_2)$), hallar la solución del sistema:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (c_2)$$

(Junio 2013 (coincidente)- Opción B)

Problema 1.14.8 *(2 puntos)* Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} -3 & \lambda+1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1 punto). Determinar λ para que A sea invertible.

b) (1 punto). Calcular A^{-1} en el caso $\lambda = 1$.

(Junio 2013 (coincidente)- Opción B)

Problema 1.14.9 *(3 puntos)* Dadas la matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}; \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Calcular el determinante de A. Determinar el rango de A según los valores de a.

b) (0,5 puntos). Resolver el sistema homogéneo $AX = O$ en el caso $a = 1$.

c) (1 punto). Resolver el sistema homogéneo $AX = O$ cuando $a = -1$.

(Septiembre 2013 - Opción A)

Problema 1.14.10 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 2x+ & \lambda y+ & \lambda z = & 1-\lambda \\ x+ & y+ & (\lambda-1)z = & -2\lambda \\ (\lambda-1)x+ & y+ & z = & \lambda-1 \end{array} \right.$$

Se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro λ.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $\lambda = 1$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $\lambda = -1$.

(Septiembre 2013 - Opción B)

Problema 1.14.11 *(3 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Calcular la matriz inversa A^{-1} de A.

b) (1 punto). ¿Son iguales las matrices $(A^{-1})^2$ y $(A^2)^{-1}$?

c) (1 punto). Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ resolver la ecuación matricial $AX = B$.

(Septiembre 2013 (coincidente)- Opción A)

Problema 1.14.12 *(2 puntos)* Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 6 \\ x-1 & 0 & -6 \\ x^2+2 & x & 12 \end{vmatrix} = 6$$

(Septiembre 2013 (coincidente)- Opción B)

Problema 1.14.13 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & ay- & z = & 0 \\ 3x+ & 2y+ & az = & 0 \\ 7x+ & 9y+ & 9z = & 0 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores de a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo para $a = 5$.

(Septiembre 2013 (coincidente)- Opción B)

1.15. Año 2014

Problema 1.15.1 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & k \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar los valores de k para los que existe la matriz inversa A^{-1}.

b) (1 punto). Hallar la matriz A^{-1} para $k = 6$.

c) (1,5 puntos). Resolver la ecuación matricial $AX - A = B$ para $k = 6$.

(Modelo 2014 - Opción A)

Problema 1.15.2 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrr} (a+2)x+ & (a+1)y = & -6 \\ x+ & 5y = & a \\ x+ & y = & -5 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores de a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo cuando sea posible.

(Modelo 2014 - Opción B)

Problema 1.15.3 *(2 puntos)* Sabiendo que el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

es igual a 1, calcular el valor de los determinantes:

a) (1 punto). $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$.

b) (1 punto). $\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

(Modelo 2014 - Opción B)

Problema 1.15.4 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Calcula α, β y γ para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $AX = B$.

b) (1 punto). Si $\beta = \gamma = 1$ ¿Qué condición o condiciones debe cumplir α para que el sistema lineal homogéneo $AX = O$ sea compatible determinado?

c) (0,5 puntos). Si $\alpha = -1$, $\beta = 1$ y $\gamma = 0$, resuelve el sistema $AX = B$.

(Junio 2014 - Opción A)

Problema 1.15.5 *(2 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{se pide}:$$

a) (1 punto). Hallar el valor o valores de a para que la matriz A tenga inversa.

b) (1 punto). Calcular la matriz inversa A^{-1} de A, en el caso $a = 2$.

(Junio 2014 - Opción B)

Problema 1.15.6 *(2 puntos)* Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado veintidós euros. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y seis bolígrafos, el coste es de catorce euros. Se pide:

a) (1 punto). Expresar, en función del precio de un bolígrafo, lo que costaría un cuaderno y lo que costaría un rotulador.

b) (1 punto). Calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores.

(Junio 2014 - Opción B)

Problema 1.15.7 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x- & y+ & z = & 1 \\ & y- & z = & a \\ x+ & y- & z = & 3a^2 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo cuando sea posible.

(Junio 2014 (coincidente)- Opción A)

Problema 1.15.8 *(3 puntos)* Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ tiene determinante igual a 10, se pide calcular justificadamente:

a) (1 punto). El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2a+b & b & c \\ 4 & 2 & 3 \\ 2x+y & y & z \end{pmatrix}$.

b) (1 punto). El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2a & 2b & 2c \end{pmatrix}$.

c) (1 punto). El determinante de la matriz $(BB^t)^3$, donde $B = \begin{pmatrix} a+2 & b+4 & c+6 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$

y B^t es la matriz transpuesta de B.

(Junio 2014 (coincidente)- Opción B)

Problema 1.15.9 *(3 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a-1 & a & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto). Determinar el valor o valores de a para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1}.

b) (1 punto). Para $a = -2$, hallar la matriz inversa A^{-1}.

c) (1 punto). Para $a = 1$, calcular todas las soluciones del sistema lineal $AX = O$.

(Septiembre 2014 - Opción A)

Problema 1.15.10 *(2 puntos)* Dada la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde B es una matriz cuadrada de tamaño 2×2, se pide:

a) (1 punto). Calcular el valor o valores de a para los que esta ecuación tiene solución.

b) (1 punto).Calcular B en el caso $a = 1$.

(Septiembre 2014 - Opción B)

Problema 1.15.11 *(2 puntos)* Estudiar el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro a.

(Septiembre 2014 - Opción B)

1.16. Año 2015

Problema 1.16.1 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & m & m \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de A según los valores de m.

b) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz A^{20}.

c) (0,75 puntos). Para $m = -2$, resolver el sistema $AX = O$.

d) (0,75 puntos). Para $m = 0$, resolver el sistema $AX = B$.

(Modelo 2015 - Opción A)

Problema 1.16.2 *(2 puntos)*

a) (1,5 puntos). Hallar X e Y, matrices 2×2, tales que

$$X + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

b) (0,5 puntos). Hallar Z, matriz invertible 2×2, tal que

$$Z^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

(Modelo 2015 - Opción B)

Problema 1.16.3 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} mx+ & y = & 0 \\ x+ & my = & 0 \\ mx+ & my = & 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutirlo según los valores de m.

b) (0,5 puntos). Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

(Modelo 2015 - Opción B)

Problema 1.16.4 *(3 puntos)*

a) (2 puntos). Discutir, según los valores de m, el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rrr} 4x+ & 3y+ & (m-1)z = & 0 \\ x- & 2y+ & mz = & 1 \\ 5x+ & my+ & z = & 1 \end{array}\right.$$

b) (1 punto). Resolver el sistema anterior para el caso $m = 1$.

(Junio 2015 - Opción A)

Problema 1.16.5 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular A^{15} y A^{20}

b) (1 punto). Resolver la ecuación matricial $6X = B - 3AX$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3.

(Junio 2015 - Opción B)

Problema 1.16.6 *(2 puntos)* Dadas las matrices:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix}, \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ se pide:}$$

a) (1,25 puntos). Hallar el rango de A en función de t.

b) (0,75 puntos). Calcular t para que $\det(A - tI) = 0$.

(Junio 2015 - Opción B)

Problema 1.16.7 *(2 puntos)* Dadas las matrices: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Calcular la matriz inversa de L.

b) (1 punto). Buscar la matriz A, tal que $LAL^t = I$, donde L^t es la traspuesta de L.

(Junio 2015 (coincidente)- Opción A)

Problema 1.16.8 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de A, según los valores de m, e indicar para qué valores de m admite inversa la matriz A.

b) (1 punto). Sin calcular A^{-1}, hallar m para que $det(A) = det(4A^{-1})$.

(Junio 2015 (coincidente)- Opción A)

Problema 1.16.9 *(3 puntos)*

a) (2 puntos). Discutir el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{rrr} 2x+ & y = & 5 \\ x+ & my = & 7 \\ x- & y = & 4 \end{array}\right.$, en función de los valores del parámetro m y hallar la solución del sistema anterior en los casos en los que ésta sea única.

b) (1 punto). Encontrar el valor o valores de k que hacen incompatible el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & kz = & 2 \\ kx- & ky+ & 4z = & -4 \end{array}\right.$$

(Junio 2015 (coincidente)- Opción B)

Problema 1.16.10 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -mx+ & my+ & z = & 0 \\ x- & my+ & 3z = & 4 \\ 2x- & 2y- & z = & 0 \end{array}\right.$$

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro m.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 0$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 2$.

(Septiembre 2015 - Opción A)

Problema 1.16.11 *(2 puntos)* Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$ y usando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de los siguientes determinantes:

a) (1 punto). $\begin{vmatrix} 2a-2b & c & 5b \\ 2d-2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix}$

b) (1 punto). $\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$

(Septiembre 2015 - Opción B)

Problema 1.16.12 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hallar todas las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con A, es decir que cumplen $AB = BA$. (Septiembre 2015 - Opción B)

Problema 1.16.13 *(3 puntos)* Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar los valores del parámetro a, para que la matriz M tenga inversa.

b) (1 punto). Hallar la inversa de M, para $a = 2$.

c) (1 punto). Resolver el sistema homogéneo $MX = O$, para $a = 1$.

(Septiembre 2015 (coincidente)- Opción A)

Problema 1.16.14 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & z = & 1 \\ (k-1)x+ & y+ & z = & k \\ x+ & (k-1)y+ & z = & 0 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de k.

b) (1 punto). Resolverlo para $k = 0$ y para $k = 1$.

(Septiembre 2015 (coincidente)- Opción B)

1.17. Año 2016

Problema 1.17.1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & kz = & 1 \\ 2x+ & 4y+ & z = & 3 \\ kx+ & 2y- & z = & 3 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de k.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $k = 2$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $k = 1$.

(Modelo 2016 - Opción A)

Problema 1.17.2 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular el valor o valores de λ que hacen que el determinante de la matriz $M - \lambda I$ sea igual a 0.

b) (1 punto). Para $\lambda = -1$, resolver el sistema de ecuaciones lineales: $(M - \lambda I)X = O$.

(Modelo 2016 - Opción B)

Problema 1.17.3 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

resolver la ecuación matricial $AX + 3B = B(A^t + 3I)$, donde A^t denota la matriz transpuesta de A.
(Modelo 2016 - Opción B)

Problema 1.17.4 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos). Despeje X en la ecuación matricial $X(CD)^{-1} = A + X(D^{-1}C^{-1} - B)$, siendo A; B; C; D matrices cuadradas invertibles. Exprese X de la forma más simple posible.

b) (1,5 puntos). Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ determine la matriz Y tal que $YB = A$.

(Junio 2016 - Opción A)

Problema 1.17.5 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrr} 3x+ & y & + & mz = & 1 \\ x- & y & + & 2z = & -2 \\ 5x+ & (m+1)y & + & 2z = & 4 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de m.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 0$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 2$.

(Junio 2016 - Opción B)

Problema 1.17.6 *(3 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar los valores del parámetro a, para que se verifique la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) (1,5 puntos). Para $a = 2$, resolver la ecuación matricial $AXA^{-1} = B$.

c) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz $(2B)^{-1}$.

(Junio 2016 (coincidente)- Opción A)

Problema 1.17.7 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrr} ax- & y & + & z = & 0 \\ x+ & y & + & az = & 0 \\ ax+ & 4y & + & 2z = & a \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo, si es posible, para $a = 1$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo, si es posible, para $a = -1$.

(Junio 2016 (coincidente)- Opción B)

Problema 1.17.8 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Determine, si es posible, los parámetros α y β de modo que se verifique la igualdad:

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

b) (1 punto). Determine los posibles valores de λ para que el rango de la matriz A sea 2, donde

$$A = \lambda \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 2016 - Opción A)

Problema 1.17.9 *(2 puntos)* Cierta fundación ha destinado 247000 euros para la dotación de 115 becas de estudios. El importe de cada beca es de 3000 euros, si el estudiante cursa un grado universitario; de 2000 euros, si cursa formación profesional y de 1500 euros, si realiza estudios de postgrado. Sabiendo que la fundación ha concedido doble número de becas de formación profesional que de postgrado, ¿cuántas becas ha concedido a cada nivel de estudios?
(Septiembre 2016 - Opción A)

Problema 1.17.10 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{rrcrr} 2x+ & (a-1)y & - & 2z = & a \\ 2x+ & y & - & az = & 2 \\ -x+ & y & + & z = & 1-a \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo cuando sea posible.

(Septiembre 2016 - Opción B)

1.18. Año 2017

Problema 1.18.1 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 4 & 1 \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar el rango de B en función de los valores de m.

b) (1,5 puntos) Calcular la matriz inversa de A y comprobar que verifica $A^{-1} = \frac{1}{5}(A^2 + 3C)$.

(Modelo 2017 - Opción A)

Problema 1.18.2 *(2 puntos)* A un florista le han encargado preparar 5 ramos iguales para cinco eventos. El precio total acordado es de 610 euros. Ha decidido emplear rosas, tulipanes y lilas. Cada ramo llevará un total de 24 flores y el número de rosas empleado doblará al número total de flores de otras especies. ¿Cuál es el número de flores de cada tipo que usará en cada ramo sabiendo que cada rosa cuesta 6 euros, cada tulipán cuesta 4 y cada lila 3?
(Modelo 2017 - Opción B)

Problema 1.18.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} 2x + ay + z = a \\ x - 4y + (a+1)z = 1 \\ 4y - az = 0 \end{array}\right.$,

se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo en función de los valores del parámetro real a.

b) (0,5 puntos) Resolverlo en el caso $a = 1$.

c) (0,5 puntos) Resolverlo en el caso $a = 2$.

(Junio 2017 - Opción A)

Problema 1.18.4 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto) Determinar la matriz P^{-1}, inversa de la matriz P.

b) (1 punto) Determinar la matriz B^{-1}, inversa de la matriz $B = P^{-1}J^{-1}$.

c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz A^2, siendo $A = PJP^{-1}$.

(Junio 2017 - Opción B)

Capítulo 2

Geometría

2.1. Año 2000

Problema 2.1.1 *(2 puntos)* Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (a, 1 + a, 2a)$, $\overrightarrow{v} = (a, 1, a)$ y $\overrightarrow{w} = (1, a, 1)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar los valores de a para que los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ sean linealmente dependientes.

b) (0,5 puntos) Estudiar si el vector $\overrightarrow{c} = (3, 3, 0)$ depende linealmente de los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ para el caso $a = 2$. Justificar la respuesta.

c) (0,5 puntos) Justificar razonadamente si para $a = 0$ se cumple la igualdad

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = 0$$

Nota: el símbolo $\wedge$ significa producto vectorial.
(Modelo 2000 - Opción A)

Problema 2.1.2 *(2 puntos)*

a) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia al punto $A(4, 0)$ es el doble de su distancia a la recta $x = 1$.

b) Comprobar que el anterior lugar geométrico es una cónica. Indicar el tipo de cónica que es y hallar sus focos.

(Modelo 2000 - Opción A)

Problema 2.1.3 *(3 puntos)*

a) (1 punto) Encontrar la distancia del punto $P(1, -1, 3)$ a la recta que pasa por los puntos $Q(1, 2, 1)$ y $R(1, 0, -1)$.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos P, Q y R.

c) (1 punto) Encontrar todos los puntos S del plano determinado por P, Q y R de manera que el cuadrilátero de vértices P, Q, R y S sea un paralelogramo.

(Modelo 2000 - Opción B)

Problema 2.1.4 *(2 puntos)* Resolver la siguiente ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{x} \wedge (2, 1, -1) = (1, 3, 5)$$

sabiendo que $|\overrightarrow{x}| = \sqrt{6}$, donde $\wedge$ significa "producto vectorial".
(Junio 2000 - Opción A)

Problema 2.1.5 *(2 puntos)*

a) Determinar el centro y el radio de la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 8z - 4 = 0$$

b) Determinar el centro y el radio de la circunferencia intersección de la esfera del apartado anterior con el plano $z = 0$.

(Junio 2000 - Opción A)

Problema 2.1.6 *(3 puntos)* Sean los puntos $P(8, 13, 8)$ y $Q(-4, -11, -8)$. Se considera el plano π, perpendicular al segmento PQ por su punto medio.

a) (1 punto) Obtener la ecuación del plano π.

b) (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del punto $O(0, 0, 0)$ sobre π.

c) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro determinado por los puntos en los que el plano π corta a los ejes coordenados y en el origen de coordenadas.

(Junio 2000 - Opción B)

Problema 2.1.7 *(3 puntos)* Sea la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 8z + 9 = 0$.

a) (0,5 puntos) Determinar su centro y su radio.

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta que contiene al diámetro paralelo al eje OY.

c) (1 punto) Obtener el centro y el radio de la circunferencian que resulta al cortar dicha esfera con el plano $z = 0$.

d) (1 punto) Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera en su punto del eje OX.

(Septiembre 2000 - Opción A)

Problema 2.1.8 *(2 puntos)* Se consideran los puntos $A(1, a, 0)$, $B(1, 1, a-2)$ y $C(1, -1, a)$.

a) (1 punto) Comprobar que no están alineados, cualquiera que sea el valor que tome el parámetro a.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo que determinan los tres puntos.

