Problemas de Matemáticas II Aplicadas a las Ciencias Sociales (PAU 2018-2019) Por Materias

Isaac Musat Hervás

3 de diciembre de 2021

Índice

1. Álgebra

Teoría

Matrices

matriz A	dimensión	Transpuesta A^T	dimensión
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$m \times n$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$	$n \times m$
matriz cuadrada	orden	identidad	matriz triangular
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$	n	$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

- **Suma:** Tienen que tener la misma dimensión y se suman término a término.
- **Producto de una matriz por un número real:** Se multiplican todos los términos de la matriz por ese número.
- **Producto de dos matrices:** Se desarrolla multiplicando matriz fila por matriz columna de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

  El número de columnas de la primera matriz tiene que ser igual al número de filas de la segunda.

Determinante de una matriz

- La matriz tiene que ser cuadrada

  a) De orden dos: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

  b) De orden tres: (Regla de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

- Propiedades:

  a) $\begin{vmatrix} a+m & b+n & c+p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n & p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

  b) $|A^T| = |A|$

c) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

d) Si cambiamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo.

e) Si una fila o una columna tiene todos sus elementos igual a cero el determinante vale cero.

f) Si dos filas o dos columnas son iguales el determinante vale cero.

g) Si dos filas o dos columnas son proporcionales el determinante vale cero.

h) Si una fila o columna es combinación lineal de las otras el determinante vale cero.

i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+a & h+b & i+c \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

j) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ xa & xb & xc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+xa & h+xb & i+xc \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila multiplicada por un número (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

Matriz Adjunta:

- Adjunto del elemento a_{ij} de una matriz es el valor del determinante resultante de eliminar la fila i y la columna j multiplicado por $(-1)^{i+j}$ y se le denomina A_{ij}.
- Matriz adjunta. $Adj(A) = (A_{ij})$

Cálculo del determinate de una matriz por adjuntos:
Se elige una fila o una columna (cualquiera es válida, siempre será mejor aquella que tenga más ceros), escojo la primera fila para el ejemplo:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Inversa de una matriz:

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^T}{|A|}$$

Una matriz tiene inversa si, y sólo si, $|A| \neq 0$.
A las matrices que tienen inversa se la llama **Regulares** y a las que no la tienen se las llama **Singulares**.
Rango de una matriz
Es el número de filas linealmente independientes.
De forma práctica se calcula por determinantes. Si tenemos una matriz de dimensión 3×4 cogemos matrices cuadradas que tengan el mayor orden posible, tendremos cuatro de orden 3, si el determinante de alguna de ellas es distinto de cero el rango es 3 y habremos terminado, si por el contrario todas son cero el rango ya no puede ser 3 y buscaremos menores de orden 2. Si alguno de estos menores es distinto de cero ya habremos terminado, y el rango será 2, si por el contrario todos son cero tendremos que buscar menores de orden 1, y en el momento que encontremos alguno distinto de cero el rango será 1.

Sistema de Ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \cdots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \quad = & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \cdots & +a_{mn}x_n = & b_m \end{array}\right.$$

Matriz del sistema: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

Matriz de variables: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$,

Matriz de términos independientes: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Se trata de una ecuación matricial: $AX = B$.
Si $|A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$ y en este caso el sistema se podrá resolver de la siguiente manera $X = A^{-1}B$

Antes de resolver un sistema estudiar si hay ecuaciones nulas, iguales o proporcionales, para el estudio del rango.

Teorema de Rouché

- Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) = nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Determinado (SCD). Y tiene solución única.
- Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) $<$ nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Indeterminado (SCI). Y tiene infinitas soluciones.
- Si Rango($\overline{A}$) $\neq$Rango(A) se trata de un Sistema Incompatible. Y no tiene solución.

Sistema homogéneos Son aquellos en los que $b_i = 0$, estos siempre tienen solución $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ solución trivial, pero en el caso de que de que Rango(A) $< m$ (nº de incógnitas) estaríamos ante infinitas soluciones, es decir:

- Si Rango(A) $= m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCD $\Longrightarrow$ $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ solución trivial.
- Si Rango(A) $< m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCI $\Longrightarrow$ infinitas soluciones.

Regla de Cramer
Sea $\overline{A} = (C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n, B)$, entonces sustituimos la columna B en la matriz $\overline{A}$ por cada una de las columnas y tendremos:

$$x_1 = \frac{|B, C_2, C_3, \cdots, C_n|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|C_1, B, C_3, \cdots, C_n|}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{|C_1, C_2, \cdots, B|}{|A|}$$

Problemas

1.1. Andalucia

1.1.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.1 Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Razone si la matriz, A es simétrica.

b) Calcule A^{-1}.

c) Resuelva la ecuación matricial $2XA - A^2 - 3I_3 = O$.

Solución:

a) $A^T \neq A \Longrightarrow A$ no es simétrica.

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $2XA - A^2 - 3I_3 = O \Longrightarrow 2XA = A^2 + 3I_3 \Longrightarrow X = \frac{1}{2}(A^2 + 3I_3)A^{-1} = \frac{1}{2}(A + 3A^{-1})$

$$X = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ -4 & -1/2 & -2 \\ 3 & 2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

1.1.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.2 Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 16 \\ -1 & 7 & 12 \end{pmatrix}$

a) Justifique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

   a) $A \cdot A^t$ es una matriz simétrica.

   b) $A \cdot A^t + B$ posee inversa.

b) Resuelva la ecuación matricial $BX + A = C$.

Solución:

a) Afirmaciones:

   a) $M = A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} =) \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, como $M = M^T$ la matriz es simétrica.

   b) $N = A \cdot A^t + B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |N| = 0 \Longrightarrow \not\exists N^{-1}$.

b) $BX + A = C \Longrightarrow BX = C - A \Longrightarrow X = B^{-1}(C - A)$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/3 & -1/6 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 7 & -12 & 16 \\ -1 & 7 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/3 & -1/6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -12 & 18 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} =$$

1.2. Aragón

1.2.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.3 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para que valores de x e y se tiene $AB = C$?

b) Calcular, si existe, la matriz inversa de C.

Solución:

a) $AB = C \Longrightarrow \begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2x-2y-1 & x-4y \\ -9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -2x-2y-1 = 2 \\ x-4y = -3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -9/5 \\ y = 3/10 \end{cases}$$

b) $|C| = -19 \neq 0 \Longrightarrow \exists C^{-1} = \begin{pmatrix} -4/19 & -3/19 \\ -9/19 & -2/19 \end{pmatrix}$

1.2.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.4 Un hotel tiene habitaciones individuales (para una persona), dobles (para dos personas) y familiares (para cuatro personas). El hotel tiene un total de 144 habitaciones con una capacidad total de 312 personas; además, el número de habitaciones dobles es igual al triple de la suma de habitaciones individuales y familiares. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de habitaciones de cada tipo que tiene el hotel.

Solución:

Sea x: nº de habitaciones individuales (1 persona), y: nº de habitaciones dobles (2 persona) y z: nº de habitaciones familiares (4 persona).

$$\begin{cases} x+y+z = 144 \\ x+2y+4z = 312 \\ y = 3(x+z) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z = 144 \\ x+2y+4z = 312 \\ 3x-y+3z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 108 \\ z = 20 \end{cases}$$

1.3. Asturias

1.3.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.5 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ my \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Si $A^3 \cdot B + C = A^2 \cdot D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 1$.

Solución:

a) $A^3 \cdot B + C = A^2 \cdot D \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4x+3y \\ y(m-2)-3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 4x+3y=7 \\ -3x+(m-2)y=-4 \end{cases}$

b) $\overline{M} = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 7 \\ -3 & m-2 & -4 \end{array}\right)$, $|M| = 4m+1 = 0 \Longrightarrow m = -\dfrac{1}{4}$.

Si $m \neq -\dfrac{1}{4} \Longrightarrow |M| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 2 = \text{Rango}(\overline{M} = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

Si $m = -\dfrac{1}{4}$: $\overline{M} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ -3 & -9/4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 4F_2+3F_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Siempre que exista solución será única.

Si $m = 1$: $\begin{cases} 4x+3y=7 \\ -3x-y=-4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

1.3.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.6 Una persona ha obtenido 4000 euros de beneficio por invertir en dos empresas A y B. La cantidad de dinero invertida en A fue m veces lo invertido en B, y los beneficios fueron el 10 % en A y el 20 % en B.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean las cantidades invertidas en ambas empresas, respectivamente.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que en la empresa A se haya invertido el doble que en B? En caso afirmativo, ¿cuánto se invirtió en A?

Solución:
Sea x la cantidad invertida en A e y la cantidad invertida en B,

a) $\begin{cases} 0,1x+0,2y=4000 \\ x=my \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+2y=40000 \\ x-my=0 \end{cases}$

b) $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 40000 \\ 1 & -m & 0 \end{array}\right)$, $|A| = -m-2 = 0 \Longrightarrow m = -2$.

Si $m \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A} = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

Si $m = -2$: $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 40000 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-F_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 40000 \\ 0 & 0 & -40000 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Siempre que exista solución será única.

Si $m = 2$: $\begin{cases} x+2y=40000 \\ x-2y=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=20000 \\ y=10000 \end{cases}$

1.4. Islas Baleares

1.4.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.7 Se considera la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & x+2 & x^2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Resolver la ecuación $|A| = 0$. (Donde $|A|$ es el determinante de A)

b) Si $x = 0$ ¿la matriz A tiene inversa? ¿por qué?

c) Si $x = 2$ ¿la matriz A tiene inversa? ¿por qué? En caso afirmativo resolver la ecuación $A \cdot Z = I$; donde I es la matriz identidad de orden 3.

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & x+2 & x^2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -4x^2 - 8x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -2$.

b) Si $x = 0 \Longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$, resultado del apartado anterior y, por tanto, $\nexists A^{-1}$.

c) Si $x = 2 \Longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -32 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 & -1 \\ -1/4 & 1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 1/8 & 1/4 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot Z = I \Longrightarrow A^{-1}AZ = A^{-1}I \Longrightarrow Z = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 & -1 \\ -1/4 & 1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 1/8 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Problema 1.8 Una empresa de autobuses tiene tres del líneas: A, B y C. El lunes salieron 5 autobuses en la línea A, 3 a la B y 4 en la C. El martes salieron 2 autobuses en la línea A, 1 en la B y 4 en la C. El miércoles salieron 1 autobús en la línea A, 3 en la B y 5 en la C.

a) Representar los datos en forma de matriz.

b) ¿Tiene inversa la matriz construida en el apartado anterior? En caso negativo justificar la respuesta. En caso afirmativo, calcular la inversa.

c) Si D es la matriz construida en el primer apartado, resolver, si es posible, el sistema de ecuaciones:

$$D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix}$$

Solución:

	A	B	C
L	5	3	4
M	2	1	4
X	1	3	5

a) $D = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

b) $|D| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -33 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/33 & 1/11 & -8/33 \\ 2/11 & -7/11 & 4/11 \\ -5/33 & 4/11 & 1/33 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$

1.4.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.9 Se pide:

a) Dadas A, una matriz cuadrada invertible cualquiera, y A^{-1} su inversa; qué matriz se debe obtener al calcular $A \cdot A^{-1}$ y $A^{-1} \cdot A$? Describa/indique cómo es esta matriz.

b) Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}$$

   a) Calcular los valores de x para los que se satisface

$$A^2 = 2A$$

   b) Para $x = -1$, calcular A^{-1}. Comprobar el resultado calculando $A \cdot A^{-1}$.

Solución:

a) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ donde I es la matriz identidad de orden igual al que tienen las matrices A y A^{-1}. La matriz identidad es un matriz llena ceros salvo en la diagonal principal en la que son todos unos.

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}$

   a) $A^2 = 2A \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}^2 = 2\begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
   $\begin{pmatrix} 4 & x(x+4) \\ 0 & (x+2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2x \\ 0 & 2(x+2) \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x(x+4) = 2x \\ (x+2)^2 = 2(x+2) \end{cases} \Longrightarrow$
   $x^2 + 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -2$.

   b) Para $x = -1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   Se comprueba:
   $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$
   $A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Problema 1.10 Un instituto tiene y tres partidas presupuestarias: libros, material de oficina y muebles. El presupuesto para muebles de este instituto es cinco veces la suma del de libros más el del material de oficina. El presupuesto para libros es el triple del de material de oficina. La suma del presupuesto para muebles y material de oficina es 7 veces el presupuesto de libros.

a) Con estos datos, podemos saber el dinero destinado a cada partida presupuestaria?

b) Determinar las cantidades si para libros hay 2100 euros.

