

Problemas de Selectividad de Matemáticas II
Comunidad de Madrid
(Enunciados)

Isaac Musat Hervás

10 de mayo de 2018

www.musat.net

www.musat.net

Índice general

1. Año 2000	9
1.1. Modelo 2000 - Opción A	9
1.2. Modelo 2000 - Opción B	10
1.3. Junio 2000 - Opción A	11
1.4. Junio 2000 - Opción B	12
1.5. Septiembre 2000 - Opción A	13
1.6. Septiembre 2000 - Opción B	14
2. Año 2001	15
2.1. Modelo 2001 - Opción A	15
2.2. Modelo 2001 - Opción B	16
2.3. Junio 2001 - Opción A	17
2.4. Junio 2001 - Opción B	18
2.5. Septiembre 2001 - Opción A	19
2.6. Septiembre 2001 - Opción B	20
3. Año 2002	21
3.1. Modelo 2002 - Opción A	21
3.2. Modelo 2002 - Opción B	22
3.3. Junio 2002 - Opción A	23
3.4. Junio 2002 - Opción B	24
3.5. Septiembre 2002 - Opción A	25
3.6. Septiembre 2002 - Opción B	26
4. Año 2003	27
4.1. Modelo 2003 - Opción A	27
4.2. Modelo 2003 - Opción B	28
4.3. Junio 2003 - Opción A	29
4.4. Junio 2003 - Opción B	30
4.5. Septiembre 2003 - Opción A	31
4.6. Septiembre 2003 - Opción B	32

5. Año 2004	35
5.1. Modelo 2004 - Opción A	35
5.2. Modelo 2004 - Opción B	36
5.3. Junio 2004 - Opción A	37
5.4. Junio 2004 - Opción B	38
5.5. Septiembre 2004 - Opción A	39
5.6. Septiembre 2004 - Opción B	40
6. Año 2005	43
6.1. Modelo 2005 - Opción A	43
6.2. Modelo 2005 - Opción B	44
6.3. Junio 2005 - Opción A	45
6.4. Junio 2005 - Opción B	46
6.5. Septiembre 2005 - Opción A	47
6.6. Septiembre 2005 - Opción B	48
7. Año 2006	49
7.1. Modelo 2006 - Opción A	49
7.2. Modelo 2006 - Opción B	50
7.3. Junio 2006 - Opción A	51
7.4. Junio 2006 - Opción B	52
7.5. Septiembre 2006 - Opción A	52
7.6. Septiembre 2006 - Opción B	53
8. Año 2007	55
8.1. Modelo 2007 - Opción A	55
8.2. Modelo 2007 - Opción B	56
8.3. Junio 2007 - Opción A	57
8.4. Junio 2007 - Opción B	57
8.5. Septiembre 2007 - Opción A	58
8.6. Septiembre 2007 - Opción B	59
9. Año 2008	61
9.1. Modelo 2008 - Opción A	61
9.2. Modelo 2008 - Opción B	62
9.3. Junio 2008 - Opción A	63
9.4. Junio 2008 - Opción B	63
9.5. Septiembre 2008 - Opción A	64
9.6. Septiembre 2008 - Opción B	65
10. Año 2009	67
10.1. Modelo 2009 - Opción A	67
10.2. Modelo 2009 - Opción B	68
10.3. Junio 2009 - Opción A	69

10.4. Junio 2009 - Opción B	69
10.5. Septiembre 2009 - Opción A	70
10.6. Septiembre 2009 - Opción B	71
10.7. Septiembre 2009 - Opción A (Reserva)	72
10.8. Septiembre 2009 - Opción A (Reserva)	73
11. Año 2010	75
11.1. Modelo 2010 - Opción A	75
11.2. Modelo 2010 - Opción B	76
11.3. General-Junio 2010 - Opción A	77
11.4. General-Junio 2010 - Opción B	78
11.5. Específica-Junio 2010 - Opción A	79
11.6. Específica-Junio 2010 - Opción B	80
11.7. General-Septiembre 2010 - Opción A	81
11.8. General-Septiembre 2010 - Opción B	82
11.9. Específica-Septiembre 2010 - Opción A	83
11.10. Específica-Septiembre 2010 - Opción B	84
12. Año 2011	85
12.1. Modelo 2011 - Opción A	85
12.2. Modelo 2011 - Opción B	86
12.3. Junio 2011 - Opción A	87
12.4. Junio 2011 - Opción B	88
12.5. Septiembre 2011 - Opción A	89
12.6. Septiembre 2011 - Opción B	90
13. Año 2012	93
13.1. Modelo 2012 - Opción A	93
13.2. Modelo 2012 - Opción B	94
13.3. Junio 2012 - Opción A	95
13.4. Junio 2012 - Opción B	96
13.5. Junio 2012 (Coincidente) - Opción A	97
13.6. Junio 2012 (Coincidente) - Opción B	98
13.7. Septiembre 2012 - Opción A	99
13.8. Septiembre 2012 - Opción B	100
14. Año 2013	101
14.1. Modelo 2013 - Opción A	101
14.2. Modelo 2013 - Opción B	102
14.3. Junio 2013 - Opción A	103
14.4. Junio 2013 - Opción B	104
14.5. Junio 2013 (coincidente)- Opción A	105
14.6. Junio 2013 (coincidente)- Opción B	106
14.7. Septiembre 2013 - Opción A	107

14.8. Septiembre 2013 - Opción B	108
14.9. Septiembre (coincidente) 2013 - Opción A	109
14.10 Septiembre (coincidente) 2013 - Opción B	110
15. Año 2014	113
15.1. Modelo 2014 - Opción A	113
15.2. Modelo 2014 - Opción B	114
15.3. Junio 2014 - Opción A	115
15.4. Junio 2014 - Opción B	116
15.5. Junio 2014 (coincidente)- Opción A	117
15.6. Junio 2014 (coincidente)- Opción B	118
15.7. Septiembre 2014 - Opción A	119
15.8. Septiembre 2014 - Opción B	120
16. Año 2015	123
16.1. Modelo 2015 - Opción A	123
16.2. Modelo 2015 - Opción B	124
16.3. Junio 2015 - Opción A	125
16.4. Junio 2015 - Opción B	126
16.5. Junio (coincidente)2015 - Opción A	127
16.6. Junio (coincidente)2015 - Opción B	128
16.7. Septiembre 2015 - Opción A	129
16.8. Septiembre 2015 - Opción B	130
16.9. Septiembre (coincidente)2015 - Opción A	131
16.10 Septiembre (coincidente)2015 - Opción B	132
17. Año 2016	135
17.1. Modelo 2016 - Opción A	135
17.2. Modelo 2016 - Opción B	136
17.3. Junio 2016 - Opción A	137
17.4. Junio 2016 - Opción B	138
17.5. Junio 2016 (coincidente) - Opción A	139
17.6. Junio 2016 (coincidente) - Opción B	140
17.7. Septiembre 2016 - Opción A	141
17.8. Septiembre 2016 - Opción B	142
18. Año 2017	143
18.1. Modelo 2017 - Opción A	143
18.2. Modelo 2017 - Opción B	144
18.3. Junio 2017 - Opción A	145
18.4. Junio 2017 - Opción B	145
18.5. Junio 2017 (coincidente) - Opción A	147
18.6. Junio 2017 (coincidente) - Opción B	148
18.7. Septiembre 2017 - Opción A	149

18.8. Septiembre 2017 - Opción B	150
18.9. Septiembre 2017 (coincidente) - Opción A	151
18.10 Septiembre 2017 (coincidente) - Opción B	152
19. Año 2018	153
19.1. Modelo 2018 - Opción A	153
19.2. Modelo 2018 - Opción B	154

www.muscat.net

www.musat.net

Capítulo 1

Año 2000

1.1. Modelo 2000 - Opción A

Problema 1.1.1 (2 puntos) Dados los vectores $\vec{u} = (a, 1 + a, 2a)$, $\vec{v} = (a, 1, a)$ y $\vec{w} = (1, a, 1)$, se pide:

- (1 punto) Determinar los valores de a para que los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} sean linealmente dependientes.
- (0,5 puntos) Estudiar si el vector $\vec{c} = (3, 3, 0)$ depende linealmente de los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} para el caso $a = 2$. Justificar la respuesta.
- (0,5 puntos) Justificar razonadamente si para $a = 0$ se cumple la igualdad

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0$$

Nota: el símbolo \wedge significa producto vectorial.

Problema 1.1.2 (2 puntos)

- Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia al punto $A(4, 0)$ es el doble de su distancia a la recta $x = 1$.
- Comprobar que el anterior lugar geométrico es una cónica. Indicar el tipo de cónica que es y hallar sus focos.

Problema 1.1.3 (3 puntos) Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} + 2 & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- a) (1 punto) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en $x = 0$?
- b) (1 punto) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea derivable en $x = 0$?
- c) (1 punto) Determinar sus asíntotas.

Problema 1.1.4 (3 puntos) Sea el sistema

$$\begin{cases} -x + \lambda y + 2z = \lambda \\ 2x + \lambda y - z = 2 \\ \lambda x - y + 2z = \lambda \end{cases}$$

- a) (1 punto) Discutir la compatibilidad del sistema según los diversos valores de λ .
- b) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = -1$.
- c) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = 2$.

1.2. Modelo 2000 - Opción B

Problema 1.2.1 (2 puntos) De una función derivable $f(x)$ se conoce que pasa por el punto $A(-1, -4)$ y que su derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) Hallar la expresión de $f(x)$.
- b) Obtener la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

Problema 1.2.2 (2 puntos) Se consideran las curvas $y = x^2$ e $y = a$ donde a es un número real comprendido entre 0 y 1 ($0 < a < 1$). Ambas curvas se cortan en un punto (x_0, y_0) con abscisa positiva. Hallar a sabiendo que el área encerrada entre ambas curvas desde $x = 0$ hasta $x = x_0$ es igual a la encerrada entre ellas desde $x = x_0$ hasta $x = 1$.

Problema 1.2.3 (3 puntos)

- a) (1 punto) Encontrar la distancia del punto $P(1, -1, 3)$ a la recta que pasa por los puntos $Q(1, 2, 1)$ y $R(1, 0, -1)$.
- b) (1 punto) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos P , Q y R .

- c) (1 punto) Encontrar todos los puntos S del plano determinado por P , Q y R de manera que el cuadrilátero de vértices P , Q , R y S sea un paralelogramo.

Problema 1.2.4 (3 puntos)

- a) (1 punto) Encontrar los valores de λ para los que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es invertible.

- b) (1 punto) Para $\lambda = 2$, hallar la inversa de A y comprobar el resultado.
c) (1 punto) Resolver el sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para $\lambda = 1$

1.3. Junio 2000 - Opción A

Problema 1.3.1 (2 puntos) Resolver la siguiente ecuación vectorial:

$$\vec{x} \wedge (2, 1, -1) = (1, 3, 5)$$

sabiendo que $|\vec{x}| = \sqrt{6}$, donde \wedge significa "producto vectorial".

Problema 1.3.2 (2 puntos)

- a) Determinar el centro y el radio de la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 8z - 4 = 0$$

- b) Determinar el centro y el radio de la circunferencia intersección de la esfera del apartado anterior con el plano $z = 0$.

Problema 1.3.3 (3 puntos) Para una matriz cuadrada, se define su traza como la suma de los elementos de la diagonal principal. En lo que sigue, A y B son matrices cuadradas 2×2 .

- a) (0,5 puntos) Comprobar que se verifica:

$$\text{Traza}(A + B) = \text{Traza}(A) + \text{Traza}(B)$$

b) (1 punto) Comprobar que

$$\text{Traza}(A \cdot B) = \text{Traza}(B \cdot A)$$

c) (1 punto) Utilizando los resultados anteriores, demostrar que es imposible tener $AB - BA = I$, donde I denota la matriz identidad.

d) (0,5 puntos) Encontrar dos matrices A y B para las que:

$$\text{Traza}(AB) \neq \text{Traza}(A) \cdot \text{Traza}(B)$$

Problema 1.3.4 (3 puntos) Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$, y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$.

a) (2 puntos) Determinar a , b , c y d .

b) (1 punto) ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

1.4. Junio 2000 - Opción B

Problema 1.4.1 (2 puntos) Sean las funciones:

$$f(x) = x^2 \text{ y } g(x) = x^3$$

Determinar el área encerrada por las gráficas de ambas funciones y la recta $x = 2$.

Problema 1.4.2 (2 puntos)

a) (1 punto) Si es posible, dibujar de forma clara la gráfica de una función continua en el intervalo $[0, 4]$ que tenga al menos un máximo relativo en el punto $(2, 3)$ y un mínimo relativo en el punto $(3, 4)$.

b) (1 punto) Si la función fuera polinómica, ¿cuál ha de ser como mínimo su grado?

Problema 1.4.3 (3 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + y + z = (a - 1)(a + 2) \\ x + ay + z = (a - 1)^2(a + 2) \\ x + y + az = (a - 1)^3(a + 2) \end{cases}$$

a) (1 punto) Comprobar que es compatible para todo valor de a .

b) (1 punto) Describir en términos geométricos el conjunto de soluciones para $a = 1$ y para $a = -2$.

c) (1 punto) Resolverlo para $a = -2$.

Problema 1.4.4 (3 puntos) Sean los puntos $P(8, 13, 8)$ y $Q(-4, -11, -8)$. Se considera el plano π , perpendicular al segmento PQ por su punto medio.

a) (1 punto) Obtener la ecuación del plano π .

b) (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del punto $O(0, 0, 0)$ sobre π .

c) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro determinado por los puntos en los que el plano π corta a los ejes coordenados y en el origen de coordenadas.

1.5. Septiembre 2000 - Opción A

Problema 1.5.1 (2 puntos) Sea la función $f(x) = 2x + \sin 2x$

a) (1 punto) Determinar si tiene asíntotas de algún tipo.

b) (1 punto) Estudiar su monotonía y la existencia de extremos relativos.

Problema 1.5.2 (2 puntos) Dados tres números reales cualesquiera r_1, r_2 y r_3 , hallar el número real x que minimiza la función

$$D(x) = (r_1 - x)^2 + (r_2 - x)^2 + (r_3 - x)^2$$

Problema 1.5.3 (3 puntos) Considerar el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ (\lambda - 1)x + y + z = \lambda \\ x + (\lambda - 1)y - z = 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro λ .

b) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 0$.

c) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 3$.

Problema 1.5.4 (3 puntos) Sea la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 8z + 9 = 0$.

a) (0,5 puntos) Determinar su centro y su radio.

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta que contiene al diámetro paralelo al eje OY .

c) (1 punto) Obtener el centro y el radio de la circunferencia que resulta al cortar dicha esfera con el plano $z = 0$.

d) (1 punto) Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera en su punto del eje OX .

1.6. Septiembre 2000 - Opción B

Problema 1.6.1 (2 puntos) Se consideran los puntos $A(1, a, 0)$, $B(1, 1, a - 2)$ y $C(1, -1, a)$.

- (1 punto) Comprobar que no están alineados, cualquiera que sea el valor que tome el parámetro a .
- (1 punto) Hallar el área del triángulo que determinan los tres puntos.

Problema 1.6.2 (2 puntos) Sean la recta

$$r : \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$$

y el plano

$$\pi : 2x - y + kz = 0$$

- (1 punto) Calcular m y k para que la recta sea perpendicular al plano.
- (1 punto) Calcular m y k para que la recta esté contenida en el plano.

Problema 1.6.3 (3 puntos) Sea la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$.

- (1,5 puntos) Determinar los puntos de corte de su gráfica con los ejes y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- (0,5 puntos) Esbozar la gráfica de la función.
- (1 punto) Calcular el área determinada por la gráfica de f , el eje horizontal y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

Problema 1.6.4 (3 puntos)

- (2 puntos) Discutir en función de los valores de k y resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ 2x - kz = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

- (1 punto) Discutir en función de los valores de λ y resolver en los casos de compatibilidad del sistema

$$\begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ 2x - 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + 2y + 2\lambda z = \lambda \end{cases}$$

Capítulo 2

Año 2001

2.1. Modelo 2001 - Opción A

Problema 2.1.1 (2 puntos) Comprobar que las siguientes matrices tienen el mismo determinante

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1-a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Problema 2.1.2 (2 puntos) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) calcular A^{-1}

b) Resolver el sistema $A \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 21 \\ 24 \end{pmatrix}$

Problema 2.1.3 (3 puntos) Sea la parábola $x^2 = 4y$. Sean u y v las rectas tangentes a la parábola en los puntos P de abcisa a y Q de abcisa b , (a_1, b) , $(a_1, 0)$, $(b_1, 0)$.

a) (1,5 puntos) Hallar las coordenadas del punto R de intersección de u y v .

b) (1 punto) Hallar la relación entre a y b para que las rectas u y v sean perpendiculares.

c) (0,5 puntos) Probar que en el caso del apartado anterior, el punto R está en la directriz de la parábola.

Problema 2.1.4 (3 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$$

- (1 punto) Indicar el dominio de definición de la función f y hallar sus asíntotas.
- (1 punto) Hallar los extremos relativos de la función f y sus intervalos de concavidad y convexidad.
- (1 punto) Dibujar la gráfica de f y hallar su máximo y su mínimo absolutos en el intervalo $[-1, 1]$.

2.2. Modelo 2001 - Opción B

Problema 2.2.1 (2 puntos) Los vértices de un triángulo son $A(-2, -1)$, $B(7, 5)$ y $C(x, y)$.

- Calcular el área del triángulo en función de x e y .
- Encontrar el lugar geométrico de los puntos (x, y) tales que la anterior área es 36.

Problema 2.2.2 (2 puntos) Sea $A(1, 1)$ y $B(-1, 1)$ dos puntos del plano.

- Determinar las ecuaciones de todas las circunferencias que pasan por los puntos A y B razonando dónde están situados sus centros.
- De entre las circunferencias del apartado anterior hallar el centro y el radio de la que es tangente a la recta $y = x$.

Problema 2.2.3 (3 puntos)

- (1,5 puntos) Discutir en función de los valores de k y resolver cuando tenga más de una solución, el sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + kz = 9 \\ x - y - 6z = 5 \end{cases}$$

- (1,5 puntos) Si el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & k & 9 \\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ es 2, determinar una combinación lineal nula de los vectores fila \vec{F}_1 , \vec{F}_2 y \vec{F}_3 , así como una combinación lineal nula de los vectores columna \vec{C}_1 , \vec{C}_2 , \vec{C}_3 y \vec{C}_4 .

Problema 2.2.4 (3 puntos)

- a) (1,5 puntos) Hallar el valor de la integral definida

$$\int_{-10}^{-1} \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^x}}$$

- b) (1,5 puntos) Calcular la integral indefinida de la función

$$f(x) = \frac{1}{1-e^x}$$

mediante un cambio de variable.

2.3. Junio 2001 - Opción A

Problema 2.3.1 (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+ & y+ & 2z = 2 \\ 2x- & y+ & 3z = 2 \\ 5x- & y+ & az = 6 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro a .
b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Problema 2.3.2 (2 puntos) Sea k un número natural y sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 1 \ 2).$$

- a) (1 punto) Calcular A^k .
b) (1 punto) Hallar la matriz X que verifica la ecuación $A^k X = BC$.

Problema 2.3.3 (3 puntos) Dado el plano $\pi : x + y + x = 1$, la recta $r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1)$, y el punto $P(1, 1, 0)$, se pide:

- a) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta s que sea perpendicular a r y pase por P .
b) (1 punto) Hallar el punto P' , simétrico de P respecto de r .
c) (1 punto) Hallar el punto P'' , simétrico de P respecto de π .

Problema 2.3.4 (3 puntos) Sea la función $f(x) = \sin x$

- a) (0,5 puntos) Calcular $a > 0$ tal que el área encerrada por la gráfica de f , el eje $y = 0$, y la recta $x = a$, sea $\frac{1}{2}$.
- b) (1 punto) Calcular la ecuación de la tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$
- c) (1,5 puntos) Calcular el área de la superficie encerrada por la tangente anterior, la gráfica de la función f y las rectas $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$.

2.4. Junio 2001 - Opción B

Problema 2.4.1 (2 puntos) Sea la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} (2-x)^3 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) (0,5 puntos) Razonar si la función es continua en toda la recta real.
- b) (0,5 puntos) Razonar si f es derivable en toda la recta real.
- c) (1 punto) Determinar el área encerrada por la gráfica de f y por las tres rectas $y = 8$, $x = 0$, $x = 2$.

Problema 2.4.2 (2 puntos)

- a) (1 punto) Determinar los extremos relativos de la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$. Dibujar su gráfica
- b) (1 punto) Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto $P(3, -5)$.

Problema 2.4.3 (3 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real λ .
- b) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = -3$.
- c) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 1$.

Problema 2.4.4 (3 puntos) Sean las rectas

$$r : x - 2 = \frac{y - 1}{k} = \frac{z + 1}{-2} \quad s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

- (1 punto) Hallar k para que r y s sean coplanarias.
- (1 punto) Para el valor anterior de k , hallar la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.
- (1 punto) Para el valor anterior de k , hallar la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas dadas.

2.5. Septiembre 2001 - Opción A

Problema 2.5.1 (2 puntos) Determinar la ecuación cartesiana de los puntos del lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$ es igual a 9. Si se trata de una curva cerrada, calcular el área que encierra.

Problema 2.5.2 (2 puntos) Sean A , B y C tres puntos del espacio tridimensional que verifican la relación

$$\overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{CA}$$

- (1 punto) Calcular el valor que toma k en la expresión $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$
- (1 punto) Si $A(1, 2, -1)$ y $B(3, 6, 9)$, hallar las coordenadas del punto C que cumple la relación de partida.

Problema 2.5.3 (3 puntos) Se consideran las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = ax^2 + b$

- (1 punto) Calcular a y b para que las gráficas de f y g sean tangentes en el punto de abscisa $x = 2$.
- (1 punto) Para los valores de a y b calculados en el apartado anterior, dibujar las gráficas de ambas funciones y hallar la ecuación de la recta tangente común.
- (1 punto) Para los mismos valores de a y b , hallar el área limitada por las gráficas de las funciones y el eje vertical.

Problema 2.5.4 (3 puntos) Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + y + 4z = 1 \\ -x + ay - 2z = 1 \\ y + z = a \end{cases}$$

- a) (1 punto) Discutir el sistema según los valores del parámetro a .
- b) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 2$.
- c) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 1$.