(Septiembre 2000 - Opción B)

Problema 2.1.9 *(2 puntos)* Sean la recta

$$r : \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$$

y el plano

$$\pi : 2x - y + kz = 0$$

a) (1 punto) Calcular m y k para que la recta sea perpendicular al plano.

b) (1 punto) Calcular m y k para que la recta esté contenida en el plano.

(Septiembre 2000 - Opción B)

2.2. Año 2001

Problema 2.2.1 *(3 puntos)* Sea la parábola $x^2 = 4y$. Sean u y v las rectas tangentes a la parábola en los puntos P de abcisa a y Q de abcisa b, (a_1, b), $(a_1, 0)$, $(b_1, 0)$.

a) (1,5 puntos) Hallar las coordenadas del punto R de intersección de u y v.

b) (1 punto) Hallar la relación entre a y b para que las rectas u y v sean perpendiculares.

c) (0,5 puntos) Probar que en el caso del apartado anterior, el punto R está en la directriz de la parábola.

(Modelo 2001 - Opción A)

Problema 2.2.2 *(2 puntos)* Los vértices de un triángulo son $A(-2,-1)$, $B(7,5)$ y $C(x,y)$.

a) Calcular el área del triángulo en función de x e y.

b) Encontrar el lugar geométrico de los puntos (x,y) tales que la anterior área es 36.

(Modelo 2001 - Opción B)

Problema 2.2.3 *(2 puntos)* Sea $A(1,1)$ y $B(-1,1)$ dos puntos del plano.

a) Determinar las ecuaciones de todas las circunferencias que pasan por los puntos A y B razonando dónde están situados sus centros.

b) De entre las circunferencias del apartado anterior hallar el centro y el radio de la que es tangente a la recta $y=x$.

(Modelo 2001 - Opción B)

Problema 2.2.4 *(3 puntos)* Dado el plano $\pi : x+y+x=1$, la recta $r:(x,y,z)=(1,0,0)+\lambda(0,1,1)$, y el punto $P(1,1,0)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta s que sea perpendicular a r y pase por P.

b) (1 punto) Hallar el punto P', simétrico de P respecto de r.

c) (1 punto) Hallar el punto P'', simétrico de P respecto de π.

(Junio 2001 - Opción A)

Problema 2.2.5 *(3 puntos)* Sean las rectas

$$r : x-2 = \frac{y-1}{k} = \frac{z+1}{-2} \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Hallar k para que r y s sean coplanarias.

b) (1 punto) Para el valor anterior de k, hallar la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

c) (1 punto) Para el valor anterior de k, hallar la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas dadas.

(Junio 2001 - Opción B)

Problema 2.2.6 *(2 puntos)* Determinar la ecuación cartesiana de los puntos del lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$ es igual a 9. Si se trata de una curva cerrada, calcular el área que encierra.
(Septiembre 2001 - Opción A)

Problema 2.2.7 *(2 puntos)* Sean A, B y C tres puntos del espacio tridimensional que verifican la relación

$$\overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{CA}$$

a) (1 punto) Calcular el valor que toma k en la expresión $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

b) (1 punto) Si $A(1,2,-1)$ y $B(3,6,9)$, hallar las coordenadas del punto C que cumple la relación de partida.

(Septiembre 2001 - Opción A)

Problema 2.2.8 *(3 puntos)* Se considera el tetraedro cuyos vértices son $A(1,0,0)$, $B(1,1,1)$, $C(-2,1,0)$ y $D(0,1,3)$.

a) (1 punto) Hallar el área del triángulo ABC y el volumen del tatraedro $ABCD$.

b) (1 punto) Calcular la distancia de D al plano determinado por los puntos A, B y C.

c) (1 punto) Hallar la distancia entre las rectas AC y BD.

(Septiembre 2001 - Opción B)

2.3. Año 2002

Problema 2.3.1 *(2 puntos)* Se considera una varilla $\overline{AB}$ de longitud 1. El extremo A de esta varilla recorre completamente la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$; la varilla se mantiene en todo momento tangente a dicha circunferencia.

a) (1 punto) Determinar el lugar geométrico descrito por el extremo B de la varilla.

b) (1 punto) Obtener la ecuación cartesiana de dicho lugar geométrico.

(Modelo 2002 - Opción A)

Problema 2.3.2 *(2 puntos)* Sean las rectas:

$$r: \left\{ \begin{array}{c} x - 2y - 6z = 1 \\ x + y = 0 \end{array} \right. \qquad s: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{a} = z$$

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de r y s según los valores de a.

b) (1 punto) Calcular la distancia entre las rectas r y s cuando $a = -2$:

(Modelo 2002 - Opción A)

Problema 2.3.3 *(3 puntos)* Sea la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

a) (1 punto) Hallar su centro y su radio y dibujarla.

b) (1 punto) Hallar el punto de la curva, de abcisa cero, más alejado del origen; hallar también la recta tangente a la curva en ese punto.

c) (1 punto) Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $P(3, 0)$ razonando la respuesta.

(Modelo 2002 - Opción B)

Problema 2.3.4 *(3 puntos)* Se consideran las cónicas C_1 y C_2 cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \;\; ; \;\; C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144$$

a) (2 puntos) Identificar C_1 y C_2. Especificar, para cada una de ellas, sus elementos característicos: vértices, focos, excentricidad, y asíntotas (si existen).

b) (1 punto) Hallar una ecuación cartesiana de la parábola de eje horizontal, abierta hacia la derecha y que pasa por tres de los vértices de la cónica C_1.

(Junio 2002 - Opción A)

Problema 2.3.5 *(2 puntos)* Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r:

$$x = 1 + t \;\; , \;\; y = -1 + 2t \;\; , \;\; z = t$$

y es perpendicular al plano π:

$$2x + y - z = 2.$$

(Junio 2002 - Opción B)

Problema 2.3.6 *(2 puntos)* Los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(1, 3, 3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.
Se pide:

a) (1 punto) Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y calcular el área de dicho paralelogramo.

b) (1 punto) Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

(Junio 2002 - Opción B)

Problema 2.3.7 *(3 puntos)* Se consideran las rectas

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2} \quad s : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

a) (1 punto) Calcular la distancia entre r y s.

b) (1 punto) Hallar las ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular común a r y s y que corta a ambas.

c) (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que corta a r y s y que pasa por el punto $P(1, 0, 0)$.

(Septiembre 2002 - Opción A)

Problema 2.3.8 *(2 puntos)* Hallar una ecuación cartesiana del lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los puntos $A(0, 3)$ y $B(0, -1)$ es igual a 1. Identificar dicho lugar geométrico.
(Septiembre 2002 - Opción B)

Problema 2.3.9 *(2 puntos)* Para cada valor del parámetro real a, se consideran los tres planos siguientes:

$$\pi_1 : x + y + az = -2; \quad \pi_2 : x + ay + z = -1; \quad \pi_2 : ax + y + z = 3$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular los valores de a para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.

b) (0,5 puntos) Para los valores de a calculados, hallar unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.

(Septiembre 2002 - Opción B)

2.4. Año 2003

Problema 2.4.1 *(3 puntos)* Se consideran el plano π y la recta r siguientes:

$$\pi : x + y - 2z = 6; \quad r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

Se pide:

a) (1,5 punto) Hallar el punto simétrico de $M(1,1,1)$ respecto del plano π.

b) (1,5 punto) Hallar el punto simétrico de $M(1,1,1)$ respecto de la recta r.

(Modelo 2003 - Opción A)

Problema 2.4.2 *(3 puntos)* Se consideran los puntos:

$$A(1,1,1),\ \ B(0,-2,2)\ \ C(-1,0,2)\ \ D(2,-1,-2).$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

b) (1 punto) Calcular la distancia del punto D al plano determinado por los puntos A, B y C.

c) (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano determinado por los puntos A, B y C.

(Modelo 2003 - Opción B)

Problema 2.4.3 *(3 puntos)* Dadas las rectas en el espacio:

$$r : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$$

$$s : \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

a) (1,5 punto) Hallar la distancia entre las dos rectas.

b) (1,5 puntos) Determinar las ecuaciones de la perpendicular común a r y s.

(Junio 2003 - Opción A)

Problema 2.4.4 *(3 puntos)* Dados el plano

$$\pi : x + 3y - z = 1$$

y la recta

$$s : \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

a) (1,5 punto) Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

b) (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π, π'.

(Junio 2003 - Opción B)

Problema 2.4.5 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(1,0,1)$ y $B(0,2,0)$, y el plano $\pi \equiv x - 2y - z - 7 = 0$, determinar el plano que es perpendicular al plano π y pasa por los puntos A y B.
(Septiembre 2003 - Opción A)

Problema 2.4.6 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-k}{1}$$

$$s : \left\{ \begin{array}{rrr} x- & y+ & z = 3 \\ 3x+ & & z = 1 \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Hallar el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.

b) (1 puntos) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.

(Septiembre 2003 - Opción A)

Problema 2.4.7 *(3 puntos)* Dado el plano

$$\pi : x + y + z = 0$$

y la recta

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto Q en el que se cortan el plano π y la recta r.

b) (2 puntos) Encontrar un plano π', paralelo a π, tal que el punto Q' en el que se cortan el plano π' y la recta r esté a distancia 2 del punto Q hallado en el apartado anterior.

(Septiembre 2003 - Opción A)

2.5. Año 2004

Problema 2.5.1 *(3 puntos)* Dado el plano:

$$\pi : x + y + az + 1 = 0$$

y las rectas

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = 2 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \qquad r'' : \begin{cases} x = 3 \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$$

Se pide:

a) Calcular el valor de a para que los puntos de corte del plano π con las rectas r, r' y r'' estén alineados (1,5 puntos).

b) Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por esos tres puntos (0,75 puntos).

c) Calcula la distancia de dicha recta al origen (0,75 puntos).

(Modelo 2004 - Opción A)

Problema 2.5.2 *(2 puntos)* Se consideran las rectas

$$r : \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x - z + 2 = 0 \\ 2y - mz = 6 \end{cases}$$

a) Hallar el valor de m para que r y s sean paralelas.

b) Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación del plano que contiene las rectas r y s.

(Modelo 2004 - Opción B)

Problema 2.5.3 *(2 puntos)* Calcular las ecuaciones parámetricas de la recta que pasa por el punto $P(3, -1, 0)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 5 + 3\lambda \end{cases}$$

(Modelo 2004 - Opción B)

Problema 2.5.4 *(3 puntos)* Se consideran la recta y los planos siguientes:

$$r : \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} ; \quad \pi_1 : 2 - 3x + 2y - z = 0; \quad \pi_2 : 3 + 2x + 2y - 2z = 0$$

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.

b) (1 punto) Determinar la posición relativa de los dos planos.

c) (1 punto) Calcular la distancia de r a π_2.

(Junio 2004 - Opción A)

Problema 2.5.5 *(3 puntos)*

a) (2 puntos) Determinar la posición relativa de los siguientes planos, para los distintos valores del parámetro k:

$$\begin{array}{rrrrr} \pi_1: & 2x+ & 3y+ & kz= & 3 \\ \pi_2: & x+ & ky- & z= & -1 \\ \pi_3: & 3x+ & y- & 3z= & -k \end{array}$$

b) (1 punto) En los casos en que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta.

(Junio 2004 - Opción B)

Problema 2.5.6 *(3 puntos)* Sea el plano $\pi: x+2y+3z=6$.

a) (1 punto) Hallar el punto simétrico del $(0,0,0)$ respecto de π.

b) (1 punto) Hallar el plano perpendicular a π que contiene a OZ.

c) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de π con los ejes de coordenados.

(Septiembre 2004 - Opción A)

Problema 2.5.7 *(2 puntos)*

a) (1,5 puntos) Hallar el conjunto formado por los puntos del plano $z=0$ que distan 3 unidades del plano de ecuación $2x-y+2z=4$.

b) (0,5 puntos) Describir dicho conjunto.

(Septiembre 2004 - Opción B)

Problema 2.5.8 *(2 puntos)* El plano $\pi: 2x-2y+z=-2$ determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen.

b) (0,5 puntos) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a dicha altura.

c) (1 punto) Calcular el área de la cara del tetraedro que está contenida en el plano π.

(Septiembre 2004 - Opción B)

2.6. Año 2005

Problema 2.6.1 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(-1,1,1)$, $B(1,-3,-1)$ y $C(1,0,3)$, hallar las coordenadas de un punto D perteneciente a la recta:

$$r: x-1 = \frac{y-1}{-1} = z-1$$

de manera que el tetraedro $ABCD$ tenga un volumen igual a 2.
(Modelo 2005 - Opción A)

Problema 2.6.2 *(3 puntos)* Se considera la recta: $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-5}{2}$ y la familia de rectas dependientes del parámetro m:

$$s: \left\{ \begin{array}{l} 3x - y = 8 - 12m \\ y - 3z = 7 - 3m \end{array} \right.$$

a) (2 puntos) Determinar el valor de m para el que las dos rectas r y s se cortan.

b) (1 punto) Para el caso de $m = 0$, hallar la distancia entre las dos rectas.

(Modelo 2005 - Opción B)

Problema 2.6.3 *(3 puntos)* Dado el punto $P(1,3,-1)$, se pide:

a) (1 punto) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x,y,z)$ cuya distancia a P sea igual a 3.

b) (2 puntos) Calcular los puntos de la recta

$$\left\{ \begin{array}{lrr} x = & & 3\lambda \\ y = & 1+ & \lambda \\ z = & 1- & 4\lambda \end{array} \right.$$

cuya distancia a P es igual 3.

(Junio 2005 - Opción A)

Problema 2.6.4 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4} \quad s: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$$

a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta t que corta a las dos y es perpendicular a ambas.

b) (1,5 puntos) Calcular la mínima distancia entre r y s.

(Junio 2005 - Opción B)

Problema 2.6.5 *(2 puntos)* Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos

$$\begin{array}{l} \pi_1 : x + z = \lambda \\ \pi_2 : 4x + (\lambda - 2)y + (\lambda + 2)z = \lambda + 2 \\ \pi_3 : 2(\lambda + 1)x - (\lambda + 6)z = -\lambda \end{array}$$

(Septiembre 2005 - Opción A)

Problema 2.6.6 *(2 puntos)* Se consideran las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{rrr} x- & y & = 3 \\ x+ & y & -z = 0 \end{array} \right. , \quad s : \left\{ \begin{array}{rrr} x- & & z = 4 \\ 2x- & y & = 7 \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Hallar la recta t, perpendicular a r y a s, que pasa por el origen.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta s con la recta t obtenida en el apartado anterior.

(Septiembre 2005 - Opción A)

Problema 2.6.7 *(3 puntos)* Se considera la familia de planos:

$$mx + (m - 2)y + 3(m + 1)z + (m + 1) = 0$$

siendo m un parámetro real.

Se pide:

a) (1 punto) Determinar la recta común a todos los planos de la familia.

b) (1 punto) Determinar el plano de esta familia que pasa por el punto $P(1, 1, 0)$.

c) (1 punto) Determinar el plano de esta familia que es paralelo a la recta:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x- & & 2z+ & 1 = 0 \\ - & y+ & z+ & 1 = 0 \end{array} \right.$$

(Septiembre 2005 - Opción B)

2.7. Año 2006

Problema 2.7.1 *(2 puntos)* Un punto de luz situado en $P(0,1,1)$ proyecta la sombra de la recta:

$$x = y = -z$$

sobre el plano $\pi : x - z = 0$.

Calcular las coordenadas del punto de esta proyección que pertenece al plano $z = 1$.
(Modelo 2006 - Opción A)

Problema 2.7.2 *(2 puntos)* Se consideran las rectas:

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-5}{2} \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + \lambda \\ y = -4 + 3\lambda \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $P(2,-1,1)$ y cuyo vector director es perpendicular a lo vectores directores de las dos rectas anteriores.
(Modelo 2006 - Opción A)

Problema 2.7.3 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{1} \qquad s : \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

b) (1,5 puntos) Calcular la distancia de s al plano anterior.

(Modelo 2006 - Opción B)

Problema 2.7.4 *(3 puntos)* Sean las rectas:

$$r : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \qquad \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

(Junio 2006 - Opción A)

a) (1,5 punto) Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.

b) (1,5 puntos) Hallar la recta perpendicular común a las rectas r y s.

(Junio 2006 - Opción A)

Problema 2.7.5 *(2 puntos)* Sea r la recta que pasa por el origen de coordenadas O y tiene como vector director $\overrightarrow{v} = (4, 3, 1)$. Hallar un punto P contenido en dicha recta, tal que si se llama Q a su proyección sobre el plano $\pi : z = 0$, el triángulo OPQ tenga área 1.
(Junio 2006 - Opción B)

Problema 2.7.6 *(3 puntos)* Se consideran los puntos $A(0, 1, 0)$ y $B(1, 0, 1)$. Se pide:

a) (1 punto) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x, y, z)$ que equidistan de A y B.

b) (0,5 puntos) Determinar la ecuación que verifican los puntos $X(x, y, z)$ cuya distancia a A es igual a la distancia de A a B.

c) (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta formada por los puntos $C(x, y, z)$ del plano $x + y + z = 3$ tales que el triángulo ABC es rectángulo con el ángulo recto en el vértice A.