Solución: Sean x la cantidad presupuestada en libros, y la cantidad presupuestada en material de oficina y z la cantidad presupuestada en muebles.

$$\left\{\begin{array}{l} z = 5(x+y) \\ x = 3y \\ z + y = 7x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x + 5y - z = 0 \\ x - 3y = 0 \\ 7x - y - z = 0 \end{array}\right.$$

a) Se trata de un sistema homogéneo y $|A| = \left|\begin{array}{rrr} 5 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 7 & -1 & -1 \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 <$ nº de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. Por tanto, con estos datos, no podemos saber el dinero destinado a cada partida presupuestaria.

b) Si $x = 2100$

$$\left\{\begin{array}{l} 5y - z = -10500 \\ y = 700 \\ y + z = 14700 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2100 \\ y = 700 \\ z = 14000 \end{array}\right.$$

1.5. Islas Canarias

1.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.11 Un alumno paga 3 euros al comprar tres lápices, un impreso y dos carpetas. El doble del precio de un lápiz excede en cinco céntimos de euro a la suma de los precios de un impreso y de una carpeta. Si cada lápiz costara cinco céntimos de euro más, entonces su precio duplicaría al de una carpeta.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Calcular el precio de cada lápiz, impreso y carpeta.

Solución:
Sean x el precio de un lápiz, y el precio de un impreso y z el precio de una carpeta.

a)

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + y + 2z = 3 \\ 2x - 0,05 = y + z \\ x + 0,05 = 2z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x + y + 2z = 3 \\ 2x - y - z = 0,05 \\ x - 2z = -0,05 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + y + 2z = 3 \\ 2x - y - z = 0,05 \\ x - 2z = -0,05 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0,55 \\ y = 0,75 \\ z = 0,30 \end{array}\right.$$

1.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.12 En un centro educativo se imparten enseñanzas de ESO, Bachillerato y Ciclos Formativos. Si sumamos el 20 % del alumnado de ESO, con el 20 % del alumnado de Bachillerato y el 40 % del alumnado de Ciclos Formativos se obtienen 42 alumnos más que el 20 % del alumnado total del centro. Asimismo si sumamos el número de alumnos de ESO más la mitad de los de Ciclos Formativos obtenemos 40 alumnos menos que el total de matriculados en Bachillerato. Si el centro tiene en total 1115 alumnos.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Hallar el número de matriculados en cada tipo de enseñanza.

Solución:
Sean x el número de alumnos de ESO, y el número de alumnos de Bachillerato y z el número de alumnos de Ciclos Formativos.

a)

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1115 \\ 0,2x+0,2y+0,4z=42+0,2\cdot 1115 \\ x+0,5z=y-40 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1115 \\ x+y+2z=1325 \\ 2x-2y+z=-80 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1115 \\ x+y+2z=1325 \\ 2x-2y+z=-80 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=380 \\ y=525 \\ z=210 \end{array}\right.$$

1.6. Cantabria

1.6.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.13 Se pide:

a) Una empresa que fabrica grapadoras debe satisfacer un pedido de 325 unidades que empaqueta en cajas de diferentes tamaños. Hay tres modelos de cajas, A, B y C, en los que caben, respectivamente, 5, 10 y 15 unidades. Se dispone de un total de 35 cajas. Además, el total de cajas de los modelos A y B es seis veces el número de cajas del modelo C.

  a) Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular el número de cajas de cada modelo que se pueden utilizar para enviar el pedido.

  b) Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

  c) Resolverlo.

  d) ¿A cuánto ha ascendido la factura de compra de las cajas, sabiendo que una unidad del modelo A cuesta 4,5 euros; una del modelo B, 8 euros; y una del C, 12 euros?

b) Despejar la incógnita X de la siguiente ecuación matricial: $BXB = B(X + A)$

Solución:

a) Sean x el número de cajas A, y el número de cajas B y z el número de cajas C.

  a)

$$\left\{\begin{array}{l} 5x+10y+15z=325 \\ x+y+z=35 \\ x+y=6z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y+3z=65 \\ x+y+z=35 \\ x+y-6z=0 \end{array}\right.$$

b) $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 65 \\ 1 & 1 & 1 & 35 \\ 1 & 1 & -6 & 0 \end{array} \right)$, $|A| = 7 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

c)

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 65 \\ x + y + z = 35 \\ x + y - 6z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 10 \\ y = 20 \\ z = 5 \end{array} \right.$$

d) La factura de compra será de $10 \cdot 4,5 + 20 \cdot 8 + 5 \cdot 12 = 265$ euros.

b) $BXB = B(X + A) = BX + BA \Longrightarrow BXB - BX = BA \Longrightarrow BX(B - I) = BA \Longrightarrow BX = BA(B - I)^{-1} \Longrightarrow X = B^{-1}BA(B - I)^{-1} = A(B - I)^{-1}$

Problema 1.14 Dado el siguiente sistema: $\left\{ \begin{array}{l} -x + 4y = 6 \\ 2x + 3y = \frac{5a}{2} \\ 5x + 2y = a^2 \end{array} \right.$

a) Determinar, según los valores del parámetro a , los casos en los que tiene o no tiene solución y si esta es única o no.

b) Resolver los casos compatibles.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 5a/2 \\ 5 & 2 & a^2 \end{array} \right)$, $|\overline{A}| = -11(a^2 - 5a + 6) = 0 \Longrightarrow a = 2$ y $a = 3$.
Si $a = 2$ o $a = 3 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2 =$Rango$(A) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
Si $a \neq 2$ y $a \neq 3 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$Rango$(A) = 2$ y el sistema es incompatible.

b) Si $a = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -x + 4y = 6 \\ 2x + 3y = 5 \\ 5x + 2y = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2/11 \\ y = 17/11 \end{array} \right.$$

Si $a = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -x + 4y = 6 \\ 2x + 3y = 15/2 \\ 5x + 2y = 9 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 12/11 \\ y = 39/22 \end{array} \right.$$

Problema 1.15 A, B y C son tres matrices cuadradas de dimensión 3. Sus determinantes son: $|A| = 3$, $|B| = -2$ y $|C| = 6$. Calcular:

a) $|A^T B^{-1}|$.

b) $|D|$ siendo D la matriz resultante de multiplicar por 2 los elementos de la segunda columna de C.

c) $|B^2 E|$ siendo E la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de A.

Solución:

a) $|A^T B^{-1}| = |A^T||B^{-1}| = |A| \cdot \dfrac{1}{|B|} = -\dfrac{3}{2}$

b) $|D| = 2|C| = 12$

c) $|B^2 E| = |B^2||E| = |B|^2(-|A|) = 4(-3) = -12$

1.6.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.16 Una empresa que fabrica bombillas debe satisfacer un pedido de 450 unidades que empaqueta en cajas de tamaños distintos. Hay dos modelos de cajas, A y B, en los que caben respectivamente 15 y 20 unidades. Se dispone de un total de k cajas. Además, el número de cajas del modelo A coincide con las dos terceras partes del total de cajas del modelo B. El sistema de ecuaciones lineales que permite calcular el número de cajas de cada modelo a utilizar para enviar el pedido, es el siguiente: $\begin{cases} 15x + 20y = 450 \\ x + y = k \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$ Determinar, según el número total de cajas disponibles, (según los valores del parámetro k), los casos en los que el sistema tiene o no tiene solución, y si esta es única o no. Resolver el sistema cuando tenga solución.

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} 15 & 20 & 450 \\ 1 & 1 & k \\ 3 & -2 & 0 \end{array} \right), \ |\overline{A}| = 90(k - 25) = 0 \Longrightarrow k = 25.$$

Si $k = 25 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2 =$Rango$(A) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

Si $k \neq 25 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$Rango$(A) = 2$ y el sistema es incompatible.

Si $k = 25$:

$$\begin{cases} 15x + 20y = 450 \\ x + y = 25 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \end{cases}$$

Problema 1.17 Sean A y B dos matrices cuadradas de dimensión 3. Sus determinantes tienen como valor -3 y 10 respectivamente. Con estos datos calcular:

a) $|A^{-1}B^2|$.

b) $|CB^T|$ siendo C la matriz resultante de multiplicar la tercera fila de A por 6, y B^T la traspuesta de B.

Solución:

a) $|A^{-1}B^2| = |A^{-1}||B^2| = \dfrac{1}{|A|}|B|^2 = -\dfrac{100}{3}$.

b) $|CB^T| = |C||B^T| = 6|A||B| = -180$.

1.7. Castilla León

1.7.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.18 Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - 4z = 0 \\ 3x + ay + 2z = 2 \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a.

b) Resuelve el sistema para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & a & 2 & 2 \end{array}\right); \quad |A| = 6a - 19 = 0 \Longrightarrow a = 19/6$$

- Si $a \neq 19/6 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 19/6$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & 19/6 & 2 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 1/6 & -1 & -4 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ -6F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{crr|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{crr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & -4 & -1 & -4 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 4F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -25 & -20 \end{array}\right) \Longrightarrow z = \frac{4}{5}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - 4z = 0 \\ 3x - y + 2z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2/5 \\ y = 4/5 \\ z = 4/5 \end{array}\right.$$

Problema 1.19 Una familia de 3 miembros recibe la devolución de los impuestos abonados en la campaña RENTA2017 por un importe total de 3250 euros. Sabiendo que la madre recibe el doble que el hijo y que el padre recibe $\frac{2}{3}$ de lo que recibe la madre, calcula el importe de la devolución que recibe cada miembro de la familia.
Solución:
Sean x la cantidad percibida por la madre, y la cantidad percibida por el hijo y z la cantidad percibida por el padre.

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 3250 \\ x = 2y \\ z = \frac{2}{3}x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 3250 \\ x - 2y = 0 \\ 2x - 3z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1500 \\ y = 750 \\ z = 1000 \end{array}\right.$$

1.7.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.20 Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y - (1 - a^2)z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \end{array}\right.$$

Calcula razonadamente los valores del parametro a para que el sistema tenga soluciones distintas de la solucion trivial $(0, 0, 0)$.

Solución:
Se trata de un sistema homogéneo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -(1-a^2) \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad |A|=2(a^2-9)=0 \Longrightarrow a=\pm 3$$

- Si $a\neq \pm 3 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución trivial $x=y=z=0$)
- Si $a=\pm 3$:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-2F_1 \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & -10 \\ 0 & 3 & -15 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ -2F_3+3F_2 \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Si $a=\pm 3$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+8z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-13\lambda \\ y=5\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

1.8. Castilla La Mancha

1.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2018

Problema 1.21 Un cliente hace un pedido a una fábrica de harinas que ofrece 3 tamaños distintos de sacos: pequeño, mediano y grande. Ha pedido 20 sacos pequeños, 14 medianos y 6 grandes y el peso total de su pedido es 1800 kilogramos. Si el peso de dos sacos pequeños y tres medianos es el mismo que el de dos sacos grandes y el peso de un saco grande es cuatro veces el peso de un saco pequeño.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el peso de cada tipo de saco.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:
Sean x el peso del saco pequeño, y el peso del saco mediano y z el peso del saco grande.

a)

$$\left\{\begin{array}{l} 20x+14y+6z=1800 \\ 2x+3y=2z \\ z=4x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 10x+7y+3z=900 \\ 2x+3y-2z=0 \\ 4x-z=0 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} 10x+7y+3z=900 \\ 2x+3y-2z=0 \\ 4x-z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=25 \\ y=50 \\ z=100 \end{array}\right.$$

Problema 1.22 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ a & b \end{pmatrix}$, encontrar los valores de los parámetros a y b para que las matrices conmuten.

Solución:

$$AB = BA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a+1 & 3b+5 \\ a+3 & b+15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & 8 \\ a+3b & 3a+b \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 3a+1=16 \\ 3b+5=8 \\ a+3=a+3b \\ b+15=3a+b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=1 \end{cases}$$

Problema 1.23 Se reparten tres tipos de becas: B_1 por valor de 400 euros, B_2 de 160 euros y B_3 de 200 euros. El dinero total destinado a las becas es de 43400 euros y son 145 personas las que obtienen beca. Cada persona solamente puede obtener una beca. Sabiendo que la cantidad de personas que recibe la beca B_1 es 5 veces mayor que la que obtiene la beca B_2:

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permite averiguar qué cantidad de personas reciben cada tipo de beca.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:
Sean x el número de becas $B1$, y el número de becas $B2$ y z el número de becas $B3$.

a)

$$\begin{cases} 400x+160y+200z=43400 \\ x+y+z=145 \\ x=5y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 10x+4y+5z=1085 \\ x+y+z=145 \\ x-5y=0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 10x+4y+5z=1085 \\ x+y+z=145 \\ x-5y=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=75 \\ y=15 \\ z=55 \end{cases}$$

1.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.24 En una tienda de comida a granel tienen a la venta tres tipos de judías secas: blancas, canela y pintas. Estas se venden a 2,75, 3 y 2,50 euros el kilogramo, respectivamente. Ayer se vendieron 40 kilos en total por un valor de 111,5 euros. La suma de los kilogramos de judías blancas y canela vendidas fueron el triple de las pintas.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos kilogramos de judías de cada tipo se vendieron.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:
Sean x el número de kilos de judías blancas, y el número de kilos de judías canela y z el número de kilos de judías pintas.

a)

$$\begin{cases} x+y+z=40 \\ 2,75x+3y+2,5z=111,5 \\ x+y=3z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=40 \\ 11x+12y+10z=446 \\ x+y-3z=0 \end{cases}$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=40 \\ 11x+12y+10z=446 \\ x+y-3z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=14 \\ y=16 \\ z=10 \end{array}\right.$$

Problema 1.25 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A\cdot B-C^T$

b) Comprueba que la matriz C no tiene inversa y explica la razón por la que el producto $D^2\cdot B$ no puede ser realizado.