2.6. Septiembre 2001 - Opción B

Problema 2.6.1 (2 puntos) Sean la función $f(t) = \frac{1}{1 + e^t}$

- a) (1 punto) Calcular $\int f(t)dt$
- b) (1 punto) Se definen $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$

Problema 2.6.2 (2 puntos) Sea $P(x)$ un polinomio de grado 4 tal que:

- $P(x)$ es una función par.
- Dos de sus raíces son $x = 1$ y $x = \sqrt{5}$.
- $P(0) = 5$.

Se pide:

- a) (1 punto) Hallar sus puntos de inflexión.
- b) (1 punto) Dibujar su gráfica.

Problema 2.6.3 (3 puntos) Se considera el tetraedro cuyos vértices son $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 1)$, $C(-2, 1, 0)$ y $D(0, 1, 3)$.

- a) (1 punto) Hallar el área del triángulo ABC y el volumen del tetraedro $ABCD$.
- b) (1 punto) Calcular la distancia de D al plano determinado por los puntos A , B y C .
- c) (1 punto) Hallar la distancia entre las rectas AC y BD .

Problema 2.6.4 (3 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ se pide:

- a) (1 punto) Comprobar que verifica la igualdad $A^3 + I = O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula.
- b) (1 punto) Justificar que A tiene inversa y obtener A^{-1} .
- c) (1 punto) Calcular A^{100} .

Capítulo 3

Año 2002

3.1. Modelo 2002 - Opción A

Problema 3.1.1 (2 puntos) Se considera una varilla \overline{AB} de longitud 1. El extremo A de esta varilla recorre completamente la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$; la varilla se mantiene en todo momento tangente a dicha circunferencia.

- (1 punto) Determinar el lugar geométrico descrito por el extremo B de la varilla.
- (1 punto) Obtener la ecuación cartesiana de dicho lugar geométrico.

Problema 3.1.2 (2 puntos) Sean las rectas:

$$r : \begin{cases} x - 2y - 6z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad s : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{a} = z$$

- (1 punto) Determinar la posición relativa de r y s según los valores de a .
- (1 punto) Calcular la distancia entre las rectas r y s cuando $a = -2$:

Problema 3.1.3 (3 puntos) Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 + 2A = I$, donde I denota la matriz identidad.

- (1 punto) Demostrar que A es no singular ($\det(A) \neq 0$) y expresa A^{-1} en función de A e I .
- (1 punto) Calcular dos números p y q tales que $A^3 = pI + qA$
- (1 punto) Si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

cumple la relación de partida, calcular el valor de k .

Problema 3.1.4 (3 puntos) Dada la parábola $y = 4 - x^2$, se considera el triángulo rectángulo $T(r)$ formado por los ejes de coordenadas y la tangente a la parábola en el punto de abcisa $x = r > 0$.

- (2 puntos) Hallar r para que $T(r)$ tenga área mínima.
- (1 punto) Calcular el área de la región delimitada por la parábola, su tangente en el punto de abcisa $x = 1$, y el eje vertical.

3.2. Modelo 2002 - Opción B

Problema 3.2.1 (3 puntos) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- (1 punto) Calcular A^{-1} .
- (1 punto) Resolver la ecuación matricial $AX = BA$.

Problema 3.2.2 (2 puntos) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para cada número real O definimos la matriz $B = A - OI$, donde I denota la matriz identidad 2×2 .

- (1 punto) Hallar los valores de O que hacen que el determinante de B sea nulo.
- (1 punto) Resolver el sistema

$$B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para los diferente valores de O .

Problema 3.2.3 (3 puntos) Sea la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

- (1 punto) Hallar su centro y su radio y dibujarla.
- (1 punto) Hallar el punto de la curva, de abcisa cero, más alejado del origen; hallar también la recta tangente a la curva en ese punto.
- (1 punto) Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $P(3, 0)$ razonando la respuesta.

Problema 3.2.4 (3 puntos) Se considera la función $f(x) = xe^{3x}$

- (1,5 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f .
- (1,5 puntos) Sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de f y el eje OX entre $x = 0$ y $x = p$ ($p > 0$) vale $1/9$, calcular el valor de p .

3.3. Junio 2002 - Opción A

Problema 3.3.1 (2 puntos) Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Problema 3.3.2 (2 puntos) Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Problema 3.3.3 (3 puntos) Se consideran las cónicas C_1 y C_2 cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \quad ; \quad C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144$$

- (2 puntos) Identificar C_1 y C_2 . Especificar, para cada una de ellas, sus elementos característicos: vértices, focos, excentricidad, y asíntotas (si existen).
- (1 punto) Hallar una ecuación cartesiana de la parábola de eje horizontal, abierta hacia la derecha y que pasa por tres de los vértices de la cónica C_1 .

Problema 3.3.4 (3 puntos) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$$

- (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abscisa positiva de la gráfica de f .
- (2 puntos) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f , la recta anterior y el eje $x = 0$.

3.4. Junio 2002 - Opción B

Problema 3.4.1 (2 puntos) Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r :

$$x = 1 + t \quad , \quad y = -1 + 2t \quad , \quad z = t$$

y es perpendicular al plano π :

$$2x + y - z = 2.$$

Problema 3.4.2 (2 puntos) Los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(1, 3, 3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.

Se pide:

- (1 punto) Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y calcular el área de dicho paralelogramo.
- (1 punto) Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

Problema 3.4.3 (3 puntos) Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$

Se pide:

- (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a .
- (0,5 punto) Resolver el sistema para $a = -1$.
- (1 punto) Resolver el sistema para $a = 2$.

Problema 3.4.4 (3 puntos) Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+1}{x} & \text{si } x \geq -1 \\ \frac{2x}{x-1} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

- (0,5 punto) Estudiar el dominio y la continuidad de f .
- (1,5 puntos) Hallar las asíntotas de la gráfica de f .
- (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado y limitado por la gráfica de f y las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

3.5. Septiembre 2002 - Opción A

Problema 3.5.1 (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

- (1 punto) Determinar sus máximos y mínimos relativos.
- (1 punto) Calcular el valor de $a > 0$ para el cual se verifica la igualdad

$$\int_0^a f(x) dx = 1$$

Problema 3.5.2 (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

- (1 punto) Estudiar su continuidad y derivabilidad.
- (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(3, 1)$.

Problema 3.5.3 (3 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, dependientes del parámetro real λ :

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = \lambda^2 \\ y - z = \lambda \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$$

- (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ .
- (1 punto) Resolver el sistema en los casos en que sea posible.
- (0,5 puntos) En el caso $\lambda = 2$, indicar la posición relativa de los tres planos cuyas ecuaciones forman el sistema.

Problema 3.5.4 (3 puntos) Se consideran las rectas

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2} \quad s : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

- (1 punto) Calcular la distancia entre r y s .
- (1 punto) Hallar las ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular común a r y s y que corta a ambas.
- (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que corta a r y s y que pasa por el punto $P(1, 0, 0)$.

3.6. Septiembre 2002 - Opción B

Problema 3.6.1 (2 puntos) Hallar una ecuación cartesiana del lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los puntos $A(0, 3)$ y $B(0, -1)$ es igual a 1. Identificar dicho lugar geométrico.

Problema 3.6.2 (2 puntos) Para cada valor del parámetro real a , se consideran los tres planos siguientes:

$$\pi_1 : x + y + az = -2; \quad \pi_2 : x + ay + z = -1; \quad \pi_3 : ax + y + z = 3$$

Se pide:

- (1,5 puntos) Calcular los valores de a para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.
- (0,5 puntos) Para los valores de a calculados, hallar unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.

Problema 3.6.3 (3 puntos) Sea A una matriz cuadrada de orden n que verifica la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden n .

Se pide:

- (1 punto) Expresar A^{-1} en términos de A
- (1 punto) Expresar A^n en términos de A e I , para cualquier número natural n .
- (1 punto) Calcular a para que $A^2 = I$, siendo A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Problema 3.6.4 (3 puntos) Sea $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos los puntos y tal que:

$$f(0) = 1; \quad f(1) = 2; \quad f'(0) = 3; \quad f'(1) = 4.$$

Se pide:

- (1 punto) Calcular $g'(0)$, siendo $g(x) = f(x + f(0))$.
- (2 punto) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$

Capítulo 4

Año 2003

4.1. Modelo 2003 - Opción A

Problema 4.1.1 (2 puntos) Determinar los valores de las constantes A , B , C y D para los cuales la gráfica de la función real de variable real

$$f(x) = A \sin x + Bx^2 + Cx + D$$

tiene tangente horizontal en el punto $(0, 4)$ y además su derivada segunda es $f''(x) = 3 \sin x - 10$

Problema 4.1.2 (2 puntos) Calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{x^2 + 4}{x^2 - 5x + 6} dx$$

Problema 4.1.3 (3 puntos) Sea M una matriz cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n . Se pide:

- (1 punto) Estudiar si existe la matriz inversa de M . En caso afirmativo, expresar M^{-1} en términos de M e I .
- (1 punto) Expresar M^3 como combinación lineal de M e I .
- (1 punto) Hallar todas las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifican la identidad del enunciado.

Problema 4.1.4 (3 puntos) Se consideran el plano π y la recta r siguientes:

$$\pi : x + y - 2z = 6; \quad r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

Se pide:

- a) (1,5 punto) Hallar el punto simétrico de $M(1, 1, 1)$ respecto del plano π .
- b) (1,5 punto) Hallar el punto simétrico de $M(1, 1, 1)$ respecto de la recta r .

4.2. Modelo 2003 - Opción B

Problema 4.2.1 (3 puntos) Hallar todas las matrices X tales que $XA = AX$, siendo A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 4.2.2 (2 puntos) Para cada valor del parámetro real k , se considera el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2k \\ 3x - 5y = k^2 \end{cases}$$

Se pide:

- a) (1 punto) Discutir el sistema según los valores de k .
- b) (1 punto) Resolver el sistema en los casos en que sea compatible.

Problema 4.2.3 (3 puntos) Se consideran los puntos:

$$A(1, 1, 1), \quad B(0, -2, 2) \quad C(-1, 0, 2) \quad D(2, -1, -2).$$

Se pide:

- a) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D .
- b) (1 punto) Calcular la distancia del punto D al plano determinado por los puntos A, B y C .
- c) (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano determinado por los puntos A, B y C .

Problema 4.2.4 (3 puntos) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$$

- a) (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.
- b) (0,5 puntos) Hallar los puntos donde la gráfica de f tiene tangente vertical.

- c) (0,5 puntos) Representar gráficamente la función.
- d) (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas $x = -1$, $x = 1$.

Nota: Para obtener las asíntotas puede ser de utilidad la igualdad:

$$A - B = \frac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2}$$

4.3. Junio 2003 - Opción A

Problema 4.3.1 (2 puntos) Calcular los siguientes límites (donde "ln" significa logaritmo neperiano).

a) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

b) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x}$

Problema 4.3.2 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6}$

- a) (1 punto) Encontrar los puntos de discontinuidad de f . Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.
- b) (1 punto) Estudiar si f tiene alguna asíntota vertical.

Problema 4.3.3 (3 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 1 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.
- b) (2 puntos) Discutirlo para los distintos valores de m .

Problema 4.3.4 (3 puntos) Dadas las rectas en el espacio:

$$r : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$$

$$s : \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

- a) (1,5 punto) Hallar la distancia entre las dos rectas.
- b) (1,5 puntos) Determinar las ecuaciones de la perpendicular común a r y s .

4.4. Junio 2003 - Opción B

Problema 4.4.1 (2 puntos) Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

Problema 4.4.2 (2 puntos) Encontrar un número real $\lambda \neq 0$, y todas las matrices B de dimensión 2×2 (distintas de la matriz nula), tales que

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 4.4.3 (3 puntos)

- a) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función $g(x) = e^x - x$
- b) (1 punto) Calcular el dominio de definición de $f(x) = \frac{1}{e^x - x}$ y su comportamiento para $x \rightarrow \infty$ y $x \rightarrow -\infty$.
- c) (1 punto) Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición.

Problema 4.4.4 (3 puntos) Dados el plano

$$\pi : x + 3y - z = 1$$

y la recta

$$s : \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

- a) (1,5 punto) Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π .
- b) (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π , π' .

4.5. Septiembre 2003 - Opción A

Problema 4.5.1 (2 puntos) Dados los puntos $A(1, 0, 1)$ y $B(0, 2, 0)$, y el plano $\pi \equiv x - 2y - z - 7 = 0$, determinar el plano que es perpendicular al plano π y pasa por los puntos A y B .

Problema 4.5.2 (2 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-k}{1}$$

$$s : \begin{cases} x- & y+ & z = 3 \\ 3x+ & & z = 1 \end{cases}$$

- (1 punto) Hallar el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.
- (1 punto) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.

Problema 4.5.3 (3 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x+ & 4y+ & 3z = 9 \\ mx+ & 2y+ & z = 5 \\ x+ & y+ & z = 2 \end{cases}$$

- (1,5 puntos) Determinar los valores de m para que el sistema dado tenga solución única.
- (1,5 puntos) Resolverlo para $m = 1$.

Problema 4.5.4 (3 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$$

definida en el intervalo cerrado y acotado $[-2\pi, 2\pi]$. Se pide:

- (1 punto) Calcular los puntos del intervalo dado donde f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos.
- (1 punto) Dibujar la gráfica de la función f en el intervalo dado.
- (1 punto) Calcular

$$\int_0^{\pi/3} f(x) dx$$

4.6. Septiembre 2003 - Opción B

Problema 4.6.1 (2 puntos) Un mayorista del sector turístico vende a la agencia de viajes A , 10 billetes a destinos nacionales, 10 billetes a destinos extranjeros europeos comunitarios, y 10 billetes a destinos internacionales no comunitarios, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 billetes a destinos nacionales y 20 a destinos internacionales no comunitarios, y cobra 13.000 euros. A una tercera agencia C le vende 10 billetes a destinos nacionales y 10 a destinos extranjeros europeos comunitarios, cobrando 7.000 euros. Se pide:

- (1,5 puntos) Hallar el precio de cada billete.
- (0,5 puntos) Por razones de mercado, el mayorista se ve obligado a bajar un 20 por ciento el precio de todos los billetes nacionales. Hallar en qué porcentaje debe incrementar el precio de todos los billetes extranjeros europeos comunitarios (suponiendo que mantiene constante el precio de todos los billetes internacionales no comunitarios) para mantener constantes sus ingresos totales por las ventas a las tres agencias.

Problema 4.6.2 (2 puntos)

- Sean A y B dos matrices invertibles que verifican la identidad $A + B = AB$. Comprobar que entonces se tiene la fórmula:

$$(I - B)^{-1} = -B^{-1}A$$

(Donde I denota la matriz identidad).

- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

hallar la matriz B para la cual se verifica $A + B = AB$.

Problema 4.6.3 (3 puntos) Sea la función $f(x) = 2x|4 - x|$.

- Estudiar su continuidad y su derivabilidad.
- Dibujar su gráfica.
- Calcular el área del recinto acotado por la gráfica $y = f(x)$, las rectas $x = 0$, $x = 5$, y el eje OX .

Problema 4.6.4 (3 puntos) Dado el plano

$$\pi : x + y + z = 0$$

y la recta

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

se pide:

- a) (1 punto) Calcular el punto Q en el que se cortan el plano π y la recta r .
- b) (2 puntos) Encontrar un plano π' , paralelo a π , tal que el punto Q' en el que se cortan el plano π' y la recta r esté a distancia 2 del punto Q hallado en el apartado anterior.

www.musat.net

Capítulo 5

Año 2004

5.1. Modelo 2004 - Opción A

Problema 5.1.1 (2 puntos)

a) (1 punto) Calcular el límite de la sucesión cuyo término general es $\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{2n}$.

b) (1 punto) Sean las funciones $F(x) = \int_1^x \sqrt{5 + e^{t^4}} dt$, $g(x) = x^2$. Calcular $(F(g(x)))'$.

Problema 5.1.2 (2 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x^2 - x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determinar su dominio, y calcular los límites laterales cuando $x \rightarrow 1$.

b) (1 punto) Estudiar su continuidad, y hallar el valor de a para el que f es continua en $x = 0$.

Problema 5.1.3 (3 puntos) Discutir según los valores del parámetro λ , y resolver en los casos que sea posible el sistema:

$$\begin{cases} 6x + 4y + 2\lambda z = 2 \\ \lambda x + y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 2\lambda \end{cases}$$

Problema 5.1.4 (3 puntos) Dado el plano $\pi : x + y + az + 1 = 0$ y las rectas

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad r' : \begin{cases} x = 2 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \quad r'' : \begin{cases} x = 3 \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$$

Se pide:

- Calcular el valor de a para que los puntos de corte del plano π con las rectas r , r' y r'' estén alineados (1,5 puntos).
- Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por esos tres puntos (0,75 puntos).
- Calcula la distancia de dicha recta al origen (0,75 puntos).

5.2. Modelo 2004 - Opción B

Problema 5.2.1 (2 puntos) seconsideran las rectas

$$r : \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} 2x - z + 2 = 0 \\ 2y - mz = 6 \end{cases}$$

- Hallar el valor de m para que r y s sean paralelas.
- Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación del plano que contiene las rectas r y s .

Problema 5.2.2 (2 puntos) Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(3, -1, 0)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 5 + 3\lambda \end{cases}$$

Problema 5.2.3 (3 puntos) Se considera la función :

$$f(x) = \frac{1}{1 + (\sin x)^2}$$

Se pide:

- (1 punto) Calcular sus puntos críticos en el intervalo abierto $(-\pi, \pi)$.
- (1 punto) Calcular los extremos relativos y/o absolutos de la función $f(x)$ en el intervalo cerrado $[-\pi, \pi]$.
- (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $(\pi/4, f(\pi/4))$.

Problema 5.2.4 (3 puntos) Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x+ & 3y- & az = & 4 \\ x+ & ay+ & z = & 2 \\ x+ & 4y- & 5z = & 6 \end{cases}$$

Se pide:

- (2 punto) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a .
- (1 punto) Resolver el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.

5.3. Junio 2004 - Opción A

Problema 5.3.1 (2 puntos) Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Problema 5.3.2 (2 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \frac{(2x - 1)^2}{4x^2 + 1}$$

- (1 punto) Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.
- (1 punto) Calcular $\int_0^1 f(x) dx$

Problema 5.3.3 (3 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (1-a)x- & 2y+ & 4z = & 0 \\ x- & (1+a)y+ & z = & 0 \\ -x+ & ay- & z = & 0 \end{cases}$$

- (1,5 puntos) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro a .
- (1,5 puntos) Resolver el sistema anterior cuando sea compatible indeterminado.

Problema 5.3.4 (3 puntos) Se consideran la recta y los planos siguientes:

$$r : \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} ; \quad \pi_1 : 2 - 3x + 2y - z = 0; \quad \pi_2 : 3 + 2x + 2y - 2z = 0$$

- a) (1 punto) Determinar la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.
- b) (1 punto) Determinar la posición relativa de los dos planos.
- c) (1 punto) Calcular la distancia de r a π_2 .

5.4. Junio 2004 - Opción B

Problema 5.4.1 (2 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) (1 punto) Hallar A^{-1} .
- b) (1 punto) Hallar la matriz X , tal que:

$$A \cdot X \cdot A^T = B$$

(donde A^T significa la matriz traspuesta de A).

Problema 5.4.2 (2 puntos)

- a) (1 punto) Dado el sistema $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$, escribir una tercera ecuación de la forma $ax + by = c$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.
- b) (1 punto) Dado el sistema $\begin{cases} 2x + 2y - z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$, escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas resultante siga siendo compatible indeterminado.

Problema 5.4.3 (3 puntos)

- a) (2 puntos) Determinar la posición relativa de los siguientes planos, para los distintos valores del parámetro k :

$$\begin{aligned} \pi_1 : & 2x + 3y + kz = 3 \\ \pi_2 : & x + ky - z = -1 \\ \pi_3 : & 3x + y - 3z = -k \end{aligned}$$

- b) (1 punto) En los casos en que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta.

Problema 5.4.4 (3 puntos) Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:

- a) (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$, donde $0 < a < 1$.
- b) (1 punto) Hallar los puntos A y B en los que la recta hallada en el apartado anterior corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.
- c) (1 punto) Determinar el valor de $a \in (0, 1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$.

5.5. Septiembre 2004 - Opción A

Problema 5.5.1 (2 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto) Determinar la matriz inversa de B .
- b) (1 punto) Determinar una matriz X tal que $A = B \cdot X$.

Problema 5.5.2 (2 puntos)

- a) (1 punto) Si A es una matriz tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ¿cuál es el valor del determinante de A ?
- b) (1 punto) Calcular un número k tal que:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 5.5.3 (3 puntos) Sea el plano $\pi : x + 2y + 3z = 6$.

- a) (1 punto) Hallar el punto simétrico del $(0, 0, 0)$ respecto de π .
- b) (1 punto) Hallar el plano perpendicular a π que contiene a OZ .
- c) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de π con los ejes de coordenados.

Problema 5.5.4 (3 puntos) Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada

$$f'(x) = (x - 4)^2(x^2 - 8x + 7)$$

- (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
- (1 punto) Hallar los máximos y mínimos relativos de f .
- (1 punto) ¿Es el punto $x = 4$ un punto de inflexión de f ? Justificar razonadamente la respuesta.

5.6. Septiembre 2004 - Opción B

Problema 5.6.1 (2 puntos)

- (1,5 puntos) Hallar el conjunto formado por los puntos del plano $z = 0$ que distan 3 unidades del plano de ecuación $2x - y + 2z = 4$.
- (0,5 puntos) Describir dicho conjunto.

Problema 5.6.2 (2 puntos) El plano $\pi : 2x - 2y + z = -2$ determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:

- (0,5 puntos) Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen.
- (0,5 puntos) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a dicha altura.
- (1 punto) Calcular el área de la cara del tetraedro que está contenida en el plano π .

Problema 5.6.3 (3 puntos) Sea la función $f(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$

- (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.
- (1 punto) Dibujar la gráfica de la función, utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además, que f tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abcisas son $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$, respectivamente.
- (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función f , el eje OX , la recta $x = 0$, y la recta $x = 2$.