(Septiembre 2006 - Opción A)

Problema 2.7.7 *(3 puntos)* Un plano π corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, \lambda, 0)$ y $C(0, 0, 4)$. Se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar el valor de $\lambda > 0$ de manera que el volumen del tetraedro $OABC$ (donde O es el origen), sea 2.

b) (1,5 puntos) Para el valor de λ obtenido en el apartado 1.), calcular la longitud de la altura del tetraedro $OABC$ correspondiente al vértice O.

(Septiembre 2006 - Opción B)

2.8. Año 2007

Problema 2.8.1 *(2 puntos)* Se considera la recta $\left\{\begin{array}{c} x - y = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{array}\right.$ y el punto $P(1, 1, 1)$. Dado el punto $Q(0, 0, 0)$ de r, hallar todos los puntos A contenidos en r tales que el triángulo de vértices A, P y Q tenga área 1.
(Modelo 2007 - Opción A)

Problema 2.8.2 *(2 puntos)*

a) (1,5 puntos) Calcula la ecuación general de un plano π_1 que contiene a la recta

$$r : \left\{\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

y es perpendicular al plano $\pi_2 : 2x + y - z = 2$.

b) (0,5 puntos) Determinar la ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

(Modelo 2007 - Opción A)

Problema 2.8.3 *(3 puntos)* Se consideran el punto $P(1,0,1)$ y la recta:

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

y el plano $\pi : x + y + z = 0$. Se pide:

a) (1,5 puntos) Obtener un punto P', simétrico de P respecto del plano π.

b) (1,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta s que contiene al punto P, corta a la recta r y es paralela al plano π.

(Modelo 2007 - Opción B)

Problema 2.8.4 *(3 puntos)* Dados el punto $A(1,-2,-3)$, la recta $r : \left\{\begin{array}{l} x+y+1=0 \\ z=0 \end{array}\right.$ y el plano $\pi : x - 2y - 3z + 1 = 0$, se pide:

a) (1,5 puntos) Ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.

b) (1,5 puntos) Ecuación de la recta que pasa por A, corta a r y es paralela a π.

(Junio 2007 - Opción A)

Problema 2.8.5 *(3 puntos)* Sean los puntos

$$A(\lambda, 2, \lambda), \quad B(2, -\lambda, 0), \quad C(\lambda, 0, \lambda + 2)$$

a) (1 punto) ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos A, B y C están alineados?

b) (1 punto) Comprobar que si A, B y C no están alineados el triángulo que forman es isósceles.

c) (1 punto) Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para el valor $\lambda = 0$ y hallar la distancia de este plano al origen coordenadas.

(Junio 2007 - Opción B)

Problema 2.8.6 *(2 puntos)* Hallar los puntos de la recta $r:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z+1}{1}$ cuya distancia al plano $\pi: 2x-y+2z+1=0$ es igual a 1.
(Septiembre 2007 - Opción A

Problema 2.8.7 *(2 puntos)* Sea consideran las rectas:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x-y=3\\ x+y-z=0\end{array}\right. \qquad s:\left\{\begin{array}{l} x-z=4\\ 2x-y=7\end{array}\right.$$

Hallar la ecuación continua de la recta que contiene al punto $P(2,-1,2)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.
(Septiembre 2007 - Opción A)

Problema 2.8.8 *(3 puntos)* Sean las rectas

$$r:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{2},\quad s:\left\{\begin{array}{l} x-3y-5=0\\ x-3z-8=0\end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

b) (1,5 puntos) Calcular la distancia entre el plano π y la recta s.

(Septiembre 2007 - Opción B)

2.9. Año 2008

Problema 2.9.1 *(3 puntos)* Sean los puntos $A(1,0,2)$ y $B(1,1,-4)$.

a) (1 punto) Determinar las coordenadas de los puntos P y Q que divide al segmento AB en tres partes iguales.

b) (1 punto) Si P es el punto del apartado anterior más próximo al punto A, determinar la ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a la recta AB.

c) (1 punto) Determinar la posición relativa del plano π y la recta

$$r:\frac{x-3}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{1}$$

(Modelo 2008 - Opción A)

Problema 2.9.2 *(2 puntos)* Hallar los puntos de la recta $r: \left\{ \begin{array}{c} 2x+z=0 \\ x-y+z=3 \end{array} \right.$ cuya distancia al plano $\pi: 3x+4y=4$ es igual a $\dfrac{1}{3}$.
(Modelo 2008 - Opción B)

Problema 2.9.3 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(1,3,-2)$, $B(2,2k+1,k)$ y $C(k+1,4,3)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar para qué valor de k el triángulo BAC es rectángulo, con el ángulo recto en el vértice A.

b) (1 punto) Para el valor $k=0$ hallar el área del triángulo ABC.

(Modelo 2008 - Opción B)

Problema 2.9.4 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} x-ay=2 \\ ay+z=1 \end{array} \right. \quad s: \left\{ \begin{array}{l} x-z=1 \\ y+z=3 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Discutir la posición relativa de las dos rectas r, s según los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos) Si $a=1$, calcular la distancia mínima entre las dos rectas r y s.

(Junio 2008 - Opción A)

Problema 2.9.5 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(0,0,1)$, $B(1,0,-1)$, $C(0,1,-2)$ y $D(1,2,0)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios.

b) (1 punto) Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.

c) (0,5 puntos) Hallar la distancia del punto D al plano π.

(Junio 2008 - Opción B)

Problema 2.9.6 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi: 3x+2y-z+10=0$ y el punto $P(1,2,3)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

b) (0,5 puntos) Hallar el punto Q intersección de π con r.

c) (0,5 puntos) Hallar el punto R intersección de π con el eje OY.

d) (0,5 puntos) Hallar el área del triángulo PQR

(Junio 2008 - Opción B)

Problema 2.9.7 *(2 puntos)* Dados los puntos $P(1,1,3)$ y $Q(0,1,0)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R. Describir dicho conjunto de puntos.

b) (1 punto) Hallar todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican $\text{dist}(P,S) = 2\text{dist}(Q,S)$, donde "dist" significa distancia.

(Septiembre 2008 - Opción A)

Problema 2.9.8 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}, \quad s: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$$

hallar la ecuación de la recta t perpendicular común a ambas.
(Septiembre 2008 - Opción A)

Problema 2.9.9 *(3 puntos)* Dados el plano:

$$\pi_1 : x + y + z = 1$$

y la recta:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar el punto P determinado por la intersección de r con π_1.

b) (2 puntos) Hallar el plano π_2 paralelo a π_1 y tal que el segmento de la recta r comprendido entre los planos π_1, π_2 tenga longitud $\sqrt{29}$ unidades.

(Septiembre 2008 - Opción B)

2.10. Año 2009

Problema 2.10.1 *(3 puntos)* Dados el plano $\pi : x + 2y - z = 2$, la recta:

$$r : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{4}$$

y el punto $P(-2, 3, 2)$, perteneciente al plano π, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar la posición relativa de π y r.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta t contenida en π, que pasa por el punto P y que corta perpendicularmente a r.

c) (1,5 puntos) Sea Q el punto intersección de r y t. Si s es la recta perpendicular al plano π y que contiene a P, y R es un punto cualquiera de s, probar que la recta determinada por R y Q es perpendicular a r.

(Modelo 2009 - Opción A)

Problema 2.10.2 *(3 puntos)* Dados el punto $P(1, -1, 2)$ y el plano $\pi : 2x - y + z = 11$, se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar el punto Q de intersección del plano π con la recta perpendicular a π que pasa por P. Hallar el punto simétrico del punto P respecto del plano π.

b) (1,5 puntos) Obtener la ecuación del plano paralelo al plano π que contiene al punto H que se encuentra a $5\sqrt{6}$ unidades del punto P en el sentido del vector $\overrightarrow{PQ}$.

(Modelo 2009 - Opción B)

Problema 2.10.3 *(3 puntos)* Dado el plano $\pi : x + 3y + z = 4$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto simétrico P del punto $O(0, 0, 0)$ respecto del plano π.

b) (1 punto) Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano $z = 0$.

c) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π, y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

(Junio 2009 - Opción A)

Problema 2.10.4 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}, \quad s : \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1},$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

b) (1 punto) Determinar la distancia entre las rectas r y s.

c) (1 punto) Estudiar si la recta t paralela a r y que pasa por $O(0,0,0)$ corta a la recta s.

(Junio 2009 - Opción B)

Problema 2.10.5 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{a}, \quad s: \frac{x-3}{b} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1},$$

determinar los valores de los parámetros a, b para los cuales las rectas r, s se cortan perpendicularmente.
(Septiembre 2009 - Opción A)

Problema 2.10.6 *(2 puntos)* Dado el plano $\pi: 2x - y + 2z + 1 = 0$ hallar las ecuaciones de los planos paralelos a π que se encuentran a 3 unidades de π.
(Septiembre 2009 - Opción A)

Problema 2.10.7 *(3 puntos)* Dada la recta:

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

y el plano $\pi: x + y - 2z + 1 = 0$, hallar la ecuación de la recta s simétrica de la recta r respecto del plano π.
(Septiembre 2009 - Opción B)

Problema 2.10.8 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{1}, \quad s: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-\lambda}{2}$$

se pide:

a) (1 punto) Determinar para qué valor, o valores, del parámetro λ las rectas r, s se cortan en un punto.

b) (1 punto) Para $\lambda = 23$ calcular las coordenadas del punto P intersección de las rectas r, s.

c) (1 punto) Para $\lambda = 23$ hallar la ecuación general del plano π determinado por las rectas r y s.

(Septiembre 2009 - Opción A (Reserva))

Problema 2.10.9 *(3 puntos)* Se pide:

a) (1 punto) Demostrar que si tres vectores v_1, v_2 y v_3 son perpendiculares entre sí entonces se verifica que:

$$|\overrightarrow{v_1} + v\overrightarrow{_2} + \overrightarrow{v_3}|^2 = |\overrightarrow{v_1}|^2 + |\overrightarrow{v_2}|^2 + |\overrightarrow{v_3}|^2,$$

donde $|w|$ denota módulo del vector $\overrightarrow{w}$

b) (1 punto) Dados los vectores $\overrightarrow{v_1}(1, 1, -1)$, $\overrightarrow{v_2} = (1, 0, 1)$ hallar un vector $\overrightarrow{v_3}$ tal que:

$$|\overrightarrow{v_1} + v\overrightarrow{_2} + \overrightarrow{v_3}|^2 = |\overrightarrow{v_1}|^2 + |\overrightarrow{v_2}|^2 + |\overrightarrow{v_3}|^2.$$

c) (1 punto) Dado el vector $\overrightarrow{v}(1, 2, 3)$, hallar los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ que cumplan las tres condiciones siguientes:

a) $\overrightarrow{v_1}$ tiene sus tres coordenadas iguales y no nulas;

b) $\overrightarrow{v_1}$ es perpendicular a $\overrightarrow{v_2}$;

c) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$

(Septiembre 2009 - Opción B (Reserva))

2.11. Año 2010

Problema 2.11.1 *(3 puntos)* Se consideran las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

$$s \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

a) (1,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta t que corta a r y s, y que contiene al origen de coordenadas.

b) (1,5 puntos) Determinar la mínima distancia entre las rectas r y s.

(Modelo 2010 - Opción A)

Problema 2.11.2 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(2, 2, 3)$ y $B(0, -2, 1)$, hallar el punto, o los puntos, de la recta:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{2}$$

que equidistan de A y de B.
(Modelo 2010 - Opción B)

Problema 2.11.3 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv 5x-4y+z=0$ y la recta:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

contenida en π, obtener la recta s contenida en π que es perpendicular a r, y que pasa por el origen de coordenada $O(0,0,0)$.
(Modelo 2010 - Opción B)

Problema 2.11.4 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-1}, \quad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$$

se pide:

a) (2 puntos) Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s

b) (1 puntos) Calcular la mínima distancia entre las rectas r y s.

(General-Junio 2010 - Opción A)

Problema 2.11.5 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}, \quad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x+z=3 \\ 2x-y=2 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano π determinado por r y s.

b) (1 punto) Hallar la distancia desde el punto $A(0,1,-1)$ a la recta s.

(General-Junio 2010 - Opción B)

Problema 2.11.6 *(2 puntos)* Sea el plano π que contiene a los puntos $P(1,0,0)$, $Q(0,2,0)$ y $R(0,0,3)$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos P, Q y R.

b) (1 punto) Calcular las coordenadas del punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π.

(General-Junio 2010 - Opción B)

Problema 2.11.7 *(3 puntos)* Dadas la recta:

$$r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$$

y el punto $P(2,0,-1)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta r.

b) (2 puntos) Hallar las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de la recta r.

(Específica-Junio 2010 - Opción A)

Problema 2.11.8 *(3 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv\ 2x + ay + 4z + 25 = 0$ y la recta:

$$r \equiv x + 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{5}$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular los valores de a para los que la recta r está contenida en el plano π.

b) (1 punto) Para el valor de $a = -2$, hallar el punto (o los puntos) que pertenecen a la recta perpendicular a π que pasa por $P(-3/2, 0, -11/2)$, y que dista (o distan) $\sqrt{6}$ unidades de π.

c) (1 punto) Para $a = -2$, halla el seno del ángulo que forman r y π.

(Específica-Junio 2010 - Opción B)

Problema 2.11.9 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ z = 3 \end{array} \right. \quad r_2 \equiv \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Hallar la ecuación de la recta t que corta a r_1 y r_2 y es perpendicular a ambas.

b) (1 puntos). Hallar la mínima distancia entre las rectas r_1 y r_2.

(General-Septiembre 2010 - Opción A)

Problema 2.11.10 *(3 puntos)* Dados el plano

$$\pi_1 \equiv\ 2x - 3y + z = a$$

y el plano π_2 determinado por el punto $P(0, 2, 4)$ y los vectores $v_1 = (0, 2, 6)$ y $v_2 = (1, 0, b)$, se pide:

a) (1 punto). Calcular los valores de a y b para que π_1 y π_2 sean paralelos.

b) (1 punto). Para $a = 1$ y $b = 0$ determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2.

c) (1 punto). Para $a = 4$ y $b = -2$ determinar los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2.

(General-Septiembre 2010 - Opción B)

Problema 2.11.11 *(3 puntos)* Se consideran las rectas:

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

Determinar la ecuación de la recta t que pasa por el punto $P(0, 1, -2)$ y corta a las rectas r y s.
(Específica-Septiembre 2010 - Opción A)

Problema 2.11.12 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \begin{cases} 2x + y - z = -2 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \qquad s : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{2}$$

Se pide:

a) (1 punto). Dados los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(a, 3, -3)$, determinar el valor de a para que la recta t que pasa por los puntos A y B, sea paralela a s.

b) (1 punto). Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

(Específica-Septiembre 2010 - Opción B)

Problema 2.11.13 *(2 puntos)* Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos:

$$\pi_1 : 5x - y - 7z = 1, \quad \pi_2 : 2x + 3y + z = 5$$

(Específica-Septiembre 2010 - Opción B

2.12. Año 2011

Problema 2.12.1 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}, \quad s \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{1}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de la rectas r y s.

b) (1 punto). Determinar la ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s.

(Modelo 2011 - Opción A)

Problema 2.12.2 *(2 puntos)* Dados los planos $\alpha \equiv 2x + y + 2z + 1 = 0$ y $\beta \equiv x - 2y + 6z = 0$, se pide:

a) (1 punto). Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r determinada por la intersección de α con β.

b) (1 punto). Determinar el plano γ que es paralelo al plano α y pasa por el punto $(\sqrt{2}, 1, 0)$

(Modelo 2011 - Opción A)

Problema 2.12.3 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(1, -3, 0)$, $B(3, 1, -2)$,$C(7, 2, 3)$, $D(5, -2, 5)$ y $E(1, 0, 2)$, se pide:

a) (1 punto). Demostrar que los puntos A, B, C y D son coplanarios.

b) (1 punto). Demostrar que el polígono $ABCD$ es un paralelogramo y calcular su área.

c) (1 punto). Hallar la distancia del punto E al plano π determinado por los puntos A, B, C y D

(Modelo 2011 - Opción B)

Problema 2.12.4 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos). Hallar el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas

$$r_1 \equiv \ x = y = z, \ \ r_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. , \ \ r_3 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

con el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24$.

b) (1,5 puntos). Hallar la recta s que corta perpendicularmente a las rectas

$$r_4 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-2}, \ \ r_5 \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

(Junio 2011 - Opción A)

Problema 2.12.5 *(3 puntos)* Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + y - 2z = 1, \ \ \pi_2 \equiv x - y + 2z = 1$$

se pide:

a) (0,5 puntos). Estudiar su posición relativa.

b) (1,5 puntos). En caso de que los planos sean paralelos hallar la distancia entre ellos, en caso de que se corten, hallar un punto y un vector de dirección de la recta que determinan.