Solución:

a) $A\cdot B-C^T=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 15 \\ 4 & 2 & 10 \\ 8 & 4 & 20 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 15 \\ 4 & 3 & 8 \\ 6 & 6 & 16 \end{pmatrix}$

b) $|C|=0\Longrightarrow C$ no tiene inversa.

$\dim(D^2)=3\times 3$ y $\dim(B)=1\times 3\Longrightarrow$ el número de columnas de la matriz D^2 es distinto del número de filas de B.

Problema 1.26 Los precios de un gimnasio son diferentes según la franja horaria dispuesta en tres turnos: mañana, mediodía y tarde. Este mes han acudido 150 personas por la mañana, 30 en la franja del mediodía y 270 por la tarde y el gimnasio ha ingresado un total de 15900 euros. La diferencia entre el precio de la tarde y la mañana equivale a la mitad del precio para el mediodía y al sumar los precios del mediodía y la tarde obtenemos el doble del precio de la mañana.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el precio de cada franja horaria.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:
Sean x el precio por la mañana, y el precio por el mediodía y z el precio por la tarde.

a)

$$\left\{\begin{array}{l} 150x+30y+270z=15900 \\ z-x=0,5y \\ y+z=2x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x+9z+y=530 \\ 2x+y-2z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} 5x+9z+y=530 \\ 2x+y-2z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=30 \\ y=20 \\ z=40 \end{array}\right.$$

1.9. Cataluña

1.9.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.27 En un estudio de mercado, 500 participantes han probado tres cafés diferentes, presentados como producto A, producto B y producto C, y han escogido cuál de los tres les ha gustado más. Sabemos que el producto B ha sido escogido por el doble de personas que el producto A y que el producto B lo han escogido 32 personas más que los productos A y C juntos. Calcule cuántas personas han escogido cada producto.

Solución:

Sean x número de personas que eligen A, y número de personas que eligen B y z número de personas que eligen C.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=500 \\ y=2x \\ y=32+x+z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=500 \\ 2x-y=0 \\ x-y+z=-32 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=133 \\ y=266 \\ z=101 \end{array}\right.$$

Problema 1.28 Resuelva las siguientes cuestiones:

a) Considere la matriz $M=\left(\begin{array}{cc} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{array}\right)$, Calcule los valores de a y b para que se verifique la igualdad $M^2+aM+bI=O$, donde I es la matriz identidad, $M=\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$ y $O=\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$ es la matriz nula.

b) Considere la matriz $A=\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right)$. Encuentre todas las matrices B que conmutan con la matriz A, es decir, que cumplen que $A\cdot B=B\cdot A$.

Solución:

a) $M^2+aM+bI=\left(\begin{array}{cc} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{array}\right)^2+a\left(\begin{array}{cc} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{array}\right)+b\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 2a+b+14 & 5a+5 \\ 2a+2 & -a+b+11 \end{array}\right)=$
$\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} 2a+b+14=0 \\ 5a+5=0 \\ 2a+2=0 \\ -a+b+11=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-1 \\ b=-12 \end{array}\right.$

b) $B=\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)$.:

$$AB=BA\Longrightarrow\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc} c & d \\ a-c & b-d \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} b & a-b \\ d & c-d \end{array}\right)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} c=b \\ d=a-b \\ a-c=d\Longrightarrow d=a-b \\ b-d=c-d\Longrightarrow b=c \end{array}\right. \Longrightarrow B=\left(\begin{array}{cc} a & b \\ b & a-b \end{array}\right)$$

Problema 1.29 Por la Fiesta Mayor, la pastelería del pueblo elabora unas cajas de bombones especiales. La caja pequeña contiene 10 bombones, la mediana tiene 15 bombones y la grande tiene

25. Cada caja va decorada con un lazo conmemorativo. En total han utilizado 210 lazos y 2.650 bombones. Teniendo en cuenta que han elaborado el doble de cajas pequeñas que de medianas y grandes juntas, ¿cuántas cajas de cada tipo han elaborado?

Solución:

Sean x número de cajas pequeñas, y número de cajas medianas y z número de cajas grandes.

$$\left\{\begin{array}{l} 10x+15y+25z=2650\\ x+y+z=210\\ x=2(y+z)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+3y+5z=530\\ x+y+z=210\\ x-2y-2z=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=140\\ y=50\\ z=20\end{array}\right.$$

Problema 1.30 En una oficina tienen tres proveedores que les suministran el material. La matriz P nos da los precios unitarios, en euros, de cada uno de los artículos $A1$, $A2$ y $A3$, según los proveedores $p1$, $p2$ y $p3$.

$$P=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4\\ 11 & 12 & 13\\ 13 & 13 & 12\end{pmatrix}$$

Representamos un pedido de x unidades de $A1$, y unidades de $A2$ y z unidades de $A3$ por un vector fila $C=(x\ \ y\ \ z)$.

a) Explique qué representan cada uno de los elementos del vector que resulta de multiplicar $C\cdot P$.

b) Si tenemos que comprar 25 unidades de $A1$, 10 de $A2$ y 15 de $A3$, ¿cuál de los tres proveedores nos ofrece un mejor precio para todo el pedido? ¿Cuál es este precio?

Solución:

a) C representa las cantidades de cada producto que vamos a pedir, al multiplicar por la matriz de precios por proveedores, estamos calculando el importe del pedido por proveedor.

b)
$$(25\ \ 10\ \ 15)\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4\\ 11 & 12 & 13\\ 13 & 13 & 12\end{pmatrix}=(430\ \ 415\ \ 410)$$

El precio más barato lo ofrece el proveedor $p3$ con 410 euros.

1.9.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.31 Se quiere enviar una fecha codificada. Para ello se considera el vector de tres componentes $X=(d\ \ m\ \ a)$, en el cual d expresa el día, m el mes y a el año. Seguidamente, se realiza la operación $X\cdot A+B$, donde A y B son las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\ \text{y}\ B=\begin{pmatrix} 5 & -5 & 5\end{pmatrix}$$

El resultado de esta operación es el vector codificado que enviamos.

a) Si la fecha que se quiere enviar es el 1 de enero de 2019, es decir, si $X=(1\ \ 1\ \ 2019)$, ¿cuál es el vector codificado que se enviará?

b) Si el vector codificado que ha llegado es $(2036\ \ 1\ \ -13)$, ¿cuál es la fecha sin codificar?

Solución:

a) $X \cdot A + B = (1\ \ 1\ \ 2019)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} = (2025\ \ -4\ \ 3)$

b) $(x\ \ y\ \ z)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} = (2036\ \ 1\ \ -13) \Longrightarrow$

$$\begin{cases} x + z = 2031 \\ y = 6 \\ x + y = 18 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 6 \\ z = 2019 \end{cases}$$

Problema 1.32 En tres sorteos consecutivos de la Lotto 6/49 ha habido 51 personas que han acertado los 6 números de la combinación ganadora en alguno de los tres sorteos. El número de personas que acertaron la combinación ganadora en el tercer sorteo es la mitad del total de personas que la acertaron en los dos primeros sorteos juntos. También sabemos que el número de personas que acertaron la combinación ganadora en el primer sorteo supera en 11 el total de personas que la acertaron en el segundo y en el tercer sorteos juntos. Con estos datos, calcule cuántas personas acertaron la combinación ganadora de la Lotto 6/49 en cada uno de los tres sorteos.

Solución:

Sean x número de acertantes en el primer sorteo, y número de acertantes en el segundo sorteo y z número de acertantes en el tercer sorteo.

$$\begin{cases} x + y + z = 51 \\ z = \frac{1}{2}(x + y) \\ x - 11 = y + z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 51 \\ x + y - 2z = 0 \\ x - y - z = 11 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 31 \\ y = 3 \\ z = 17 \end{cases}$$

1.10. País Vasco

1.10.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.33 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

a) Determina la matriz inversa de la matriz $I + B$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

b) Calcular las matrices X e Y que verifican que:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases}$$

Solución:

a) $(I + B)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$

b) $\left\{\begin{array}{l} AX+BY=C \\ AX=Y \end{array}\right. \Longrightarrow Y+BY=C \Longrightarrow (I+B)Y=C \Longrightarrow Y=(I+B)^{-1}C$

$$Y=(I+B)^{-1}C=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 11/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$AX=Y \Longrightarrow X=A^{-1}Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 5 & 11/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5/2 & 11/4 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1.10.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.34 Sean A y B las siguientes matrices: $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar la matriz inversa de $A-B$.

b) Hallar la matriz X tal que $X(A-B)=2A-3B$.

Solución:

a) $(A-B)^{-1})\left[\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $X(A-B)=2A-3B \Longrightarrow X=(2A-3B)(A-B)^{-1} \Longrightarrow$

$$X=\left[2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1.11. Extremadura

1.11.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.35 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$
se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para que valor del parametro x no existe $(A\cdot B)^{-1}$.

b) Hallar la matriz inversa de $A\cdot B$ para $x=1$.

Solución:

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x-1 & 3 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$

$|A\cdot B|=5x-1=0 \Longrightarrow x=\dfrac{1}{5}$, valor para el que no existe inversa.

b) Si $x=1$: $(A\cdot B)^{-1}=\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}=\begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

1.11.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.36 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Hallar el valor de b para el que no existe la matriz inversa de A.

b) Para $b = 1$, hallar la matriz X que verifique $AX = A^3 - I$.

Solución:

a) $|A| = 3 - 2b = 0 \Longrightarrow b = \dfrac{3}{2}$ valor para el que no existe inversa.

b) $AX = A^3 - I \Longrightarrow X = A^{-1}(A^3 - I) = A^2 - A^{-1}$. Si $b = 1$:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

1.12. Madrid

1.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.37 Se consideran lan matrices

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Obténgase el valor de la constante k para que el determinante de la matriz $A - 2B$ sea nulo.

b) Determínese si las matrices C y $(C^t \cdot C)$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C, son invertibles. En caso afirmativo, calcúlense las inversas.

Solución:

a) $A - 2B = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$|A - 2B| = 2k - 29 = 0 \Longrightarrow k = \dfrac{29}{2}$

b) Como C no es cuadrada no es invertible.

$$C^TC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |C^TC| = 3 \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\exists (C^TC)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Problema 1.38 Se considera el sistema de ecuaciones dependiente de un parámetro real m:

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x + my - z = 0 \\ x - y - mz = 0 \end{cases}$$

a) Determínense los valores del parámetro real m para que el sistema tenga soluciones diferentes a la solución trivial $x = y = z = 0$.

b) Resuélvase para $m = 1$.

Solución:
Se trata de un sistema homogéneo.

a)

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -1 & -m \end{pmatrix}; \quad |A| = m^2 - 1 = 0 \Longrightarrow m = \pm 1$$

- Si $m \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única, la trivial $x = y = z = 0$)
- Si $m = \pm 1$ se trata de un sistema compatible indeterminado. Un sistema homogéneo no puede incompatible.

b) Si $m = 1$ la primera y la segunda ecuación son iguales cambiadas de signo, eliminamos una de ellas y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

1.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.39 Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlense los valores de a para los cuales la matriz A no tiene matriz inversa.

b) Para $a = 3$, calcúlese la matriz inversa de A y resuélvase la ecuación matricial $AX = B$.

Solución:

a) $|A| = a(a-2) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 2$. No existe A^{-1} para estos dos valores.

b) Para $a = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 5/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

Problema 1.40 Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

y la matriz B es tal que

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese A^{-1}.

b) Calcúlese B^{-1}.

Solución:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & -1/2 \\ 1/3 & 11/6 & -7/6 \\ -1/6 & -23/12 & 13/12 \end{pmatrix}$$

b) Sea $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{2}C \Longrightarrow B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{2}C \Longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{2}CA =$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1.13. Valencia

1.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.41 Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula $(AB)^{-1}$.

b) Calcula $AB^T - A^TB$.

c) Resolver la ecuación $B^TX + A^TB = A^T$.

Siendo A^T y B^T las matrices traspuestas de A y B, respectivamente.
Solución:

a) $(AB)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$

b) $AB^T - A^TB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

c) $B^TX + A^TB = A^T \Longrightarrow B^TX = A^T - A^TB \Longrightarrow X = (B^T)^{-1}A^T(I - B)$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 & -17/2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

1.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.42 Una matriz cuadrada A se dice que es ortogonal si tiene inversa y dicha inversa coincide con su matriz traspuesta. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

a) Calcula el determinante de $|A|$.

b) Comprueba que A es una matriz ortogonal.

c) Resuelve el sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $|A| = \frac{1}{3^3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

b)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = A^T$$

c) $AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$

1.14. La Rioja

1.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.43 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

a) Calcula el determinante de A.

b) ¿Para qué valores de a tiene inversa la matriz A?

c) La matriz A es la matriz de un sistema homogéneo (los términos independientes son todos 0) de tres ecuaciones con tres incógnitas (x, y, z). Resuélvelo en el caso en el que $a = 0$.

