

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)

Problemas de años pasados

Problema 1 En el año 1834 Mariano José de Larra escribió la obra "El Doncel Don Enrique el Doliente" y era ocho años mayor que un desconocido José Zorrilla. En el año de su suicidio se dio a conocer el joven escritor José Zorrilla, entre los dos sumaban 48 años. Siete años más tarde Zorrilla escribe "Don Juan Tenorio", y en ese momento tiene dos años más de los que tenía Larra cuando escribió "El Doncel Don Enrique el Doliente". Calcular el año de nacimiento de ambos escritores.

Los resultados deben de ser explicados por procedimientos matemáticos, no se tendrán en cuenta aquellos, que derivados de los conocimientos de Literatura, podamos obtener.

Problema 2 Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 0 \end{cases}$$

- a) Resolverlo para $m = 1$.
- b) Discutirlo para los distintos valores de m .
- c) Decidir la posición de estos planos en función de los valores de m .

Problema 3 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para cada número real λ definimos $B = A - \lambda I$, donde I denota la matriz identidad 2×2 .

- a) Hallar los valores de λ que hacen que el determinante de B sea nulo.
- b) Resolver el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para los diferentes valores de λ .

Problema 4 Tres nadadores de diferentes edades se encuentran en la piscina y el entrenador les comenta que hace cinco años el mayor de ellos tenía el doble de la edad de los otros dos juntos y que dentro de cinco años tendrá la suma de sus edades. El mediano le dice al pequeño que le saca dos años. Calcular las edades de los tres.

Problema 5 Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ -2x + y + z = -1 \\ (2 - 2m)x + (2m - 2)z = m - 1 \end{cases}$$

- Discutirlo para los distintos valores de m .
- Resuelve los casos compatibles.
- En cada uno de los casos del primer apartado, dé una interpretación geométrica del sistema.

Problema 6 Utilizando las propiedades de los determinantes resolver las siguientes ecuaciones:

a)

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

Problema 7 Halla tres números sabiendo que el primero menos el segundo es igual a un quinto del tercero, si al doble del primero le restamos seis nos queda la suma del segundo y el tercero y, además, el triple del segundo menos el doble del tercero es igual al primero menos 8.

Problema 8 Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (m-1)x - y + mz = 1 \\ (m+1)x + y - z = 0 \\ x + 3y - 5z = -m \end{cases}$$

- Discutirlo para los distintos valores de m .
- Resolverlo para el caso en el que tenga infinitas soluciones.
- En cada uno de los casos del primer apartado, dé una interpretación geométrica del sistema.

Problema 9 Sea una A una matriz $m \times n$

- a) ¿Existe una matriz B tal que $B \cdot A$ sea una matriz fila? Si existe, ¿qué orden tiene?
- b) ¿Se puede encontrar una matriz B tal que $A \cdot B$ sea una matriz fila? Si existe, ¿qué orden tiene?
- c) Busca una matriz B tal que $B \cdot A = (0 \ 0)$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 10 Se pide:

- a) Comprobar que la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ cumple que $A^3 = -A - I$ y calcular la matriz inversa de A .
- b) Si A es cualquier matriz con n filas y n columnas tal que $A^3 = -A - I$ y se sabe que $|A| = m$, calcular el valor del determinante de $A + I$ en función de m , donde I representa a la matriz identidad.

Problema 11 Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} mx + y - mz = 2 \\ (m-3)x + \quad + mz = 1 \\ -x + my = 3 \end{cases}$$

- a) Discutirlo para los distintos valores de m .
- b) Resolverlo para el caso en el que tenga infinitas soluciones.
- c) En cada uno de los casos del primer apartado, dé una interpretación geométrica del sistema.

Problema 12 Resuelve la ecuación matricial $AX - B + C = 0$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 13 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular

- a) Los valores de a para los que la matriz A es inversible.

b) Calcular la inversa de A para $a = 2$ y para $a = -1$, si es posible.

Problema 14 Resolver la ecuación matricial $AX - B = I - CX$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 15 Calcular los valores de x para los que

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Problema 16 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 & a \\ a & -1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de A para los diferentes valores de a .

Problema 17 Discutir el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + y - az = a \\ 2ax + ay - z = 1 \\ 3x + az = -1 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema para los diferentes valores de a .

b) Resolver el sistema, si es posible, para $a = 1$.

Problema 18 Resolver la ecuación matricial $AX + I = C + BX$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 19 Tres montañeros se volvieron a encontrar en la sierra después de 10 años sin verse. El mayor de ellos les recuerda que la última vez que se reunieron tenía el doble de la edad que tenían entre los dos juntos, y les comenta que en este momento tiene la suma de sus edades. El mediano dice que cuando el pequeño tenga la edad del mayor él tendrá 32 años. Pedro Cuello de Oro, observador de la conversación rápidamente quiso sacar conclusiones y nos propuso el problema de calcular la edad de cada uno de ellos.

Problema 20 Discutir el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - y - z = a \\ ax - y - (a-1)z = 2 \\ 3x + y + az = 1 \end{cases}$$

- Discutir el sistema para los diferentes valores de a .
- Resolver el sistema para los valores de a que hacen que el sistema tenga infinitas soluciones.

Problema 21 Resolver la ecuación matricial $AX - I = B - CX$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 22 En una familia se sabe que la edad del padre es igual a la de la madre y del hijo juntos. Dentro de diez años la edad de la madre será el doble de la del hijo, y hace cinco años entre el padre y la madre tenían 60 años. Calcular las edades de todos ellos.

Problema 23 Discutir el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax - y - z = a \\ 2x + y + az = -3a \\ -ax + y - az = -a \end{cases}$$

- Discutir el sistema para los diferentes valores de a .
- Resolver el sistema para los valores de a que hacen que el sistema tenga infinitas soluciones.

Problema 24 Resolver la ecuación matricial $AX - I = BX + C$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 25 Para la elaboración de un pienso para vacas hay que mezclar tres productos A , B y C . El A se vende a 6 euros el kg., el B a 12 euros el kg. y el C a 18 euros el kg. Para que la alimentación sea correcta la mezcla debe llevar del pienso A el doble que entre el B y C juntos. Un cliente pide que le preparen pienso por un valor de 6000 euros con la condición de que se ponga la misma cantidad de B que de C . Se pide calcular la cantidad que debe mezclar de cada producto.

Problema 26 Discutir el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - ay + az = 2 \\ 3x + y + 2z = 4a \\ 2ax + 2y + z = 2a \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema para los diferentes valores de a .
- b) Resolver el sistema para los valores de a que hacen que el sistema tenga infinitas soluciones.

Problema 27 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) Calcular A^2 .
- b) Resolver la ecuación matricial $A^2X + AB = I$.

Problema 28 De la edad de tres hermanos, Ana, Jesús y Fernando se sabe que: el doble de la edad de Ana más el triple de la edad de Jesús es tres años superior a cuatro veces la edad la edad de Fernando; el triple de la edad de Fernando menos el doble de la edad de Jesús es siete años inferior al doble de la edad de Ana; y el doble de la edad de Ana más el doble de la edad de Fernando es tres años inferior a cinco veces la edad de Jesús. Calcular la edad de cada uno de los hermanos.