Problema 5.6.4 (3 puntos)

a) (2 puntos) Discutir según los valores del parámetro real λ el sistema

$$\begin{cases} \lambda x + 3y + z = \lambda \\ x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

b) (1 punto) Resolver el sistema anterior en el caso $\lambda = 2$

www.muscat.net

Capítulo 6

Año 2005

6.1. Modelo 2005 - Opción A

Problema 6.1.1 (2 puntos)

- a) Justificar razonadamente que la gráfica de la función

$$f(x) = x^{15} + x + 1$$

corta al eje OX al menos una vez en el intervalo $[-1, 1]$.

- b) Determinar el número exacto de puntos de corte con el eje OX cuando x recorre toda la recta real.

Problema 6.1.2 (2 puntos)

- a) (1 punto) Determinar el punto P , contenido en el primer cuadrante, en el que se corta la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{2}$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$.
- b) (1 punto) Calcular el área de la región limitada por la recta que une el origen y el punto P hallado en el apartado anterior, y el arco de la curva $y = \frac{x^2}{2}$ comprendido entre el origen y el punto P .

Problema 6.1.3 (3 puntos)

- a) (2 punto) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema

$$\begin{cases} 2\lambda x + 2y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y - z = 1 \\ 4x + 3y + z = 2\lambda \end{cases}$$

- b) (1 punto) Resolver el sistema anterior en los casos en que sea compatible.

Problema 6.1.4 (3 puntos) Dados los puntos $A(-1, 1, 1)$, $B(1, -3, -1)$ y $C(1, 0, 3)$, hallar las coordenadas de un punto D perteneciente a la recta:

$$r : x - 1 = \frac{y - 1}{-1} = z - 1$$

de manera que el tetraedro $ABCD$ tenga un volumen igual a 2.

6.2. Modelo 2005 - Opción B

Problema 6.2.1 (2 puntos) considerar el siguiente sistema de ecuaciones, en el que a es un parámetro real:

$$\begin{cases} -ax + 4y + az = -a \\ 4x + ay - az = a \\ -x - y + z = 1 \end{cases}$$

Se pide:

- a) (1 punto) Discutir el sistema
b) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 1$.

Problema 6.2.2 (2 puntos) Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto) Comprobar que

$$A^3 - 2A^2 = 0$$

- b) (1 punto) Hallar A^n .

Problema 6.2.3 (3 puntos) Sea la función $f(x) = \ln(1 + x^2)$, donde \ln significa *Logaritmo Neperiano*.

- a) (1 punto) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad.
b) (1 punto) Dibujar la gráfica de f .
c) (1 punto) Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en sus puntos de inflexión.

Problema 6.2.4 (3 puntos) Se considera la recta: $r : \frac{x}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-5}{2}$ y la familia de rectas dependientes del parámetro m :

$$s : \begin{cases} 3x - y = 8 - 12m \\ y - 3z = 7 - 3m \end{cases}$$

- (2 puntos) Determinar el valor de m para el que las dos rectas r y s se cortan.
- (1 punto) Para el caso de $m = 0$, hallar la distancia entre las dos rectas.

6.3. Junio 2005 - Opción A

Problema 6.3.1 (2 puntos) Sea $f(x)$ una función derivable en $(0, 1)$ y continua en $[0, 1]$, tal que $f(1) = 0$ y $\int_0^1 2xf'(x)dx = 1$. Utilizar la fórmula de integración por partes para hallar $\int_0^1 f(x)dx$.

Problema 6.3.2 (2 puntos) Calcular un polinomio de tercer grado $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que verifica:

- tiene un máximo relativo en $x = 1$
- tiene un punto de inflexión en el punto de coordenadas $(0, 1)$.
- se verifica que

$$\int_0^1 p(x)dx = \frac{5}{4}$$

Problema 6.3.3 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (m-1)x + y + z = 3 \\ mx + (m-1)y + 3z = 2m-1 \\ x + 2y + (m-2)z = 4 \end{cases}$$

- (1,5 punto) Discutirlo según los distintos valores de m .
- (1,5 puntos) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Problema 6.3.4 (3 puntos) Dado el punto $P(1, 3, -1)$, se pide:

- (1 punto) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x, y, z)$ cuya distancia a P sea igual a 3.

b) (2 puntos) Calcular los puntos de la recta

$$\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$$

cuya distancia a P es igual 3.

6.4. Junio 2005 - Opción B

Problema 6.4.1 (2 puntos)

a) (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$$

b) (1 punto) Hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación: $5x + y + \alpha z = \beta$, el sistema resultante sea compatible indeterminado.

Problema 6.4.2 (2 puntos) Hallar una matriz X tal que:

$$A^{-1}XA = B$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 6.4.3 (3 puntos) Calcular los siguientes límites

a) (1,5 puntos)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} \right)$$

b) (1,5 puntos)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2} \right]$$

Problema 6.4.4 (3 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4} \quad s : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$$

a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta t que corta a las dos y es perpendicular a ambas.

b) (1,5 puntos) Calcular la mínima distancia entre r y s .

6.5. Septiembre 2005 - Opción A

Problema 6.5.1 (2 puntos) Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos

$$\begin{aligned}\pi_1 : x + z &= \lambda \\ \pi_2 : 4x + (\lambda - 2)y + (\lambda + 2)z &= \lambda + 2 \\ \pi_3 : 2(\lambda + 1)x - (\lambda + 6)z &= -\lambda\end{aligned}$$

Problema 6.5.2 (2 puntos) Se consideran las rectas

$$r : \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x - z = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

- (1 punto) Hallar la recta t , perpendicular a r y a s , que pasa por el origen.
- (1 punto) Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta s con la recta t obtenida en el apartado anterior.

Problema 6.5.3 (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1 punto) Hallar dos constantes α y β tales que $A^2 = \alpha A + \beta I$.
- (1 punto) Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.
- (1 punto) Hallar todas las matrices X que satisfacen $(A - X)(A + X) = A^2 - X^2$.

Problema 6.5.4 (3 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$ se pide:

- (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a > 0$
- (1 punto) Hallar los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado anterior con los ejes coordenados.
- (1 punto) Hallar el valor de $a > 0$ que hace que las distancias entre los dos puntos hallados en el apartado anterior sea mínima.

6.6. Septiembre 2005 - Opción B

Problema 6.6.1 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \ln \frac{x^2}{x-1}$ donde \ln significa *logaritmo neperiano*, definida para $x > 1$, hallar un punto $(a, f(a))$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en ese punto sea paralela al eje OX .

Problema 6.6.2 (2 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

- (1 punto) Calcular los extremos locales y/o globales de la función $f(x)$.
- (1 punto) Determinar el valor del parámetro a tal que:

$$\int_0^a f(x)dx = \frac{1}{4}$$

Problema 6.6.3 (3 puntos) Se considera la familia de planos:

$$mx + (m-2)y + 3(m+1)z + (m+1) = 0$$

siendo m un parámetro real.

Se pide:

- (1 punto) Determinar la recta común a todos los planos de la familia.
- (1 punto) Determinar el plano de esta familia que pasa por el punto $P(1, 1, 0)$.
- (1 punto) Determinar el plano de esta familia que es paralelo a la recta:

$$\begin{cases} x- & 2z+ & 1 = 0 \\ - & y+ & z+ & 1 = 0 \end{cases}$$

Problema 6.6.4 (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1 punto) Hallar A^{10} .
- (1 puntos) Hallar la matriz inversa de B .
- (1 punto) En el caso particular de $k = 0$, hallar B^{10} .

Capítulo 7

Año 2006

7.1. Modelo 2006 - Opción A

Problema 7.1.1 (2 puntos) Un punto de luz situado en $P(0, 1, 1)$ proyecta la sombra de la recta:

$$x = y = -z$$

sobre el plano $\pi : x - z = 0$.

Calcular las coordenadas del punto de esta proyección que pertenece al plano $z = 1$.

Problema 7.1.2 (2 puntos) Se consideran las rectas:

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-5}{2} \quad s : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -4 + 3\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $P(2, -1, 1)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.

Problema 7.1.3 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = k \\ x + 2y + 3z = 2 \\ kx + ky - 4z = -1 \end{cases}$$

- (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k .
- (1 punto) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Problema 7.1.4 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

- a) (2 puntos) Hallar sus máximos y mínimos locales y/o globales.
- b) (1 punto) Determinar el valor del parámetro $a > 0$ para el cual es:

$$\int_0^a f(x) dx = -1$$

7.2. Modelo 2006 - Opción B

Problema 7.2.1 (2 puntos)

- a) (1 punto) Hallar el punto P en el que se cortan las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad g(x) = +\sqrt{x^2 - 3}$$

- b) (1 punto) Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes en el punto P a cada una de las curvas anteriores y demostrar que son perpendiculares.

Problema 7.2.2 (2 puntos) Se considera la función:

$$f(x) = \frac{1}{2 + \sin x - \cos x}$$

Se pide:

- a) (1 punto) Calcular los extremos locales y/o globales en el intervalo $[-\pi, \pi]$
- b) (1 punto) Comprobar la existencia de, al menos, un punto $c \in [-\pi, \pi]$ tal que $f''(c) = 0$. (Sugerencia: utilizar el teorema de Rolle). Demostrar que en c hay un punto de inflexión.

Problema 7.2.3 (3 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{1} \quad s : \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

- a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s .
- b) (1,5 puntos) Calcular la distancia de s al plano anterior.

Problema 7.2.4 (3 puntos) Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- (1,5 punto) Hallar $(A - I)^2$.
- (1,5 punto) Calcular A^4 haciendo uso del apartado anterior.

7.3. Junio 2006 - Opción A

Problema 7.3.1 (2 puntos) Dado el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ kx - y + z = 0 \\ (k+1)x + y = 0 \end{cases}$$

averiguar para qué valores de k tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$. Resolverlo en tales casos.

Problema 7.3.2 (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar todas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tales que $AP = PA$.

Problema 7.3.3 (3 puntos) Se pide:

- (1 punto) Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.
- (1 punto) Demostrar que la función $a_n = \frac{2n}{n+1}$ es monótona creciente.
- (1 punto) Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(a_{n+1} - a_n)$

Problema 7.3.4 (3 puntos) Sean las rectas:

$$r : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \quad s : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

- (1,5 punto) Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.
- (1,5 puntos) Hallar la recta perpendicular común a las rectas r y s .

7.4. Junio 2006 - Opción B

Problema 7.4.1 (2 puntos) Sea r la recta que pasa por el origen de coordenadas O y tiene como vector director $\vec{v} = (4, 3, 1)$. Hallar un punto P contenido en dicha recta, tal que si se llama Q a su proyección sobre el plano $\pi : z = 0$, el triángulo OPQ tenga área 1.

Problema 7.4.2 (2 puntos) Determinar la posición relativa de las rectas:

$$r : \frac{x+4}{-3} = \frac{y-7}{4} = \frac{z}{1} \quad s : \begin{cases} x+2y-5z-5=0 \\ 2x+y+2z-4=0 \end{cases}$$

Problema 7.4.3 (3 puntos) Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

- (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro a .
- (1,5 punto) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M . Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$.

Problema 7.4.4 (3 puntos) Se pide:

- (1,5 punto) Estudiar y representar gráficamente la función:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

- (1,5 puntos) Hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función anterior y las rectas $y = 1$, $x = 5/2$.

7.5. Septiembre 2006 - Opción A

Problema 7.5.1 (2 puntos) Calcular $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x}$

Problema 7.5.2 (2 puntos)

- (1 punto) Calcular los valores de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a \cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

sea continua en todo valor de x .

- b) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para todos los valores a y b obtenidos en el apartado anterior.

Problema 7.5.3 (3 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a) (1 punto) Comprobar que $|A^2| = |A|^2$, y que $|A + I| = |A| + |I|$
 b) (0,5 puntos) Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que se cumple $|M^2| = |M|^2$? Razonar la respuesta.
 c) (1,5 puntos) Encontrar todas las matrices cuadradas M , de orden 2, tales que:

$$|M + I| = |M| + |I|$$

Problema 7.5.4 (3 puntos) Se consideran los puntos $A(0, 1, 0)$ y $B(1, 0, 1)$. Se pide:

- a) (1 punto) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x, y, z)$ que equidistan de A y B .
 b) (0,5 puntos) Determinar la ecuación que verifican los puntos $X(x, y, z)$ cuya distancia a A es igual a la distancia de A a B .
 c) (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta formada por los puntos $C(x, y, z)$ del plano $x + y + z = 3$ tales que el triángulo ABC es rectángulo con el ángulo recto en el vértice A .

7.6. Septiembre 2006 - Opción B

Problema 7.6.1 (2 puntos)

- a) (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases}$$

- b) (1 punto) Hallar la solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4.

Problema 7.6.2 (2 puntos)

- a) (1 punto) Hallar todas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ distintas de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tales que $A^2 = A$

- b) (1 punto) Para cualquiera de las matrices A obtenidas en el apartado 1.), calcular

$$M = A + A^2 + A^3 + \dots + A^{10}$$

Problema 7.6.3 (3 puntos) Dada la función $f(x) = xe^{2x}$, se pide:

- a) (1,5 puntos) Dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.
- b) (1,5 puntos) Calcular el área comprendida entre el eje OX y la gráfica de $f(x)$ entre $-1 \leq x \leq 1$.

Problema 7.6.4 (3 puntos) Un plano π corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, \lambda, 0)$ y $C(0, 0, 4)$. Se pide:

- a) (1,5 puntos) Hallar el valor de $\lambda > 0$ de manera que el volumen del tetraedro $OABC$ (donde O es el origen), sea 2.
- b) (1,5 puntos) Para el valor de λ obtenido en el apartado 1.), calcular la longitud de la altura del tetraedro $OABC$ correspondiente al vértice O .

Capítulo 8

Año 2007

8.1. Modelo 2007 - Opción A

Problema 8.1.1 (2 puntos) Se considera la recta $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$ y el punto $P(1, 1, 1)$. Dado el punto $Q(0, 0, 0)$ de r , hallar todos los puntos A contenidos en r tales que el triángulo de vértices A, P y Q tenga área 1.

Problema 8.1.2 (2 puntos)

- a) (1,5 puntos) Calcula la ecuación general de un plano π_1 que contiene a la recta

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

y es perpendicular al plano $\pi_2 : 2x + y - z = 2$.

- b) (0,5 puntos) Determinar la ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π_1 y π_2 .

Problema 8.1.3 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ky + k^2z = 1 \\ x + ky - kz = k^2 \\ -x + ky - k^2z = k^2 \end{cases}$$

- a) (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k .
b) (1 punto) Resolverlo para $k = -1$.

Problema 8.1.4 (3 puntos)

- a) (1 puntos) Si f es una función continua, obtener $F'(x)$ siendo

$$F(x) = \int_0^x (f(t) + t^2 + t^3) dt$$

- b) (2 punto) Si $f(1) = 1$ y además $\int_0^1 f(t)dt = 1$, hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto $(1, F(1))$.

8.2. Modelo 2007 - Opción B

Problema 8.2.1 (2 puntos) Dada la función $f(x) = 6x^2 - x^3$, se pide:

- a) (1 punto) Hallar un valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ sea paralela a la recta $y = -15x$.
- b) (1 punto) Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de f y la parte positiva del eje OX .

Problema 8.2.2 (2 puntos) Obtener el valor de k sabiendo que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{kx+5} = e^2$$

Problema 8.2.3 (3 puntos) Se consideran el punto $P(1, 0, 1)$ y la recta:

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

y el plano $\pi : x + y + z = 0$. Se pide:

- a) (1,5 puntos) Obtener un punto P' , simétrico de P respecto del plano π .
- b) (1,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta s que contiene al punto P , corta a la recta r y es paralela al plano π .

Problema 8.2.4 (3 puntos) Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro λ .
- b) (1,5 punto) Determinar para qué valores de λ existe la matriz inversa de M . Calcular dicha inversa para $\lambda = 0$.

8.3. Junio 2007 - Opción A

Problema 8.3.1 (2 puntos) Estudiar el rango de la matriz $\begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro m .

Problema 8.3.2 (2 puntos) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz X tal que $XAX^{-1} = B$

Problema 8.3.3 (3 puntos) Dados el punto $A(1, -2, -3)$, la recta $r : \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi : x - 2y - 3z + 1 = 0$, se pide:

- (1,5 puntos) Ecuación del plano que pasa por A , es paralelo a r y perpendicular a π .
- (1,5 puntos) Ecuación de la recta que pasa por A , corta a r y es paralela a π .

Problema 8.3.4 (3 puntos) Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde $m > 0$ es una constante.

- (1,5 puntos) Para cada valor de m hallar el valor de $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.
- (1,5 puntos) Hallar el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$.

8.4. Junio 2007 - Opción B

Problema 8.4.1 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4}$ calcular el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje OX.

Problema 8.4.2 (2 puntos) Dibujar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{|x|}{2-x}$$

indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

Problema 8.4.3 (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- (1,5 puntos) Encontrar las condiciones que deben cumplir a , b y c para que se verifique $AB = BA$.
- (1,5 puntos) Para $a = b = c = 1$, calcular B^{10} .

Problema 8.4.4 (3 puntos) Sean los puntos

$$A(\lambda, 2, \lambda), \quad B(2, -\lambda, 0), \quad C(\lambda, 0, \lambda + 2)$$

- (1 punto) ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos A , B y C están alineados?
- (1 punto) Comprobar que si A , B y C no están alineados el triángulo que forman es isósceles.
- (1 punto) Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para el valor $\lambda = 0$ y hallar la distancia de este plano al origen coordenadas.

8.5. Septiembre 2007 - Opción A

Problema 8.5.1 (2 puntos) Hallar los puntos de la recta $r : \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{1}$ cuya distancia al plano $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ es igual a 1.

Problema 8.5.2 (2 puntos) Sea consideren las rectas:

$$r : \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x - z = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

Hallar la ecuación continua de la recta que contiene al punto $P(2, -1, 2)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.

Problema 8.5.3 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + (k+1)y + 2z = -1 \\ kx + y + z = k \\ (k-1)x - 2y - z = k+1 \end{cases}$$

se pide:

- a) (2 puntos) Discutirlo según los distintos valores de k .
- b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Problema 8.5.4 (3 puntos)

- a) (1,5 puntos) Hallar los máximos y los mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$$

- b) (1,5 puntos) Determinar una función $F(x)$ tal que su derivada sea $f(x)$ y además $F(0) = 4$.

8.6. Septiembre 2007 - Opción B

Examen de Matemáticas II (Septiembre 2007) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 8.6.1 (2 puntos) Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica

$$XA^2 + BA = A^2$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 8.6.2 (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

se pide:

- a) (1 punto) Calcular a y b de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $ax + y + bz = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el sistema original.
- b) (1 punto) Calcular las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a 4.

Problema 8.6.3 (3 puntos) Sean las rectas

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}, \quad s : \begin{cases} x - 3y - 5 = 0 \\ x - 3z - 8 = 0 \end{cases}$$

- a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s .
- b) (1,5 puntos) Calcular la distancia entre el plano π y la recta s .

Problema 8.6.4 (3 puntos) Sea $g(x)$ una función continua y derivable para todo valor real de x , de la que se conoce la siguiente información:

- $g'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, mientras que $g'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 2)$.
- $g''(x) > 0$ para todo $x \in (1, 3)$ y $g''(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.
- $g(-1) = 0$, $g(0) = 2$, $g(2) = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$

Teniendo en cuenta los datos anteriores, se pide:

- a) (1 punto) Analizar razonadamente la posible existencia o no existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.
- b) (1 punto) Dibujar de manera esquemática la gráfica de la función $g(x)$.
- c) (1 punto) Si $G(x) = \int_0^x g(t) dt$ encontrar un valor x_0 tal que su derivada $G'(x_0) = 0$

Capítulo 9

Año 2008

9.1. Modelo 2008 - Opción A

Problema 9.1.1 (2 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

- (1 punto) Hallar sus asíntotas y sus extremos locales.
- (1 punto) Calcular los puntos de inflexión de $f(x)$ y dibujar la gráfica de $f(x)$.

Problema 9.1.2 (2 puntos) Calcular:

- (1 punto) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+n}{1+n} \right)^{1-5n}$
- (1 punto) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} - \sqrt{n^4 - n}}{n + 5}$

Problema 9.1.3 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + mz = m + 2 \\ 2x + (m+1)y + (m+1)z = -m \\ (m+2)x + 3y - (2m+1)z = 3m + 4 \end{cases}$$

- (2 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real m .
- (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Problema 9.1.4 (3 puntos) Sean los puntos $A(1, 0, 2)$ y $B(1, 1, -4)$.

- (1 punto) Determinar las coordenadas de los puntos P y Q que divide al segmento AB en tres partes iguales.

- b) (1 punto) Si P es el punto del apartado anterior más próximo al punto A , determinar la ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a la recta AB .
- c) (1 punto) Determinar la posición relativa del plano π y la recta

$$r : \frac{x-3}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$$

9.2. Modelo 2008 - Opción B

Problema 9.2.1 (2 puntos) Hallar los puntos de la recta $r : \begin{cases} 2x + z = 0 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$ cuya distancia al plano $\pi : 3x + 4y = 4$ es igual a $\frac{1}{3}$.

Problema 9.2.2 (2 puntos) Dados los puntos $A(1, 3, -2)$, $B(2, 2k+1, k)$ y $C(k+1, 4, 3)$, se pide:

- a) (1 punto) Determinar para qué valor de k el triángulo BAC es rectángulo, con el ángulo recto en el vértice A .
- b) (1 punto) Para el valor $k = 0$ hallar el área del triángulo ABC .

Problema 9.2.3 (3 puntos) Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto) Hallar una matriz X tal que $AXA^{-1} = B$.
- b) (1 punto) Calcular A^{10} .
- c) (1 punto) Hallar todas las matrices M que satisfacen

$$(A - M)(A + M) = A^2 - M^2$$

Problema 9.2.4 (3 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } |x| < 2 \\ 1/x^2 & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$$

Se pide:

- a) (1,5 punto) Calcular a y b para que f sea continua y derivable en todo \mathbb{R} .
- b) (1,5 punto) Para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular el área de la región acotada limitada por la gráfica de f el eje horizontal y las rectas $x = 1$, $x = 3$.