Solución:

a) $|A| = -a^2(a+1)$

b) $|A| = -a^2(a+1) = 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+2z=0 \\ y+z=0 \\ x-y=0 \end{array} \right.$ que es un sistema compatible indeterminado:

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y+2z=0 \\ y+z=0 \\ x-y=0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+2z=0 \\ y+z=0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=-\lambda \\ y=-\lambda \\ z=\lambda \end{array} \right.$$

Problema 1.44 Alba, Blanca y Naia deben repartirse una herencia. Alba debe recibir la media de lo que reciban Blanca y Naia más 3000 euros; Blanca debe recibir la media de lo que reciban Alba y Naia, y Naia debe recibir la media de lo que reciban Alba y Blanca menos 3000 euros.

a) ¿Cuánto dinero debe recibir Alba más que Blanca?

b) Si la herencia fuese de 99000 euros, ¿Cuánto dinéro debe recibír cada una?

Solución:

Sean x la cantidad que debe recibir Alba, y la cantidad que debe recibir Blanca y z la cantidad que debe recibir Naia.

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} x=\frac{y+z}{2}+3000 \\ y=\frac{x+z}{2} \\ z=\frac{x+y}{2}-3000 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x-y-z=6000 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=6000 \end{array} \right. \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 6000 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 6000 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2-F_1 \\ 2F_3-F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 6000 \\ 0 & -3 & 3 & -6000 \\ 0 & 3 & -3 & -6000 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 6000 \\ 0 & -3 & 3 & -6000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\Longrightarrow$ se trata de un sistema compatible indeterminado. Tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x-y-z=6000 \\ -y+z=-2000 \end{array} \right. \Longrightarrow 2x-2y=4000 \Longrightarrow x-y=2000$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x-y-z=6000 \\ -y+z=-2000 \\ x+y+z=99000 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=35000 \\ y=33000 \\ z=31000 \end{array} \right.$$

1.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.45 Alba, Blanca y Naia son las delanteras titulares de un equipo de fútbol. Entre las tres, en la temporada recién finalizada, han marcado 65 goles. Sabemos que Alba ha marcado 50 % más goles que Blanca, y que Naia ha marcado la mitad de goles que Alba. ¿Cuántos goles ha marcado cada una?
Solución:
Sean x número de goles macados por Alba, y número de goles macados por Blanca y z número de goles macados por Naia.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=65 \\ x=\frac{3}{2}y \\ z=\frac{x}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=65 \\ 2x-3y=0 \\ x-2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=30 \\ y=20 \\ z=15 \end{array}\right.$$

Problema 1.46 Si $A=\left(\begin{array}{rr} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{array}\right)$

a) Calcula A^2 y A^3.

b) Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, calcula A^{15}.

c) ¿Existe alguna matriz X, (distinta de la matriz nula) que verifique $AX=\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$?

Solución:

a) $A^2=\left(\begin{array}{rr} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{array}\right)=A$ y $A^3=A^2A=AA=A^2=A$.

b) $A^n=A^{15}=A$.

c) $X=\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{rr} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{cc} 2a+c & 2b+d \\ -2a-c & -2b-d \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2a+c=0 \Longrightarrow c=-2a \\ 2b+d=0 \Longrightarrow d=-2b \\ -2a-c=0 \Longrightarrow c=-2a \\ -2b-d=0 \Longrightarrow d=-2b \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\begin{array}{rr} a & b \\ -2a & -2b \end{array}\right)$$

1.15. Murcia

1.15.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.47 Sean las matrices $A=\left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right)$, $B=\left(\begin{array}{cc} 1 & a \\ a & 0 \end{array}\right)$ y $C=\left(\begin{array}{rr} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{array}\right)$.

a) Calcule A^{-1}.

b) Calcule el valor del parámetro a para que $B+C=A^{-1}$.

c) Calcule el valor del parámetro a para que $A+B+C=3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a) Calcule $A^{-1}=\left(\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{array}\right)$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow a-1=-1 \Longrightarrow a=0$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow a=0$

1.15.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.48 Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ ax-y-z=a-1 \\ 3x-2az=a-1 \end{array} \right.$$

Resolverlo para $a=0$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 0 \\ a & -1 & -1 & a-1 \\ 3 & 0 & -2a & a-1 \end{array} \right); \quad |A| = 2(a^2+2a-3) = 0 \Longrightarrow a=-3, \ \ a=1$$

- Si $a \neq -3$ y$a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=-3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & 6 & -4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2+3F_1 \\ 2F_3-3F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -8 \\ 0 & -3 & 15 & -8 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

- Si $a=1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) = [F_3 = F_1+F_2] \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indetermnado}$$

Si $a=0$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ -y-z=-1 \\ 3x=-1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=-1/3 \\ y=5/6 \\ z=1/6 \end{array} \right.$$

1.16. Navarra

1.16.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.49 Sea la expresión matricial $B^T - AX = B$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Despeje la matriz X.

b) Calcule la matriz X.

Solución:

a) $B^T - AX = B \Longrightarrow AX = B^t - B \Longrightarrow X = A^{-1}(B^t - B)$

b) $X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -12 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$

1.16.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.50 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $A^2 - B^2$.

b) Calcule $(A - B)(A + B)$.

c) Calcule $C^{-1}C^T - I$.

Solución:

a) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 15 & -5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$

b) $(A - B)(A + B) = \left[\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \left[\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$

c) $C^{-1}C^T - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

1.17. Galicia

1.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.51 Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz $B^T \cdot A \cdot B$

b) Calcula la inversa de la matriz $A - I$, en donde I es la matriz identidad de orden 2.

c) Despeja la matriz X en la ecuación matricial $AX - B = X$ y calcúlala.

Solución:

a) $B^T \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $AX - B = X \Longrightarrow AX - X = B \Longrightarrow (A - I)X = B \Longrightarrow X = (A - I)^{-1}B$

$$X = (A-I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.52 En una caja hay billetes de 5, 10 y 20 por un valor de 400 euros. Se sabe que el número de billetes de 20 euros es la tercera parte del total y que el número de billetes de 5 euros es inferior en 4 unidades al del resto.

a) Escribe un sistema de ecuaciones que represente el problema.

b) Escríbelo en forma matricial.

c) Calcula la matriz inversa de la matriz de coeficientes y resuelve el sistema.

Solución:
Sean x número de billetes de 5 euros, y número de billetes de 10 euros y z número de billetes de 20 euros.

a) $\left\{ \begin{array}{l} 5x + 10y + 20z = 400 \\ z = \frac{x+y+z}{3} \\ x = y + z - 4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 4z = 80 \\ x + y - 2z = 0 \\ x - y - z = -4 \end{array} \right.$

b) $AX = B \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/13 & 2/13 & 8/13 \\ 1/13 & 5/13 & -6/13 \\ 2 & -3/13 & 1/13 \end{pmatrix}$

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3/13 & 2/13 & 8/13 \\ 1/13 & 5/13 & -6/13 \\ 2 & -3/13 & 1/13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

2. Programación Lineal

Problemas

2.1. Aragón

2.1.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

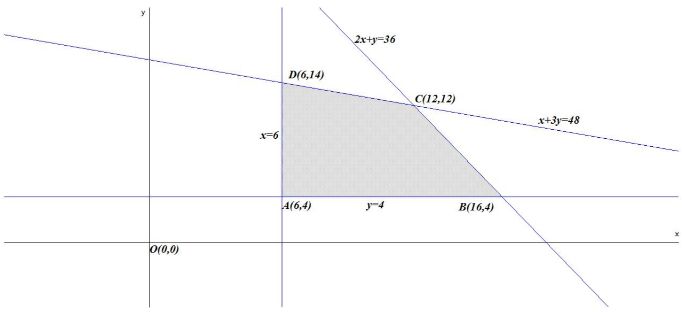
Problema 2.1 Un ebanista fabrica sillas y taburetes. Cada silla necesita 4 kilos de madera y 1 hora de trabajo, mientras que cada taburete necesita 2 kilos de madera y 3 horas de trabajo. El beneficio por cada silla es de 70 euros y por cada taburete es de 50 euros. Para la semana que viene quiere fabricar, al menos, 6 sillas y 4 taburetes; dispone, como máximo, de 72 kilos de madera y de 48 horas de trabajo. ¿Cuántas sillas y taburetes debe fabricar para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el valor del beneficio en ese caso?

Solución:
LLamamos x : nº de sillas e y : nº de taburetes.

	Madera	Tiempo	beneficio
Silla	4	1	70
Taburete	2	3	50
	≤ 72	≤ 48	

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x, y) = 70x + 50y$ calculando su máximo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} 4x + 2y \leq 72 \\ x + 3y \leq 48 \\ x \geq 6 \\ y \geq 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + y \leq 36 \\ x + 3y \leq 48 \\ x \geq 6 \\ y \geq 4 \end{cases}$$

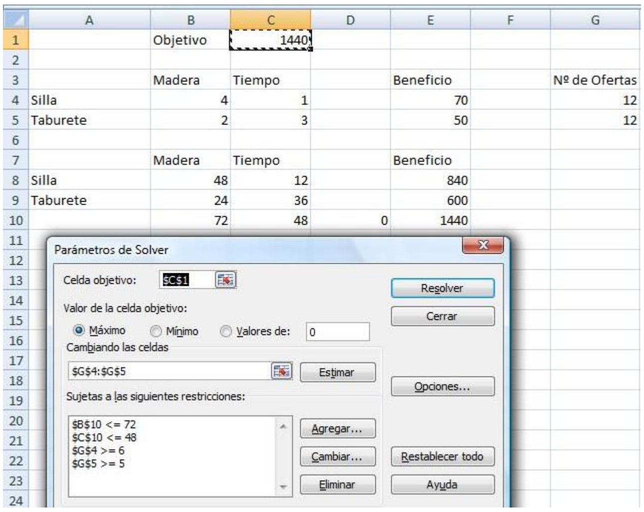


La región S y los vértices a estudiar serán: $A(6, 4)$, $B(16, 4)$, $C(12, 12)$ y $D(6, 14)$.

b)

$$\begin{cases} f(6, 4) = 620 \\ f(16, 4) = 1320 \\ f(12, 12) = 1440 \text{ Máximo} \\ f(6, 14) = 1120 \end{cases}$$

El máximo es de 1440 euros y se alcanza cuando se fabrican 12 sillas y 12 taburetes.
Solución por solver:



2.1.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

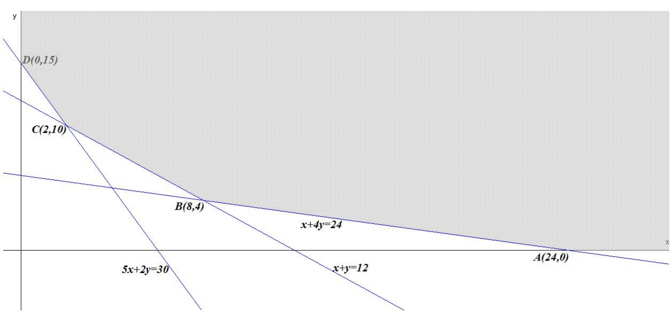
Problema 2.2 Un restaurante compra la fruta a una tienda ecológica. Esta tienda vende dos tipos de lotes, A y B. El lote A incluye 1 kilo de manzanas, 5 kilos de naranjas y 1 kilo de peras, mientras que el lote B incluye 4 kilos de manzanas, 2 kilos de naranjas y 1 kilo de peras. Cada lote de tipo A cuesta 8 euros y cada lote de tipo B cuesta 10 euros. Sabiendo que para mañana el restaurante quiere tener, al menos, 24 kilos de manzanas, 30 kilos de naranjas y 12 kilos de peras, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos lotes de cada tipo debe comprar para minimizar el coste. ¿Cuál será el valor del coste en ese caso?
Solución:
LLamamos x : nº de lotes A e y : nº de lotes B.

	Manzanas	Naranjas	Peras	Coste
A	1	5	1	8
B	4	2	1	10
	≥ 24	≥ 30	≥ 12	

$$f(x, y) = 8x + 10y$$

sujeto a

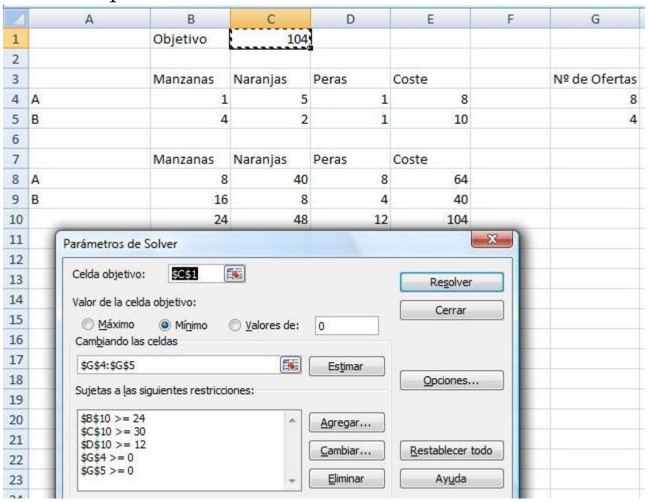
$$\begin{cases} x + 4y \geq 24 \\ 5x + 2y \geq 30 \\ x + y \geq 12 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



La región factible estaría delimitada por los vértices: $A(24,0)$, $B(8,4)$,$C(2,10)$ y $D(0,15)$.

$$\begin{cases} f(24,0) = 192 \\ f(8,4) = 104 \text{ Mínimo} \\ f(2,10) = 116 \\ f(0,15) = 150 \end{cases}$$

El restaurante tiene que comprar 8 lotes A y 4 lotes B con un coste de 104 euros.
Solución por solver:



2.2. Asturias

2.2.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.3 Una empresa de joyería tiene dos máquinas A y B con las que puede hacer anillos, pulseras y collares y tiene que decidir el número de horas de trabajo de cada una de las máquinas para la próxima semana. En cada hora de trabajo, la máquina A realiza 1 anillo, 4 pulseras y 2 collares, mientras que la máquina B realiza 4 anillos, 2 pulseras y 3 collares. Durante la próxima semana, la empresa debe producir al menos 80 anillos, 96 pulseras y 120 collares.

a) ¿Cuántas horas debe trabajar cada máquina para satisfacer estos requisitos de demanda? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría usarse 10 horas la máquina A y 30 horas la B?