(Junio 2011 - Opción B)

Problema 2.12.6 *(2 puntos)* Se pide:

a) (0,75 puntos). Hallar la ecuación del plano π_1 que pasa por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,1)$.

b) (0,75 puntos). Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene al punto $P(1,2,3)$ y es perpendicular al vector $\overrightarrow{v}=(-2,1,1)$.

c) (0,5 puntos). Hallar el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P.

(Junio 2011 - Opción B)

Problema 2.12.7 *(3 puntos).* Dados los planos

$$\pi_1 : 2x+3y+z-1=0; \quad \pi_2 : 2x+y-3z-1=0,$$

y la recta

$$r : \frac{x-1}{2}=y+1=\frac{z+2}{2};$$

se pide:

a) (1 punto). El punto o puntos de r que equidistan de π_1 y π_2.

b) (1 punto). El volumen del tetraedro que π_1 forma con los planos coordenados XY, XZ e YZ.

c) (1 punto). La proyección ortogonal de r sobre el plano π_2.

(Septiembre 2011 - Opción A)

Problema 2.12.8 *(3 puntos).* Dado el punto $P(0,1,1)$ y las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}, \quad s : \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1'5 puntos). Determinar las coordenadas del punto simétrico de P respecto a r.

b) (1'5 puntos). Determinar la recta que pasa por el punto P, tiene dirección perpendicular a la recta r y corta a la recta s.

(Septiembre 2011 - Opción B)

2.13. Año 2012

Problema 2.13.1 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(1,-1,2)$, $B(2,0,-1)$, $C(0,1,3)$, se pide:

a) (2 puntos). Hallar todos los puntos que equidistan de A, B y C. ¿Cuales de ellos pertenecen al plano $\pi : 2x + 2y + 2z + 1 = 0$?

b) (1 punto). Hallar la ecuacion del plano que pasa por A, B y C.

(Modelo 2012 - Opción A)

Problema 2.13.2 *(3 puntos)* Dados los planos de ecuaciones:

$$\pi : x - 2y + 2z + 4 = 0, \quad \pi' = 2x + 2y - z - 2 = 0$$

se pide:

a) (1 punto). Obtener la ecuación en forma continua de la recta que determinan.

b) (1 punto). Hallar todos los puntos que equidistan de π y π'.

(Modelo 2012 - Opción B)

Problema 2.13.3 *(2 puntos)* Dadas las rectas

$$r : \frac{x+3}{-6} = \frac{y-9}{4} = \frac{z-8}{4}, \quad s : \frac{x-3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{x-8}{-2}$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar la posicion relativa de las rectas r y s.

b) (1 punto). Hallar la distancia mínima entre r y s.

Problema 2.13.4 *(3 puntos)* Dados los puntos $P_1(1,3,-1)$, $P_2(a,2,0)$, $P_3(1,5,4)$ y $P_4(2,0,2)$, se pide:

a) (1 punto). Hallar el valor de a para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.

b) (1 punto). Hallar los valores de a para que el tetraedro con vértices en P_1, P_2, P_3, P_4 tenga volumen igual a 7.

c) (1 punto). Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3.

(Junio 2012 - Opción A)

Problema 2.13.5 *(3 puntos)* Dadas las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z}{2}, \quad r_2 \equiv \left\{ \begin{array}{c} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 5 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar su posición relativa.

b) (2 puntos). Hallar la mínima distancia de r_1 a r_2.

(Junio 2012 - Opción B)

Problema 2.13.6 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Dados los puntos $P(2, 1, -1)$, $Q(1, 0, 2)$ y la recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 \end{array} \right.$$

determinar los puntos de r que equidistan de P y Q.

b) (1 punto). Determinar la ecuación del plano π que pasa por el punto Q y es perpendicular a r.

(Junio 2012 (coincidente)- Opción A)

Problema 2.13.7 *(2 puntos)* Una de las caras del paralelepípedo H tiene vertices en los puntos $A(4, 2, 8)$, $B(6, 4, 12)$, $C(6, 0, 10)$ y $D(8, 2, 14)$.

a) (1 punto). Si el punto $E(6, 8, 28)$ es otro de los vertices, hallar el volumen de H.

b) (1 punto). Hallar el punto E' simétrico de E respecto del plano que contiene a la cara $ABCD$.

(Junio 2012 (coincidente)- Opción A)

Problema 2.13.8 *(3 puntos)* Dadas la recta r y la familia de rectas s, mediante

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{c} x + 2y = -3 \\ z = 1 \end{array} \right. \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{c} 2x + 2y + z = a \\ x + z = 0 \end{array} \right.,$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Hallar el valor de a para que ambas rectas se corten. Calcular el punto de corte.

b) (1,5 puntos). Hallar la ecuación del plano determinado por ambas rectas cuando estas se cortan.

(Junio 2012 (coincidente)- Opción B)

Problema 2.13.9 *(2 puntos)* Se dan la recta r y el plano π, mediante

$$r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}, \quad \pi \equiv 2x + y - 2z - 7 = 0$$

Obtener los puntos de la recta cuya distancia al plano es igual a uno.
(Septiembre 2012 - Opción A)

Problema 2.13.10 *(2 puntos)* Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}, \quad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y = 4 \\ 2x + z = 4 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(2, 3, 4)$ y es paralelo a las rectas r y s.

b) (0,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta que pasa por $B(4, -1, 2)$ y es perpendicular al plano hallado anteriormente.

(Septiembre 2012 - Opción A)

Problema 2.13.11 *(3 puntos)* Dado el punto $P(2, 1, -1)$, se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar el punto P' simétrico de P respecto del punto $Q(3, 0, 2)$.

b) (1,25 puntos). Hallar el punto P'' simétrico de P respecto de la recta $r \equiv x - 1 = y - 1 = z$.

c) (1,25 puntos). Hallar el punto P''' simétrico de P respecto del plano $\pi \equiv x + y + z = 3$.

(Septiembre 2012 - Opción B)

2.14. Año 2013

Problema 2.14.1 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Hallar el punto de corte entre el plano $\pi_1 \equiv 6x - y + 3z = -2$ y la recta r que pasa por el punto $P(1; 2; 0)$ y es perpendicular al plano $\pi_2 \equiv 2x + 3y - z = 8$.

b) (1 punto). Hallar el punto común a los tres planos π_3; π_4; π_5 siguientes:

$$\pi_3 \equiv 5x + 2y + 7z = 4; \quad \pi_4 \equiv x + 2y - 3z = 10$$

y π_5 el plano definido por las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+3}{3} = z+3; \quad r_2 \equiv x+2 = y = \frac{z+7}{2}$$

(Modelo 2013 - Opción A)

Problema 2.14.2 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x - y + 2z = 1$ y la recta

$$r \equiv \frac{x}{-6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar la posición relativa entre el plano π y la recta r.

b) (1 punto). Determinar el plano que contenga a r y pase por $P(1; 1; 1)$.

(Modelo 2013 - Opción A)

Problema 2.14.3 *(3 puntos)*

a) (1 punto). Hallar, si existe, el punto de corte de las rectas

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{c} x - y = 2 \\ x + y + z = 3 \end{array} \right. ; \quad r_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right.$$

b) (1 punto). Determinar el valor de a para que los planos

$$\begin{array}{cc} \pi_1 : x + 2y + z = 3 & \pi_2 : 2x + 3y - z = 5 \\ \pi_3 : 2x + 2y + 4z = 3 & \pi_4 : x + 3y = a \end{array}$$

tengan un único punto en común.

c) (1 punto). Hallar la recta paralela a los planos

$$\pi_5 : 2x + 5y - z = 2; \quad \pi_6 : 6x - y + z = 8$$

que pasa por el punto $P(1; 5; -3)$.

(Modelo 2013 - Opción B)

Problema 2.14.4 *(3 puntos)* Dados el punto $P(-1,0,2)$ y las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - z = 1 \\ y - z = -1 \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar la posición relativa de r y s.

b) (1 punto). Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y corta a r y s.

c) (1 punto). Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s.

(Junio 2013 - Opción A)

Problema 2.14.5 *(2 puntos)* Dados el punto $P(1,0,-1)$, plano $\pi \equiv 2x - y + z - 1 = 0$ y la recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} -2x - y - 1 = 0 \\ 3x - z - 3 = 0 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Determinar la ecuación del plano que pasa por P es paralelo a r y perpendicular al plano π.

b) (0,5 puntos). Hallar el ángulo entre r y π.

(Junio 2013 - Opción B)

Problema 2.14.6 *(3 puntos)* Dada la familia de rectas $r_a : \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ x - ay - 3 = 0 \end{array} \right.$, (variando a en $\mathbb{R}$ se obtiene toda la familia), se pide:

a) (0,75 puntos). Probar que todas las rectas de la familia se cortan en un mismo punto y calcular dicho punto.

b) (1,5 puntos). Dado el punto $P(0,0,1)$, calcular la ecuación del plano π_a que pasa por P y contiene a la recta r_a. Probar que la recta que pasa por P y por el punto $Q(3,0,0)$ está contenida en el plano π_a para todos los valores de a.

c) (0,75 puntos). Determinar para qué valores de a la distancia del punto $O(0,0,0)$ al plano de ecuación $x - ay + 3z = 3$ es $1/2$.

(Junio 2013 (coincidente)- Opción A)

Problema 2.14.7 *(3 puntos)* Dadas las rectas: $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 4x+y+5z=0 \\ 5y-3z=0 \end{array} \right.$ y $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} y-z-3=0 \\ x-y-z+1=0 \end{array} \right.$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa entre ellas.

b) (1 punto). Hallar la mínima distancia entre r y s.

c) (1 punto). Hallar el punto simétrico del origen respecto de la recta s.

(Junio 2013 (coincidente)- Opción B)

Problema 2.14.8 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(2;-2;1)$, $B(0;1;-2)$, $C(-2;0;-4)$, $D(2;-6;2)$, se pide:
se pide:

a) (1 punto) Probar que el cuatrilátero $ABCD$ es un trapecio (tiene dos lados paralelos) y hallar la distancia entre los dos lados paralelos.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo ABC.

(Septiembre 2013 - Opción A)

Problema 2.14.9 *(2 puntos)* Dados el punto $P(1;2;-1)$ y el plano $\pi \equiv x+2y-2z+2=0$, sea S la esfera que es tangente al plano π en un punto P' de modo que el segmento PP' es uno de sus diámetros. Se pide:

a) (1 punto). Hallar el punto de tangencia P'.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de S.

(Septiembre 2013 - Opción A)

Problema 2.14.10 *(3 puntos)* Sean r_A la recta con vector dirección $(1;\lambda;2)$ que pasa por el punto $A(1;2;1)$, r_B la recta con vector dirección $(1;1;1)$ que pasa por $B(1;-2;3)$, y r_C la recta con vector dirección $(1;1;-2)$ que pasa por $C(4;1;-3)$. Se pide:

a) (1 punto). Hallar λ para que las rectas r_A y r_B se corten.

b) (1,5 puntos). Hallar λ para que las rectas r_A sea paralela al plano definido por r_B y r_C.

c) (0,5 puntos). Hallar el ángulo que forman r_B y r_C.

(Septiembre 2013 - Opción B)

Problema 2.14.11 *(3 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x-2y+z=6$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{m} = z$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y π según los valores de m.

b) (1 punto). Para $m = -2$, determinar el plano que contiene a r y es perpendicular a π.

c) (1 punto). Para $m = -2$, determinar el punto de corte de r y π.

(Septiembre 2013 (coincidente)- Opción A)

Problema 2.14.12 *(3 puntos)* Dado el haz de planos de $\mathbb{R}^3$ definido por: $\pi_a \equiv x + 2y + az - 1 = 0$ (al variar a en $\mathbb{R}$ se obtienen todos los planos del haz) y la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = y + 3 = \dfrac{z}{2}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar para qué valores de a la recta r es paralela al plano π_a .

b) (1 punto). Razonar si hay algún valor de a tal que la recta r es perpendicular al plano π_a, y en caso afirmativo calcular dichos valores de a.

c) (1 punto). Si $a = 1$, obtener los puntos de la recta r cuya distancia al plano π_1 es $\sqrt{6}$

(Septiembre 2013 (coincidente)- Opción B)

2.15. Año 2014

Problema 2.15.1 *(3 puntos)* Dados el punto $P(1; 1; 1)$ y los planos

$$\pi_1 \equiv 3x + ay + z = 0; \quad \pi_2 \equiv ax + y + 2z = 0; \quad \pi_3 \equiv x + y - z = 0;$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular los valores de a para los que los planos se cortan en una recta.

b) (1 punto). Para $a = 2$, hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

c) (1 punto). Hallar el punto P' proyección de P sobre el plano π_3.

(Modelo 2014 - Opción A)

Problema 2.15.2 *(3 puntos)*

a) (1 punto) Determinar si se puede construir un triángulo que tenga dos de sus lados sobre la rectas

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = -6 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right. \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y - 4 = 0 \\ 2x + z - 6 = 0 \end{array} \right.$$

b) (2 puntos) Encontrar la ecuación de la recta perpendicular común a las dos rectas anteriores.

(Modelo 2014 - Opción B)

Problema 2.15.3 *(3 puntos)* Dados el punto $P(1, 0, 1)$, el plano $\pi \equiv x + 5y - 6z = 1$ y la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$, se pide:

a) (1 punto). Calcular el punto P' simétrico a P respecto de π.

b) (1 punto). Hallar la distancia de P a r.

c) (1 punto). Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ y las intersecciones de π con los ejes coordenados OX, OY y OZ.

(Junio 2014 - Opción B)

Problema 2.15.4 *(3 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv 2x - y = 2$, y la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{r} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{array} \right.$

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y π.

b) (1 punto). Determinar el plano que contiene a r y es perpendicular a π.

c) (1 punto). Determinar la recta que pasa por $A(-2, 1, 0)$, corta a r, y es paralela a π.

(Junio 2014 - Opción B)

Problema 2.15.5 *(2 puntos)* Dado el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 1$, se pide:

a) (1 punto). Obtener las rectas que pasan por el origen de coordenadas, son paralelas al plano π y cortan al plano $z = 0$ con un ángulo de 45 grados.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de la esfera de centro el origen $O(0, 0, 0)$ que es tangente a π.

(Junio 2014 (coincidente)- Opción A)

Problema 2.15.6 *(2 puntos)* Sean los puntos $A(2,1,0)$ y $B(0,1,-4)$. Se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación del plano π respecto del cual A y B son simétricos.

b) (1 punto). Calcular los puntos situados sobre la recta determinada por A y B que están a $\sqrt{6}$ unidades de distancia de $P(2,-1,1)$.

(Junio 2014 (coincidente)- Opción A)

Problema 2.15.7 *(3 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv 5x - 3y + 4z - 10 = 0$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+6}{1} = \dfrac{z-8}{-3}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la distancia de la recta al plano.

b) (1 punto). Hallar la proyección del punto $P(5,-2,1)$ sobre el plano π.

c) (1 punto). Hallar la proyección del punto $Q(-1,7,3)$ sobre la recta r.

(Junio 2014 (coincidente)- Opción B)

Problema 2.15.8 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(2,0,-2)$, $B(3,-4,-1)$, $C(5,4,-3)$ y $D(0,1,4)$, se pide:

a) (1 punto). Calcular el área del triángulo de vértices A, B y C.

b) (1 punto). Calcular el volumen del tetraedro $ABCD$.

(Septiembre 2014 - Opción A)

Problema 2.15.9 *(2 puntos)* Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + z - 1 = 0, \quad \pi_2 \equiv x + z + 2 = 0, \quad \pi_3 \equiv x + 3y + 2z - 3 = 0,$$

se pide:

a) (1 punto). Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π_1 y π_2.

b) (1 punto). Calcular el seno del ángulo que la recta del apartado anterior forma con el plano π_3.

(Septiembre 2014 - Opción A)

Problema 2.15.10 *(3 puntos)* Dados el plano π y la recta r siguientes:

$$\pi \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0, \quad r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = 1 + t, \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y π.

b) (1 punto). Calcular la distancia entre r y π.

c) (1 punto). Obtener el punto P' simétrico de $P(3, 2, 1)$ respecto del plano π.

(Septiembre 2014 - Opción B)

2.16. Año 2015

Problema 2.16.1 *(2 puntos)* Dadas las rectas: $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$; $s : \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ y = z \end{array} \right.$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa entre ellas. Determinar, en su caso, la intersección entre ambas y el ángulo que forman sus vectores directores.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta perpendicular a las direcciones de r y s, y que pasa por el punto $(0, 0, 0)$.

(Modelo 2015 - Opción A)

Problema 2.16.2 *(2 puntos)* Dados los puntos $P_1(1, -1, 2)$, $P_2(2, -3, 0)$ y $P_3(3, 1, 2)$, se pide:

a) (0,5 puntos). Determinar la ecuación del plano π que contiene los tres puntos.

b) (0,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta r que pasa por P_1 y es perpendicular a π.

c) (1 punto). Hallar la ecuación de las dos superficies esféricas de radio $\sqrt{17}$ que son tangentes al plano π en el punto P_1.