9.3. Junio 2008 - Opción A

Problema 9.3.1 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - ay = 2 \\ ax - y = a + 1 \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro a . Resolverlo cuando la solución sea única.
- (1 punto) Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene solución en la que $y = 2$.

Problema 9.3.2 (3 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \begin{cases} x - ay = 2 \\ ay + z = 1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x - z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

se pide:

- (1,5 puntos) Discutir la posición relativa de las dos rectas r , s según los valores del parámetro a .
- (1,5 puntos) Si $a = 1$, calcular la distancia mínima entre las dos rectas r y s .

Problema 9.3.3 (2 puntos) Estudiar los siguientes límites:

- (1 punto) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$
- (1 punto) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x}$

Problema 9.3.4 (2 puntos) Obtener los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x(\ln(x))^2$$

siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x .

9.4. Junio 2008 - Opción B

Problema 9.4.1 (3 puntos) Dada la siguiente matriz de orden n :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

se pide:

- a) (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_2 .
- b) (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_3 .
- c) (2 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_5 .

Problema 9.4.2 (3 puntos)

- a) (1,5 puntos) Para cada valor de $c > 0$, calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función:

$$f(x) = cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1$$

el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 1$.

- b) (1,5 puntos) Hallar el valor de c para el cual el área obtenida en el apartado anterior es mínima.

Problema 9.4.3 (2 puntos) Dados los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, -1)$, $C(0, 1, -2)$ y $D(1, 2, 0)$, se pide:

- a) (0,5 puntos) Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios.
- b) (1 punto) Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A , B y C .
- c) (0,5 puntos) Hallar la distancia del punto D al plano π .

Problema 9.4.4 (2 puntos) Dados el plano $\pi : 3x + 2y - z + 10 = 0$ y el punto $P(1, 2, 3)$, se pide:

- a) (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P .
- b) (0,5 puntos) Hallar el punto Q intersección de π con r .
- c) (0,5 puntos) Hallar el punto R intersección de π con el eje OY .
- d) (0,5 puntos) Hallar el área del triángulo PQR

9.5. Septiembre 2008 - Opción A

Problema 9.5.1 (3 puntos) Dada la función;

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$$

se pide:

a) (2 puntos) Dibujar la gráfica de f , estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

b) (1 punto) Calcular:

$$\int_0^1 f(x) dx$$

Problema 9.5.2 (3 puntos) Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar el rango de A según los valores del parámetro a .

b) (1,5 puntos) Decir cuándo la matriz A es invertible. Calcular la inversa para $a = 1$.

Problema 9.5.3 (2 puntos) Dados los puntos $P(1, 1, 3)$ y $Q(0, 1, 0)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R . Describir dicho conjunto de puntos.

b) (1 punto) Hallar todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican $\text{dist}(P, S) = 2\text{dist}(Q, S)$, donde "dist" significa distancia.

Problema 9.5.4 (2 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}, \quad s : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$$

hallar la ecuación de la recta t perpendicular común a ambas.

9.6. Septiembre 2008 - Opción B

Problema 9.6.1 (3 puntos)

a) (1,5 puntos) Calcular:

$$\int x^3 \ln(x) dx$$

donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x .

b) (1,5 puntos) Utilizar el cambio de variable

$$x = e^t - e^{-t}$$

para calcular:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx$$

Indicación : Para deshacer el cambio de variable utilizar:

$$t = \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \right)$$

Problema 9.6.2 (3 puntos) Dados el plano:

$$\pi_1 : x + y + z = 1$$

y la recta:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$$

se pide:

- (1 punto) Hallar el punto P determinado por la intersección de r con π_1 .
- (2 puntos) Hallar el plano π_2 paralelo a π_1 y tal que el segmento de la recta r comprendido entre los planos π_1 , π_2 tenga longitud $\sqrt{29}$ unidades.

Problema 9.6.3 (2 puntos) Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3v = -4 \\ x + 2y + z + 3v = 4 \\ 2x - 4y + 2z - 6v = -8 \\ 2x \quad \quad + 2z = 0 \end{cases}$$

Problema 9.6.4 (2 puntos) El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

Capítulo 10

Año 2009

10.1. Modelo 2009 - Opción A

Problema 10.1.1 (3 puntos) Dados el plano $\pi : x + 2y - z = 2$, la recta:

$$r : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{4}$$

y el punto $P(-2, 3, 2)$, perteneciente al plano π , se pide:

- (0,5 puntos) Determinar la posición relativa de π y r .
- (1 punto) Calcular la ecuación de la recta t contenida en π , que pasa por el punto P y que corta perpendicularmente a r .
- (1,5 puntos) Sea Q el punto intersección de r y t . Si s es la recta perpendicular al plano π y que contiene a P , y R es un punto cualquiera de s , probar que la recta determinada por R y Q es perpendicular a r .

Problema 10.1.2 (3 puntos) Sea:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{4} & \text{si } x < \frac{3}{2} \\ \frac{7}{12} (1 - (x-2)^2) & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

- (1 punto) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$.
- (1 punto) Hallar los máximos y mínimos locales de $f(x)$
- (1 punto) Dibujar la gráfica de $f(x)$.

Problema 10.1.3 (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2k \\ 3x - 5y = k \end{cases}$$

- a) (1 punto) Discutirlo según los distintos valores del parámetro k .
- b) (1 punto) Resolverlo en los casos en que sea posible.

Problema 10.1.4 (2 puntos) Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2(x^2 - 1) & x + 1 & (x + 1)^2 \\ x - 1 & x + 1 & x + 1 \\ (x - 1)^2 & x - 1 & x^2 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

10.2. Modelo 2009 - Opción B

Problema 10.2.1 (3 puntos) Dados el punto $P(1, -1, 2)$ y el plano $\pi : 2x - y + z = 11$, se pide:

- a) (1,5 puntos) Determinar el punto Q de intersección del plano π con la recta perpendicular a π que pasa por P . Hallar el punto simétrico del punto P respecto del plano π .
- b) (1,5 puntos) Obtener la ecuación del plano paralelo al plano π que contiene al punto H que se encuentra a $5\sqrt{6}$ unidades del punto P en el sentido del vector \overrightarrow{PQ} .

Problema 10.2.2 (3 puntos) Si $A = (C_1, C_2, C_3)$ es una matriz cuadrada de orden 3 con columnas C_1, C_2, C_3 , y se sabe que $\det(A) = 4$, se pide:

- a) (1 punto) Calcular $\det(A^3)$ y $\det(3A)$.
- b) (2 puntos) Calcular $\det(B)$ y $\det(B^{-1})$, siendo $B = (2C_3, C_1 - C_2, 5C_1)$ la matriz cuyas columnas son:

$$2C_3, C_1 - C_2, 5C_1$$

Problema 10.2.3 (2 puntos) Sea:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$$

- a) (1 punto) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.
- b) (1 punto) Estudiar cuándo se verifica que $f'(x) = 0$. Puesto que $f(1) = f(-1)$, ¿existe contradicción con el teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$?

Problema 10.2.4 (3 puntos) Sea

$$f(x) = \begin{cases} (x - 1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x . Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de $f(x)$, y por la recta $y = 1$.

10.3. Junio 2009 - Opción A

Problema 10.3.1 (3 puntos) Dado el plano $\pi : x + 3y + z = 4$, se pide:

- (1 punto) Calcular el punto simétrico P del punto $O(0, 0, 0)$ respecto del plano π .
- (1 punto) Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano $z = 0$.
- (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π , y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Problema 10.3.2 (3 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} 4x + 4\lambda y + 2z = 2\lambda \\ \lambda x + y - \lambda z = \lambda \\ 4\lambda x + 4\lambda y + \lambda z = 9 \end{cases},$$

Se pide:

- (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ .
- (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

Problema 10.3.3 (2 puntos) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8} \right)^{(x+1)}$$

según los valores del parámetro α

Problema 10.3.4 (2 puntos) Calcular la integral:

$$F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t} dt$$

10.4. Junio 2009 - Opción B

Problema 10.4.1 (3 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}, \quad s : \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1},$$

se pide:

- (1 punto) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s .

- b) (1 punto) Determinar la distancia entre las rectas r y s .
- c) (1 punto) Estudiar si la recta t paralela a r y que pasa por $O(0,0,0)$ corta a la recta s .

Problema 10.4.2 (3 puntos) Si la derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = (x - 1)^3(x - 5)$$

Obtener:

- a) (1 punto) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
- b) (1 punto) Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión.
- c) (1 punto) La función f sabiendo que $f(0) = 0$

Problema 10.4.3 (2 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = \lambda \\ \lambda x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

- a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ
- b) (0,5 punto) Resolver el sistema cuando sea posible

Problema 10.4.4 (2 puntos) Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

se pide:

- a) (1 punto) Estudiar el rango de A según los distintos valores del parámetro a .
- b) (1 punto) Obtener la matriz inversa de A para $a = -1$

10.5. Septiembre 2009 - Opción A

Problema 10.5.1 (3 puntos) Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

- a) (1,25 puntos) Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M es invertible.
- b) (0,5 puntos) Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M^{25} es invertible.
- c) (1,25 puntos) Para $m = -1$ calcular, si es posible, la matriz inversa M^{-1} de M .

Problema 10.5.2 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} & \text{si } 1+ax > 0 \text{ y } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

Se pide:

- a) (1,5 puntos) Hallar los valores de los parámetros a , b para los cuales la función f es continua en $x = 0$.
- b) (1,5 puntos) Para $a = b = 1$, estudiar si la función f es derivable en $x = 0$ aplicando la definición de derivada.

Problema 10.5.3 (2 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{a}, \quad s : \frac{x-3}{b} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1},$$

determinar los valores de los parámetros a , b para los cuales las rectas r , s se cortan perpendicularmente.

Problema 10.5.4 (2 puntos) Dado el plano $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ hallar las ecuaciones de los planos paralelos a π que se encuentran a 3 unidades de π .

10.6. Septiembre 2009 - Opción B

Problema 10.6.1 (3 puntos)

- a) (1 punto) Dada la función:

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2},$$

hallar el punto o los puntos de la gráfica de $f(x)$ en los que la pendiente de la recta tangente sea 1.

- b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 0$.
- c) (1,5 puntos) Sea g una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que $g(0) = 0$, $g(2) = 2$. Demostrar que existe al menos un punto c en el intervalo $(0, 2)$ tal que $g'(c) = 1$.

Problema 10.6.2 (3 puntos) Dada la recta:

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

y el plano $\pi : x + y - 2z + 1 = 0$, hallar la ecuación de la recta s simétrica de la recta r respecto del plano π .

Problema 10.6.3 (2 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} \lambda x + 2y + z = 0 \\ \lambda x - y + 2z = 0 \\ x - \lambda y + 2z = 0 \end{cases},$$

se pide:

- a) (1 punto) Obtener los valores de parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de:

$$x = y = z = 0$$

- b) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = 5$.

Problema 10.6.4 (2 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

obtener una matriz cuadrada X de orden 2 que verifique la ecuación matricial $AXB = A + B$

10.7. Septiembre 2009 - Opción A (Reserva)

Problema 10.7.1 (3 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{1}, \quad s : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-\lambda}{2}$$

se pide:

- a) (1 punto) Determinar para qué valor, o valores, del parámetro λ las rectas r , s se cortan en un punto.

- b) (1 punto) Para $\lambda = 23$ calcular las coordenadas del punto P intersección de las rectas r , s .
- c) (1 punto) Para $\lambda = 23$ hallar la ecuación general del plano π determinado por las rectas r y s .

Problema 10.7.2 (3 puntos) Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

- a) (1 punto) $f(x) = (2x)^{3x}$.
- b) (1 punto) $g(x) = \cos \frac{\pi}{8}$.
- c) (1 punto) $h(x) = \int_{5\pi}^{6\pi} e^{\cos t} dt$.

Problema 10.7.3 (2 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = \sqrt{3} \\ 3x + 2z = 2\sqrt{5} \end{cases}$$

se pide:

- a) (1 punto) Añadir, de forma razonada, una tercera ecuación para que el sistema resultante sea compatible determinado.
- b) (1 punto) Añadir, de forma razonada, una tercera ecuación para que el sistema resultante sea compatible indeterminado.

Problema 10.7.4 (2 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz X que verifique la ecuación matricial $XB = A + B$

10.8. Septiembre 2009 - Opción A (Reserva)

Problema 10.8.1 (3 puntos) Se pide:

- a) (1 punto) Demostrar que si tres vectores v_1 , v_2 y v_3 son perpendiculares entre sí entonces se verifica que:

$$|\vec{v}_1 + v_2 + \vec{v}_3|^2 = |\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2 + |\vec{v}_3|^2,$$

donde $|w|$ denota módulo del vector \vec{w}

- b) (1 punto) Dados los vectores $\vec{v}_1(1, 1, -1)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 1)$ hallar un vector \vec{v}_3 tal que:

$$|\vec{v}_1 + v\vec{v}_2 + \vec{v}_3|^2 = |\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2 + |\vec{v}_3|^2.$$

- c) (1 punto) Dado el vector $\vec{v}(1, 2, 3)$, hallar los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 que cumplan las tres condiciones siguientes:

- \vec{v}_1 tiene sus tres coordenadas iguales y no nulas;
- \vec{v}_1 es perpendicular a \vec{v}_2 ;
- $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Problema 10.8.2 (3 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} (m+1)x + y + z = 0 \\ x + (m+1)y + z = m \\ x + y + (m+1)z = m^2 \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro m .
- (1 punto) Resolver el sistema para $m = 0$.

Problema 10.8.3 (2 puntos) Sabiendo que el volumen de un cubo de lado a es $V(a) = a^3$ centímetros cúbicos, calcular el valor mínimo de $V(x) + V(y)$ si $x + y = 5$.

Problema 10.8.4 (2 puntos) Calcular las siguientes integrales:

a) (1 punto) $\int (2x + 1)^3 dx, \int x^3 e^{x^4} dx$

b) (1 punto) $\int 2^x dx, \int \frac{1 + x + x^4}{x^3} dx$

Capítulo 11

Año 2010

11.1. Modelo 2010 - Opción A

Problema 11.1.1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = e^x + a e^{-x},$$

siendo a un número real, estudiar los siguientes apartados en función de a :

- (1,5 puntos) Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
- (1 punto) Estudiar para que valor, o valores, de a la función f tiene alguna asíntota horizontal.
- (0,5 puntos) Para $a \geq 0$, hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f , el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

Problema 11.1.2 (3 puntos) Se consideran las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

$$s \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

- (1,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta t que corta a r y s , y que contiene al origen de coordenadas.
- (1,5 puntos) Determinar la mínima distancia entre las rectas r y s .

Problema 11.1.3 (2 puntos) Obtener, para todo número natural n , el valor de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Problema 11.1.4 (2 puntos) Discutir razonadamente, en función del parámetro k , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + ky + z = k + 2 \\ kx + y + z = k \\ x + y + kz = -2(k + 1) \end{cases}$$

11.2. Modelo 2010 - Opción B

Problema 11.2.1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = x^3 - x$$

Se pide:

- (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, f(-1))$.
- (1 punto) Determinar los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de f .
- (1 punto) Calcular el área de la región acotada que está comprendida entre la gráfica de f y la recta obtenida en el apartado anterior.

Problema 11.2.2 (3 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ x + \lambda y + z = 4 \\ -\lambda x + y + z = -5 \end{cases}$$

- (1 punto) Discutirlo para los distintos valores del parámetro λ
- (1 punto) Resolverlo cuando el sistema sea compatible indeterminado.
- (1 punto) Resolverlo para $\lambda = -2$.

Problema 11.2.3 (2 puntos) Dados los puntos $A(2, 2, 3)$ y $B(0, -2, 1)$, hallar el punto, o los puntos, de la recta:

$$r \equiv \frac{x - 2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z - 4}{2}$$

que equidistan de A y de B .

Problema 11.2.4 (2 puntos) Dados el plano $\pi \equiv 5x - 4y + z = 0$ y la recta:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

contenida en π , obtener la recta s contenida en π que es perpendicular a r , y que pasa por el origen de coordenada $O(0, 0, 0)$.

11.3. General-Junio 2010 - Opción A

Problema 11.3.1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$$

se pide:

- (0,75 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- (0,75 puntos) Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$.
- (0,75 puntos) Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de $f(x)$.
- (0,75 puntos) Hallar el área del recinto acotado que limitan la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $y = x + 2$, $x = 1$.

Problema 11.3.2 (3 puntos) Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-1}, \quad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$$

se pide:

- (2 puntos) Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s .
- (1 punto) Calcular la mínima distancia entre las rectas r y s .

Problema 11.3.3 (2 puntos) Dado el sistema homogéneo de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ x - 4y + kz = 0 \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto) Determinar para qué valores del parámetro k el sistema tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$.
- (1 punto) Resolverlo para el caso de $k = 3$.

Problema 11.3.4 (2 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (1 punto) Hallar dos constantes a y b , tales que $A^2 = aA + bI$.
- (1 punto) Sin calcular explícitamente A^3 y A^4 , y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5 .

11.4. General-Junio 2010 - Opción B

Problema 11.4.1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x} & \text{si } x > 0 \\ x + k & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x , se pide:

- (1 punto) Determinar el valor de k para que la función sea continua en \mathbf{R} .
- (1 punto) Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Problema 11.4.2 (3 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + ay - z = a \\ ax + 2z = -2 \\ x + z = -2 \end{cases}$$

- (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro a .
- (1 punto) Resolverlo en el caso de $a = 0$.

Problema 11.4.3 (2 puntos) Dadas las rectas:

$$r \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}, \quad s \equiv \begin{cases} x + z = 3 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto) Hallar la ecuación del plano π determinado por r y s .
- (1 punto) Hallar la distancia desde el punto $A(0, 1, -1)$ a la recta s .

Problema 11.4.4 (2 puntos) Sea el plano π que contiene a los puntos $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 2, 0)$ y $R(0, 0, 3)$. Se pide:

- (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos P , Q y R .
- (1 punto) Calcular las coordenadas del punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π .

11.5. Específica-Junio 2010 - Opción A

Problema 11.5.1 (3 puntos) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$, y utilizando las propiedades de los determinantes, calcular:

a) (1 punto) El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4$

b) (1 punto) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix}$

c) (1 punto) $\begin{vmatrix} 3\alpha + 2 & 3\beta + 4 & 3\gamma + 6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha + 6 & \beta & \gamma + 3 \end{vmatrix}$

Problema 11.5.2 (3 puntos) Dadas la recta:

$$r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$$

y el punto $P(2, 0, -1)$, se pide:

- (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta r .
- (2 puntos) Hallar las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de la recta r .

Problema 11.5.3 (2 puntos) Hallar:

a) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x} \right]^{25}$

b) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+4x^3)^{2/x^3}$

Problema 11.5.4 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \ln(x^2+4x-5)$, donde \ln significa logaritmo neperiano, se pide:

- (1 punto) Determinar el dominio de definición de $f(x)$ y las asíntotas verticales de su gráfica.
- (1 punto) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

11.6. Específica-Junio 2010 - Opción B

Problema 11.6.1 (3 puntos) Dadas las funciones:

$$y = 9 - x^2, \quad y = 2x + 1$$

se pide:

- (1 punto) Dibujar las gráficas de las dos funciones identificando el recinto acotado por ellas.
- (1 punto) Calcular el área de dicho recinto acotado.
- (1 punto) Hallar el volumen de un cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX el recinto acotado por la gráfica de $y = 9 - x^2$ y el eje OX .

Problema 11.6.2 (3 puntos) Dados el plano $\pi \equiv 2x + ay + 4z + 25 = 0$ y la recta:

$$r \equiv x + 1 = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 3}{5}$$

se pide:

- (1 punto) Calcular los valores de a para los que la recta r está contenida en el plano π .
- (1 punto) Para el valor de $a = -2$, hallar el punto (o los puntos) que pertenecen a la recta perpendicular a π que pasa por $P(-3/2, 0, -11/2)$, y que dista (o distan) $\sqrt{6}$ unidades de π .
- (1 punto) Para $a = -2$, halla el seno del ángulo que forman r y π .

Problema 11.6.3 (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + my + 3z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \\ 5x + (m + 1)y + z = 9 \end{cases}$$

- (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro m .
- (0,5 puntos) Resolver el sistema para el caso de $m = 0$.

Problema 11.6.4 (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ estudiar para que valores de a tiene inversa y calcularla siempre que sea posible.

11.7. General-Septiembre 2010 - Opción A

Problema 11.7.1 (3 puntos) Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (2 puntos). Estudiar el rango de A según los valores del parámetro m
- (1 punto). En el caso de $m = 0$, resolver el sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Problema 11.7.2 (3 puntos) Dadas las rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos). Hallar la ecuación de la recta t que corta a r_1 y r_2 y es perpendicular a ambas.
- (1 punto). Hallar la mínima distancia entre las rectas r_1 y r_2 .

Problema 11.7.3 (2 puntos) Calcular los límites:

- (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan x)^{a/x}$
- (1 punto). $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2e^x}{7x + 5e^x}$.

Problema 11.7.4 (2 puntos) Calcular:

- (1 punto). $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$
- (1 punto). $\int_0^\pi x \cos x dx$

11.8. General-Septiembre 2010 - Opción B

Problema 11.8.1 (3 puntos) Dados el plano

$$\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a$$

y el plano π_2 determinado por el punto $P(0, 2, 4)$ y los vectores $v_1 = (0, 2, 6)$ y $v_2 = (1, 0, b)$, se pide:

- (1 punto). Calcular los valores de a y b para que π_1 y π_2 sean paralelos.
- (1 punto). Para $a = 1$ y $b = 0$ determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2 .
- (1 punto). Para $a = 4$ y $b = -2$ determinar los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2 .

Problema 11.8.2 (3 puntos) Los puntos $P(1, 2, 1)$, $Q(2, 1, 1)$ y $A(a, 0, 0)$ con $a > 3$, determinan un plano π que corta a los semiejes positivos de OY y OZ en los puntos B y C respectivamente. Calcular el valor de a para que el tetraedro determinado por los puntos A , B , C y el origen de coordenadas tenga volumen mínimo.

Problema 11.8.3 (2 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto). Estudiar la compatibilidad del sistema
- (0,5 puntos). Añadir una ecuación para que el sistema sea compatible determinado. Razonar la respuesta.
- (0,5 puntos). Añadir una ecuación para que el sistema sea incompatible. Razonar la respuesta.