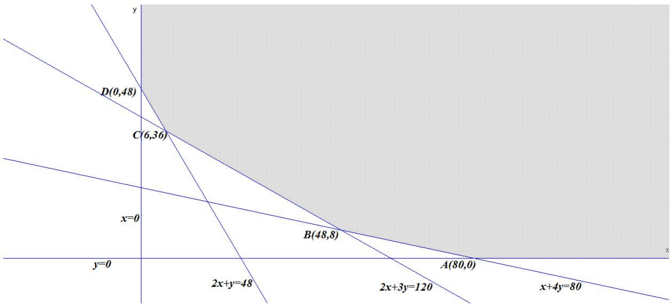
b) El coste por cada hora de trabajo de la máquina A es de 2500 euros y el de la máquina B es de 2000 euros. ¿Cuántas horas tiene que trabajar cada máquina para minimizar el coste total? ¿a cuánto asciende dicho coste mínimo?

Solución:
LLamamos x : nº de horas de la máquina A e y : nº de horas de la máquina B.

	Anillos	Pulseras	Collares
A	1	4	2
B	4	2	3
	≥ 80	≥ 96	≥ 120

a) La región factible es:

$$\left\{\begin{array}{l} x+4y\geq 80\\ 4x+2y\geq 96\\ 2x+3y\geq 120\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+4y\geq 80\\ 2x+y\geq 48\\ 2x+3y\geq 120\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{array}\right.$$

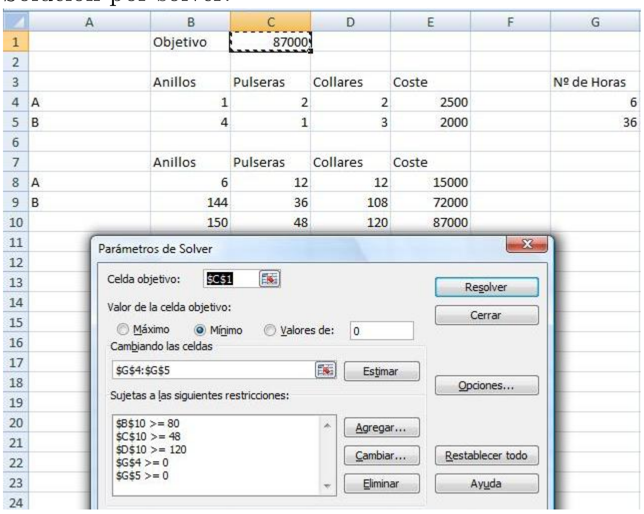


Los vértices son: $A(80,0)$, $B(48,8)$, $C(6,36)$ y $D(0,48)$.
El punto $(10,30)$ está fuera de la región factible y, por tanto, no cumple las condiciones del problema.

b) $f(x,y)=2500x+2000y$

$$\left\{\begin{array}{l} f(80,0)=200000\\ f(48,8)=136000\\ f(6,36)=87000 \text{ Mínimo}\\ f(0,48)=96000\end{array}\right.$$

La máquina A tiene que trabajar 6 horas y 36 horas la B para tener un gasto mínimo de 87000 euros.
Solución por solver:



	A	B	C	D	E	F	G
1		Objetivo	87000				
2							
3		Anillos	Pulseras	Collares	Coste		Nº de Horas
4	A	1	2	2	2500		6
5	B	4	1	3	2000		36
6							
7		Anillos	Pulseras	Collares	Coste		
8	A	6	12	12	15000		
9	B	144	36	108	72000		
10		150	48	120	87000		

2.2.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.4 Una empresa construye dos tipos de motocicletas eléctricas A y B. Cada jornada dispone de 3600 euros para la fabricación de estas motocicletas, siendo el coste de manufactura de 200 euros para la motocicleta tipo A y de 400 euros para la motocicleta tipo B. Además las condiciones de mercado exigen que el número total de motocicletas fabricadas por jornada no sea mayor de 12. Por otro lado, debido a la organización de la producción en esa empresa, cada jornada no puede fabricar más de 8 motocicletas de tipo B.

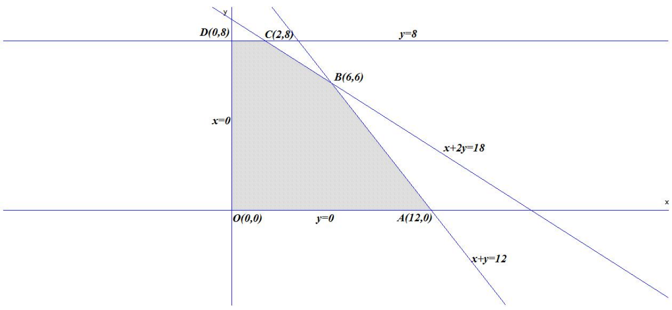
a) ¿Cuántas motocicletas de cada tipo puede fabricar una jornada para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían fabricar 4 motocicletas de tipo A y el doble de tipo B?

b) Sabiendo que el beneficio obtenido en la venta de una motocicleta de tipo A es de 200 euros y en la de tipo B es de 320 euros y suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, ¿cuántas motocicletas de cada tipo deben fabricar en una jornada para que el beneficio sea máximo? ¿y para maximizar el número de motocicletas de tipo A fabricadas?

Solución:
LLamamos x : nº de motocicletas A e y : nº de motocicletas B.

a) La región factible es:

$$\left\{\begin{array}{l} 200x + 400y \le 3600 \\ x + y \le 12 \\ y \le 8 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 2y \le 18 \\ x + y \le 12 \\ y \le 8 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right.$$

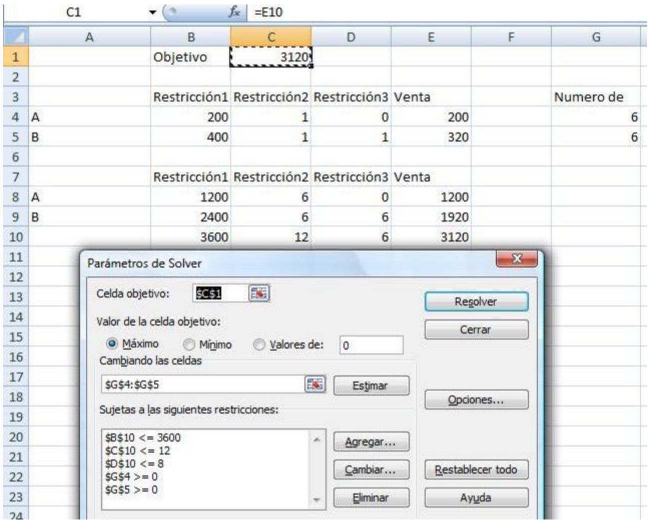


Los vértices son: $O(0,0)$, $A(12,0)$, $B(6,6)$, $C(2,8)$ y $D(0,8)$.
El punto $(4,8)$ está fuera de la región factible y, por tanto, no cumple las condiciones del problema. No se podrían fabricar 4 motocicletas de tipo A y el doble de tipo B.

b) $f(x,y) = 200x + 320y$

$$\left\{\begin{array}{l} f(12,0) = 2400 \\ f(6,6) = 3120 \ \text{Máximo} \\ f(2,8) = 2960 \\ f(0,8) = 2560 \end{array}\right.$$

Hay que fabricar 6 motocicletas A y 6 motocicletas B para obtener un beneficio máximo de 3120 euros.
Solución por solver:



Para optimizar las motocicletas A no fabricaríamos las motocicletas B: se fabricarían 12 motocicletas A.

2.3. Islas Baleares

2.3.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

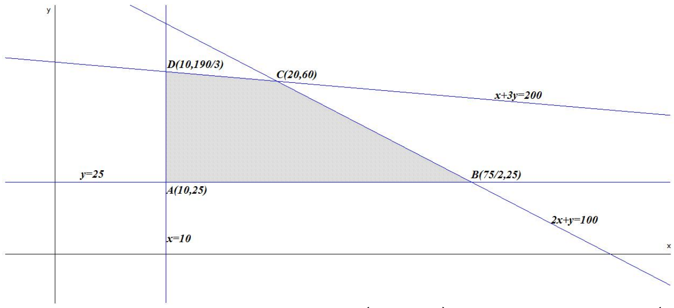
Problema 2.5 Una empresa se dedica a elaborar lotes de productos que ese venden en supermercados. En estos momentos están empaquetando dos lotes diferentes. El lote de tipo A tiene 1 pendrive, 2 botellas de vino, y el transporte cuesta 0,90 euros. El lote de tipo B tiene 3 pendrive, 1 botella de vino, y cuesta 1,50 euros transportarlo. La empresa dispone de 200 pendrive y 100 botellas de vino, y han de elaborar, al menos, 10 lotes del tipos A y 25 del tipo B.
¿Cuántos lotes de cada clase han de elaborar para que los gastos en transporte sean mínimos?
Se ha de plantear el problema como un problema de programación lineal, dibujando la región factible de soluciones, determinando y dibujando sus vértices.

Solución:
LLamamos x : nº de lotes A e y : nº de lotes B.

	Pendrive	Vino	Gasto
A	1	2	$0,90$
B	3	1	$1,50$
	≤ 200	≤ 100	

La función objetivo es: $f(x, y) = 0,90x + 1,50y$ La región factible es:

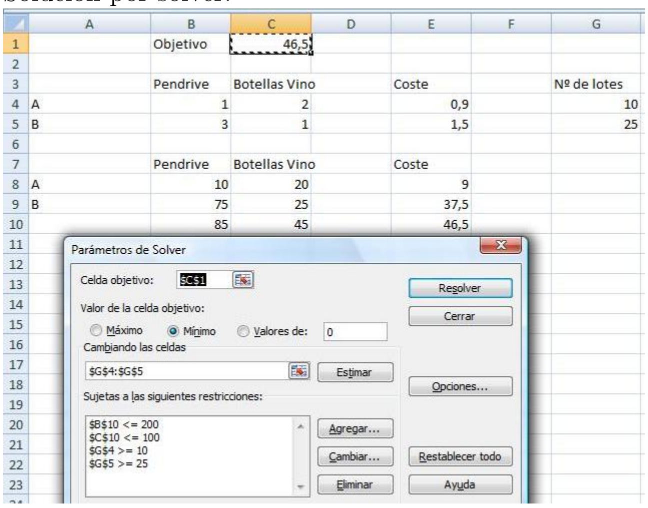
$$\begin{cases} x + 3y \leq 200 \\ 2x + y \leq 100 \\ x \geq 10 \\ y \geq 25 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(10,25)$, $B\left(\dfrac{75}{2},25\right)$, $C(20,60)$ y $D\left(10,\dfrac{190}{3}\right)$.

$$\begin{cases} f(10,25) = 46,5 \ \text{Mínimo} \\ f\left(\dfrac{75}{2},25\right) = 71,25 \\ f(20,60) = 108 \\ f\left(10,\dfrac{190}{3}\right) = 104 \end{cases}$$

De lotes A tiene que elaborar 10 y 25 de lotes B para tener un gasto mínimo de 46,5 euros.
Solución por solver:



2.3.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.6 KSE es una empresa que fabrica dos modelos de guantes: un modelo normal y un modelo de lujo. La empresa tiene disponibles 900 horas de tiempo en el departamento de producción, 300 horas al departamento de acabado y 100 horas en el departamento de empaquetado. Las horas necesarias de cada departamento por pares de guantes y los beneficios, en euros, se dan en la tabla siguiente:

	Producción	Acabado	Empaquetado	Beneficio
Normal	1	1/2	1/8	4
Lujo	3/2	1/3	1/4	8

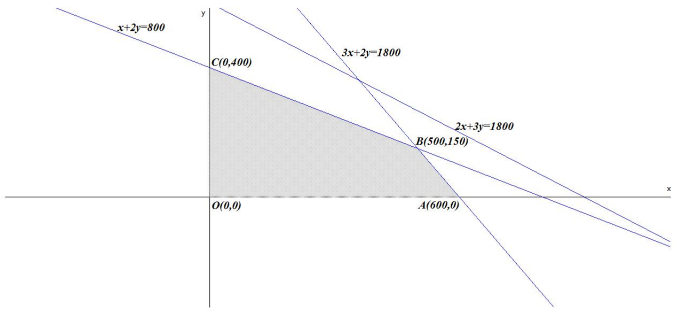
¿Cuántos pares de cada modelo deben fabricar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es este beneficio?
Se debe plantear el problema como un problema de programación o lineal, dibujando la región o factible de soluciones y determinante y dibujando sus vértices.