(Modelo 2015 - Opción A)

Problema 2.16.3 *(3 puntos)* Dados el punto $P(1,2,-1)$ y las rectas:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x+y-z=4\\ x-y-3z=-2\end{array}\right. \;\; ; \;\; s:\left\{\begin{array}{l} x=2\\ y=-3\end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular la mínima distancia entre r y s.

b) (1 punto). Determinar el punto P' simétrico de P respecto de r.

c) (1 punto). Determinar los puntos de la recta r que equidistan de los planos XY e YZ.

(Modelo 2015 - Opción B)

Problema 2.16.4 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Dados vectores $\overrightarrow{u}=(2,3,4)$, $\overrightarrow{v}=(-1,-1,-1)$ y $\overrightarrow{w}=(-1,\lambda,-5)$, encontrar los valores de λ que hacen que el paralelepípedo P generado por $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ tenga volumen 6.

b) (1 punto). Obtener la ecuación de la recta incluida en el plano $z=0$, con dirección perpendicular a $\overrightarrow{u}=(2,-1,4)$ y que pasa por el punto $(1,1,0)$.

(Junio 2015 - Opción A)

Problema 2.16.5 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi: x-2y+2z+1=0$ y la superficie esférica $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$, hallar los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano π.

(Junio 2015 - Opción A)

Problema 2.16.6 *(3 puntos)* Dados el punto $P(-4,6,6)$, el origen de coordenadas O, y la recta $r:\left\{\begin{array}{l} x=-4+4\lambda\\ y=8+3\lambda\\ z=-2\lambda\end{array}\right.$ se pide:

a) (1 punto). Determinar un punto Q de la recta r, de modo que su proyección Q' sobre $\overline{OP}$ sea el punto medio de este segmento.

b) (1 punto). Determinar la distancia de P a r.

c) (1 punto). ¿Existe algún punto R de la recta r, de modo que los puntos O, P y R estén alineados? En caso afirmativo, encontrar el punto (o los puntos) con esa propiedad o, en caso negativo, justificar la no existencia.

(Junio 2015 - Opción B)

Problema 2.16.7 *(3 puntos)* Dados la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - y + az = 0 \\ ay - z = 4 \end{array} \right.$, con $a \in \mathbb{R}$, y el plano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$, se pide:

a) (1 punto). Hallar todos los valores de a para los que la recta r es paralela al plano π.

b) (1 punto). Para $a = 2$, determinar la distancia de la recta r al plano π.

c) (1 punto). Para $a = 1$, hallar el seno del ángulo que forman r y π.

(Junio 2015 (coincidente)- Opción A)

Problema 2.16.8 *(2 puntos)* Dadas las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{array} \right.$ y $s \equiv \dfrac{x+1}{2} = y - 5 = -(z+2)$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y s.

b) (1 punto). Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 6, -3)$, está contenida en el plano que determinan r y s y es perpendicular a r.

(Junio 2015 (coincidente)- Opción B)

Problema 2.16.9 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x + y - z + 1 = 0$ y la recta $r \equiv (x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(2, 1, 0)$, se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1, 0, -1)$ y es paralelo a π.

b) (1 punto). Determinar la distancia del origen de coordenadas a la recta r.

c) (0,5 puntos). Determinar la distancia del origen de coordenadas al plano π.

(Junio 2015 (coincidente)- Opción B)

Problema 2.16.10 *(3 puntos)* La recta r pasa por $P(2, -1, 0)$ y tiene vector director $(1, \lambda, -2)$; la recta s pasa por $Q(1, 0, -1)$ y tiene vector director $(2, 4, 2)$.

a) (2 puntos). Calcular $\lambda > 0$ para que la distancia entre r y s sea $\dfrac{9}{\sqrt{59}}$.

b) (1 punto). Calcular λ para que r sea perpendicular a la recta que pasa por P y Q.

(Septiembre 2015 - Opción A)

Problema 2.16.11 *(3 puntos)* Dados los puntos $P(-1,-1,1)$, $Q(1,0,2)$ y los planos

$$\pi_1 \equiv x - z = 0; \quad \pi_2 \equiv my - 6z = 0; \quad \pi_3 \equiv x + y - mz = 0$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular los valores de m para los que los tres planos se cortan en una recta.

b) (1 punto). Para $m = 3$, hallar la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta de intersección de los planos π_1 y π_2.

c) (1 punto). Hallar la distancia entre los puntos Q y P', siendo P' el punto simétrico de P respecto al plano π_1.

(Septiembre 2015 - Opción B)

Problema 2.16.12 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(2,1,1)$, $B(0,0,-3)$ y $P(1,1,1)$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación del plano que contiene a P y a la recta que pasa por A y B.

b) (1 punto). Hallar el área del triángulo formado por A, B y P.

c) (1 punto). Hallar las coordenadas del punto C que forma con A y B un triángulo rectángulo en C, sabiendo que C está en el eje OX y tiene primera coordenada negativa.

(Septiembre 2015 (coincidente)- Opción A)

Problema 2.16.13 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x - y + 2z + 3 = 0$, el punto $A(-1,4,1)$ y la recta $r \equiv x - 1 = y + 1 = \dfrac{z-1}{2}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar el seno del ángulo formado por π y r.

b) (1 punto). Hallar las ecuaciones de la recta s que pasa por A y es perpendicular a π.

(Septiembre 2015 (coincidente)- Opción B)

Problema 2.16.14 *(2 puntos)* Dado el vector $\overrightarrow{v} = (1, 0, -2)$, se pide:

a) (1 punto). Obtener todos los vectores de módulo $\sqrt{5}$ que son perpendiculares al vector $\overrightarrow{v}$ y tienen alguna coordenada nula.

b) (1 punto). Obtener los vectores $\overrightarrow{w}$ tales que $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (2, -3, 1)$ y tienen módulo $\sqrt{6}$.

(Septiembre 2015 (coincidente)- Opción B)

2.17. Año 2016

Problema 2.17.1 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - z = 5$ y la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{array} \right.$ se pide:

a) (1 punto). Determinar la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto $P(1, 0, 1)$.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto $Q(2, 1, 1)$.

(Modelo 2016 - Opción A)

Problema 2.17.2 *(2 puntos)* Dados los puntos $P(1, 1, 3)$ y $Q(0, 1, 1)$, se pide:

a) (1 punto). Hallar todos los puntos R que equidistan de P y Q. Describir dicho conjunto de puntos.

b) (1 punto). Hallar los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifiquen que $d(P, S) = 2d(Q, S)$.

(Modelo 2016 - Opción A)

Problema 2.17.3 *(3 puntos)* Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 3x + 4y - 5z - 7 = 0, \quad \pi_2 \equiv x - 2y + z - 3 = 0$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar un vector unitario cuya dirección sea paralela a los planos π_1 y π_2.

b) (1 punto). Hallar la distancia del punto $P(3, -1, 2)$ al plano π_1.

c) (1 punto). Hallar el coseno del ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

(Modelo 2016 - Opción B)

Problema 2.17.4 *(2 puntos)* Dados los planos $\pi_1 \equiv ax + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + ay + z - 2 = 0$, determine, en caso de que existan, el valor o posibles valores del parámetro a, para cada uno de los siguientes supuestos:

a) (0,5 puntos). Que π_1 y π_2 sean paralelos.

b) (0,5 puntos). Que π_1 y π_2 sean perpendiculares.

c) (1 punto). Que la recta intersección de π_1 y π_2 sea perpendicular al plano $x = y$.

(Junio 2016 - Opción A)

Problema 2.17.5 *(2 puntos)* Dado el punto $P(2, 1, -1)$, determine el punto simétrico de P respecto al plano que pasa por los puntos $A(0, 2, -1)$; $B(1, -3, 0)$ y $C(2, 1, 1)$.
(Junio 2016 - Opción A)

Problema 2.17.6 *(3 puntos)* Se consideran los puntos $A(0, 5, 3)$, $B(0, 6, 4)$, $C(2, 4, 2)$ y $D(2, 3, 1)$ y se pide:

a) (1 punto). Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios y que el polígono $ABCD$ es un paralelogramo.

b) (1 punto). Calcular el área de dicho paralelogramo.

c) (1 punto). Determinar el lugar geométrico de los puntos P cuya proyección sobre el plano $ABCD$ es el punto medio del paralelogramo.

(Junio 2016 - Opción B)

Problema 2.17.7 *(3 puntos)* Dadas las rectas $r_1 \equiv \left\{ \begin{array}{rl} x = & z - 1 \\ y = & 2 - 3z \end{array} \right.$ y $r_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rl} x = & 4 + 5z \\ y = & 4z - 3 \end{array} \right.$, se pide:

a) (1,5 puntos). Estudiar su posición relativa y hallar la distancia entre ellas.

b) (1,5 puntos). Hallar la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a r_1 y a r_2.

(Junio 2016 (coincidente) - Opción A)

Problema 2.17.8 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x - y + 2z + 3 = 0$, el punto $A(1, 1, 3)$ y la recta $r \equiv x = y - 2 = \dfrac{z}{2}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la distancia del punto A a la recta r.

b) (1 punto). Hallar la proyección del punto A sobre el plano π.

(Junio 2016 (coincidente) - Opción B)

Problema 2.17.9 *(2 puntos)* Dada una recta r cuyo vector director es $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ con $a, b, c > 0$, se pide:

a) (1,5 puntos). Si r forma un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con el eje OX y de $\frac{\pi}{4}$ con el eje OY, determinar el ángulo que forma la recta con el eje OZ.

b) (0,5 puntos). Si $\overrightarrow{v} = (1, 5, 3)$, hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta y que contiene al punto $A(3, 0, 1)$.

(Junio 2016 (coincidente) - Opción B)

Problema 2.17.10 *(3 puntos)* Dadas las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x - 2z - 1 = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{array} \right.$ y $s : \{(2 + \lambda, 1 - 3\lambda, \lambda); \lambda \in R\}$

a) (1 punto). Obtener la recta que pasa por el punto $P(1, 0, 5)$ y corta perpendicularmente a r.

b) (1 punto). Obtener el plano que contiene a la recta r y es paralelo a s.

c) (1 punto). Hallar la distancia entre las rectas r y s.

(Septiembre 2016 - Opción A)

Problema 2.17.11 *(2 puntos)* Sea π el plano que contiene a los puntos $A(0, 2, 1)$, $B(1, 0, 1)$ y $C(-1, -2, -1)$. Calcule el volumen del tetraedro que forma el origen de coordenadas con los puntos de intersección de π con cada uno de los ejes coordenados.
(Septiembre 2016 - Opción B)

Problema 2.17.12 *(2 puntos)* Dado el plano $\pi : 3x + 3y + z - 9 = 0$, se pide:

a) (1 punto). Determinar la ecuación del plano perpendicular a π que contiene al eje OX.

b) (1 punto). Determinar el punto del plano π más cercano al origen de coordenadas.

(Septiembre 2016 - Opción B)

2.18. Año 2017

Problema 2.18.1 *(3 puntos)* Dadas las rectas $r \equiv \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ y $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 \end{array} \right.$, se pide:

a) (1,5 puntos) Comprobar que se cruzan y calcular la distancia entre ellas.

b) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

c) (0,5 puntos) Hallar el ángulo que forma la recta r con el plano $y = 0$.

(Modelo 2017 - Opción A)

Problema 2.18.2 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(2, 1, 1)$, $B(0, 0, -3)$, y $P(1, 1, 1)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por A, B y P.

c) (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta que pasa por A y B.

(Modelo 2017 - Opción B)

Problema 2.18.3 *(3 puntos)* Dados los puntos $P(1, -2, 1)$, $Q(-4, 0, 1)$, $R(-3, 1, 2)$, $S(0, -3, 0)$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación del plano que contiene a P, Q y R.

b) (1 punto). Estudiar la posición relativa de la recta r, que pasa por los puntos P y Q, y la recta s, que pasa por R y S.

c) (1 punto). Hallar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R.

(Junio 2017 - Opción A)

Problema 2.18.4 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Determine la distancia entre las rectas

$$r_1 \equiv x = y = z \quad \text{y} \quad r_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{array} \right.$$

b) (1 punto). Obtenga el punto de corte de la recta $s \equiv x = 2 - y = z - 1$ con el plano perpendicular a s, que pasa por el origen.

(Junio 2017 - Opción A)

Capítulo 3

Análisis

3.1. Año 2000

Problema 3.1.1 *(3 puntos)* Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} + 2 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ k & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en $x = 0$?

b) (1 punto) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea derivable en $x = 0$?

c) (1 punto) Determinar sus asíntotas.

(Modelo 2000 - Opción A)

Problema 3.1.2 *(2 puntos)* De una función derivable $f(x)$ se conoce que pasa por el punto $A(-1, -4)$ y que su derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Hallar la expresión de $f(x)$.

b) Obtener la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

(Modelo 2000 - Opción B)

Problema 3.1.3 *(2 puntos)* Se consideran las curvas $y = x^2$ e $y = a$ donde a es un número real comprendido entre 0 y 1 ($0 < a < 1$). Ambas curvas se cortan en un punto (x_0, y_0) con abcisa positiva. Hallar a sabiendo que el área encerrada entre ambas curvas desde $x = 0$ hasta $x = x_0$ es igual a la encerrada entre ellas desde $x = x_0$ hasta $x = 1$.
(Modelo 2000 - Opción B)

Problema 3.1.4 *(3 puntos)* Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$, y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$.

a) (2 puntos) Determinar a, b, c y d.

b) (1 punto) ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

(Junio 2000 - Opción A)

Problema 3.1.5 *(2 puntos)* Sean las funciones:

$$f(x) = x^2 \;\text{ y }\; g(x) = x^3$$

Determinar el área encerrada por las gráficas de ambas funciones y la recta $x = 2$.
(Junio 2000 - Opción B)

Problema 3.1.6 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Si es posible, dibujar de forma clara la gráfica de una función continua en el intervalo $[0, 4]$ que tenga al menos un máximo relativo en el punto $(2, 3)$ y un mínimo relativo en el punto $(3, 4)$.

b) (1 punto) Si la función fuera polinómica, ¿cuál ha de ser como mínimo su grado?

(Junio 2000 - Opción B)

Problema 3.1.7 *(2 puntos)* Sea la función $f(x) = 2x + \sin 2x$

a) (1 punto) Determinar si tiene asíntotas de algún tipo.

b) (1 punto) Estudiar su monotonía y la existencia de extremos relativos.

(Septiembre 2000 - Opción A)

Problema 3.1.8 *(2 puntos)* Dados tres números reales cualesquiera r_1, r_2 y r_3, hallar el número real x que minimiza la función

$$D(x) = (r_1 - x)^2 + (r_2 - x)^2 + (r_3 - x)^2$$

(Septiembre 2000 - Opción A)

Problema 3.1.9 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$.

a) (1,5 puntos) Determinar los puntos de corte de su gráfica con los ejes y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) (0,5 puntos) Esbozar la gráfica de la función.

c) (1 punto) Calcular el área determinada por la gráfica de f, el eje horizontal y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

(Septiembre 2000 - Opción B)

3.2. Año 2001

Problema 3.2.1 *(3 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$$

a) (1 punto) Indicar el dominio de definición de la función f y hallar sus asíntotas.

b) (1 punto) Hallar los extremos relativos de la función f y sus intervalos de concavidad y convexidad.

c) (1 punto) Dibujar la gráfica de f y hallar su máximo y su mínimo absolutos en el intervalo $[-1, 1]$.

(Modelo 2001 - Opción A)

Problema 3.2.2 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos) Hallar el valor de la integral definida

$$\int_{-10}^{-1} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1 - e^x}}$$

b) (1,5 puntos) Calcular la integral indefinida de la función

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^x}$$

mediante un cambio de variable.

(Modelo 2001 - Opción B)

Problema 3.2.3 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = \sin x$

a) (0,5 puntos) Calcular $a > 0$ tal que el área encerrada por la gráfica de f, el eje $y = 0$, y la recta $x = a$, sea $\frac{1}{2}$.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la tangente a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = \frac{\pi}{4}$

c) (1,5 puntos) Calcular el área de la superficie encerrada por la tangente anterior, la gráfica de la función f y las rectas $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$.

(Junio 2001 - Opción A)

Problema 3.2.4 *(2 puntos)* Sea la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} (2-x)^3 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) (0,5 puntos) Razonar si la función es continua en todoa la recta real.

b) (0,5 puntos) Razonar si f es derivable en toda la recta real.

c) (1 punto) Determinar el área encerrada por la gráfica de f y por las tres rectas $y = 8$, $x = 0$, $x = 2$.

(Junio 2001 - Opción B)

Problema 3.2.5 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Determinar los extremos relativos de la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$. Dibujar su gráfica

b) (1 punto) Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto $P(3, -5)$.