Problema 11.8.4 (2 puntos) Dada la matriz:

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- (1 punto). Estudiar el rango de A según los valores del parámetro a .
- (1 punto). ¿Para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1} ? Calcular A^{-1} para $a = 1$.

11.9. Específica-Septiembre 2010 - Opción A

Problema 11.9.1 (3 puntos) Se consideran las rectas:

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

Determinar la ecuación de la recta t que pasa por el punto $P(0, 1, -2)$ y corta a las rectas r y s .

Problema 11.9.2 (3 puntos) El sistema $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 5 & a \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

tiene diferentes soluciones según sea la matriz B

a) (1 punto). Determinar, si existen, el valor o valores de a para los que el sistema es compatible determinado (independientemente del valor de B).

b) (0,5 puntos). Si $a = 4$, y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{pmatrix}$, determinar, si existen, el valor o los valores de b para los que el sistema es incompatible.

c) (1,5 puntos). Si $a = 4$, y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 10 \end{pmatrix}$, determinar, si existen, el valor o los valores de c para los que el sistema es compatible indeterminado. Resolver el sistema.

Problema 11.9.3 (2 puntos) Obtener el valor de a para que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \right)^{ax^2} = 4$$

Problema 11.9.4 (2 puntos) Hallar:

a) (0,5 puntos). $\int_{14}^{16} (x - 15)^8 dx$

b) (1,5 puntos). $\int_9^{11} (x - 10)^{19}(x - 9) dx$

11.10. Específica-Septiembre 2010 - Opción B

Problema 11.10.1 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + kz = k \\ x + ky + z = k^2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro k .
- (1 punto). Resolverlo para $k = 0$.

Problema 11.10.2 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5}$$

se pide:

- (1,5 puntos). Estudiar y obtener las asíntotas.
- (1 punto). Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad.
- (0,5 puntos). Representar gráficamente la función.

Problema 11.10.3 (2 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \begin{cases} 2x + y - z = -2 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \quad s : \frac{x + 1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z - 1}{2}$$

Se pide:

- (1 punto). Dados los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(a, 3, -3)$, determinar el valor de a para que la recta t que pasa por los puntos A y B , sea paralela a s .
- (1 punto). Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s .

Problema 11.10.4 (2 puntos) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos:

$$\pi_1 : 5x - y - 7z = 1, \quad \pi_2 : 2x + 3y + z = 5$$

Capítulo 12

Año 2011

12.1. Modelo 2011 - Opción A

Problema 12.1.1 (3 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} \lambda x & + & \lambda z = & 2 \\ x + & \lambda y - & z = & 1 \\ x + & 3y + & z = & 2\lambda \end{cases}$$

se pide:

- (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro λ
- (1,5 puntos). Resolver el sistema para $\lambda = 1$.

Problema 12.1.2 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

se pide:

- (1,5 puntos). Obtener, si existen, los máximos y mínimos relativos, y las asíntotas.
- (1,5 puntos). Calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f , el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 3$.

Problema 12.1.3 (2 puntos) Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}, \quad s \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{1}$$

se pide:

- (1 punto). Estudiar la posición relativa de las rectas r y s .

- b) (1 punto). Determinar la ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s .

Problema 12.1.4 (2 puntos) Dados los planos $\alpha \equiv 2x + y + 2z + 1 = 0$ y $\beta \equiv x - 2y + 6z = 0$, se pide:

- a) (1 punto). Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r determinada por la intersección de α con β .
- b) (1 punto). Determinar el plano γ que es paralelo al plano α y pasa por el punto $(\sqrt{2}, 1, 0)$

12.2. Modelo 2011 - Opción B

Problema 12.2.1 (3 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) (1 punto). Calcular $A^2 - 4A + 3I$
- b) (1 punto). Demostrar que la matriz inversa A^{-1} de A es $\frac{1}{3}(4I - A)$.
- c) (1 punto). Hallar la matriz inversa de la matriz $A - 2I$.

Problema 12.2.2 (3 puntos) Dados los puntos $A(1, -3, 0)$, $B(3, 1, -2)$, $C(7, 2, 3)$, $D(5, -2, 5)$ y $E(1, 0, 2)$, se pide:

- a) (1 punto). Demostrar que los puntos A , B , C y D son coplanarios.
- b) (1 punto). Demostrar que el polígono $ABCD$ es un paralelogramo y calcular su área.
- c) (1 punto). Hallar la distancia del punto E al plano π determinado por los puntos A , B , C y D

Problema 12.2.3 (2 puntos) Calcular los siguientes límites:

- a) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x}$
- b) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}{x}$

Problema 12.2.4 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{1}{2} - \sin x$, calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f , el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

12.3. Junio 2011 - Opción A

Problema 12.3.1 (3 puntos) Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) (1 punto). Calcular el rango de A en función de los valores de a .
- b) (1 punto). En el caso de $a = 2$, discutir el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ en función de los valores de b , y resolverlo cuando sea posible.
- c) (1 punto). En el caso de $a = 1$, resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Problema 12.3.2 (3 puntos)

- a) (1,5 puntos). Hallar el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas

$$r_1 \equiv x = y = z, \quad r_2 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad r_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

con el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24$.

- b) (1,5 puntos). Hallar la recta s que corta perpendicularmente a las rectas

$$r_4 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-2}, \quad r_5 \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

Problema 12.3.3 (2 puntos) Se pide:

- a) (1 punto). Calcular la integral $\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2} dx$.
- b) (1 punto). Hallar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = \sqrt{12-3x^2}$.

Problema 12.3.4 (2 puntos) Se pide:

a) (1 punto). Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

b) (1 punto). Demostrar que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ sólo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número m . Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan.

12.4. Junio 2011 - Opción B

Problema 12.4.1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{ax^4 + 1}{x^3}$$

Se pide:

- a) (1 punto). Determinar el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x = 1$. Para este valor de a obtener los otros puntos en que f tiene un extremo relativo.
- b) (1 punto). Obtener las asíntotas de de la gráfica de $y = f(x)$ para $a = 1$.
- c) (1 punto). Esbozar la gráfica de la función para $a = 1$.

Problema 12.4.2 (3 puntos)

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema de ecuaciones $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & (m-1) \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m+2 \end{pmatrix}$$

según los valores de m .

b) (1,5 puntos). Resolver el sistema en los casos $m = 0$ y $m = 1$.

Problema 12.4.3 (3 puntos) Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + y - 2z = 1, \quad \pi_2 \equiv x - y + 2z = 1$$

se pide:

a) (0,5 puntos). Estudiar su posición relativa.

- b) (1,5 puntos). En caso de que los planos sean paralelos hallar la distancia entre ellos, en caso de que se corten, hallar un punto y un vector de dirección de la recta que determinan.

Problema 12.4.4 (2 puntos) Se pide:

- a) (0,75 puntos). Hallar la ecuación del plano π_1 que pasa por los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.
- b) (0,75 puntos). Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene al punto $P(1, 2, 3)$ y es perpendicular al vector $\vec{v} = (-2, 1, 1)$.
- c) (0,5 puntos). Hallar el volumen del tetraedro de vértices A , B , C y P .

12.5. Septiembre 2011 - Opción A

Problema 12.5.1 (3 puntos).

- a) (1 punto) Calcular los límites:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}}$$

- b) (1 punto) Calcular la integral: $\int_0^1 \frac{x}{1 + 3x^2} dx$

- c) (1 punto) Hallar el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 9x + 14}$. Hallar el conjunto de puntos en los que la función f tiene derivada.

Problema 12.5.2 (3 puntos). Dados los planos

$$\pi_1 : 2x + 3y + z - 1 = 0; \quad \pi_2 : 2x + y - 3z - 1 = 0,$$

y la recta

$$r : \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z+2}{2};$$

se pide:

- a) (1 punto). El punto o puntos de r que equidistan de π_1 y π_2 .
- b) (1 punto). El volumen del tetraedro que π_1 forma con los planos coordenados XY , XZ e YZ .
- c) (1 punto). La proyección ortogonal de r sobre el plano π_2 .

Problema 12.5.3 (2 puntos). Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \\ a+2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro a .

Problema 12.5.4 (2 puntos). Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz M .
- (1 punto). Hallar la matriz M^2 .
- (0,5 puntos). Hallar la matriz M^{25} .

12.6. Septiembre 2011 - Opción B

Problema 12.6.1 (3 puntos). Dado el punto $P(0, 1, 1)$ y las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}, \quad s : \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

se pide:

- (1'5 puntos). Determinar las coordenadas del punto simétrico de P respecto a r .
- (1'5 puntos). Determinar la recta que pasa por el punto P , tiene dirección perpendicular a la recta r y corta a la recta s .

Problema 12.6.2 (3 puntos). Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + 4y & = 4k \\ -k^3x + k^2y + kz & = 0 \\ x + ky & = k^2 \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos). Discutirlo en función del valor del parámetro k .
- (0'5 puntos). Resolver el sistema para $k = 1$.

c) (0'5 puntos). Resolver el sistema para $k = 2$.

Problema 12.6.3 (2 puntos). Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x = 0 \\ \frac{\cos x - 1}{\sin x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

hallar el valor de k para que f sea continua en $x = 0$. Justificar la respuesta.

Problema 12.6.4 (2 puntos).

- (1 punto). Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x) = -\sin x$ y el eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.
- (1 punto). Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de $f(x) = -\sin x$ alrededor del eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

www.musat.net

Capítulo 13

Año 2012

13.1. Modelo 2012 - Opción A

Problema 13.1.1 (3 puntos) Dados los puntos $A(1, -1, 2)$, $B(2, 0, -1)$, $C(0, 1, 3)$, se pide:

- (2 puntos). Hallar todos los puntos que equidistan de A , B y C . ¿Cuales de ellos pertenecen al plano $\pi : 2x + 2y + 2z + 1 = 0$?
- (1 punto). Hallar la ecuacion del plano que pasa por A , B y C .

Problema 13.1.2 (3 puntos) Dado el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -3x + 2y + 3z = -2 \\ 2x + my - 5z = -4 \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de m .
- (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.

Problema 13.1.3 (2 puntos) Halla el valor de λ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda x^2} - 1}{3x^2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{\sin 2x}{x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

sea continua. Razonar la respuesta.

Problema 13.1.4 (2 puntos) Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, obtener los valores de a , b y c de modo que se verifiquen las condiciones siguientes:

- El polinomio $P(x)$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisas $x = -1/3, x = -1$.
- La recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto $(0, P(0))$ sea $y = x + 3$.

13.2. Modelo 2012 - Opción B

Problema 13.2.1 (3 puntos) Sabiendo que la función $F(x)$ tiene derivada $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[2, 5]$, y, además, que:

$$F(2) = 1, \quad F(3) = 2, \quad F(4) = 6, \quad F(5) = 3, \quad f(3) = 3 \quad \text{y} \quad f(4) = -1;$$

Hallar:

- (0,5 puntos). $\int_2^5 f(x) dx$
- (1 punto). $\int_2^3 (5f(x) - 7) dx$
- (1,5 puntos). $\int_2^4 F(x)f(x) dx$.

Problema 13.2.2 (3 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + y = -a \\ -3x + 2ay = 7 \end{cases}$$

se pide:

- (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro a .
- (1,5 puntos). Resolver el sistema cuando sea compatible..

Problema 13.2.3 (3 puntos) Dados los planos de ecuaciones:

$$\pi : x - 2y + 2z + 4 = 0, \quad \pi' : 2x + 2y - z - 2 = 0$$

se pide:

- (1 punto). Obtener la ecuación en forma continua de la recta que determinan.
- (1 punto). Hallar todos los puntos que equidistan de π y π' .

Problema 13.2.4 (2 puntos) Dadas las rectas

$$r : \frac{x+3}{-6} = \frac{y-9}{4} = \frac{z-8}{4}, \quad s : \frac{x-3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{-2}$$

se pide:

- (1 punto). Hallar la posición relativa de las rectas r y s .
- (1 punto). Hallar la distancia mínima entre r y s .

13.3. Junio 2012 - Opción A

Problema 13.3.1 (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

se pide:

- (1,5 puntos) Hallar el rango de A en función de los valores de k .
- (0,75 puntos) Para $k = 2$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = B$.
- (0,75 puntos) Para $k = 1$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = C$.

Problema 13.3.2 (3 puntos) Dados los puntos $P_1(1, 3, -1)$, $P_2(a, 2, 0)$, $P_3(1, 5, 4)$ y $P_4(2, 0, 2)$, se pide:

- (1 punto). Hallar el valor de a para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.
- (1 punto). Hallar los valores de a para que el tetraedro con vértices en P_1, P_2, P_3, P_4 tenga volumen igual a 7.
- (1 punto). Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3 .

Problema 13.3.3 (2 puntos) Hallar a, b, c de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x = 3$ un punto de inflexión.

Problema 13.3.4 (2 puntos) Calcular razonadamente las siguientes integrales definidas:

- (1 punto). $\int_0^{\pi} e^{2x} \cos x \, dx$
- (1 punto). $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 2x} \, dx$

13.4. Junio 2012 - Opción B

Problema 13.4.1 (3 puntos) Dadas las funciones

$$f(x) = \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2 - 3}}, \quad g(x) = (\ln x)^x, \quad h(x) = \operatorname{sen}(\pi - x)$$

se pide:

- (1 punto). Hallar el dominio de $f(x)$ y el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (1 punto). Calcular $g'(e)$.
- (1 punto). Calcular, en el intervalo $(0, 2\pi)$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas y las coordenadas de los extremos relativos de $h(x)$.

Problema 13.4.2 (3 puntos) Dadas las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z}{2}, \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 5 \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto). Estudiar su posición relativa.
- (2 puntos). Hallar la mínima distancia de r_1 a r_2 .

Problema 13.4.3 (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2-a & 3+a & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (1 punto). Estudiar el rango de la matriz B en función de a .
- (1 punto). Para $a = 0$, calcular la matriz X que verifica $AX = B$.

Problema 13.4.4 (2 puntos) Calcular el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

13.5. Junio 2012 (Coincidente) - Opción A

Problema 13.5.1 (3 puntos) Dada la función $f(x) = \cos^2 x$, se pide:

- (1 punto). Calcular los extremos relativos de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$
- (1 punto). Calcular los puntos de inflexión de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$
- (1 punto). Hallar la primitiva $g(x)$ de $f(x)$ tal que $g(\pi/4) = 0$.

Problema 13.5.2 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + 2y + (a-1)z = 1 \\ -x + ay + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos). Discutir sus soluciones según los valores de a .
- (1 punto). Hallar la solución del sistema para $a = 1$.

Problema 13.5.3 (2 puntos)

- (1 punto). Dados los puntos $P(2, 1, -1)$, $Q(1, 0, 2)$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

determinar los puntos de r que equidistan de P y Q .

- (1 punto). Determinar la ecuación del plano π que pasa por el punto Q y es perpendicular a r .

Problema 13.5.4 (2 puntos) Una de las caras del paralelepípedo H tiene vértices en los puntos $A(4, 2, 8)$, $B(6, 4, 12)$, $C(6, 0, 10)$ y $D(8, 2, 14)$.

- (1 punto). Si el punto $E(6, 8, 28)$ es otro de los vértices, hallar el volumen de H .
- (1 punto). Hallar el punto E' simétrico de E respecto del plano que contiene a la cara $ABCD$.

13.6. Junio 2012 (Coincidente) - Opción B

Problema 13.6.1 (3 puntos) Dadas la recta r y la familia de rectas s , mediante

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y = -3 \\ z = 1 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} 2x + 2y + z = a \\ x + z = 0 \end{cases},$$

se pide:

- (1,5 puntos). Hallar el valor de a para que ambas rectas se corten. Calcular el punto de corte.
- (1,5 puntos). Hallar la ecuación del plano determinado por ambas rectas cuando estas se cortan.

Problema 13.6.2 (3 puntos). Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1$, calcular los siguientes determinantes:

$$a) (1,5 \text{ puntos}) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3x & y & 2z \\ 6 & 3 & 10 \end{vmatrix}, \quad b) (1,5 \text{ puntos}) \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 2-x & 2-y & -z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Problema 13.6.3 (2 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$$

se pide:

- (1 punto) Hallar $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$
- (1 punto) Hallar $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Problema 13.6.4 (2 puntos)

- (1 punto) Sea $f(x)$ una función continua tal que $\int_1^8 f(u) du = 3$. Hallar

$$\int_1^2 f(x^3)x^2 dx$$

- (1 punto) Hallar el dominio de definición y las abscisas de los puntos donde la función

$$F(x) = \sqrt{(x-3)(9-x)^2}$$

alcanza sus máximos y mínimos relativos.

13.7. Septiembre 2012 - Opción A

Problema 13.7.1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + A & \text{si } x \leq 3 \\ -4 + 10x - x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto). Hallar el valor de A para que $f(x)$ sea continua. ¿Es derivable para ese valor de A ?
- (1 punto). Hallar los puntos en los que $f'(x) = 0$.
- (1 punto). Hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[4, 8]$.

Problema 13.7.2 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + ay + 4z = 6 \\ x + (a+1)y + z = 3 \\ (a-1)x - ay - 3z = -3 \end{cases}$$

se pide:

- (2 punto). Discutir el sistema según los valores de a .
- (1 punto). Resolverlo para $a = -1$.

Problema 13.7.3 (2 puntos) Se dan la recta r y el plano π , mediante

$$r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}, \quad \pi \equiv 2x + y - 2z - 7 = 0$$

Obtener los puntos de la recta cuya distancia al plano es igual a uno.

Problema 13.7.4 (2 puntos) Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}, \quad s \equiv \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + z = 4 \end{cases}$$

se pide:

- (1,5 puntos). Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(2, 3, 4)$ y es paralelo a las rectas r y s .
- (0,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta que pasa por $B(4, -1, 2)$ y es perpendicular al plano hallado anteriormente.

13.8. Septiembre 2012 - Opción B

Problema 13.8.1 (3 puntos) Dado el punto $P(2, 1, -1)$, se pide:

- (0,5 puntos). Hallar el punto P' simétrico de P respecto del punto $Q(3, 0, 2)$.
- (1,25 puntos). Hallar el punto P'' simétrico de P respecto de la recta $r \equiv x - 1 = y - 1 = z$.
- (1,25 puntos). Hallar el punto P''' simétrico de P respecto del plano $\pi \equiv x + y + z = 3$.

Problema 13.8.2 (3 puntos) Dada la función $f(x) = x^2 \sin x$, se pide:

- (1 punto). Determinar, justificando la respuesta, si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $(\pi/2, \pi)$.
- (1 punto). Calcular la integral de f en el intervalo $[0, \pi]$.
- (1 punto). Obtener la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(\pi, f(\pi))$. Recuérdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

Problema 13.8.3 (3 puntos) Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ y $\vec{d} \in R^3$, vectores columna. Si

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) = -1, \quad \det(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) = 3, \quad \det(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = -2$$

calcular razonadamente el determinante de las siguientes matrices:

- (0,5 puntos). $\det(\vec{a}, 3\vec{d}, \vec{b})$.
- (0,75 puntos). $\det(\vec{a} - \vec{b}, \vec{c}, -\vec{d})$.
- (0,75 puntos). $\det(\vec{d} + 3\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{b} - 3\vec{a} + \vec{d})$

Problema 13.8.4 (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - & & 2z = & 2 \\ ax - & y + & z = & -8 \\ 2x + & & az = & 4 \end{cases}$$

se pide:

- (2 punto). Discutir el sistema según los valores de a .
- (1 punto). Resolverlo para $a = -5$.

Capítulo 14

Año 2013

14.1. Modelo 2013 - Opción A

Problema 14.1.1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 3x}{x - 1} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto). Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$.
- (1 punto). Para ese valor de a , estudiar la derivabilidad de f en $x = 0$.
- (1 punto). Hallar, si las tiene, las asíntotas de la gráfica $y = f(x)$.

Problema 14.1.2 (3 puntos) Dado el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + (m + 3)z = 3 \\ x + y + (4 + m - m^2)z = 3 \\ 2x + 4y + 3(m + 2)z = 8 \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de m .
- (1 punto). Resolverlo para $m = 2$.

Problema 14.1.3 (2 puntos)

- (1 punto). Hallar el punto de corte entre el plano $\pi_1 \equiv 6x - y + 3z = -2$ y la recta r que pasa por el punto $P(1; 2; 0)$ y es perpendicular al plano $\pi_2 \equiv 2x + 3y - z = 8$.

b) (1 punto). Hallar el punto común a los tres planos π_3 ; π_4 ; π_5 siguientes:

$$\pi_3 \equiv 5x + 2y + 7z = 4; \quad \pi_4 \equiv x + 2y - 3z = 10$$

y π_5 el plano definido por las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+3}{3} = z+3; \quad r_2 \equiv x+2 = y = \frac{z+7}{2}$$

Problema 14.1.4 (2 puntos) Dados el plano $\pi \equiv x - y + 2z = 1$ y la recta

$$r \equiv \frac{x}{-6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$$

se pide:

- a) (1 punto). Determinar la posición relativa entre el plano π y la recta r .
- b) (1 punto). Determinar el plano que contenga a r y pase por $P(1; 1; 1)$.

14.2. Modelo 2013 - Opción B

Problema 14.2.1 (3 puntos)

a) (1 punto). Hallar, si existe, el punto de corte de las rectas

$$r_1 : \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases} ; \quad r_2 : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

b) (1 punto). Determinar el valor de a para que los planos

$$\begin{array}{ll} \pi_1 : x + 2y + z = 3 & \pi_2 : 2x + 3y - z = 5 \\ \pi_3 : 2x + 2y + 4z = 3 & \pi_4 : x + 3y = a \end{array}$$

tengan un único punto en común.

c) (1 punto). Hallar la recta paralela a los planos

$$\pi_5 : 2x + 5y - z = 2; \quad \pi_6 : 6x - y + z = 8$$

que pasa por el punto $P(1; 5; -3)$.

Problema 14.2.2 (3 puntos)

- a) (0,5 puntos). Representar gráficamente el recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \ln x$ y el eje OX entre las abscisas $x = 1/e$, $x = e$.

- b) (1,25 puntos). Calcular el área de dicho recinto.
- c) (1,25 puntos). Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar dicho recinto alrededor del eje OX .