Solución:
LLamamos x : nº de pares normales e y : nº de pares de lujo.

	Producción	Acabado	Empaquetado	Beneficio
Normal	1	1/2	1/8	4
Lujo	3/2	1/3	1/4	8
	900	300	100	

La función objetivo es: $f(x,y) = 4x + 8y$ La región factible es:

$$\left\{\begin{array}{l} x + \frac{3}{2}y \le 900 \\ \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y \le 300 \\ \\ \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y \le 100 \\ \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + 3y \le 1800 \\ 3x + 2y \le 1800 \\ x + 2y = 800 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right.$$

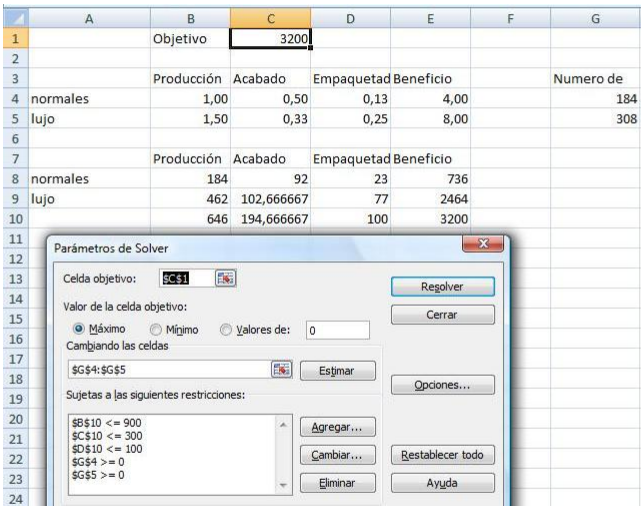


Los vértices son: $A(600,0)$, $B(500,150$ y $C(0,400)$.

$$\left\{\begin{array}{l} f(600,0) = 2400 \\ f(500,150) = 3200 \text{ Máximo} \\ f(0,400) = 3200 \text{ Máximo} \end{array}\right.$$

La solución será cualquier punto con valores enteros del segmento que une los puntos B y C con un beneficio de 3200 euros. Las soluciones cumplirán $y = \dfrac{800-x}{2}$ cuando $x \in [0,500]$ y sólo valdrían valores enteros.

Una solución por solver:



2.4. Islas Canarias

2.4.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.7 Una guagua de Madrid a París ofrece hasta 90 plazas de dos tipos: A (al precio de 65 euros y con 30 kgr. de equipaje), y B (al precio de 95 euros y con 50 kgr. de equipaje). Si la guagua admite hasta 3000 Kg. de equipaje y se quiere maximizar el ingreso total por la venta de plazas:

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal y representar la región factible.

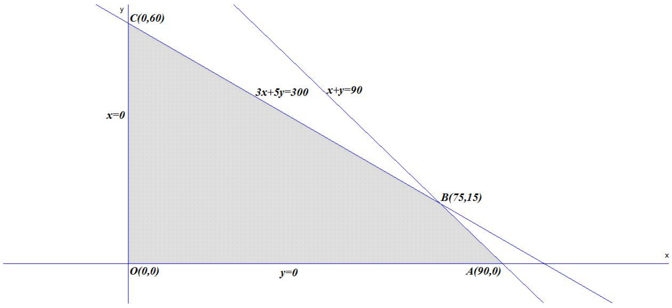
b) ¿Cuántas plazas de cada tipo determinan la solución óptima? ¿Cuál es el ingreso total óptimo?

Solución: LLamamos x : nº de plazas A e y : nº de plazas B.

	Número	Peso	Precio
A	1	30	65
B	1	50	95
	≤ 90	≤ 3000	

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x + y \leq 90 \\ 30x + 50y \leq 3000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \leq 90 \\ 3x + 5y \leq 300 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

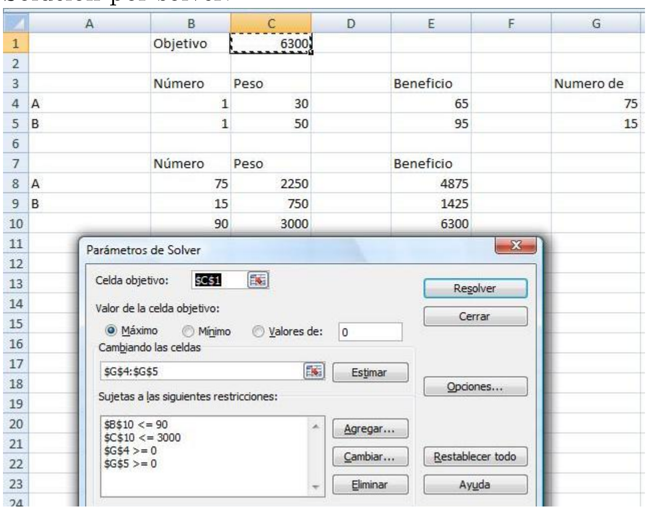


Los vértices son: $A(90,0)$, $B(75,15)$ y $C(0,60)$.

b) $f(x,y) = 65x + 95y$

$$\begin{cases} f(90,0) = 5850 \\ f(75,15) = 6300 \ \text{Máximo} \\ f(0,60) = 5700 \end{cases}$$

Se deben vender 75 plazas A y 15 plazas B por un valor máximo de 6300 euros.
Solución por solver:



	A	B	C	D	E	F	G
1		Objetivo	6300				
2							
3		Número	Peso		Beneficio		Numero de
4	A	1	30		65		75
5	B	1	50		95		15
6							
7		Número	Peso		Beneficio		
8	A	75	2250		4875		
9	B	15	750		1425		
10		90	3000		6300		

2.4.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.8 Una carpintería construye mesas y armarios de oficina utilizando tableros de aglomerado de idéntica medida. Para construir una mesa se requieren 2,5 tableros, y para construir una estantería se necesitan 6 tableros. Para ensamblar las piezas se utilizan 10 tornillos en cada mesa y 60 tornillos en cada estantería. El almacén dispone de 740 tableros y 6200 tornillos. Por cada mesa se obtiene un beneficio de 80 euros, por cada estantería un beneficio de 120 euros y se tiene que satisfacer una demanda mínima de 50 mesas y 60 estanterías. Suponiendo que siempre se vende toda la producción, si se quiere maximizar los beneficios:

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal y representar la región factible.

b) ¿Cuántas mesas y estanterías se deben fabricar con los tableros y tornillos disponibles en el almacén? ¿Cuál es el valor del beneficio óptimo?

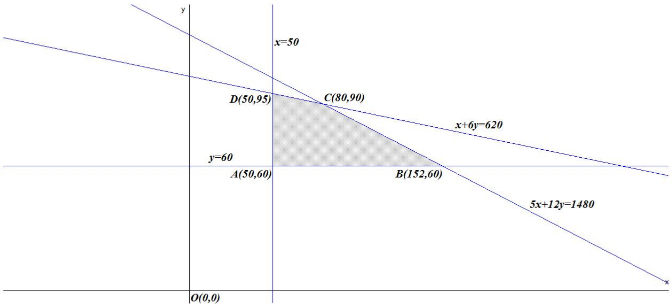
Julio 2019 (Islas Canarias)

Solución: LLamamos x : nº de mesas e y : nº de estanterías.

	Tableros	Tornillos	Beneficio
Mesas	$2,5$	10	80
Estanterías	6	60	120
	≤ 740	≤ 6200	

a) La región factible es:

$$\begin{cases} 2,5x + 6y \leq 740 \\ 10x + 60y \leq 6200 \\ x \geq 50 \\ y \geq 60 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5x + 12y \leq 1480 \\ x + 6y \leq 620 \\ x \geq 50 \\ y \geq 60 \end{cases}$$



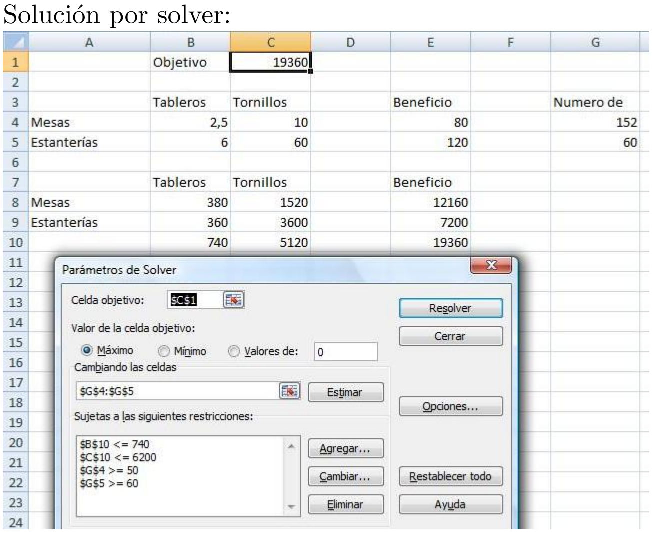
Los vértices son: $A(50,60)$, $B(152,60)$, $C(80,90)$ y $D(50,95)$.

b) $f(x,y) = 80x + 120y$

$$\begin{cases} f(50,60) = 11200 \\ f(152,60) = 19360 \ \text{Máximo} \\ f(80,90) = 17200 \\ f(50,95) = 15400 \end{cases}$$

Se deben fabricar 152 mesas y 60 estanterías con un beneficio máximo de 19360 euros.

Solución por solver:



2.5. Cantabria

2.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

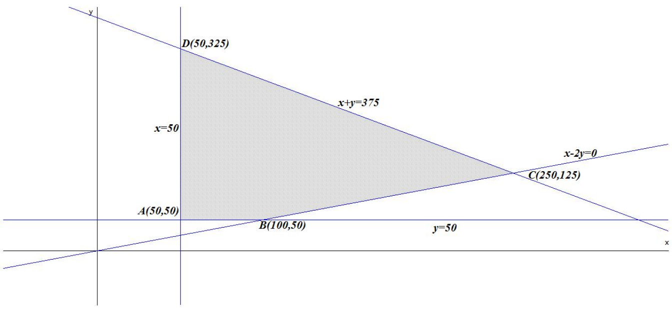
No hubo problemas de este tipo.

2.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.9 Una empresa textil confecciona dos estampados diferentes: A y B. Debe satisfacer una demanda de al menos 50 rollos de tela del estampado A; y de al menos 50 rollos del estampado B. Los ingresos obtenidos por rollo de tela son de 30 euros para el estampado A y de 20 euros para el B. Por otro lado, el número de rollos del B no debe ser inferior a la mitad de rollos del estampado A. Además, la capacidad del almacén es de 375 rollos. ¿Cuántos rollos de tela de cada tipo de estampado debe producir para obtener unos ingresos máximos?

Solución:
LLamamos x : nº de rollos de A e y : nº de rollos de B. La región factible es:

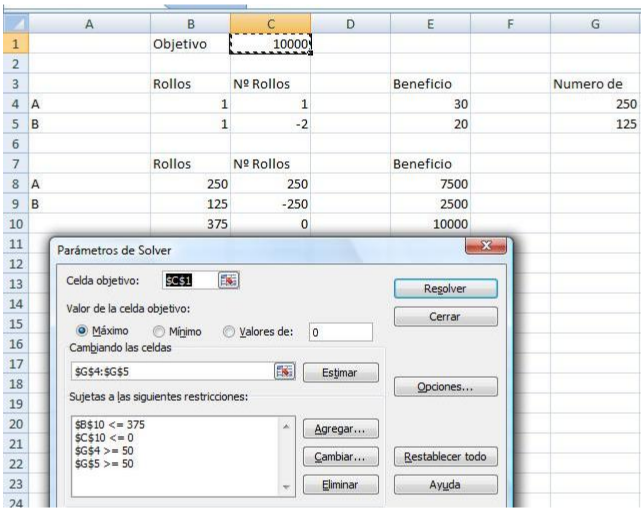
$$\left\{\begin{array}{l} y \geq \frac{x}{2} \\ x+y \leq 375 \\ x \geq 50 \\ y \geq 50 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-2y \leq 0 \\ x+y \leq 375 \\ x \geq 50 \\ y \geq 50 \end{array}\right.$$



Los vértices son: $A(50,50)$, $B(100,50)$, $C(250,125)$ y $D(50,325)$.
$f(x,y) = 30x + 20y$

$$\left\{\begin{array}{l} f(50,50) = 2500 \\ f(100,50) = 4000 \\ f(250,125) = 10000 \ \text{Máximo} \\ f(50,325) = 8000 \end{array}\right.$$

Se deben producir 250 rollos tipo A y 125 de B unos ingresos máximos de 10000 euros.
Solución por solver:



2.6. Castilla León

2.6.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

No hubo problemas de este tipo.