(Junio 2001 - Opción B)

Problema 3.2.6 *(3 puntos)* Se consideran las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = ax^2 + b$

a) (1 punto) Calcular a y b para que las gráficas de f y g sean tangentes en el punto de abcisa $x = 2$.

b) (1 punto) Para los valores de a y b calculados en el apartado anterior, dibujar las gráficas de ambas funciones y hallar la ecuación de la recta tangente común.

c) (1 punto) Para los mismos valores de a y b, hallar el área limitada por las gráficas de las funciones y el eje vertical.

(Septiembre 2001 - Opción A)

Problema 3.2.7 *(2 puntos)* Sean la función $f(t) = \dfrac{1}{1+e^t}$

a) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int f(t)dt$

b) (1 punto) Se definen $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Calcular $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$

(Septiembre 2001 - Opción B)

Problema 3.2.8 *(2 puntos)* Sea $P(x)$ un polinomio de grado 4 tal que:

- $P(x)$ es una función par.
- Dos de sus raices son $x = 1$ y $x = \sqrt{5}$.
- $P(0) = 5$.

Se pide:

a) (1 punto) Hallar sus puntos de inflexión.

b) (1 punto) Dibujar su gráfica.

(Septiembre 2001 - Opción B)

3.3. Año 2002

Problema 3.3.1 *(3 puntos)* Dada la parábola $y = 4 - x^2$, se considera el triángulo rectángulo $T(r)$ formado por los ejes de coordenadas y la tangente a la parábola en el punto de abcisa $x = r > 0$.

a) (2 puntos) Hallar r para que $T(r)$ tenga área mínima.

b) (1 punto) Calcular el área de la región delimitada por la parábola, su tangente en el punto de abcisa $x = 1$, y el eje vertical.

(Modelo 2002 - Opción A)

Problema 3.3.2 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x) = xe^{3x}$

a) (1,5 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f.

b) (1,5 puntos) Sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de f y el eje OX entre $x = 0$ y $x = p$ ($p > 0$) vale $1/9$, calcular el valor de p.

(Modelo 2002 - Opción B)

Problema 3.3.3 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3}$$

a) (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abcisa positiva de la gráfica de f.

b) (2 puntos) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, la recta anterior y el eje $x = 0$.

(Junio 2002 - Opción A)

Problema 3.3.4 *(3 puntos)* Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+1}{x} & si \quad x \geq -1 \\ \\ \frac{2x}{x-1} & si \quad x < -1 \end{cases}$$

a) (0,5 punto) Estudiar el dominio y la continuidad de f.

b) (1,5 puntos) Hallar las asíntotas de la gráfica de f.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado y limitado por la gráfica de f y las rectas $y = 0$ $x = 1$, $x = 2$.

(Junio 2002 - Opción B)

Problema 3.3.5 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

a) (1 punto) Determinar sus máximos y mínimos relativos.

b) (1 punto) Calcular el valor de $a > 0$ para el cual se verifica la igualdad

$$\int_0^a f(x)\,dx = 1$$

(Septiembre 2002 - Opción A)

Problema 3.3.6 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si} \quad x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estudiar su continuidad y derivabilidad.

b) (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(3,1)$.

(Septiembre 2002 - Opción A)

Problema 3.3.7 *(3 puntos)* Sea $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos los puntos y tal que:

$$f(0) = 1; \quad f(1) = 2; \quad f'(0) = 3; \quad f'(1) = 4.$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular $g'(0)$, siendo $g(x) = f(x + f(0))$.

b) (2 punto) Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$

(Septiembre 2002 - Opción B)

3.4. Año 2003

Problema 3.4.1 *(2 puntos)* Determinar los valores de las constantes A, B, C y D para los cuales la gráfica de la función real de variable real

$$f(x) = A\sin x + Bx^2 + Cx + D$$

tiene tangente horizontal en el punto $(0,4)$ y además su derivada segunda es $f''(x) = 3\sin x - 10$
(Modelo 2003 - Opción A)

Problema 3.4.2 *(2 puntos)* Calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{x^2 + 4}{x^2 - 5x + 6}\, dx$$

(Modelo 2003 - Opción A)

Problema 3.4.3 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$$

a) (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.

b) (0,5 puntos) Hallar los puntos donde la gráfica de f tiene tangente vertical.

c) (0,5 puntos) Representar gráficamente la función.

d) (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas $x = -1$, $x = 1$.

Nota: Para obtener las asíntotas puede ser de utilidad la igualdad:

$$A - B = \frac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2}$$

(Modelo 2003 - Opción B)

Problema 3.4.4 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites (donde "ln" significa logaritmo neperiano).

a) (1 punto) $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

b) (1 punto) $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x}$

(Junio 2003 - Opción A)

Problema 3.4.5 *(2 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6}$$

a) (1 punto) Encontrar los puntos de discontinuidad de f. Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.

b) (1 punto) Estudiar si f tiene alguna asíntota vertical.

(Junio 2003 - Opción A)

Problema 3.4.6 *(3 puntos)*

a) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función $g(x) = e^x - x$

b) (1 punto) Calcular el dominio de definición de $f(x) = \dfrac{1}{e^x - x}$ y su comportamiento para $x \longrightarrow \infty$ y $x \longrightarrow -\infty$.

c) (1 punto) Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición.

(Junio 2003 - Opción B)

Problema 3.4.7 *(3 puntos)* Sea la función

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$$

definida en el intervalo cerrado y acotado $[-2\pi, 2\pi]$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular los puntos del intervalo dado donde f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos.

b) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función f en el intervalo dado.

c) (1 punto) Calcular

$$\int_0^{\pi/3} f(x)\, dx$$

(Septiembre 2003 - Opción A)

Problema 3.4.8 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = 2x|4 - x|$.

a) Estudiar su continuidad y su derivabilidad.

b) Dibujar su gráfica.

c) Calcular el área del recinto acotado por la gráfica $y = f(x)$, las rectas $x = 0$, $x = 5$, y el eje OX.

(Septiembre 2003 - Opción B)

3.5. Año 2004

Problema 3.5.1 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Calcular el límite de la sucesión cuyo término general es $\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{2n}$.

b) (1 punto) Sean las funciones $F(x) = \int_1^x \sqrt{5 + e^{t^4}}\, dt$, $g(x) = x^2$. Calcular $(F(g(x)))'$.

(Modelo 2004 - Opción A)

Problema 3.5.2 *(2 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x^2 - x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determinar su dominio, y calcular los límites laterales cuando $x \longrightarrow 1$.

b) (1 punto) Estudiar su continuidad, y hallar el valor de a para el que f es continua en $x = 0$.

(Modelo 2004 - Opción A)

Problema 3.5.3 *(3 puntos)* Se considera la función :

$$f(x) = \frac{1}{1 + (\sin x)^2}$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular sus puntos críticos en el intervalo abierto $(-\pi, \pi)$.

b) (1 punto) Calcular los extremos relativos y/o absolutos de la función $f(x)$ en el intervalo cerrado $[-\pi, \pi]$.

c) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $(\pi/4, f(\pi/4)$.

(Modelo 2004 - Opción B)

Problema 3.5.4 *(2 puntos)* Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.
(Junio 2004 - Opción A)

Problema 3.5.5 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$$

a) (1 punto) Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.

b) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

(Junio 2004 - Opción A)

Problema 3.5.6 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:

a) (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$, donde $0 < a < 1$.

b) (1 punto) Hallar los puntos A y B en los que la recta hallada en el apartado anterior corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.

c) (1 punto) Determinar el valor de $a \in (0,1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$.

(Junio 2004 - Opción B)

Problema 3.5.7 *(3 puntos)* Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada

$$f'(x) = (x-4)^2(x^2 - 8x + 7)$$

a) (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

b) (1 punto) Hallar los máximos y mínimos relativos de f.

c) (1 punto) ¿Es el punto $x = 4$ un punto de inflexión de f?. Justificar razonadamente la respuesta.

(Septiembre 2004 - Opción A)

Problema 3.5.8 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

a) (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.

b) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función, utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además, que f tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abcisas son $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$, $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función f, el eje OX, la recta $x = 0$, y la recta $x = 2$.

(Septiembre 2004 - Opción B)

3.6. Año 2005

Problema 3.6.1 *(2 puntos)*

a) Justificar razonadamente que la gráfica de la función

$$f(x) = x^{15} + x + 1$$

corta al eje OX al menos una vez en el intervalo $[-1, 1]$.

b) Determinar el número exacto de puntos de corte con el eje OX cuando x recorre toda la recta real.

(Modelo 2005 - Opción A)

Problema 3.6.2 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Determinar el punto P, contenido en el primer cuadrante, en el que se corta la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$.

b) (1 punto) Calcular el área de la región limitada por la recta que une el origen y el punto P hallado en el apartado anterior, y el arco de la curva $y = \dfrac{x^2}{2}$ comprendido entre el origen y el punto P.

(Modelo 2005 - Opción A)

Problema 3.6.3 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = \ln(1 + x^2)$, donde ln significa *Logaritmo Neperiano.*

a) (1 punto) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad.

b) (1 punto) Dibujar la gráfica de f.

c) (1 punto). Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en sus puntos de inflexión.

(Modelo 2005 - Opción B)

Problema 3.6.4 *(2 puntos)* Sea $f(x)$ una función derivable en $(0, 1)$ y continua en $[0, 1]$, tal que $f(1) = 0$ y $\displaystyle\int_0^1 2xf'(x)dx = 1$. Utilizar la fórmula de integración por partes para hallar $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

(Junio 2005 - Opción A)

Problema 3.6.5 *(2 puntos)* Calcular un polinomio de tercer grado $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que verifica:

- tiene un máximo relativo en $x = 1$
- tiene un punto de inflexión en el punto de coordenadas $(0, 1)$.
- se verifica que

$$\int_0^1 p(x)dx = \frac{5}{4}$$

(Junio 2005 - Opción A)

Problema 3.6.6 *(3 puntos)* Calcular los siguientes límites

a) (1,5 puntos)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} \right)$$

b) (1,5 puntos)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} x \left[\arctan\left(e^x\right) - \frac{\pi}{2} \right]$$

(Junio 2005 - Opción B)

Problema 3.6.7 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a > 0$

b) (1 punto) Hallar los puntos de corte de las recta tangente hallada en el apartado anterior con los ejes coordenados.

c) (1 punto) Hallar el valor de $a > 0$ que hace que las distancias entre los dos puntos hallados en el apartado anterior sea mínima.

(Septiembre 2005 - Opción A)

Problema 3.6.8 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{x-1}$ donde ln significa *logaritmo neperiano*, definida para $x > 1$, hallar un punto $(a, f(a))$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en ese punto sea paralela al eje OX.
(Septiembre 2005 - Opción B)

Problema 3.6.9 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

a) (1 punto) Calcular los extremos locales y/o globales de la función $f(x)$.

b) (1 punto) Determinar el valor del parámetro a tal que:

$$\int_0^a f(x)dx = \frac{1}{4}$$

(Septiembre 2005 - Opción B)

3.7. Año 2006

Problema 3.7.1 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

a) (2 puntos) Hallar sus máximos y mínimos locales y/o globales.

b) (1 punto) Determinar el valor del parámetro $a > 0$ para el cual es:

$$\int_0^a f(x)\,dx = -1$$

(Modelo 2006 - Opción A)

Problema 3.7.2 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Hallar el punto P en el que se cortan las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad g(x) = +\sqrt{x^2-3}$$

b) (1 punto) Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes en el punto P a cada una de las curvas anteriores y demostrar que son perpendiculares.

(Modelo 2006 - Opción B)

Problema 3.7.3 *(2 puntos)* Se considera la función:

$$f(x) = \frac{1}{2+\sin x - \cos x}$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular los extremos locales y/o globales en el intervalo $[-\pi, \pi]$

b) (1 punto) Comprobar la existencia de, al menos, un punto $c \in [-\pi, \pi]$ tal que $f''(c) = 0$. (Sugerencia: utilizar el teorema de Rolle). Demostrar que en c hay un punto de inflexión.

(Modelo 2006 - Opción B)

Problema 3.7.4 *(3 puntos)* Se pide:

a) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

b) (1 punto) Demostrar que la función $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$ es monótona creciente.

c) (1 punto) Calcular $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} n^2(a_{n+1} - a_n)$

(Junio 2006 - Opción A)

Problema 3.7.5 *(3 puntos)* Se pide:

a) (1,5 punto) Estudiar y representar gráficamente la función:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

b) (1,5 puntos) Hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función anterior y las rectas $y = 1$, $x = 5/2$.

(Junio 2006 - Opción B)

Problema 3.7.6 *(2 puntos)* Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x}$
(Septiembre 2006 - Opción A)

Problema 3.7.7 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Calcular los valores de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + 2a\cos x & \text{si} \quad 0 \le x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si} \quad x \ge \pi \end{cases}$$

sea continua en todo valor de x.

b) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para todos los valores a y b obtenidos en el apartado anterior.

(Septiembre 2006 - Opción A)

Problema 3.7.8 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = xe^{2x}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

b) (1,5 puntos) Calcular el área comprendida entre el eje OX y la gráfica de $f(x)$ entre $-1 \le x \le 1$.

(Septiembre 2006 - Opción B)

3.8. Año 2007

Problema 3.8.1 *(3 puntos)*

a) (1 puntos) Si f es una función continua, obtener $F'(x)$ siendo

$$F(x) = \int_0^x (f(t) + t^2 + t^3)\,dt$$

b) (2 punto) Si $f(1) = 1$ y además $\int_0^1 f(t)dt = 1$, hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto $(1, F(1))$.

(Modelo 2007 - Opción A)

Problema 3.8.2 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = 6x^2 - x^3$, se pide:

a) (1 punto) Hallar un valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ sea paralela a la recta $y = -15x$.

b) (1 punto) Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de f y la parte positiva del eje OX.

(Modelo 2007 - Opción B)

Problema 3.8.3 *(2 puntos)* Obtener el valor de k sabiendo que

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{kx+5} = e^2$$

(Modelo 2007 - Opción B)

Problema 3.8.4 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde $m > 0$ es una constante.

a) (1,5 puntos) Para cada valor de m hallar el valor de $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.

b) (1,5 puntos) Hallar el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$.

(Junio 2007 - Opción A)

Problema 3.8.5 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 12}{x^2 + 4}$ calcular el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje OX.
(Junio 2007 - Opción B)

Problema 3.8.6 *(2 puntos)* Dibujar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{|x|}{2-x}$$

indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas. (Junio 2007 - Opción B)

Problema 3.8.7 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos) Hallar los máximos y los mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$$

b) (1,5 puntos) Determinar una función $F(x)$ tal que su derivada sea $f(x)$ y además $F(0) = 4$.

(Septiembre 2007 - Opción A)

Problema 3.8.8 *(3 puntos)* Sea $g(x)$ una función continua y derivable para todo valor real de x, de la que se conoce la siguiente información:

- $g'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, mientras que $g'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 2)$.
- $g''(x) > 0$ para todo $x \in (1, 3)$ y $g''(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.
- $g(-1) = 0$, $g(0) = 2$, $g(2) = 1$.
- $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = 3$

Teniendo en cuenta los datos anteriores, se pide:

a) (1 punto) Analizar razonadamente la posible existencia o no existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

b) (1 punto) Dibujar de manera esquemática la gráfica de la función $g(x)$.

c) (1 punto) Si $G(x) = \int_0^x g(t)\, dt$ encontrar un valor x_0 tal que su derivada $G'(x_0) = 0$

3.9. Año 2008

Problema 3.9.1 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

a) (1 punto) Hallar sus asíntotas y sus extremos locales.

b) (1 punto) Calcular los puntos de inflexión de $f(x)$ y dibujar la gráfica de $f(x)$.

(Modelo 2008 - Opción A)

Problema 3.9.2 *(2 puntos)* Calcular:

a) (1 punto) $\displaystyle \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n}$

b) (1 punto) $\displaystyle \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n}}{n+5}$

(Modelo 2008 - Opción A)

Problema 3.9.3 *(3 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} ax^2+b & \text{si} & |x|<2 \\ 1/x^2 & \text{si} & |x|\ge 2 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (1,5 punto) Calcular a y b para que f sea continua y derivable en todo R.

b) (1,5 punto) Para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular el área de la región acotada limitada por la gráfica de f el eje horizontal y las rectas $x = 1$, $x = 3$.

(Modelo 2008 - Opción B)

Problema 3.9.4 *(2 puntos)* Estudiar los siguientes límites:

a) (1 punto) $\displaystyle \lim_{x\longrightarrow+\infty}(e^x - x^2)$

b) (1 punto) $\displaystyle \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{4^x+5^x}{3^x+6^x}$

(Junio 2008 - Opción A)

Problema 3.9.5 *(2 puntos)* Obtener los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x(\ln(x))^2$$

siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x.
(Junio 2008 - Opción A)

Problema 3.9.6 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos) Para cada valor de $c > 0$, calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función:

$$f(x) = cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1$$

el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 1$.

b) (1,5 puntos) Hallar el valor de c para el cual el área obtenida en el apartado anterior es mínima.