Problema 14.2.3 (2 puntos)

- a) (1 punto). Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ obtener las relaciones que deben cumplir x, y, z, t para que la matriz X verifique $AX = XA$.
- b) (0,5 puntos). Dar un ejemplo de matriz X distinta de la matriz nula y de la matriz identidad que cumpla la igualdad anterior.
- c) (0,5 puntos). Calcular la inversa de la matriz A .

Problema 14.2.4 (2 puntos) De las matrices cuadradas A y B se sabe que:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^2 - AB + BA - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto). Calcular la matriz $A - B$.
- b) (1 punto). Calcular las matrices A y B .

14.3. Junio 2013 - Opción A

Problema 14.3.1 (3 puntos) Dados el punto $P(-1, 0, 2)$ y las rectas

$$r : \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

se pide:

- a) (1 punto). Determinar la posición relativa de r y s .
- b) (1 punto). Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y corta a r y s .
- c) (1 punto). Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s .

Problema 14.3.2 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax + 7y + 5z = 0 \\ x + ay + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos). Discutirlo según los valores de a .
- (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $a = 4$.
- (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $a = 2$.

Problema 14.3.3 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2}$, se pide se

pide:

- (1 punto). Hallar las asíntotas de su gráfica.
- (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Problema 14.3.4 (2 puntos) Calcular las siguientes integrales:

$$1. \int \frac{x-3}{x^2+9} dx \quad 2. \int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3} dx$$

14.4. Junio 2013 - Opción B

Problema 14.4.1 (3 puntos) Dada la función $f(x) = 2 \cos^2 x$, se pide:

- (1 punto). Calcular los extremos absolutos de $f(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- (1 punto). Calcular los puntos de inflexión de $f(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- (1 punto). Calcular $\int_0^{\pi/2} f(x) dx$

Problema 14.4.2 (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) (1 punto). Hallar el valor de λ para el cual la ecuación matricial $XA = B$ tiene solución única.
- b) (1 punto). Calcular la matriz X para $\lambda = 4$.
- c) Calcular el determinante de la matriz A^2B en función de λ .

Problema 14.4.3 (2 puntos)

- a) (1 punto). Hallar los puntos de corte de la recta de dirección $(2, 1, 1)$ y que pasa por el punto $P(4, 6, 2)$ con la superficie esférica de centro $C(1, 2, -1)$ y radio $\sqrt{26}$.
- b) (1 punto). Hallar la distancia del punto $Q(-2, 1, 0)$ a la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z-3}{2}$$

Problema 14.4.4 (2 puntos) Dados el punto $P(1, 0, -1)$, plano $\pi \equiv 2x - y + z - 1 = 0$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} -2x - y - 1 = 0 \\ 3x - z - 3 = 0 \end{cases}$$

se pide:

- a) (1,5 puntos). Determinar la ecuación del plano que pasa por P es paralelo a r y perpendicular al plano π .
- b) (0,5 puntos). Hallar el ángulo entre r y π .

14.5. Junio 2013 (coincidente)- Opción A

Problema 14.5.1 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \lambda x + 2y - 3z = 2\lambda \\ x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

se pide:

- a) (1,5 puntos). Discutirlo según los valores de λ .
- b) (1,5 puntos). Para los valores de λ tales que el sistema tiene solución única, obtener esta solución en función de λ .

Problema 14.5.2 (3 puntos) Dada la familia de rectas $r_a : \begin{cases} z = 0 \\ x - ay - 3 = 0 \end{cases}$, (variando a en \mathbb{R} se obtiene toda la familia), se pide:

- a) (0,75 puntos). Probar que todas las rectas de la familia se cortan en un mismo punto y calcular dicho punto.
- b) (1,5 puntos). Dado el punto $P(0, 0, 1)$, calcular la ecuación del plano π_a que pasa por P y contiene a la recta r_a . Probar que la recta que pasa por P y por el punto $Q(3, 0, 0)$ está contenida en el plano π_a para todos los valores de a .
- c) (0,75 puntos). Determinar para qué valores de a la distancia del punto $O(0, 0, 0)$ al plano de ecuación $x - ay + 3z = 3$ es $1/2$.

Problema 14.5.3 (2 puntos) Dada la función $f(x) = e^{-x} - x$, se pide:

- a) (1 punto). Determinar el polinomio de segundo grado, $P(x) = ax^2 + bx + c$, que verifica simultáneamente las tres condiciones siguientes: $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$, $P''(0) = f''(0)$.
- b) (1 punto). Usar los teoremas de Bolzano y Rolle para demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución real.

Problema 14.5.4 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 0 \\ 1 + xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$,

se pide:

- a) (1 punto). Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$ y estudiar, en ese caso, la derivabilidad de f en $x = 0$.
- b) (1 punto). Calcular, en función de a , la integral $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

14.6. Junio 2013 (coincidente)- Opción B

Problema 14.6.1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

donde \ln significa logaritmo neperiano, se pide:

- a) (1 punto). Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$.
- b) (1 punto). Calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
- c) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' , donde sea posible.

Problema 14.6.2 (3 puntos) Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} 4x + y + 5z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} y - z - 3 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$, se pide:

- (1 punto). Estudiar la posición relativa entre ellas.
- (1 punto). Hallar la mínima distancia entre r y s .
- (1 punto). Hallar el punto simétrico del origen respecto de la recta s .

Problema 14.6.3 (2 puntos) Sean A y B matrices 2 con determinantes: $\det A = 5$, $\det B = 3$. Se pide:

- (0,5 puntos). Hallar $\det [B^{-1}A^2B^2]$
- (0,5 puntos). Hallar $\det \left[A + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \right]$.
- (1 punto). Si c_1 y c_2 son las columnas de la matriz A (es decir, $A = (c_1 \ c_2)$), hallar la solución del sistema:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (c_2)$$

Problema 14.6.4 (2 puntos) Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} -3 & \lambda + 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

- (1 punto). Determinar λ para que A sea invertible.
- (1 punto). Calcular A^{-1} en el caso $\lambda = 1$.

14.7. Septiembre 2013 - Opción A

Problema 14.7.1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2}$$

se pide:

- (0,75 puntos). Hallar las asíntotas de su gráfica.
- (1,75 puntos). Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcular sus puntos de inflexión.
- (0,5 puntos). Esbozar la gráfica de la función.

Problema 14.7.2 (3 puntos) Dadas la matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}; \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (1,5 puntos). Calcular el determinante de A . Determinar el rango de A según los valores de a .
- (0,5 puntos). Resolver el sistema homogéneo $AX = O$ en el caso $a = 1$.
- (1 punto). Resolver el sistema homogéneo $AX = O$ cuando $a = -1$.

Problema 14.7.3 (2 puntos) Dados los puntos $A(2; -2; 1)$, $B(0; 1; -2)$, $C(-2; 0; -4)$, $D(2; -6; 2)$, se pide:

se pide:

- (1 punto) Probar que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio (tiene dos lados paralelos) y hallar la distancia entre los dos lados paralelos.
- (1 punto) Hallar el área del triángulo ABC .

Problema 14.7.4 (2 puntos) Dados el punto $P(1; 2; -1)$ y el plano $\pi \equiv x + 2y - 2z + 2 = 0$, sea S la esfera que es tangente al plano π en un punto P' de modo que el segmento PP' es uno de sus diámetros. Se pide:

- (1 punto). Hallar el punto de tangencia P' .
- (1 punto). Hallar la ecuación de S .

14.8. Septiembre 2013 - Opción B

Problema 14.8.1 (3 puntos) Sean r_A la recta con vector dirección $(1; \lambda; 2)$ que pasa por el punto $A(1; 2; 1)$, r_B la recta con vector dirección $(1; 1; 1)$ que pasa por $B(1; -2; 3)$, y r_C la recta con vector dirección $(1; 1; -2)$ que pasa por $C(4; 1; -3)$. Se pide:

- (1 punto). Hallar λ para que las rectas r_A y r_B se corten.
- (1,5 puntos). Hallar λ para que las rectas r_A sea paralela al plano definido por r_B y r_C .
- (0,5 puntos). Hallar el ángulo que forman r_B y r_C .

Problema 14.8.2 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + \lambda y + \lambda z = 1 - \lambda \\ x + y + (\lambda - 1)z = -2\lambda \\ (\lambda - 1)x + y + z = \lambda - 1 \end{cases}$$

Se pide:

- (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro λ .
- (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $\lambda = 1$.
- (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $\lambda = -1$.

Problema 14.8.3 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, se pide:

- (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$.

- (1 punto). Calcular $\int_0^1 xf(x) dx$.

Problema 14.8.4 (2 puntos) Dada la función $f(x) = e^{1/x}$, se pide:

- (1 punto). Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y estudiar la existencia de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- (1 punto). Esbozar la gráfica $y = f(x)$ determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus asíntotas.

14.9. Septiembre (coincidente) 2013 - Opción A

Problema 14.9.1 (3 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- (1 punto). Calcular la matriz inversa A^{-1} de A .
- (1 punto). ¿Son iguales las matrices $(A^{-1})^2$ y $(A^2)^{-1}$?

- (1 punto). Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ resolver la ecuación matricial

$$AX = B.$$

Problema 14.9.2 (3 puntos) Dado el plano $\pi \equiv x - 2y + z = 6$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{m} = z$, se pide:

- a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y π según los valores de m .
- b) (1 punto). Para $m = -2$, determinar el plano que contiene a r y es perpendicular a π .
- c) (1 punto). Para $m = -2$, determinar el punto de corte de r y π .

Problema 14.9.3 (2 puntos) Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, se pide:

- a) (1,5 puntos). Hallar los valores de a , b y c para que la gráfica de la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$, un punto de inflexión en el de abscisa $x = 2/3$ y corte el eje OY en el punto de ordenada $y = 1$.
- b) (0,5 puntos). ¿Es el extremo relativo un máximo o un mínimo?

Problema 14.9.4 (2 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 25 & \text{si } x \leq 1 \\ 5\sqrt{(2+x)^2 + (5-x)^2} & \text{si } 1 < x < 2 \\ \frac{5 \ln(1+x^2)}{\ln 5} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Se pide:

- a) (1 punto). Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$.
- b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$.

14.10. Septiembre (coincidente) 2013 - Opción B

Problema 14.10.1 (3 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + \alpha}{x^2 + 1}$, se pide:

- a) (1 punto). Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$.
- b) (0,5 puntos). Hallar el valor de α para el que esta recta tangente es horizontal.
- c) (1,5 puntos). Representar gráficamente la función $y = f(x)$ para $\alpha = 2$, estudiando sus asíntotas y su crecimiento y decrecimiento.

Problema 14.10.2 (3 puntos) Dado el haz de planos de \mathbb{R}^3 definido por: $\pi_a \equiv x + 2y + az - 1 = 0$ (al variar a en \mathbb{R} se obtienen todos los planos del haz) y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+3 = \frac{z}{2}$, se pide:

- a) (1 punto). Determinar para qué valores de a la recta r es paralela al plano π_a .
- b) (1 punto). Razonar si hay algún valor de a tal que la recta r es perpendicular al plano π_a , y en caso afirmativo calcular dichos valores de a .
- c) (1 punto). Si $a = 1$, obtener los puntos de la recta r cuya distancia al plano π_1 es $\sqrt{6}$.

Problema 14.10.3 (2 puntos) Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 6 \\ x-1 & 0 & -6 \\ x^2+2 & x & 12 \end{vmatrix} = 6$$

Problema 14.10.4 (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+ & ay- & z = 0 \\ 3x+ & 2y+ & az = 0 \\ 7x+ & 9y+ & 9z = 0 \end{cases}$$

se pide:

- a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores de a .
- b) (0,5 puntos). Resolverlo para $a = 5$.

www.musat.net

Capítulo 15

Año 2014

15.1. Modelo 2014 - Opción A

Problema 15.1.1 (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & k \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (0,5 puntos). Hallar los valores de k para los que existe la matriz inversa A^{-1} .
- (1 punto). Hallar la matriz A^{-1} para $k = 6$.
- (1,5 puntos). Resolver la ecuación matricial $AX - A = B$ para $k = 6$.

Problema 15.1.2 (3 puntos) Dados el punto $P(1; 1; 1)$ y los planos

$$\pi_1 \equiv 3x + ay + z = 0; \quad \pi_2 \equiv ax + y + 2z = 0; \quad \pi_3 \equiv x + y - z = 0;$$

se pide:

- (1 punto). Calcular los valores de a para los que los planos se cortan en una recta.
- (1 punto). Para $a = 2$, hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta intersección de los planos π_1 y π_2 .
- (1 punto). Hallar el punto P' proyección de P sobre el plano π_3 .

Problema 15.1.3 (2 puntos) Calcular los siguientes límites:

a) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}$

b) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0} [1 - \sin x]^{1/x}$

Problema 15.1.4 (2 puntos)

a) (1 punto). Sea $g(x)$ una función derivable que cumple $g(6) = \int_5^6 g(x) dx$.

Hallar

$$\int_5^6 (x - 5)g'(x) dx$$

b) (1 punto). Sea $f(x)$ una función continua que verifica $\int_1^e f(u) du = \frac{1}{2}$.

Hallar

$$\int_0^2 f(e^{x/2})e^{x/2} dx.$$

15.2. Modelo 2014 - Opción B

Problema 15.2.1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 6}{x - 1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

se pide:

- (0,75 puntos). Estudiar su continuidad.
- (1 punto). Estudiar la existencia de asíntotas de su gráfica y, en su caso, calcularlas.
- (1,25 puntos). Hallar los extremos relativos y esbozar de su gráfica.

Problema 15.2.2 (3 puntos)

- a) (1 punto) Determinar si se puede construir un triángulo que tenga dos de sus lados sobre la rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -6 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x + z - 6 = 0 \end{cases}$$

- b) (2 puntos) Encontrar la ecuación de la recta perpendicular común a las dos rectas anteriores.

Problema 15.2.3 (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} (a+2)x + (a+1)y = -6 \\ x + 5y = a \\ x + y = -5 \end{cases}$$

se pide:

- (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores de a .
- (0,5 puntos). Resolverlo cuando sea posible.

Problema 15.2.4 (2 puntos) Sabiendo que el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

es igual a 1, calcular el valor de los determinantes:

a) (1 punto). $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$.

b) (1 punto). $\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

15.3. Junio 2014 - Opción A

Problema 15.3.1 (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (1,5 puntos). Calcula α , β y γ para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $AX = B$.
- (1 punto). Si $\beta = \gamma = 1$ ¿Qué condición o condiciones debe cumplir α para que el sistema lineal homogéneo $AX = O$ sea compatible determinado?
- (0,5 puntos). Si $\alpha = -1$, $\beta = 1$ y $\gamma = 0$, resuelve el sistema $AX = B$.

Problema 15.3.2 (3 puntos) Dados el punto $P(1, 0, 1)$, el plano $\pi \equiv x + 5y - 6z = 1$ y la recta $r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, se pide:

- (1 punto). Calcular el punto P' simétrico a P respecto de π .
- (1 punto). Hallar la distancia de P a r .
- (1 punto). Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ y las intersecciones de π con los ejes coordenados OX , OY y OZ .

Problema 15.3.3 (2 puntos)

- (1 punto). Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto de abscisa $x = -2$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ y que la recta de ecuación $y = 16x + 16$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en dicho punto, determinar:

$$f(-2), \quad f'(-2) \text{ y } f''(-2)$$

- (1 punto). Determinar el área de la región acotada limitada por la gráfica de la función $g(x) = x^4 + 4x^3$ y el eje OX .

Problema 15.3.4 (2 puntos) Calcular justificadamente:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2x - e^x + \sin(3x)}{x^2}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x^2 + 2)(x - 6)}{(x^2 - 1)(2x - 1)}$$

15.4. Junio 2014 - Opción B

Problema 15.4.1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} a + \ln(1 - x) & \text{si } x < 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(donde \ln denota logaritmo neperiano) se pide:

- (1 punto). Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (1 punto). Calcular el valor de a , para que $f(x)$ sea continua en todo \mathbb{R} .
- (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' , donde sea posible.

Problema 15.4.2 (3 puntos) Dados el plano $\pi \equiv 2x - y = 2$, y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$$

- (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y π .
- (1 punto). Determinar el plano que contiene a r y es perpendicular a π .
- (1 punto). Determinar la recta que pasa por $A(-2, 1, 0)$, corta a r , y es paralela a π .

Problema 15.4.3 (2 puntos) Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}, \text{ se pide :}$$

- (1 punto). Hallar el valor o valores de a para que la matriz A tenga inversa.
- (1 punto). Calcular la matriz inversa A^{-1} de A , en el caso $a = 2$.

Problema 15.4.4 (2 puntos) Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado veintidós euros. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y seis bolígrafos, el coste es de catorce euros. Se pide:

- (1 punto). Expresar, en función del precio de un bolígrafo, lo que costaría un cuaderno y lo que costaría un rotulador.
- (1 punto). Calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores.

15.5. Junio 2014 (coincidente)- Opción A

Problema 15.5.1 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x- & y+ & z = & 1 \\ & y- & z = & a \\ x+ & y- & z = & 3a^2 \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos). Discutirlo según los valores de a .
- (1 punto). Resolverlo cuando sea posible.

Problema 15.5.2 (3 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{mx^3 - 1}{x^2}$, se pide:

- (1 punto). Hallar el valor de m para el que f tiene un extremo relativo en $x = 1$.
- (1 punto). Obtener las asíntotas de f para el caso $m = -2$.
- (1 punto). En el caso $m = -2$, estudiar los intervalos de crecimiento de f y calcular los puntos de corte con los ejes. Esbozar la gráfica de f y sus asíntotas.

Problema 15.5.3 (2 puntos) Dado el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 1$, se pide:

- (1 punto). Obtener las rectas que pasan por el origen de coordenadas, son paralelas al plano π y cortan al plano $z = 0$ con un ángulo de 45 grados.
- (1 punto). Hallar la ecuación de la esfera de centro el origen $O(0, 0, 0)$ que es tangente a π .

Problema 15.5.4 (2 puntos) Sean los puntos $A(2, 1, 0)$ y $B(0, 1, -4)$. Se pide:

- (1 punto). Hallar la ecuación del plano π respecto del cual A y B son simétricos.
- (1 punto). Calcular los puntos situados sobre la recta determinada por A y B que están a $\sqrt{6}$ unidades de distancia de $P(2, -1, 1)$.

15.6. Junio 2014 (coincidente)- Opción B

Problema 15.6.1 (3 puntos) Dados el plano $\pi \equiv 5x - 3y + 4z - 10 = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+6}{1} = \frac{z-8}{-3}$, se pide:

- (1 punto). Hallar la distancia de la recta al plano.
- (1 punto). Hallar la proyección del punto $P(5, -2, 1)$ sobre el plano π .
- (1 punto). Hallar la proyección del punto $Q(-1, 7, 3)$ sobre la recta r .

Problema 15.6.2 (3 puntos) Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ tiene determinante igual a 10, se pide calcular justificadamente:

a) (1 punto). El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2a+b & b & c \\ 4 & 2 & 3 \\ 2x+y & y & z \end{pmatrix}$.

b) (1 punto). El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2a & 2b & 2c \end{pmatrix}$.

c) (1 punto). El determinante de la matriz $(BB^t)^3$, donde $B = \begin{pmatrix} a+2 & b+4 & c+6 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$
y B^t es la matriz transpuesta de B .

Problema 15.6.3 (2 puntos) Sea $f(x)$ una función con derivada continua tal que $f(0) = 1$ y $f'(0) = 2$. Se considera la función $g(x) = 2(f(x))^2$ y se pide:

a) (1 punto). Hallar la recta tangente a la curva $y = g(x)$ en $x = 0$.

b) (1 punto). Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{e^{-x} - 1}$.

c) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' , donde sea posible.

Problema 15.6.4 (2 puntos) Calcular:

a) (1 punto). $\int_1^{3/2} \frac{dx}{1-4x^2}$

b) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$, donde \ln denota logaritmo neperiano.

15.7. Septiembre 2014 - Opción A

Problema 15.7.1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4},$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar el dominio de f y sus asíntotas.

b) (1 punto). Calcular $f'(x)$ y determinar los extremos relativos de $f(x)$.

c) (1 punto). Calcular $\int_0^1 f(x) dx$.

Problema 15.7.2 (3 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a-1 & a & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (1 punto). Determinar el valor o valores de a para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1} .
- (1 punto). Para $a = -2$, hallar la matriz inversa A^{-1} .
- (1 punto). Para $a = 1$, calcular todas las soluciones del sistema lineal $AX = O$.

Problema 15.7.3 (2 puntos) Dados los puntos $A(2, 0, -2)$, $B(3, -4, -1)$, $C(5, 4, -3)$ y $D(0, 1, 4)$, se pide:

- (1 punto). Calcular el área del triángulo de vértices A , B y C .
- (1 punto). Calcular el volumen del tetraedro $ABCD$.

Problema 15.7.4 (2 puntos) Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + z - 1 = 0, \quad \pi_2 \equiv x + z + 2 = 0, \quad \pi_3 \equiv x + 3y + 2z - 3 = 0,$$

se pide:

- (1 punto). Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π_1 y π_2 .
- (1 punto). Calcular el seno del ángulo que la recta del apartado anterior forma con el plano π_3 .

15.8. Septiembre 2014 - Opción B

Problema 15.8.1 (3 puntos) Dados el plano π y la recta r siguientes:

$$\pi \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0, \quad r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = 1 + t, \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y π .
- (1 punto). Calcular la distancia entre r y π .
- (1 punto). Obtener el punto P' simétrico de $P(3, 2, 1)$ respecto del plano π .

Problema 15.8.2 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5 \sin x}{2x} + \frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ xe^x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Se pide:

- (1 punto). Hallar, si existe, el valor de a para que $f(x)$ sea continua.
- (1 punto). Decidir si la función es derivable en $x = 0$ para algún valor de a .
- (1 punto). Calcular la integral:

$$\int_1^{\ln 5} f(x) dx,$$

donde \ln denota logaritmo neperiano.

Problema 15.8.3 (2 puntos) Dada la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde B es una matriz cuadrada de tamaño 2×2 , se pide:

- (1 punto). Calcular el valor o valores de a para los que esta ecuación tiene solución.
- (1 punto). Calcular B en el caso $a = 1$.