2.6.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

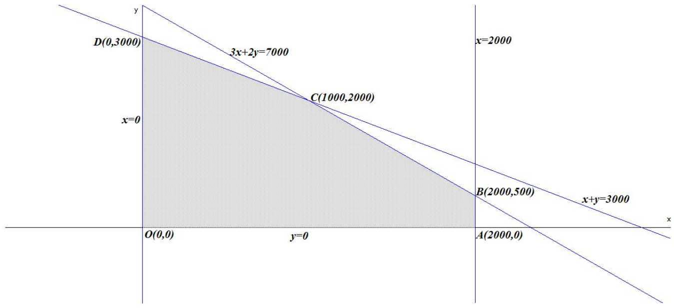
Problema 2.10 Un comerciante dispone de 350000 euros para comprar dos modelos de lámparas. El modelo A tiene un coste de 150 euros y produce, por cada unidad que se vende, un beneficio de 15 euros. El modelo B tiene un coste de 100 euros y produce, por cada unidad que se vende, un beneficio de 11 euros. Por experiencia sabe que sólo puede almacenar 3000 lámparas como máximo y que puede vender como máximo 2000 lámparas del modelo A. Determina, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas lámparas de cada modelo debe comprar para maximizar el beneficio conseguido en las ventas. Calcula ese beneficio máximo.

Solución: LLamamos x : n$^{\underline{o}}$ de modelos A e y : n$^{\underline{o}}$ de modelos B.

	Número	Coste	Beneficio
A	1	150	15
B	1	100	11
	≤ 3000	≤ 35000	

a) La región factible es:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y\leq 3000\\ 150x+100y\leq 350000\\ x\leq 2000\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y\leq 3000\\ 3x+2y\leq 7000\\ x\leq 2000\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{array}\right.$$

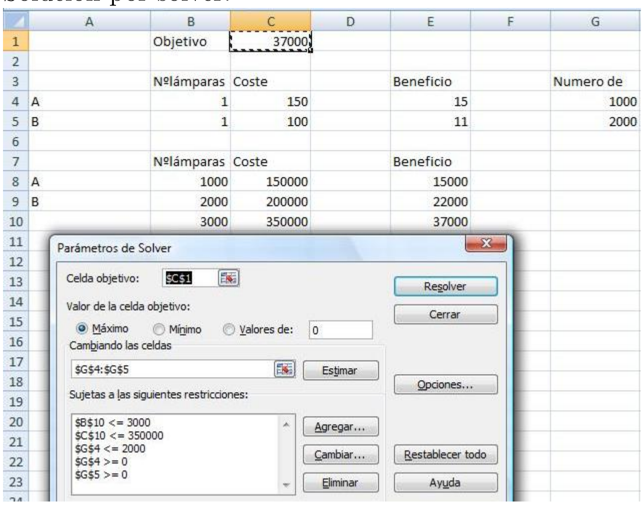


Los vértices son: $A(2000,0)$, $B(2000,500)$, $C(1000,2000)$ y $D(0,3000)$.

b) $f(x,y) = 15x + 11y$

$$\begin{cases} f(2000,0) = 30000 \\ f(2000,500) = 35500 \\ f(1000,2000) = 37000 \text{ Máximo} \\ f(0,3000) = 33000 \end{cases}$$

Se deben comprar 1000 lámparas del modelo A y 2000 del modelo B con un beneficio máximo de 37000 euros.
Solución por solver:



2.7. Castilla La Mancha

2.7.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2018

Problema 2.11 En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,y) = 3x + 4y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$x + y \geq 2; \quad x \leq y; \quad 0 \leq y \leq 2; \quad x \geq 0$$

a) Dibuja la región factible.

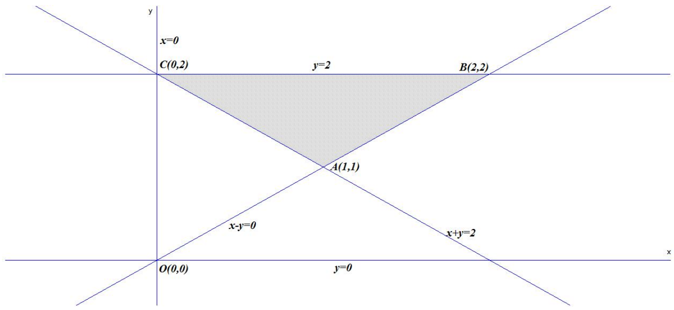
b) Determina los vértices de la región factible.

c) Indica el máximo y el mínimo y sus respectivos valores.

Solución:

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x+y\geq 2 \\ x\leq y \\ 0\leq y\leq 2 \\ x\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y\geq 2 \\ x-y\leq 0 \\ y\leq 2 \\ y\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases}$$

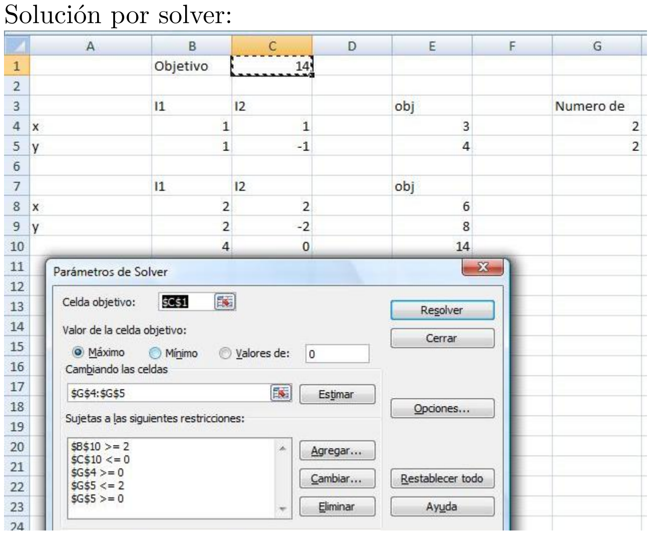


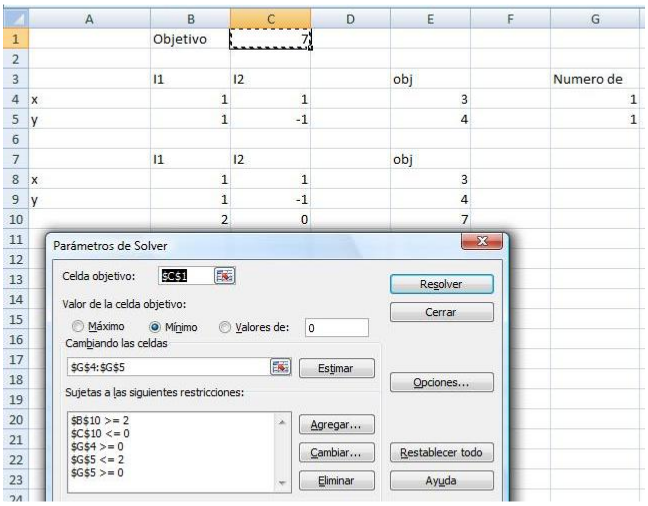
b) Los vértices son: $A(1,1)$, $B(2,2)$ y $C(0,2)$.

c) $f(x,y)=3x+4y$

$$\begin{cases} f(1,1)=7 \ \text{Mínimo} \\ f(2,2)=14 \ \text{Máximo} \\ f(0,2)=8 \end{cases}$$

El máximo se encuentra en el punto $B(2,2)$ con un valor de 14 unidades. El mínimo se encuentra en el punto $A(1,1)$ con un valor de 7 unidades.
Solución por solver:





2.7.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.12 En un taller se confeccionan prendas vaqueras con dos tipos de tejidos de distinta calidad (T_1, T_2). Disponen de 160 m^2 del tejido T_1 y 240 m^2 del tejido T_2. Hacen dos conjuntos: Uno con chaqueta y falda y otro con cazadora y pantalón. El primero utiliza 2 m^2 de T_1 y 2 m^2 de T_2, el conjunto del pantalón utiliza 1 m^2 de T_1 y 3 m^2 de T_2. El conjunto con falda cuesta 250 euros y el del pantalón 350 euros.

a) Expresa la función objetivo.

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

c) Calcula el número de conjuntos de cada tipo que deben hacer para obtener máximas ganancias.

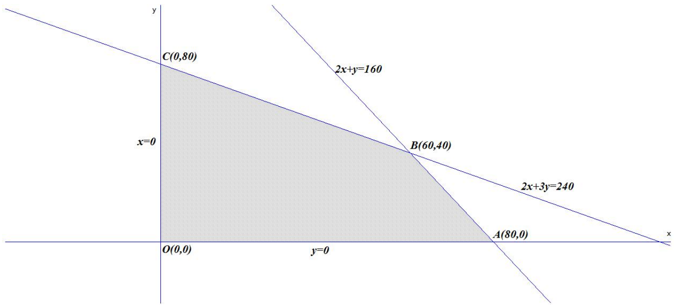
Solución:
LLamamos x : nº de chaquetas con falda e y : nº de cazadoras con pantalón.

	T_1	T_2	Venta
Chaquetas	2	2	250
Cazadoras	1	3	350
	≤ 160	≤ 240	

a) La función objetivo es: $f(x, y) = 250x + 350y$

b) La región factible es:

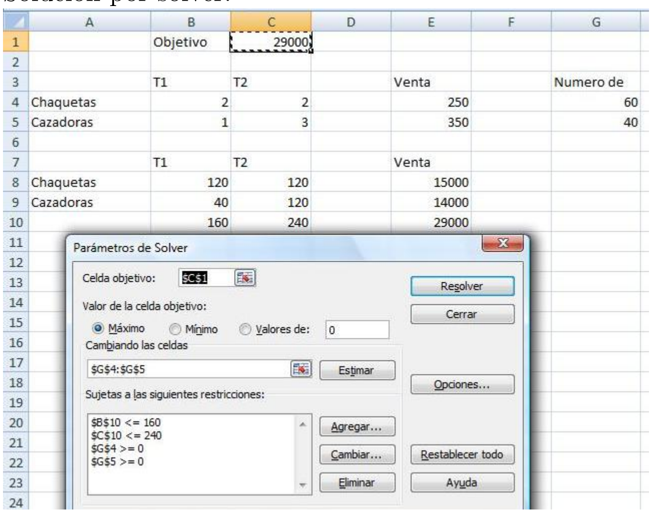
$$\begin{cases} 2x + y \leq 160 \\ 2x + 3y \leq 240 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



c) Los vértices son: $A(80,0)$, $B(60,40)$ y $C(0,80)$.

$$\begin{cases} f(80,0) = 20000 \\ f(60,40) = 29000 \ \text{Máximo} \\ f(0,80) = 28000 \end{cases}$$

De chaquetas con faldas tiene que vender 60 y 40 de cazadoras con pantalón con un valor máximo de 29000 euros.
Solución por solver:



	A	B	C	D	E	F	G
1		Objetivo	29000				
2							
3		T1	T2		Venta		Numero de
4	Chaquetas	2	2		250		60
5	Cazadoras	1	3		350		40
6							
7		T1	T2		Venta		
8	Chaquetas	120	120		15000		
9	Cazadoras	40	120		14000		
10		160	240		29000		

2.8. Cataluña

2.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.13 En una fábrica se dispone de 80 kg de acero y 120 kg de aluminio para fabricar bicicletas de montaña y de paseo, que se venderán a 200 euros y 150 euros, respectivamente. Para fabricar una bicicleta de montaña son necesarios 1 kg de acero y 3 kg de aluminio, y para fabricar una de paseo, 2 kg de cada uno de los dos metales.

a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región factible.

b) Calcule cuántas bicicletas de cada tipo hay que fabricar para obtener el máximo beneficio y diga cuál es este beneficio.

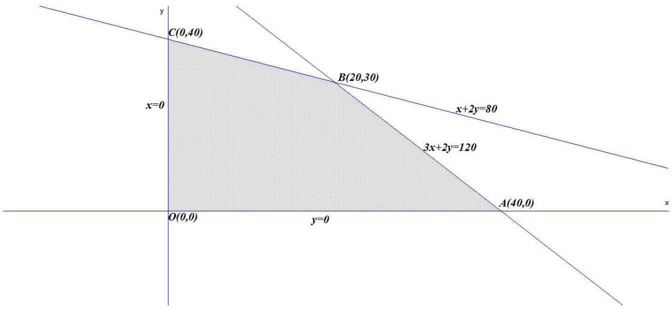
Solución:

LLamamos x : nº de bicicletas de montaña e y : nº de bicicletas de paseo.