(Junio 2008 - Opción B)

Problema 3.9.7 *(3 puntos)* Dada la función;

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$$

se pide:

a) (2 puntos) Dibujar la gráfica de f, estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

b) (1 punto) Calcular:

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

(Septiembre 2008 - Opción A)

Problema 3.9.8 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos) Calcular:

$$\int x^3 \ln(x)\,dx$$

donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x.

b) (1,5 puntos) Utilizar el cambio de variable

$$x = e^t - e^{-t}$$

para calcular:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\, dx$$

<u>*Indicación*</u> : Para deshacer el cambio de variable utilizar:

$$t = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$$

(Septiembre 2008 - Opción B)

3.10. Año 2009

Problema 3.10.1 *(3 puntos)* Sea:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x^2}{4} & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{7}{12}\left(1-(x-2)^2\right) & \text{si} \quad x \ge \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$.

b) (1 punto) Hallar los máximos y mínimos locales de $f(x)$

c) (1 punto) Dibujar la gráfica de $f(x)$.

(Modelo 2009 - Opción A)

Problema 3.10.2 *(2 puntos)* Sea:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$$

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Estudiar cuándo se verifica que $f'(x) = 0$. Puesto que $f(1) = f(-1)$, ¿existe contradicción con el teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$?

(Modelo 2009 - Opción B)

Problema 3.10.3 *(3 puntos)* Sea

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \le 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x. Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de $f(x)$, y por la recta $y = 1$.
(Modelo 2009 - Opción B)

Problema 3.10.4 *(2 puntos)* Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{(x+1)}$$

según los valores del parámetro α
(Junio 2009 - Opción A)

Problema 3.10.5 *(2 puntos)* Calcular la integral:

$$F(x) = \int_0^x t^2\, e^{-t}\, dt$$

(Junio 2009 - Opción A)

Problema 3.10.6 *(3 puntos)* Si la derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = (x-1)^3(x-5)$$

Obtener:

a) (1 punto) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) (1 punto) Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión.

c) (1 punto) La función f sabiendo que $f(0) = 0$

(Junio 2009 - Opción B)

Problema 3.10.7 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} & \text{si} \quad 1 + ax > 0 \text{ y } x \ne 0 \\[2ex] -\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 0 \end{cases},$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar los valores de los parámetros a, b para los cuales la función f es continua en $x = 0$.

b) (1,5 puntos) Para $a = b = 1$, estudiar si la función f es derivable en $x = 0$ aplicando la definición de derivada.

(Septiembre 2009 - Opción A)

Problema 3.10.8 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{a}, \quad s: \frac{x-3}{b} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1},$$

determinar los valores de los parámetros a, b para los cuales las rectas r, s se cortan perpendicularmente.
(Septiembre 2009 - Opción A)

Problema 3.10.9 *(3 puntos)*

a) (1 punto) Dada la función:

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2},$$

hallar el punto o los puntos de la gráfica de $f(x)$ en los que la pendiente de la recta tangente sea 1.

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 0$.

c) (1,5 puntos) Sea g una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que $g(0) = 0$, $g(2) = 2$. Demostrar que existe al menos un punto c en el intervalo $(0, 2)$ tal que $g'(c) = 1$.

(Septiembre 2009 - Opción B)

Problema 3.10.10 *(3 puntos)* Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) (1 punto) $f(x) = (2x)^{3x}$.

b) (1 punto) $g(x) = \cos\dfrac{\pi}{8}$.

c) (1 punto) $h(x) = \displaystyle\int_{5\pi}^{6\pi} e^{\cos t}\, dt$.

(Septiembre 2009 - Opción A (Reserva))

Problema 3.10.11 *(2 puntos)* Sabiendo que el volumen de un cubo de lado a es $V(a) = a^3$ centímetros cúbicos, calcular el valor mínimo de $V(x)+V(y)$ si $x + y = 5$.
(Septiembre 2009 - Opción B (Reserva))

Problema 3.10.12 *(2 puntos)* Calcular las siguientes integrales:

a) (1 punto) $\displaystyle\int (2x+1)^3\,dx,\ \int x^3 e^{x^4}\,dx$

b) (1 punto) $\displaystyle\int 2^x\,dx,\ \int \frac{1+x+x^4}{x^3}\,dx$

(Septiembre 2009 - Opción B (Reserva))

3.11. Año 2010

Problema 3.11.1 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = e^x + a\,e^{-x},$$

siendo a un número real, estudiar los siguientes apartados en función de a:

a) (1,5 puntos) Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) (1 punto) Estudiar para que valor , o valores, de a la función f tiene alguna asíntota horizontal.

c) (0,5 puntos) Para $a \geq 0$, hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

(Modelo 2010 - Opción A)

Problema 3.11.2 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = x^3 - x$$

Se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, f(-1))$.

b) (1 punto) Determinar los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de f.

c) (1 punto) Calcular el área de la región acotada que está comprendida entre la gráfica de f y la recta obtenida en el apartado anterior.

(Modelo 2010 - Opción B)

Problema 3.11.3 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$$

se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) (0,75 puntos) Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$.

c) (0,75 puntos) Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de $f(x)$.

d) (0,75 puntos) Hallar el área del recinto acotado que limitan la gráfica de $f(x)$, el eje de abcisas y las rectas $y = x+2$, $x = 1$.

(General-Junio 2010 - Opción A)

Problema 3.11.4 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ x+k & \text{si} \quad x \le 0 \end{cases}$$

donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x, se pide:

a) (1 punto) Determinar el valor de k para que la función sea continua en $\mathbf{R}$.

b) (1 punto) Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

c) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abcisa $x = 1$.

(General-Junio 2010 - Opción B)

Problema 3.11.5 *(2 puntos)* Hallar:

a) (1 punto) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty}\left[\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right]^{25}$

b) (1 punto) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0}(1+4x^3)^{2/x^3}$

(Específica-Junio 2010 - Opción A)

Problema 3.11.6 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \ln(x^2+4x-5)$, donde ln significa logaritmo neperiano,se pide:

a) (1 punto) Determinar el dominio de definición de $f(x)$ y las asíntotas verticales de su gráfica.

b) (1 punto) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

(Específica-Junio 2010 - Opción A)

Problema 3.11.7 *(3 puntos)* Dadas las funciones:

$$y = 9 - x^2, \quad y = 2x + 1$$

se pide:

a) (1 punto) Dibujar las gráficas de las dos funciones identificando el recinto acotado por ellas.

b) (1 punto) Calcular el área de dicho recinto acotado.

c) (1 punto) Hallar el volumen de un cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX el recinto acotado por la gráfica de $y = 9 - x^2$ y el eje OX.

(Específica-Junio 2010 - Opción B)

Problema 3.11.8 *(2 puntos)* Calcular los límites:

a) (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(1 + \arctan x)^{a/x}$

b) (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{3x + 2e^x}{7x + 5e^x}$.

(General-Septiembre 2010 - Opción A)

Problema 3.11.9 *(2 puntos)* Calcular:

a) (1 punto). $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx$

b) (1 punto). $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x\,dx$

(General-Septiembre 2010 - Opción A)

Problema 3.11.10 *(3 puntos)* Los puntos $P(1,2,1)$, $Q(2,1,1)$ y $A(a,0,0)$ con $a>3$, determinan un plano π que corta a loa semiejes positivos de OY y OZ en los puntos B y C respectivamente. Calcular el valor de a para que el tetraedro determinado por los puntos A, B, C y el origen de coordenadas tenga volumen mínimo.
(General-Septiembre 2010 - Opción B)

Problema 3.11.11 *(2 puntos)* Obtener el valor de a para que

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-3}{x^2+3}\right)^{ax^2}=4$$

(Específica-Septiembre 2010 - Opción A)

Problema 3.11.12 *(2 puntos)* Hallar:

a) (0,5 puntos). $\displaystyle\int_{14}^{16}(x-15)^8\,dx$

b) (1,5 puntos). $\displaystyle\int_{9}^{11}(x-10)^{19}(x-9)\,dx$

(Específica-Septiembre 2010 - Opción A)

Problema 3.11.13 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x)=\frac{3x^2+5x-20}{x+5}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Estudiar y obtener las asíntotas.

b) (1 punto). Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad.

c) (0,5 puntos). Representar gráficamente la función.

(Específica-Septiembre 2010 - Opción B)

3.12. Año 2011

Problema 3.12.1 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Obtener, si existen, los máximos y mínimos relativos, y las asíntotas.

b) (1,5 puntos). Calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 3$.

(Modelo 2011 - Opción A)

Problema 3.12.2 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites:

a) (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} xe^{1/x}$

b) (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{x}$

(Modelo 2011 - Opción B)

Problema 3.12.3 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{2} - \sin x$, calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.

(Modelo 2011 - Opción B)

Problema 3.12.4 *(2 puntos)* Se pide:

a) (1 punto). Calcular la integral $\displaystyle\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2}\,dx$.

b) (1 punto). Hallar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = \sqrt{12-3x^2}$.

(Junio 2011 - Opción A)

Problema 3.12.5 *(2 puntos)* Se pide:

a) (1 punto). Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

b) (1 punto). Demostrar que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ sólo tiene una raiz real, cualquiera que sea el número m. Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan.

(Junio 2011 - Opción A)

Problema 3.12.6 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{ax^4+1}{x^3}$$

Se pide:

a) (1 punto). Determinar el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x = 1$. Para este valor de a obtener los otros puntos en que f tiene un extremo relativo.

b) (1 punto). Obtener las asíntotas de de la gráfica de $y = f(x)$ para $a = 1$.

c) (1 punto). Esbozar la gráfica de la función para $a = 1$.

(Junio 2011 - Opción B)

Problema 3.12.7 *(3 puntos).*

a) (1 punto) Calcular los límites:

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{2}{4+e^{-(x+1)}} \quad \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{2}{4+e^{-(x+1)}}$$

b) (1 punto) Calcular la integral: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+3x^2}\,dx$

c) (1 punto) Hallar el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2+9x+14}$. Hallar el conjunto de puntos en los que la función f tiene derivada.

(Septiembre 2011 - Opción A)

Problema 3.12.8 *(2 puntos).* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{si} \quad x < 0 \\ k & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{\cos x - 1}{\sin x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

hallar el valor de k para que f sea continua en $x = 0$. Justificar la respuesta.
(Septiembre 2011 - Opción B)

Problema 3.12.9 *(2 puntos).*

a) (1 punto). Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x) = -\sin x$ y el eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

b) (1 punto). Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de $f(x) = -\sin x$ alrededor del eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

(Septiembre 2011 - Opción B)

3.13. Año 2012

Problema 3.13.1 *(2 puntos)* Halla el valor de λ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda x^2} - 1}{3x^2} & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ \dfrac{\sin 2x}{x} & \text{si} \quad x \le 0 \end{cases}$$

sea continua. Razonar la respuesta.
(Modelo 2012 - Opción A)

Problema 3.13.2 *(2 puntos)* Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, obtener los valores de a, b y c de modo que se verifiquen las condiciones siguientes:

- El polinomio $P(x)$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisas $x = -1/3$, $x = -1$.
- La recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto $(0, P(0))$ sea $y = x + 3$.

(Modelo 2012 - Opción A)

Problema 3.13.3 *(3 puntos)* Sabiendo que la funcion $F(x)$ tiene derivada $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[2, 5]$, y, ademas, que:

$$F(2) = 1, \quad F(3) = 2, \quad F(4) = 6, \quad F(5) = 3, \quad f(3) = 3 \;\text{ y }\; f(4) = -1;$$

Hallar:

a) (0,5 puntos). $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx$

b) (1 punto). $\displaystyle\int_2^3 (5f(x) - 7)\,dx$

c) (1,5 puntos). $\displaystyle\int_2^4 F(x)f(x)\,dx$.

(Modelo 2012 - Opción B)

Problema 3.13.4 *(2 puntos)* Hallar a, b, c de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x = 3$ un punto de inflexión.
(Junio 2012 - Opción A)

Problema 3.13.5 *(2 puntos)* Calcular razonadamente las siguientes integrales definidas:

- (1 punto). $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\,dx$
- (1 punto). $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 2x}\,dx$

(Junio 2012 - Opción A)

Problema 3.13.6 *(3 puntos)* Dadas las funciones

$$f(x)=\frac{3x+\ln(x+1)}{\sqrt{x^2-3}},\quad g(x)=(lnx)^x,\quad h(x)=sen(\pi-x)$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar el dominio de $f(x)$ y el $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$.

b) (1 punto). Calcular $g'(e)$.

c) (1 punto). Calcular, en el intervalo $(0,2\pi)$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas y las coordenadas de los extremos relativos de $h(x)$.

(Junio 2012 - Opción B)

Problema 3.13.7 *(3 puntos)* Dada la función $f(x)=\cos^2 x$, se pide:

a) (1 punto). Calcular los extremos relativos de f en el intervalo $(-\pi,\pi)$

b) (1 punto). Calcular los puntos de inflexion de f en el intervalo $(-\pi,\pi)$

c) (1 punto). Hallar la primitiva $g(x)$ de $f(x)$ tal que $g(\pi/4)=0$.

(Junio 2012 (coincidente)- Opción A)

Problema 3.13.8 *(2 puntos)* Dada la función

$$f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar $\lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow -3^-} f(x)$

b) (1 punto) Hallar $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$

(Junio 2012 (coincidente)- Opción B)

Problema 3.13.9 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Sea $f(x)$ una función continua tal que $\displaystyle\int_1^8 f(u)\,du = 3$. Hallar
$$\int_1^2 f(x^3)x^2\,dx$$

b) (1 punto) Hallar el dominio de definición y las abscisas de los puntos donde la función
$$F(x) = \sqrt{(x-3)(9-x)^2}$$
alcanza sus máximos y mínimos relativos.

(Junio 2012 (coincidente)- Opción B)

Problema 3.13.10 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + A & \text{si} \quad x \le 3 \\ -4 + 10x - x^2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar el valor de A para que $f(x)$ sea continua. ¿Es derivable para ese valor de A?

b) (1 punto). Hallar los puntos en los que $f'(x) = 0$.

c) (1 punto). Hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[4, 8]$.

(Septiembre 2012 - Opción A)

Problema 3.13.11 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = x^2 \sin x$, se pide:

a) (1 punto). Determinar, justicando la respuesta, si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $(\pi/2, \pi)$.

b) (1 punto). Calcular la integral de f en el intervalo $[0, \pi]$.

c) (1 punto). Obtener la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(\pi, f(\pi))$. Recúerdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

(Septiembre 2012 - Opción B)

3.14. Año 2013

Problema 3.14.1 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+3x}{x-1} & \text{si} \quad x<0 \\ \\ a & \text{si} \quad x=0 \\ \\ e^{-1/x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar el valor de a para que f sea continua en $x=0$.

b) (1 punto). Para ese valor de a, estudiar la derivabilidad de f en $x=0$.

c) (1 punto). Hallar, si las tiene, las asíntotas de la gráfica $y=f(x)$.

(Modelo 2013 - Opción A)

Problema 3.14.2 *(3 puntos)*

a) (0,5 puntos). Representar gráficamente el recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=\ln x$ y el eje OX entre las abscisas $x=1/e$, $x=e$.

b) (1,25 puntos). Calcular el área de dicho recinto.

c) (1,25 puntos). Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar dicho recinto alrededor del eje OX.

(Modelo 2013 - Opción B)

Problema 3.14.3 *(2 puntos)* Dada la función $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-3)^2}$, se pide se pide:

a) (1 punto). Hallar las asíntotas de su gráfica.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abcisa $x=2$.

(Junio 2013 - Opción A)

Problema 3.14.4 *(2 puntos)* Calcular las siguientes integrales:

$$\text{a)} \quad \int \frac{x-3}{x^2+9}\,dx \qquad \text{b)} \quad \int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3}\,dx$$

(Junio 2013 - Opción A)

Problema 3.14.5 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = 2\cos^2 x$, se pide:

a) (1 punto). Calcular los extremos absolutos de $f(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

b) (1 punto). Calcular los puntos de inflexion de $f(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$

(Junio 2013 - Opción B)

Problema 3.14.6 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = e^{-x} - x$, se pide:

a) (1 punto). Determinar el polinomio de segundo grado, $P(x) = ax^2 + bx + c$, que verifica simultáneamente las tres condiciones siguientes: $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$, $P''(0) = f''(0)$.

b) (1 punto). Usar los teoremas de Bolzano y Rolle para demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución real.

(Junio 2013 (coincidente)- Opción A)

Problema 3.14.7 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \begin{cases} a & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 + xe^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$ y estudiar, en ese caso, la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto). Calcular, en función de a, la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

(Junio 2013 (coincidente)- Opción A)

Problema 3.14.8 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\[2ex] \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

donde ln significa logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (1 punto). Calcular $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x)$

c) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f', donde sea posible.

(Junio 2013 (coincidente)- Opción B)

Problema 3.14.9 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2}$$

se pide:

a) (0,75 puntos). Hallar las asíntotas de su gráfica.

b) (1,75 puntos). Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcular sus puntos de inflexión.

c) (0,5 puntos). Esbozar la gráfica de la función.

(Septiembre 2013 - Opción A)

Problema 3.14.10 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$.

b) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx$.