Problema 15.8.4 (2 puntos) Estudiar el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro a .

www.musat.net

Capítulo 16

Año 2015

16.1. Modelo 2015 - Opción A

Problema 16.1.1 (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & m & m \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (1 punto). Estudiar el rango de A según los valores de m .
- (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz A^{20} .
- (0,75 puntos). Para $m = -2$, resolver el sistema $AX = O$.
- (0,75 puntos). Para $m = 0$, resolver el sistema $AX = B$.

Problema 16.1.2 (3 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$, se pide:

- (0,5 puntos). Hallar el dominio de $f(x)$.
- (1 punto). Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- (1,5 puntos). El área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = \pm 1/2$.

Problema 16.1.3 (2 puntos) Dadas las rectas: $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$; $s :$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = z \end{cases}, \text{ se pide:}$$

- a) (1 punto). Estudiar la posición relativa entre ellas. Determinar, en su caso, la intersección entre ambas y el ángulo que forman sus vectores directores.
- b) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta perpendicular a las direcciones de r y s , y que pasa por el punto $(0, 0, 0)$.

Problema 16.1.4 (2 puntos) Dados los puntos $P_1(1, -1, 2)$, $P_2(2, -3, 0)$ y $P_3(3, 1, 2)$, se pide:

- a) (0,5 puntos). Determinar la ecuación del plano π que contiene los tres puntos.
- b) (0,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta r que pasa por P_1 y es perpendicular a π .
- c) (1 punto). Hallar la ecuación de las dos superficies esféricas de radio $\sqrt{17}$ que son tangentes al plano π en el punto P_1 .

16.2. Modelo 2015 - Opción B

Problema 16.2.1 (3 puntos) Dados el punto $P(1, 2, -1)$ y las rectas:

$$r : \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y - 3z = -2 \end{cases} ; \quad s : \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

se pide:

- a) (1 punto). Calcular la mínima distancia entre r y s .
- b) (1 punto). Determinar el punto P' simétrico de P respecto de r .
- c) (1 punto). Determinar los puntos de la recta r que equidistan de los planos XY e YZ .

Problema 16.2.2 (3 puntos) Hallar

a) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$.

b) (1 punto). $\int (3x + 5) \cos x \, dx$.

- c) (1 punto). Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función

$$f(x) = \frac{ex - e^x}{x}$$

Problema 16.2.3 (2 puntos)

a) (1,5 puntos). Hallar X e Y , matrices 2×2 , tales que

$$X + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) (0,5 puntos). Hallar Z , matriz invertible 2×2 , tal que

$$Z^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 16.2.4 (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} mx + y = 0 \\ x + my = 0 \\ mx + my = 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutirlo según los valores de m .

b) (0,5 puntos). Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

16.3. Junio 2015 - Opción A

Problema 16.3.1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

donde \ln denota logaritmo neperiano, se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.

b) (0,75 puntos) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.

c) (0,75 puntos) Calcular $\int f(x) dx$.

Problema 16.3.2 (3 puntos)

a) (2 puntos). Discutir, según los valores de m , el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 4x + 3y + (m-1)z = 0 \\ x + 2y + mz = 1 \\ 5x + my + z = 1 \end{cases}$$

b) (1 punto). Resolver el sistema anterior para el caso $m = 1$.

Problema 16.3.3 (2 puntos)

- a) (1 punto). Dados vectores $\vec{u} = (2, 3, 4)$, $\vec{v} = (-1, -1, -1)$ y $\vec{w} = (-1, \lambda, -5)$, encontrar los valores de λ que hacen que el paralelepípedo P generado por \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} tenga volumen 6.
- b) (1 punto). Obtener la ecuación de la recta incluida en el plano $z = 0$, con dirección perpendicular a $\vec{u} = (2, -1, 4)$ y que pasa por el punto $(1, 1, 0)$.

Problema 16.3.4 (2 puntos) Dados el plano $\pi : x - 2y + 2z + 1 = 0$ y la superficie esférica $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$, hallar los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano π .

16.4. Junio 2015 - Opción B

Problema 16.4.1 (3 puntos) Dados el punto $P(-4, 6, 6)$, el origen de coordenadas O , y la recta $r : \begin{cases} x = -4 + 4\lambda \\ y = 8 + 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$ se pide:

- a) (1 punto). Determinar un punto Q de la recta r , de modo que su proyección Q' sobre \overline{OP} sea el punto medio de este segmento.
- b) (1 punto). Determinar la distancia de P a r .
- c) (1 punto). ¿Existe algún punto R de la recta r , de modo que los puntos O , P y R estén alineados? En caso afirmativo, encontrar el punto (o los puntos) con esa propiedad o, en caso negativo, justificar la no existencia.

Problema 16.4.2 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \\ xe^x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Se pide:

- a) (1 punto). Estudiar la continuidad de f .
- b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.
- c) (1 punto). Calcular $\int_1^3 f(x) dx$.

Problema 16.4.3 (2 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (1 punto). Calcular A^{15} y A^{20}
- (1 punto). Resolver la ecuación matricial $6X = B - 3AX$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3.

Problema 16.4.4 (2 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix}, \quad e \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{se pide:}$$

- (1,25 puntos). Hallar el rango de A en función de t .
- (0,75 puntos). Calcular t para que $\det(A - tI) = 0$.

16.5. Junio (coincidente)2015 - Opción A

Problema 16.5.1 (3 puntos)

- (2 punto). Determinar los valores a , b , c para que la función $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ ax - b & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x^2 + bx + c & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$ sea continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$.
- (1 punto). Aplicar, si es posible, el Teorema del Valor Medio a la función $g(x) = x^2 + x$ en el intervalo $[1, 2]$ y calcular, en tal caso, un punto de dicho intervalo en el que $g'(x)$ tome el valor predicho por el Teorema del Valor Medio.

Problema 16.5.2 (3 puntos) Dados la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + az = 0 \\ ay - z = 4 \end{cases}$, con $a \in \mathbb{R}$, y el plano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$, se pide:

- (1 punto). Hallar todos los valores de a para los que la recta r es paralela al plano π .
- (1 punto). Para $a = 2$, determinar la distancia de la recta r al plano π .
- (1 punto). Para $a = 1$, hallar el seno del ángulo que forman r y π .

Problema 16.5.3 (2 puntos) Dadas las matrices: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- (1 punto). Calcular la matriz inversa de L .
- (1 punto). Buscar la matriz A , tal que $LAL^t = I$, donde L^t es la traspuesta de L .

Problema 16.5.4 (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$, se pide:

- (1 punto). Estudiar el rango de A , según los valores de m , e indicar para qué valores de m admite inversa la matriz A .
- (1 punto). Sin calcular A^{-1} , hallar m para que $\det(A) = \det(4A^{-1})$.

16.6. Junio (coincidente)2015 - Opción B

Problema 16.6.1 (3 puntos)

- (2 puntos). Discutir el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + my = 7 \\ x - y = 4 \end{cases}$, en función de los valores del parámetro m y hallar la solución del sistema anterior en los casos en los que ésta sea única.
- (1 punto). Encontrar el valor o valores de k que hacen incompatible el sistema

$$\begin{cases} x - y + kz = 2 \\ kx - ky + 4z = -4 \end{cases}$$

Problema 16.6.2 (3 puntos) Dada la función $f(x) = x^2e^{-x}$, se pide:

- (1 punto). Determinar su dominio, asíntotas y cortes con los ejes.
- (1 punto). Calcular su derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.
- (1 punto). Determinar los puntos de inflexión y dibujar la curva $y = f(x)$.

Problema 16.6.3 (2 puntos) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x+1}{2} = y - 5 = -(z+2)$, se pide:

- (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y s .
- (1 punto). Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 6, -3)$, está contenida en el plano que determinan r y s y es perpendicular a r .

Problema 16.6.4 (2 puntos) Dados el plano $\pi \equiv x + y - z + 1 = 0$ y la recta $r \equiv (x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(2, 1, 0)$, se pide:

- (0,5 puntos). Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1, 0, -1)$ y es paralelo a π .
- (1 punto). Determinar la distancia del origen de coordenadas a la recta r .
- (0,5 puntos). Determinar la distancia del origen de coordenadas al plano π .

16.7. Septiembre 2015 - Opción A

Problema 16.7.1 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -mx + my + z = 0 \\ x - my + 3z = 4 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

- (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro m .
- (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 0$.
- (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 2$.

Problema 16.7.2 (3 puntos) La recta r pasa por $P(2, -1, 0)$ y tiene vector director $(1, \lambda, -2)$; la recta s pasa por $Q(1, 0, -1)$ y tiene vector director $(2, 4, 2)$.

- (2 puntos). Calcular $\lambda > 0$ para que la distancia entre r y s sea $\frac{9}{\sqrt{59}}$.
- (1 punto). Calcular λ para que r sea perpendicular a la recta que pasa por P y Q .

Problema 16.7.3 (2 puntos)

- a) (0,5 puntos). Estudiar el crecimiento de la función $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.
- b) (1,5 puntos). Demostrar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución real y localizar un intervalo de longitud 1 que la contenga.

Problema 16.7.4 (2 puntos)

- a) (1 punto). Calcular la integral definida $\int_1^4 (1-x)e^{-x} dx$
- b) (1 punto) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)e^{-x}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^{-x}$

16.8. Septiembre 2015 - Opción B

Problema 16.8.1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} a + x \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ x^2 e^x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(donde \ln denota logaritmo neperiano y a es un número real) se pide:

- a) (1 punto). Calcular el valor de a para que $f(x)$ sea continua en todo \mathbb{R} .
- b) (1 punto). Calcular $f'(x)$ donde sea posible.
- c) (1 punto). Calcular $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

Problema 16.8.2 (3 puntos) Dados los puntos $P(-1, -1, 1)$, $Q(1, 0, 2)$ y los planos

$$\pi_1 \equiv x - z = 0; \quad \pi_2 \equiv my - 6z = 0; \quad \pi_3 \equiv x + y - mz = 0$$

se pide:

- a) (1 punto). Calcular los valores de m para los que los tres planos se cortan en una recta.
- b) (1 punto). Para $m = 3$, hallar la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta de intersección de los planos π_1 y π_2 .
- c) (1 punto). Hallar la distancia entre los puntos Q y P' , siendo P' el punto simétrico de P respecto al plano π_1 .

Problema 16.8.3 (2 puntos) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$ y usando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de los siguientes determinantes:

a) (1 punto). $\begin{vmatrix} 2a - 2b & c & 5b \\ 2d - 2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix}$

b) (1 punto). $\begin{vmatrix} a - 1 & b - 2 & 2c - 6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$

Problema 16.8.4 (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hallar todas las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con A , es decir que cumplen $AB = BA$.

16.9. Septiembre (coincidente)2015 - Opción A

Problema 16.9.1 (3 puntos) Dados los puntos $A(2, 1, 1)$, $B(0, 0, -3)$ y $P(1, 1, 1)$, se pide:

- (1 punto). Hallar la ecuación del plano que contiene a P y a la recta que pasa por A y B .
- (1 punto). Hallar el área del triángulo formado por A , B y P .
- (1 punto). Hallar las coordenadas del punto C que forma con A y B un triángulo rectángulo en C , sabiendo que C está en el eje OX y tiene primera coordenada negativa.

Problema 16.9.2 (3 puntos) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} a - 1 & 1 & -1 \\ 0 & a - 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

- (1 punto). Determinar los valores del parámetro a , para que la matriz M tenga inversa.
- (1 punto). Hallar la inversa de M , para $a = 2$.
- (1 punto). Resolver el sistema homogéneo $MX = O$, para $a = 1$.

Problema 16.9.3 (2 puntos) Dada $f(x)$, función derivable, con derivada continua, tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, se define la función $g(x) = (f(x))^2 - e^{f(x)}$ y se pide:

- (1 punto). Hallar $g(0)$, $g'(0)$ y $(fg)'(0)$.
- (0,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.
- (0,5 puntos). Obtener el valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

Problema 16.9.4 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$, se pide:

- (1 punto). Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.
- (1 punto). Justificar que f está definida en todo x del intervalo $[0, 1]$ y calcular $\int_0^1 (x - 2)f(x) dx$.

16.10. Septiembre (coincidente)2015 - Opción B

Problema 16.10.1 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ (k - 1)x + y + z = k \\ x + (k - 1)y + z = 0 \end{cases}$$

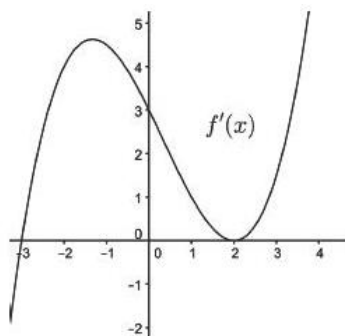
se pide:

- (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de k .
- (1 punto). Resolverlo para $k = 0$ y para $k = 1$.

Problema 16.10.2 (3 puntos) Sea $f(x)$ una función con derivada de orden dos continua para todo número real y cuya gráfica contiene al origen.

La función derivada $f'(x)$ (representada en el gráfico adjunto) es positiva para todo $x > 2$ y negativa para todo $x < -3$. Se pide:

- (1 punto). Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.
- (1 punto). Determinar las abscisas de los extremos relativos de $f(x)$ y clasificar dichos extremos.
- (1 punto). Demostrar que $f(x)$ tiene un punto de inflexión en el intervalo $(-3, 2)$.



Problema 16.10.3 (2 puntos) Dados el plano $\pi \equiv x - y + 2z + 3 = 0$, el punto $A(-1, 4, 1)$ y la recta $r \equiv x - 1 = y + 1 = \frac{z - 1}{2}$, se pide:

- (1 punto). Hallar el seno del ángulo formado por π y r .
- (1 punto). Hallar las ecuaciones de la recta s que pasa por A y es perpendicular a π .

Problema 16.10.4 (2 puntos) Dado el vector $\vec{v} = (1, 0, -2)$, se pide:

- (1 punto). Obtener todos los vectores de módulo $\sqrt{5}$ que son perpendiculares al vector \vec{v} y tienen alguna coordenada nula.
- (1 punto). Obtener los vectores \vec{w} tales que $\vec{v} \times \vec{w} = (2, -3, 1)$ y tienen módulo $\sqrt{6}$.

www.musat.net

Capítulo 17

Año 2016

17.1. Modelo 2016 - Opción A

Problema 17.1.1 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + 4y + z = 3 \\ kx + 2y - z = 3 \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos). Discutirlo según los valores de k .
- (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $k = 2$.
- (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $k = 1$.

Problema 17.1.2 (3 puntos) Dada la función $f(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$, se pide:

- (0,75 puntos). Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- (0,5 puntos). Determinar las coordenadas de sus extremos relativos.
- (0,75 puntos). El valor máximo que puede tener la pendiente de una recta tangente a la gráfica de $f(x)$.
- (1 punto). El volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función en torno al eje OX , entre los puntos de corte de la misma con dicho eje.

Problema 17.1.3 (2 puntos) Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - z = 5$ y la recta

$$r : \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \text{ se pide:}$$

- a) (1 punto). Determinar la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto $P(1, 0, 1)$.
- b) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto $Q(2, 1, 1)$.

Problema 17.1.4 (2 puntos) Dados los puntos $P(1, 1, 3)$ y $Q(0, 1, 1)$, se pide:

- a) (1 punto). Hallar todos los puntos R que equidistan de P y Q . Describir dicho conjunto de puntos.
- b) (1 punto). Hallar los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifiquen que $d(P, S) = 2d(Q, S)$.

17.2. Modelo 2016 - Opción B

Problema 17.2.1 (3 puntos) Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 3x + 4y - 5z - 7 = 0, \quad \pi_2 \equiv x - 2y + z - 3 = 0$$

se pide:

- a) (1 punto). Hallar un vector unitario cuya dirección sea paralela a los planos π_1 y π_2 .
- b) (1 punto). Hallar la distancia del punto $P(3, -1, 2)$ al plano π_1 .
- c) (1 punto). Hallar el coseno del ángulo que forman los planos π_1 y π_2 .

Problema 17.2.2 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < 1 \\ xe^{1-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

se pide:

- a) (1,5 puntos). Estudiar su continuidad y derivabilidad y calcular la función derivada f' donde sea posible.
- b) (0,5 puntos). Calcular $\int_{-1}^1 f(x) dx$.
- c) (1 punto). Calcular $\int_1^2 f(x) dx$.

Problema 17.2.3 (2 puntos) Dadas las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (1 punto). Calcular el valor o valores de λ que hacen que el determinante de la matriz $M - \lambda I$ sea igual a 0.
- (1 punto). Para $\lambda = -1$, resolver el sistema de ecuaciones lineales: $(M - \lambda I)X = O$.

Problema 17.2.4 (2 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

resolver la ecuación matricial $AX + 3B = B(A^t + 3I)$, donde A^t denota la matriz transpuesta de A .

17.3. Junio 2016 - Opción A

Problema 17.3.1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto). Estudiar la continuidad de f y calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (0,5 puntos). Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$, en $x = 2$.
- (1,5 punto). Calcular $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

Problema 17.3.2 (3 puntos)

- (1,5 puntos). Despeje X en la ecuación matricial $X(CD)^{-1} = A + X(D^{-1}C^{-1} - B)$, siendo A ; B ; C ; D matrices cuadradas invertibles. Exprese X de la forma más simple posible.

b) (1,5 puntos). Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ determine la matriz Y tal que $YB = A$.

Problema 17.3.3 (2 puntos) Dados los planos $\pi_1 \equiv ax + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + ay + z - 2 = 0$, determine, en caso de que existan, el valor o posibles valores del parámetro a , para cada uno de los siguientes supuestos:

- (0,5 puntos). Que π_1 y π_2 sean paralelos.
- (0,5 puntos). Que π_1 y π_2 sean perpendiculares.
- (1 punto). Que la recta intersección de π_1 y π_2 sea perpendicular al plano $x = y$.

Problema 17.3.4 (2 puntos) Dado el punto $P(2, 1, -1)$, determine el punto simétrico de P respecto al plano que pasa por los puntos $A(0, 2, -1)$; $B(1, -3, 0)$ y $C(2, 1, 1)$.

17.4. Junio 2016 - Opción B

Problema 17.4.1 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x + y + mz = 1 \\ x - y + 2z = -2 \\ 5x + (m+1)y + 2z = 4 \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos). Discutirlo según los valores de m .
- (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 0$.
- (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 2$.

Problema 17.4.2 (3 puntos) Se consideran los puntos $A(0, 5, 3)$, $B(0, 6, 4)$, $C(2, 4, 2)$ y $D(2, 3, 1)$ y se pide:

- (1 punto). Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios y que el polígono $ABCD$ es un paralelogramo.
- (1 punto). Calcular el área de dicho paralelogramo.
- (1 punto). Determinar el lugar geométrico de los puntos P cuya proyección sobre el plano $ABCD$ es el punto medio del paralelogramo.

Problema 17.4.3 (2 puntos)

- a) (1 punto). Determine el polinomio $f(x)$, sabiendo que $f'''(x) = 12$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y además verifica: $f(1) = 3$; $f'(1) = 1$; $f''(1) = 4$.
- b) (1 punto). Determine el polinomio $g(x)$, sabiendo que $g''(x) = 6$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y que además verifica:

$$\int_0^1 g(x) dx = 5; \quad \int_0^2 g(x) dx = 14$$

Problema 17.4.4 (2 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad en $x = 0$ y en $x = 1$ de $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ |x \ln x| & \text{si } x > 0 \end{cases}$, donde \ln denota el logaritmo neperiano.

17.5. Junio 2016 (coincidente) - Opción A

Problema 17.5.1 (3 puntos) Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = 4 + 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$, se pide:

- a) (1,5 puntos). Estudiar su posición relativa y hallar la distancia entre ellas.
- b) (1,5 puntos). Hallar la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a r_1 y a r_2 .

Problema 17.5.2 (3 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1 punto). Determinar los valores del parámetro a , para que se verifique la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.
- b) (1,5 puntos). Para $a = 2$, resolver la ecuación matricial $AXA^{-1} = B$.
- c) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz $(2B)^{-1}$.

Problema 17.5.3 (2 puntos) Los estudiantes de un centro docente han organizado una rifa benéfica, con la que pretenden recaudar fondos para una ONG. Han decidido sortear un ordenador portátil, que les cuesta 600 euros. Quieren fijar el precio de la papeleta, de modo que la recaudación sea máxima. Saben que si el precio de cada una es 2 euros, venderían 5000

papeletas, pero que, por cada euro de incremento en dicho precio, venderán 500 papeletas menos. ¿A qué precio deben vender la papeleta?

Si el único gasto que tienen es la compra del ordenador, ¿cuánto dinero podrán donar a la ONG?

Problema 17.5.4 (3 puntos) Se consideran las funciones $f(x) = 2 + x - x^2$ y $g(x) = \frac{2}{x+1}$, definida para $x \neq -1$. Se pide:

- (1,5 punto). Hallar el área del recinto del primer cuadrante limitado por las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$.
- (0,5 punto). Calcular $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)g(x)$.

17.6. Junio 2016 (coincidente) - Opción B

Problema 17.6.1 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax - y + z = 0 \\ x + y + az = 0 \\ ax + 4y + 2z = a \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro a .
- (0,5 puntos). Resolverlo, si es posible, para $a = 1$.
- (0,5 puntos). Resolverlo, si es posible, para $a = -1$.

Problema 17.6.2 (3 puntos) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{9}{2x-4} + 2x - 1 & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$,

se pide:

- (1 punto). Hallar las asíntotas de la curva $y = f(x)$.
- (1 punto). Determinar los posibles extremos relativos y puntos de inflexión de $y = f(x)$.
- (1 punto). Calcular $\int_{-1}^1 f(x)dx$.

Problema 17.6.3 (2 puntos) Dados el plano $\pi \equiv x - y + 2z + 3 = 0$, el punto $A(1, 1, 3)$ y la recta $r \equiv x = y - 2 = \frac{z}{2}$, se pide:

- (1 punto). Hallar la distancia del punto A a la recta r .

b) (1 punto). Hallar la proyección del punto A sobre el plano π .

Problema 17.6.4 (2 puntos) Dada una recta r cuyo vector director es $\vec{v} = (a, b, c)$ con $a, b, c > 0$, se pide:

- (1,5 puntos). Si r forma un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con el eje OX y de $\frac{\pi}{4}$ con el eje OY , determinar el ángulo que forma la recta con el eje OZ .
- (0,5 puntos). Si $\vec{v} = (1, 5, 3)$, hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta y que contiene al punto $A(3, 0, 1)$.