(Septiembre 2013 - Opción B)

Problema 3.14.11 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = e^{1/x}$, se pide:

a) (1 punto). Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$ y estudiar la existencia de $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)$.

b) (1 punto). Esbozar la gráfica $y = f(x)$ determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus asíntotas.

(Septiembre 2013 - Opción B)

Problema 3.14.12 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, se pide:

a) (1,5 puntos). Hallar los valores de a, b y c para que la gráfica de la función tenga un extremo relativo en el punto de abcisa $x = 1$, un punto de inflexión en el de abcisa $x = 2/3$ y corte el eje OY en el punto de ordenada $y = 1$.

b) (0,5 puntos). ¿Es el extremo relativo un máximo o un mínimo?

(Septiembre 2013 (coincidente)- Opción A)

Problema 3.14.13 *(2 puntos)*Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 25 & \text{si} \quad x \le 1 \\ 5\sqrt{(2+x)^2 + (5-x)^2} & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ \frac{5\ln(1+x^2)}{\ln 5} & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$.

b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$.

(Septiembre 2013 (coincidente)- Opción A)

Problema 3.14.14 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2+\alpha}{x^2+1}$, se pide:

a) (1 punto). Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$.

b) (0,5 puntos). Hallar el valor de α para el que esta recta tangente es horizontal.

c) (1,5 puntos). Representar gráficamente la función $y = f(x)$ para $\alpha = 2$, estudiando sus asíntotas y su crecimiento y decrecimiento.

(Septiembre 2013 (coincidente)- Opción B)

3.15. Año 2014

Problema 3.15.1 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites:

a) (1 punto). $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}$

b) (1 punto). $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow 0} [1 - \sin x]^{1/x}$

(Modelo 2014 - Opción A)

Problema 3.15.2 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Sea $g(x)$ una función derivable que cumple $g(6) = \displaystyle\int_5^6 g(x)\,dx$. Hallar

$$\int_5^6 (x-5)g'(x)\,dx$$

b) (1 punto). Sea $f(x)$ una función continua que verifica $\displaystyle\int_1^e f(u)\,du = \frac{1}{2}$. Hallar

$$\int_0^2 f(e^{x/2})e^{x/2}\,dx.$$

(Modelo 2014 - Opción A

Problema 3.15.3 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+6}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (0,75 puntos). Estudiar su continuidad.

b) (1 punto). Estudiar la existencia de asíntotas de su gráfica y, en su caso, calcularlas.

c) (1,25 puntos). Hallar los extremos relativos y esbozar de su gráfica.

(Modelo 2014 - Opción B)

Problema 3.15.4 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Sea $f : R \longrightarrow R$ una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto de abscisa $x = -2$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ y que la recta de ecuación $y = 16x+16$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en dicho punto, determinar:

$$f(-2), \quad f'(-2) \;\text{ y }\; f''(-2)$$

b) (1 punto). Determinar el área de la región acotada limitada por la gráfica de la función $g(x) = x^4 + 4x^3$ y el eje OX.

(Junio 2014 - Opción A)

Problema 3.15.5 *(2 puntos)* Calcular justificadamente:

a) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1-2x-e^x+\sin(3x)}{x^2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{(5x^2+2)(x-6)}{(x^2-1)(2x-1)}$

(Junio 2014 - Opción A)

Problema 3.15.6 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} a + \ln(1-x) & \text{si} & x < 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si} & x \geq 0 \end{array} \right.$$

(donde ln denota logaritmo neperiano) se pide:

a) (1 punto). Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)$.

b) (1 punto). Calcular el valor de a, para que $f(x)$ sea continua en todo R.

c) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f', donde sea posible.

(Junio 2014 - Opción B)

Problema 3.15.7 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{mx^3 - 1}{x^2}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar el valor de m para el que f tiene un extremo relativo en $x = 1$.

b) (1 punto). Obtener las asíntotas de f para el caso $m = -2$.

c) (1 punto). En el caso $m = -2$, estudiar los intervalos de crecimiento de f y calcular los puntos de corte con los ejes. Esbozar la gráfica de f y sus asíntotas.

(Junio 2014 (coincidente)- Opción A)

Problema 3.15.8 *(2 puntos)* Sea $f(x)$ una función con derivada continua tal que $f(0) = 1$ y $f'(0) = 2$. Se considera la función $g(x) = 2(f(x))^2$ y se pide:

a) (1 punto). Hallar la recta tangente a la curva $y = g(x)$ en $x = 0$.

b) (1 punto). Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x) - 1}{e^{-x} - 1}$.

c) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f', donde sea posible.

(Junio 2014 (coincidente)- Opción B)

Problema 3.15.9 *(2 puntos)* Calcular:

a) (1 punto). $\displaystyle\int_1^{3/2} \frac{dx}{1-4x^2}$

b) (1 punto). $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$, donde ln denota logaritmo neperiano.

(Junio 2014 (coincidente)- Opción B)

Problema 3.15.10 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4},$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar el dominio de f y sus asíntotas.

b) (1 punto). Calcular $f'(x)$ y determinar los extremos relativos de $f(x)$.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

(Septiembre 2014 - Opción A)

Problema 3.15.11 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5 \sin x}{2x} + \frac{1}{2} & \text{si} \quad x < 0 \\ a & \text{si} \quad x = 0 \\ xe^x + 3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) (1 punto). Hallar, si existe, el valor de a para que $f(x)$ sea continua.

b) (1 punto). Decidir si la función es derivable en $x = 0$ para algún valor de a.

c) (1 punto). Calcular la integral:

$$\int_1^{\ln 5} f(x)\, dx,$$

donde ln denota logaritmo neperiano.

(Septiembre 2014 - Opción B)

3.16. Año 2015

Problema 3.16.1 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$, se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar el dominio de $f(x)$.

b) (1 punto). Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

c) (1,5 puntos). El área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = \pm 1/2$.

(Modelo 2015 - Opción A)

Problema 3.16.2 *(3 puntos)* Hallar

a) (1 punto). $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$.

b) (1 punto). $\displaystyle\int (3x+5)\cos x\, dx$.

c) (1 punto). Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función

$$f(x) = \frac{ex - e^x}{x}$$

.

(Modelo 2015 - Opción B)

Problema 3.16.3 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2-4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

donde ln denota logaritmo neperiano, se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.

b) (0,75 puntos) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.

c) (0,75 puntos) Calcular $\displaystyle\int f(x)\, dx$.

(Junio 2015 - Opción A)

Problema 3.16.4 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ xe^x + 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de f.

b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.

c) (1 punto). Calcular $\int_1^3 f(x)\,dx$.

(Junio 2015 - Opción B)

Problema 3.16.5 *(3 puntos)*

a) (2 punto). Determinar los valores a, b, c para que la función $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x = 0 \\ ax - b & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ x^2 + bx + c & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$ sea continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$.

b) (1 punto). Aplicar, si es posible, el Teorema del Valor Medio a la función $g(x) = x^2 + x$ en el intervalo $[1, 2]$ y calcular, en tal caso, un punto de dicho intervalo en el que $g'(x)$ tome el valor predicho por el Teorema del Valor Medio.

(Junio 2015 (coincidente)- Opción A)

Problema 3.16.6 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar su dominio, asíntotas y cortes con los ejes.

b) (1 punto). Calcular su derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.

c) (1 punto). Determinar los puntos de inflexión y dibujar la curva $y = f(x)$.

(Junio 2015 (coincidente)- Opción B)

Problema 3.16.7 *(2 puntos)*

a) (0,5 puntos). Estudiar el crecimiento de la función $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.

b) (1,5 puntos). Demostrar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una úunica solución real y localizar un intervalo de longitud 1 que la contenga.

(Septiembre 2015 - Opción A)

Problema 3.16.8 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Calcular la integral definida $\int_1^4 (1-x)e^{-x}\,dx$

b) (1 punto) Calcular $\lim_{x\longrightarrow+\infty}(1-x)e^{-x}$ y $\lim_{x\longrightarrow-\infty}(1-x)e^{-x}$

(Septiembre 2015 - Opción A)

Problema 3.16.9 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x)=\left\{\begin{array}{rl} a+x\ln(x)\text{si} & x>0\\ x^2e^x & \text{si}\quad x\le 0\end{array}\right.$$

(donde ln denota logaritmo neperiano y a es un núumero real) se pide:

a) (1 punto). Calcular el valor de a para que $f(x)$ sea continua en todo R.

b) (1 punto). Calcular $f'(x)$ donde sea posible.

c) (1 punto). Calcular $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

(Septiembre 2015 - Opción B)

Problema 3.16.10 *(2 puntos)* Dada $f(x)$, función derivable, con derivada continua, tal que $f(0)=0$ y $f'(0)=1$, se define la función $g(x)=(f(x))^2-e^{f(x)}$ y se pide:

a) (1 punto). Hallar $g(0)$, $g'(0)$ y $(fg)'(0)$.

b) (0,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en $x=0$.

c) (0,5 puntos). Obtener el valor de $\lim_{x\longrightarrow 0}\dfrac{f(x)}{x}$

(Septiembre 2015 (coincidente)- Opción A)

Problema 3.16.11 *(2 puntos)* Dada la función $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$, se pide:

a) (1 punto). Calcular $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ y $\lim_{x\longrightarrow-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

b) (1 punto). Justificar que f está definida en todo x del intervalo $[0,1]$ y calcular $\int_0^1 (x-2)f(x)\,dx$.

(Septiembre 2015 (coincidente)- Opción A)

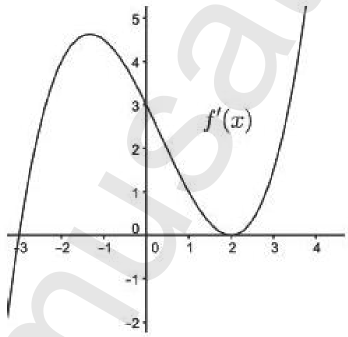
Problema 3.16.12 *(3 puntos)* Sea $f(x)$ una función con derivada de orden dos continua para todo número real y cuya gráfica contiene al origen.

La función derivada $f'(x)$ (representada en el gráfico adjunto) es positiva para todo $x > 2$ y negativa para todo $x < -3$. Se pide:

a) (1 punto). Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) (1 punto). Determinar las abscisas de los extremos relativos de $f(x)$ y clasificar dichos extremos.

c) (1 punto). Demostrar que $f(x)$ tiene un punto de inflexión en el intervalo $(-3, 2)$.



(Septiembre 2015 (coincidente)- Opción B)

3.17. Año 2016

Problema 3.17.1 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = 2x^2 - \dfrac{x^3}{3}$, se pide:

a) (0,75 puntos). Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) (0,5 puntos). Determinar las coordenadas de sus extremos relativos.

c) (0,75 puntos). El valor máximo que puede tener la pendiente de una recta tangente a la gráfica de $f(x)$.

d) (1 punto). El volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función en torno al eje OX, entre los puntos de corte de la misma con dicho eje.

(Modelo 2016 - Opción A)

Problema 3.17.2 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si} \quad x < 1 \\ xe^{1-x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Estudiar su continuidad y derivabilidad y calcular la función derivada f' donde sea posible.

b) (0,5 puntos). Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

(Modelo 2016 - Opción B)

Problema 3.17.3 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x)}{1-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de f y calcular $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$.

b) (0,5 puntos). Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$, en $x = 2$.

c) (1,5 punto). Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

(Junio 2016 - Opción A)

Problema 3.17.4 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Determine el polinomio $f(x)$, sabiendo que $f'''(x) = 12$, para todo $x \in R$ y además verifica: $f(1) = 3$; $f'(1) = 1$; $f''(1) = 4$.

b) (1 punto). Determine el polinomio $g(x)$, sabiendo que $g''(x) = 6$, para todo $x \in R$ y que además verifica:

$$\int_0^1 g(x)\,dx = 5; \quad \int_0^2 g(x)\,dx = 14$$

(Junio 2016 - Opción B)

Problema 3.17.5 *(2 puntos)* Estudie la continuidad y la derivabilidad en $x = 0$ y en $x = 1$ de $f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x \le 0 \\ |x \ln x| & \text{si} & x > 0 \end{array} \right.$, donde ln denota el logaritmo neperiano.
(Junio 2016 - Opción B)

Problema 3.17.6 *(2 puntos)* Los estudiantes de un centro docente han organizado una rifa benéfica, con la que pretenden recaudar fondos para una ONG. Han decidido sortear un ordenador portátil, que les cuesta 600 euros. Quieren fijar el precio de la papeleta, de modo que la recaudación sea máxima. Saben que si el precio de cada una es 2 euros, venderían 5000 papeletas, pero que, por cada euro de incremento en dicho precio, venderán 500 papeletas menos. ¿A qué precio deben vender la papeleta?
Si el único gasto que tienen es la compra del ordenador, ¿cuánto dinero podrán donar a la ONG?
(Junio 2016 (coincidente) - Opción A)

Problema 3.17.7 *(3 puntos)* Se consideran las funciones $f(x) = 2 + x - x^2$ y $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$, definida para $x \ne -1$. Se pide:

a) (1,5 punto). Hallar el área del recinto del primer cuadrante limitado por las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

b) (0,5 punto). Calcular $\lim\limits_{x \longrightarrow -1} f(x)g(x)$.

(Junio 2016 (coincidente) - Opción A)

Problema 3.17.8 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{9}{2x-4} + 2x - 1 & \text{si} & x \ne 2 \\ 0 & \text{si} & x = 2 \end{array} \right.$, se pide:

a) (1 punto). Hallar las asíntotas de la curva $y = f(x)$.

b) (1 punto). Determinar los posibles extremos relativos y puntos de inflexión de $y = f(x)$.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

(Junio 2016 (coincidente) - Opción B)

Problema 3.17.9 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = (6 - x)e^{x/3}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar su dominio, asíntotas y cortes con los ejes.

b) (1 punto). Calcular su derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.

c) (1 punto). Determinar el área del triángulo que forman los ejes coordenados con la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = 0$.

(Septiembre 2016 - Opción A)

Problema 3.17.10 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \frac{1}{5+x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de f y determinar sus asíntotas.

b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular $f'(x)$ donde sea posible.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

(Septiembre 2016 - Opción B)

3.18. Año 2017

Problema 3.18.1 *(2 puntos)* Los estudiantes de un centro docente han organizado una rifa benéfica, con la que pretenden recaudar fondos para una ONG. Han decidido sortear un ordenador portátil, que les cuesta 600 euros. Quieren fijar el precio de la papeleta, de modo que la recaudación sea máxima. Saben que si el precio de cada una es 2 euros, venderían 5000 papeletas, pero que, por cada euro de incremento en dicho precio, venderán 500 papeletas menos. ¿A qué precio deben vender la papeleta?
Si el único gasto que tienen es la compra del ordenador, ¿cuánto dinero podrán donar a la ONG?
(Modelo 2017 - Opción A)

Problema 3.18.2 *(2 puntos)* Calcular el área comprendida entre las curva $y = (x-1)e^x$ y la recta $y = x - 1$.
(Modelo 2017 - Opción A)

Problema 3.18.3 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x) = xe^{-x}$ y se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar el dominio y las asíntotas de f.

b) (1,5 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y hallar sus extremos relativos.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

(Modelo 2017 - Opción B)

Problema 3.18.4 *(2 puntos)* Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = te^{t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.
(Junio 2017 - Opción A)

Problema 3.18.5 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 6}{x - 2}$, se pide:

a) (0,5 puntos). Determinar su dominio y asíntotas verticales.

b) (0,5 puntos). Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,dx$.

(Junio 2017 - Opción A)

Problema 3.18.6 *(3 puntos)* Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{2}{x}$ y $g(x) = \sin x$, se pide:

a) (1 punto). Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \left(f(x) - \dfrac{2}{g(x)} \right)$.

b) (0,75 puntos). Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$.

c) (1,25 puntos). Calcular el área delimitada por la curva $y = f(x)$ y la recta $y = -x + 3$.

(Junio 2017 - Opción B)

Capítulo 4

Probabilidad

Problema 4.0.7 *(2 puntos)* En una población de cierta especie de cérvidos, el 43 % de los adultos son machos y el 57 % hembras. Se sabe que el 11 % de los machos adultos y el 4 % de las hembras adultas sufre alguna afección ocular. Se supone que se captura al azar un ejemplar adulto y se pide:

a) (1 punto) Determinar la probabilidad de que tenga alguna afección ocular.

b) (1 punto) Si el ejemplar capturado padeciere una afección ocular ¿cuál sería la probabilidad de que fuera un macho?

(Modelo 2017 - Opción B)

Problema 4.0.8 *(2 puntos)* El 40 % de los sábados Marta va al cine, el 30 % va de compras y el 30 % restante juega a videojuegos. Cuando va al cine, el 60 % de las veces lo hace con sus compañeros de baloncesto. Lo mismo le ocurre el 20 % de las veces que va de compras, y el 80 % de las veces que juega a videojuegos. Se pide:

a) (1 punto). Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto.

b) (1 punto). Si se sabe que Marta ha quedado con los compañeros de baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que vayan al cine?

(Junio 2017 - Opción B)