17.7. Septiembre 2016 - Opción A

Problema 17.7.1 (3 puntos) Dada la función $f(x) = (6 - x)e^{x/3}$, se pide:

- (1 punto). Determinar su dominio, asíntotas y cortes con los ejes.
- (1 punto). Calcular su derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.
- (1 punto). Determinar el área del triángulo que forman los ejes coordenados con la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = 0$.

Problema 17.7.2 (3 puntos) Dadas las rectas $r : \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$ y $s : \{(2 + \lambda, 1 - 3\lambda, \lambda); \lambda \in R\}$

- (1 punto). Obtener la recta que pasa por el punto $P(1, 0, 5)$ y corta perpendicularmente a r .
- (1 punto). Obtener el plano que contiene a la recta r y es paralelo a s .
- (1 punto). Hallar la distancia entre las rectas r y s .

Problema 17.7.3 (2 puntos)

- (1 punto). Determine, si es posible, los parámetros α y β de modo que se verifique la igualdad:

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

- (1 punto). Determine los posibles valores de λ para que el rango de la matriz A sea 2, donde

$$A = \lambda \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 17.7.4 (2 puntos) Cierta fundación ha destinado 247000 euros para la dotación de 115 becas de estudios. El importe de cada beca es de 3000 euros, si el estudiante cursa un grado universitario; de 2000 euros, si cursa formación profesional y de 1500 euros, si realiza estudios de postgrado. Sabiendo que la fundación ha concedido doble número de becas de formación profesional que de postgrado, ¿cuántas becas ha concedido a cada nivel de estudios?

17.8. Septiembre 2016 - Opción B

Problema 17.8.1 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 2x + (a-1)y - 2z = a \\ 2x + y - az = 2 \\ -x + y + z = 1 - a \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos). Discutirlo según los valores de a .
- (1 punto). Resolverlo cuando sea posible.

Problema 17.8.2 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{5+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto). Estudiar la continuidad de f y determinar sus asíntotas.
- (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular $f'(x)$ donde sea posible.
- (1 punto). Calcular $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

Problema 17.8.3 (2 puntos) Sea π el plano que contiene a los puntos $A(0, 2, 1)$, $B(1, 0, 1)$ y $C(-1, -2, -1)$. Calcule el volumen del tetraedro que forma el origen de coordenadas con los puntos de intersección de π con cada uno de los ejes coordenados.

Problema 17.8.4 (2 puntos) Dado el plano $\pi : 3x + 3y + z - 9 = 0$, se pide:

- (1 punto). Determinar la ecuación del plano perpendicular a π que contiene al eje OX .
- (1 punto). Determinar el punto del plano π más cercano al origen de coordenadas.

Capítulo 18

Año 2017

18.1. Modelo 2017 - Opción A

Problema 18.1.1 (3 puntos) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$

y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 \end{cases}$, se pide:

- (1,5 puntos) Comprobar que se cruzan y calcular la distancia entre ellas.
- (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s .
- (0,5 puntos) Hallar el ángulo que forma la recta r con el plano $y = 0$.

Problema 18.1.2 (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 4 & 1 \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (1,5 puntos) Determinar el rango de B en función de los valores de m .
- (1,5 puntos) Calcular la matriz inversa de A y comprobar que verifica $A^{-1} = \frac{1}{5}(A^2 + 3C)$.

Problema 18.1.3 (2 puntos) Los estudiantes de un centro docente han organizado una rifa benéfica, con la que pretenden recaudar fondos para una ONG. Han decidido sortear un ordenador portátil, que les cuesta 600 euros. Quieren fijar el precio de la papeleta, de modo que la recaudación sea máxima. Saben que si el precio de cada una es 2 euros, venderían 5000

papeletas, pero que, por cada euro de incremento en dicho precio, venderán 500 papeletas menos. ¿A qué precio deben vender la papeleta?

Si el único gasto que tienen es la compra del ordenador, ¿cuánto dinero podrán donar a la ONG?

Problema 18.1.4 (2 puntos) Calcular el área comprendida entre las curva $y = (x - 1)e^x$ y la recta $y = x - 1$.

18.2. Modelo 2017 - Opción B

Problema 18.2.1 (3 puntos) Se considera la función $f(x) = xe^{-x}$ y se pide:

- (0,5 puntos) Determinar el dominio y las asíntotas de f .
- (1,5 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y hallar sus extremos relativos.
- (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

Problema 18.2.2 (3 puntos) Dados los puntos $A(2, 1, 1)$, $B(0, 0, -3)$, y $P(1, 1, 1)$, se pide:

- (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.
- (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por A , B y P .
- (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta que pasa por A y B .

Problema 18.2.3 (2 puntos) A un florista le han encargado preparar 5 ramos iguales para cinco eventos. El precio total acordado es de 610 euros. Ha decidido emplear rosas, tulipanes y lilas. Cada ramo llevará un total de 24 flores y el número de rosas empleado doblará al número total de flores de otras especies. ¿Cuál es el número de flores de cada tipo que usará en cada ramo sabiendo que cada rosa cuesta 6 euros, cada tulipán cuesta 4 y cada lila 3?

Problema 18.2.4 (2 puntos) En una población de cierta especie de cérvidos, el 43% de los adultos son machos y el 57% hembras. Se sabe que el 11% de los machos adultos y el 4% de las hembras adultas sufre alguna afección ocular. Se supone que se captura al azar un ejemplar adulto y se pide:

- (1 punto) Determinar la probabilidad de que tenga alguna afección ocular.
- (1 punto) Si el ejemplar capturado padeciere una afección ocular ¿cuál sería la probabilidad de que fuera un macho?

18.3. Junio 2017 - Opción A

Problema 18.3.1 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2x + ay + z = a \\ x - 4y + (a + 1)z = 1 \\ 4y - az = 0 \end{cases},$$

se pide:

- (2 puntos). Discutirlo en función de los valores del parámetro real a .
- (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $a = 1$.
- (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $a = 2$.

Problema 18.3.2 (3 puntos) Dados los puntos $P(1, -2, 1)$, $Q(-4, 0, 1)$, $R(-3, 1, 2)$, $S(0, -3, 0)$, se pide:

- (1 punto). Hallar la ecuación del plano que contiene a P , Q y R .
- (1 punto). Estudiar la posición relativa de la recta r , que pasa por los puntos P y Q , y la recta s , que pasa por R y S .
- (1 punto). Hallar el área del triángulo formado por los puntos P , Q y R .

Problema 18.3.3 (2 puntos) Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = te^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

Problema 18.3.4 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + x + 6}{x - 2}$, se pide:

- (0,5 puntos). Determinar su dominio y asíntotas verticales.
- (0,5 puntos). Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.
- (1 punto). Calcular $\int_3^5 f(x) dx$.

18.4. Junio 2017 - Opción B

Problema 18.4.1 (3 puntos) Dadas las funciones $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = \sin x$, se pide:

- (1 punto). Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) - \frac{2}{g(x)} \right)$.

- b) (0,75 puntos). Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(\frac{1}{2}, 4)$.
- c) (1,25 puntos). Calcular el área delimitada por la curva $y = f(x)$ y la recta $y = -x + 3$.

Problema 18.4.2 (3 puntos) Dadas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

- a) (1 punto). Determinar la matriz P^{-1} , inversa de la matriz P .
- b) (1 punto). Determinar la matriz B^{-1} , inversa de la matriz $B = P^{-1}J^{-1}$.
- c) (1 punto). Calcular el determinante de la matriz A^2 , siendo $A = PJP^{-1}$.

Problema 18.4.3 (2 puntos)

- a) (1 punto). Determine la distancia entre las rectas

$$r_1 \equiv x = y = z \quad \text{y} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

- b) (1 punto). Obtenga el punto de corte de la recta $s \equiv x = 2 - y = z - 1$ con el plano perpendicular a s , que pasa por el origen.

Problema 18.4.4 (2 puntos) El 40% de los sábados Marta va al cine, el 30% va de compras y el 30% restante juega a videojuegos. Cuando va al cine, el 60% de las veces lo hace con sus compañeros de baloncesto. Lo mismo le ocurre el 20% de las veces que va de compras, y el 80% de las veces que juega a videojuegos. Se pide:

- a) (1 punto). Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto.
- b) (1 punto). Si se sabe que Marta ha quedado con los compañeros de baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que vayan al cine?

18.5. Junio 2017 (coincidente) - Opción A

Problema 18.5.1 (3 puntos) Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{x+2}$ y $g(x) = \frac{1}{x-4}$, definidas para $x \in (-2, 4)$, se pide:

- (0,5 puntos) Hallar el valor o valores de x para los que $f'(x) = g'(x)$.
- (1 punto) Hallar el punto x del intervalo $(-2, 4)$ en el que la diferencia $f(x) - g(x)$ es mínima y determinar el valor de esta diferencia mínima.
- (0,5 puntos) Hallar $\lim_{x \rightarrow -2^+} (f(x) - g(x))$ y $\lim_{x \rightarrow 4^-} (f(x) - g(x))$.
- (1 punto) Hallar $F(x)$, primitiva de la función $f(x) - g(x)$, que cumple la condición $F(2) = 2 + \ln 2$.

Problema 18.5.2 (3 puntos) Dada la recta $r \equiv x - 1 = y = z$, se pide:

- (1 punto) Calcular la ecuación de una recta r' , con dirección perpendicular a r , que esté contenida en el plano OXY y pase por el punto $(1, 2, 0)$.
- (1 punto) Hallar un plano perpendicular a OXY , que contenga a la recta r .
- (1 punto) Calcular la distancia del origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ a la recta r .

Problema 18.5.3 (2 puntos) En un supermercado tienen tres artículos con ofertas por la compra de una segunda unidad. La segunda unidad del artículo A tiene un descuento del 60%, la segunda unidad del artículo B tiene un descuento del 75%, mientras que la segunda unidad del artículo C se oferta con un descuento del 50%. Si un cliente compra un artículo de cada clase y, por lo tanto, no se beneficia de descuento alguno, debe pagar 26 euros. Si compra dos artículos de cada clase pagará 35,20 euros. Finalmente, si no adquiere el artículo A , pagará lo mismo comprando dos unidades de B y una de C que si compra dos unidades de C y una de B . Determinése el precio de cada artículo.

Problema 18.5.4 (2 puntos) Dada la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, se pide:

- (1 punto) Calcular su inversa.
- (1 punto) Calcular la matriz B para que $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $A^2X = B$.

18.6. Junio 2017 (coincidente) - Opción B

Problema 18.6.1 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + my + 3z = 4 \\ x + y - 2z = -2 \\ 3x + (m+1)z = m+2 \end{cases},$$

se pide:

- (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro real m .
- (0,5 puntos) Resolverlo para $m = -3$.
- (0,5 puntos) Para cierto valor de m , que hace que el sistema sea compatible, se ha obtenido una solución con $y = 0$. Determinar x y z para esa solución. ¿Cuál es el valor de m ?

Problema 18.6.2 (3 puntos) Dado el punto $P(5, 7, 10)$ y el plano de ecuación $\pi \equiv x + 2y + 3z = 7$; se pide:

- (1 punto) Calcular el punto P' , simétrico de P respecto de π .
- (1 punto) Hallar la posición relativa del plano π y la recta que pasa por el punto $Q(1, 1, 1)$ y tiene dirección $\vec{v} = (-10, 2, 2)$.
- (1 punto) Calcular el área del triángulo que tiene por vértices a los puntos P , Q y al origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$.

Problema 18.6.3 (2 puntos)

- (1 punto) Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x}{3 \sin^2 x \cos x + 2 \sin x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \sqrt{2x+7}).$$

- (1 punto) Calcule las siguientes integrales:

$$\int (3u+1) \cos(2u) du; \quad \int_2^5 \frac{7}{4x+1} dx.$$

Problema 18.6.4 (2 puntos) En una empresa el 20% de los empleados son matemáticos, el 50% ingenieros y el resto no tienen carrera universitaria. Entre los matemáticos el 40% ocupa un cargo directivo, entre los ingenieros ese porcentaje se reduce a la mitad y entre el resto de empleados el porcentaje es del 5%. Elegido un empleado al azar, se pide:

- (1 punto) Determinar la probabilidad de que ocupe un cargo directivo.
- (1 punto) Si no ocupa un cargo directivo, ¿cuál es la probabilidad de que sea matemático?

18.7. Septiembre 2017 - Opción A

Problema 18.7.1 (3 puntos) Dada la función $f(x) = \begin{cases} xe^{2x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

donde \ln significa logaritmo neperiano, se pide:

- (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.
- (1 punto) Calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (1 punto) Calcular $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

Problema 18.7.2 (3 puntos) Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} 6x - y - z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} 3x - 5y - 2z = 3 \\ 3x + y + 4z = 3 \end{cases}$ se pide:

- (1 punto) Estudiar la posición relativa de r_1 y r_2 .
- (1 punto) Calcular la distancia entre las dos rectas.
- (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a r_1 y al punto $P(1, 2, 3)$.

Problema 18.7.3 (2 puntos) Se dispone de tres aleaciones A , B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en

la tabla adjunta.

	Oro (%)	Plata (%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción del 72% de oro y una proporción del 16% de plata, tomando x gramos de A , y gramos de B y z gramos de C . Determinense las cantidades x , y , z .

Problema 18.7.4 (2 puntos) Dados dos sucesos, A y B , de un experimento aleatorio, con probabilidades tales que $p(A) = \frac{4}{9}$, $p(B) = \frac{1}{2}$ y $p(A \cup B) = \frac{2}{3}$ se pide:

- (1 punto) Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.
- (1 punto) Calcular $p(\bar{A}|B)$, donde \bar{A} denota el suceso complementario de A .

18.8. Septiembre 2017 - Opción B

Problema 18.8.1 (3 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz

identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- (0,5 puntos) Calcular la matriz $B = (A - I)(2I + 2A)$.
- (1,5 puntos) Determinar el rango de las matrices $A - I$, $A^2 - I$ y $A^3 - I$.
- (1 punto) Calcular la matriz inversa de A^6 , en caso de que exista.

Problema 18.8.2 (3 puntos) Se considera la función $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 + 1}$ y se pide:

- (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.
- (1 punto) Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función f y, en su caso, determinarlas.
- (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.

Problema 18.8.3 (2 puntos) Sea r la recta que pasa por los puntos $P_1(3, 2, 0)$ y $P_2(7, 0, 2)$. Se pide:

- (1 punto) Hallar la distancia del punto $Q(3, 5, -3)$ a la recta r .
- (1 punto) Hallar el punto de corte de la recta r con el plano perpendicular a r que pasa por el punto Q .

Problema 18.8.4 (2 puntos) Se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1, 3, -1)$, $B(3, 1, 0)$ y $C(2, 5, 1)$ y se pide

- (1 punto) Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.
- (1 punto) Obtener las medidas de sus tres ángulos.

18.9. Septiembre 2017 (coincidente) - Opción A

Problema 18.9.1 (3 puntos) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ xe^x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

se pide:

- (1 punto) Estudiar la continuidad de f en todo \mathbb{R} .
- (1 punto) Obtener la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = -\pi$
- (1 punto) Calcular la integral $\int_1^2 f(x) dx$.

Problema 18.9.2 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 1 \\ ty + z = 0 \\ x + (1+t)y + tz = t + 1 \end{cases}$,

se pide:

- (2 puntos) Discutirlo en función del parámetro t .
- (0,5 puntos) Resolverlo para $t = 0$.
- (0,5 puntos) Resolverlo para $t = -1$.

Problema 18.9.3 (2 puntos) Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + y - z = 1 \quad \text{y} \quad \pi_2 \equiv x + 2y + z = 3$$

, se pide:

- (1 punto) Calcular el plano o planos formados por los puntos que equidistan de π_1 y π_2 .
- (1 punto) Calcular la recta paralela a π_1 , paralela a π_2 y que pasa por el punto $A(1, 1, 1)$.

Problema 18.9.4 (2 puntos) Una empresa fabrica móviles de tres marcas distintas: A , N y M . El 20% de los móviles fabricados son de la marca A y el 40% de la marca N . Se decide instalar un software oculto que permita espiar a los usuarios de estos móviles. El software espía se instala en el 15% de los móviles de la marca A , en un 10% de la marca N y en un 12% de los móviles de la marca M . Se pide:

- (1 punto) Determinar la probabilidad de que una persona que compra uno de estos móviles tenga instalado el software espía.
- (1 punto) Si el móvil de una persona tiene instalado el software espía, calcular la probabilidad de que sea de la marca A .

18.10. Septiembre 2017 (coincidente) - Opción B

Problema 18.10.1 (3 puntos) Dados los puntos $P_1(1, 1, 3)$, $P_2(0, 0, 3)$, $P_3(4, -3, 1)$ y $O(0, 0, 0)$. Se pide:

- (1 punto) Hallar el plano π que contiene los puntos P_1, P_2, P_3 .
- (1 punto) Hallar el punto simétrico de O respecto del plano $\pi' \equiv x + y - z + 3 = 0$.
- (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro con vértices O, P_1, P_2, P_3 .

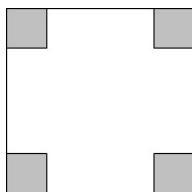
Problema 18.10.2 (3 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & a \\ 1 & 0 & 5 & 2a \\ 0 & 2 & -4 & 2a \end{pmatrix}$,

se considera la matriz B formada por las tres últimas columnas de A y se pide:

- (1 punto) Estudiar para qué valores del parámetro real a la matriz B es invertible.
- (1 punto) Obtener el rango de A en función de los valores del parámetro real a .

- (1 punto) Resolver el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, en el caso $a = 0$.

Problema 18.10.3 (2 puntos) Se dispone de una plancha de cartón cuadrada cuyo lado mide 1,2 metros. Determinéense las dimensiones de la caja (sin tapa) de volumen máximo que se puede construir, recortando un cuadrado igual a cada esquina de la plancha y doblando adecuadamente para unir las aristas resultantes de los cortes.



Problema 18.10.4 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+1}$, calcúlese el área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y la recta $y = 1 - x$.

Capítulo 19

Año 2018

19.1. Modelo 2018 - Opción A

Problema 19.1.1 (2,5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, y $I =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

- (1,5 puntos) Obtener los valores de m para los que que la matriz $A - mI$ admite inversa.
- (1 punto) Calcular la matriz inversa de $A - 2I$.

Problema 19.1.2 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = 2 \cos(x) + |x - 1|$, se pide:

- (0,5 puntos) Determinar el valor de $f'(0)$.
- (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi$.
- (1 punto) Hallar el área del recinto plano limitado por la la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = \pi$ y $x = 2\pi$.

Problema 19.1.3 (2,5 puntos) Dados los planos $\pi_1 \equiv 3x + y + 2z - 1 = 0$, $\pi_2 \equiv 2x - y + 3z - 1 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$, se pide:

- (1,5 puntos) Hallar los puntos de la recta r equidistantes de π_1 y π_2 .
- (1 punto) Hallar el área del triángulo que forma el punto $P(-2, 3, 2)$ con los puntos de intersección de r con π_1 y π_2 .

Problema 19.1.4 (2,5 puntos) Sabiendo que el peso de los estudiantes varones de segundo de bachillerato se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal, de media 74 kg y desviación típica 6 kg, se pide:

- (1 punto) Determinar el porcentaje de estudiantes varones cuyo peso esta comprendido entre los 68 y 80 kg.
- (0,5 puntos) Estimar cuántos de los 1500 estudiantes varones, que se han presentado a las pruebas de la EvAU en una cierta universidad, pesan más de 80 kg.
- Si se sabe que uno de estos estudiantes pesa más de 76 kg, ¿cuál es la probabilidad de que pese más de 86 kg?

19.2. Modelo 2018 - Opción B

Problema 19.2.1 (2,5 puntos) Dada la matriz A y los vectores X y B siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m+1 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2+m \end{pmatrix}$$

se pide:

- (2 puntos) Discutir el sistema lineal $AX = B$ en función de los valores del parámetro m .
- (0,5 puntos) Resolver el sistema lineal $AX = B$ cuando $m = -1$.

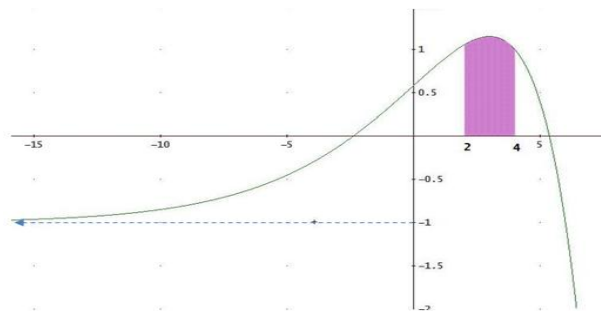
Problema 19.2.2 (2,5 puntos) El dibujo adjunto muestra la gráfica de la función

$$f(x) = (6-x)e^{\frac{x-4}{3}} - 1$$

se pide:

- (1 punto) Calcular el área de la region sombreada.
- (1 punto) Determinar la abscisa del punto de la gráfica donde la recta tangente tiene pendiente máxima.
- (0,5 puntos) Efectuando los cálculos necesarios, obtener la ecuación de la asíntota que se muestra en el dibujo (flecha discontinua inferior).

Problema 19.2.3 (2,5 puntos) Dados los planos $\pi_1 \equiv x+y=0$, $\pi_2 \equiv x=0$ y el punto $B(-1, 1, 1)$, se pide:



- (1 punto) Determinar el punto B' , simétrico de B respecto del plano π_2 .
- (1 punto) Obtener una ecuación de la recta r , contenida en el plano π_1 , paralela al plano π_2 y que pasa por el punto B .
- (0,5 puntos) Hallar el ángulo que forman los planos π_1 y π_2 .

Problema 19.2.4 (2,5 puntos) En una bolsa hay 10 caramelos de fresa, 15 de menta y 5 de limón. Se extraen sucesivamente de la bolsa dos caramelos. Se pide:

- (1 punto) Determinar la probabilidad de que el segundo de ellos sea de fresa.
- (0,5 puntos) Determinar la probabilidad de que los dos sean de fresa.
- (1 punto) Sabiendo que el segundo ha sido de fresa, calcular la probabilidad de que lo haya sido también el primero.