	Acero	Aluminio	Venta
montaña	1	3	200
paseo	2	2	150
	≤ 80	≤ 120	

La región factible es:

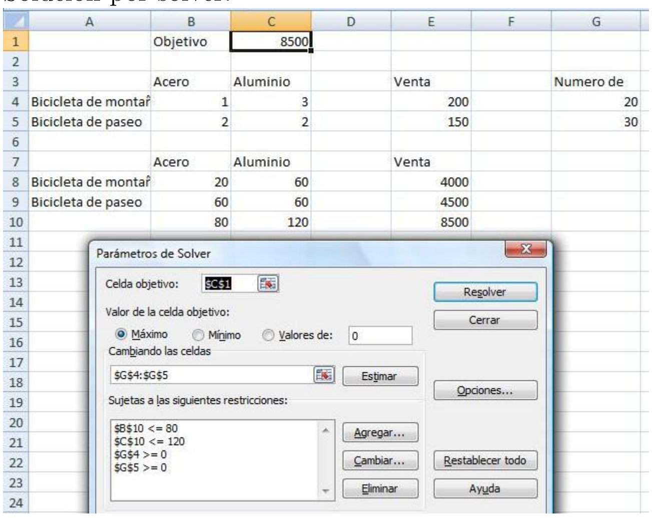
$$\begin{cases} x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(40,0)$, $B(20,30)$ y $C(0,40)$.
$f(x,y) = 200x + 150y$

$$\begin{cases} f(40,0) = 8000 \\ f(20,30) = 8500 \ \text{Máximo} \\ f(0,40) = 6000 \end{cases}$$

Se deben fabricar 20 bicicletas de montaña y 30 bicicletas de paseo con un beneficio máximo de 8500 euros.
Solución por solver:



Problema 2.14 La empresa de deporte de aventura Xtrem prepara para la última semana de junio dos paquetes: el paquete básico (PB) y el paquete súper (PS). El PB incluye una bajada

de rafting, una bajada haciendo barranquismo y un salto en caída libre haciendo puenting, y tiene un precio de 50 euros. Por otro lado, el PS incluye tres bajadas de rafting, dos de barranquismo y un puenting, y el precio es de 120 euros.
Por limitaciones climáticas y de personal, solo se pueden hacer 12 bajadas de rafting, 9 haciendo barranquismo y 8 puentings. Para hacer la promoción turística, se quiere saber qué combinación de paquetes proporciona más ingresos.

a) Encuentre las inecuaciones que han de cumplir todas las posibles combinaciones de paquetes. Dibuje la región del plano donde se encuentran estas posibles soluciones y encuentre la función que da los ingresos en función del número de paquetes de cada tipo.

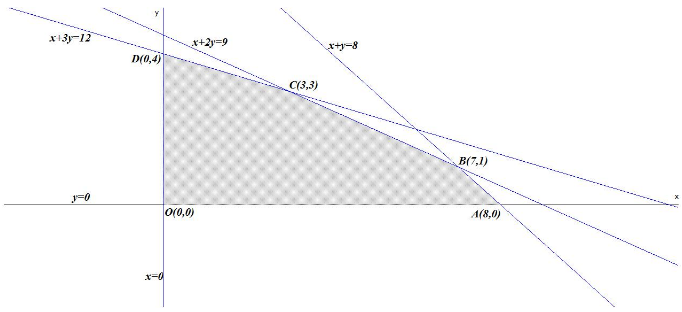
b) Encuentre el número de paquetes de cada tipo que tiene que ofrecer la empresa para obtener los ingresos máximos y diga cuáles serían estos ingresos.

Solución:
LLamamos x : nº de paquetes básicos e y : nº de paquetes súper.

	rafting	barranquismo	puenting	Venta
PB	1	1	1	50
PS	3	2	1	120
	≤ 12	≤ 9	≤ 8	

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 12 \\ x + 2y \leq 9 \\ x + y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

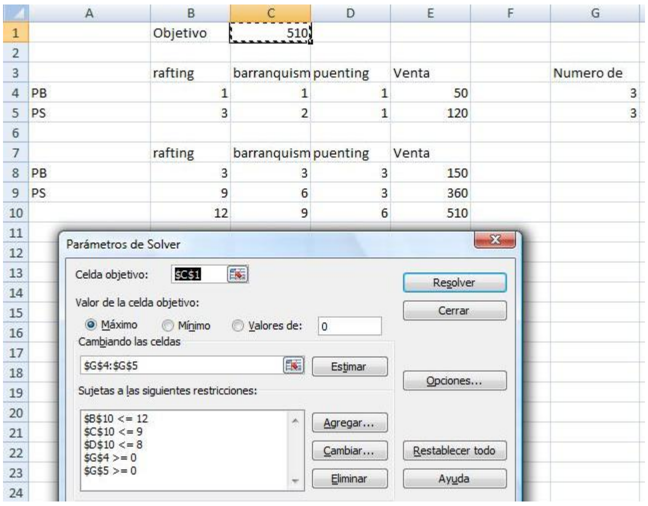


Los vértices son: $A(8,0)$, $B(7,1)$, $C(3,3)$ y $D(0,4)$.

b) $f(x,y) = 50x + 120y$

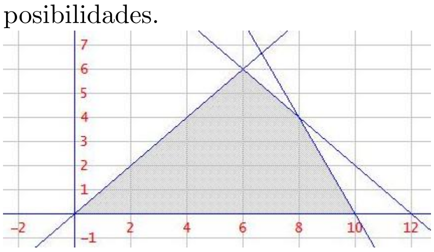
$$\begin{cases} f(8,0) = 400 \\ f(7,1) = 470 \\ f(3,3) = 510 \;\; \text{Máximo} \\ f(0,4) = 480 \end{cases}$$

Se deben realizar 3 paquetes básicos y 3 paquetes súper con un beneficio máximo de 510 euros.
Solución por solver:



2.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.15 Un horno artesano hace dos tipos de panecillos, los integrales y los de cereales. En su elaboración, además de la harina correspondiente, se usa levadura de masa madre y agua. La cantidad de levadura de masa madre y de agua que se utiliza en la elaboración de cada panecillo depende de si se trata de un panecillo integral o de cereales.
Se quiere saber cuántos panecillos de cada tipo se pueden hacer. Después de comprobar la cantidad de masa madre y de agua de que se dispone, y teniendo en cuenta que la cantidad de panecillos de cereales no puede superar la de panecillos integrales, se obtiene la siguiente región con todas las posibilidades.



En el gráfico, el eje de las x representa el número de panecillos integrales y el de las y, el número de panecillos de cereales.

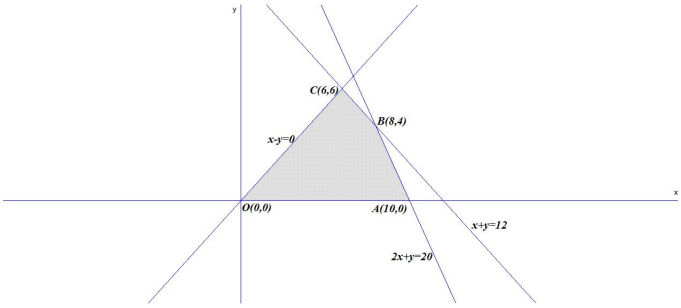
a) Escriba las inecuaciones que dan lugar a esta región factible.

b) Si los panecillos integrales se venden a 8 euros cada unidad y los de cereales a 10 euros, ¿cuántos panecillos de cada tipo se tienen que vender para obtener los máximos ingresos? ¿Cuáles son estos máximos ingresos?

Solución:
LLamamos x : número de panecillos integrales e y : número de panecillos de cereales.

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \leq 12 \\ 2x + y \leq 20 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



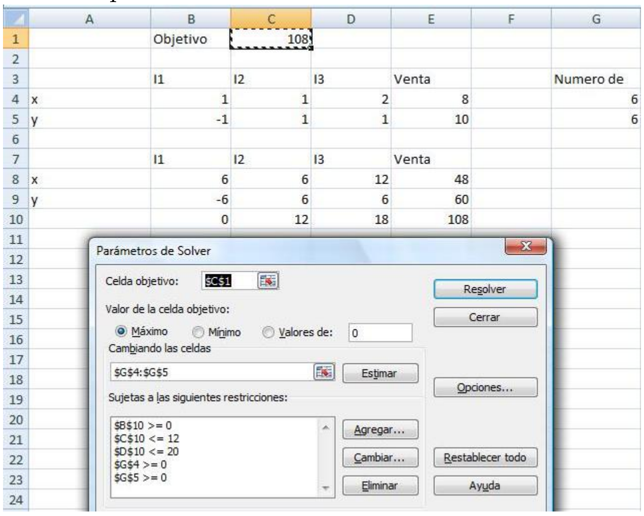
Los vértices son: $A(10,0)$, $B(8,4)$ y $C(6,6)$.

b) La función objetivo es: $f(x,y) = 8x + 10y$

$$\begin{cases} f(10,0) = 80 \\ f(8,4) = 104 \\ f(6,6) = 108 \ \text{Máximo} \end{cases}$$

El máximo es de 108 euros y se encuentra vendiendo 6 panecillos integrales y 6 panecillos de cereales.

Solución por solver:



2.9. País Vasco

2.9.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.16 Una pastelera fabrica dos tipos de tartas. La tarta de tipo A se elabora con 1 kg. de masa y 1,5 kg. de chocolate, y se vende a 24 euros. La de tipo B se vende a 30 euros y se elabora con 1,5 kg. de masa y 1 kg. de chocolate, tal como aparece en la siguiente tabla:

	Masa	Chocolate
A	$1\,\text{kg}$	$1,5\,\text{kg}$
B	$1,5\,\text{kg}$	$1\,\text{kg}$

Si la pastelera sólo dispone de 300 kg. de cada ingrediente, ¿cuántas tartas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo ingreso? Calcula el valor de dicho ingreso.

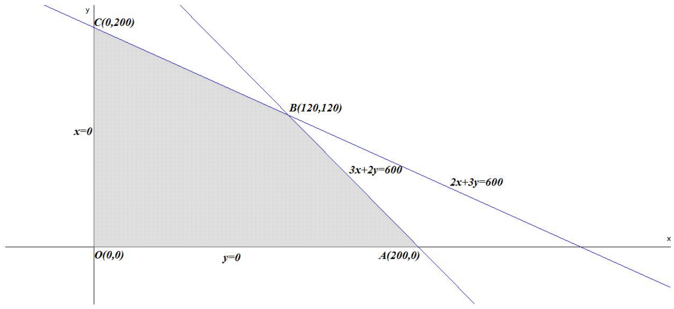
Solución:

LLamamos x : nº de tartas tipo A e y : nº de tartas tipo B.

	Masa	Chocolate	Beneficio
A	1	$1,5$	24
B	$1,5$	1	30
	≤ 300	≤ 300	

La región factible es:

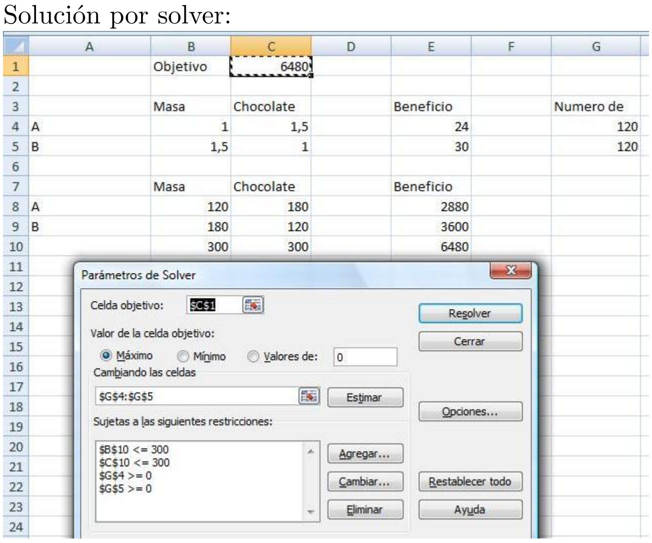
$$\begin{cases} x + 1,5y \leq 300 \\ 1,5x + y \leq 300 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y \leq 600 \\ 3x + 2y \leq 600 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(200,0)$, $B(120,120)$ y $C(0,200)$.
$f(x,y) = 24x + 30y$

$$\begin{cases} f(200,0) = 4800 \\ f(120,120) = 6480 \;\; \text{Máximo} \\ f(0,200) = 6000 \end{cases}$$

Se deben producir 120 tartas tipo A y 120 de B con un beneficio máximo de 6480 euros.
Solución por solver:



2.9.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.17 Sea la región definida por las inecuaciones:

$$x + y - 1 \geq 0; \;\; 0 \leq x \leq 4; \;\; 0 \leq y \leq 2$$

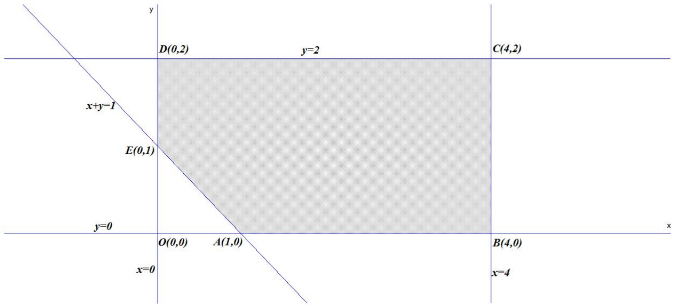
Determinar los puntos de dicha región en los que la función $F(x, y) = 4x + 2y$ alcanza sus valores máximo y mínimo. Calcular los valores de la función en dichos puntos.

Solución:

La función objetivo es: $F(x, y) = 4x + 2y$

La región factible es:

$$\begin{cases} x + y - 1 \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \geq 1 \\ x \leq 4 \\ y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

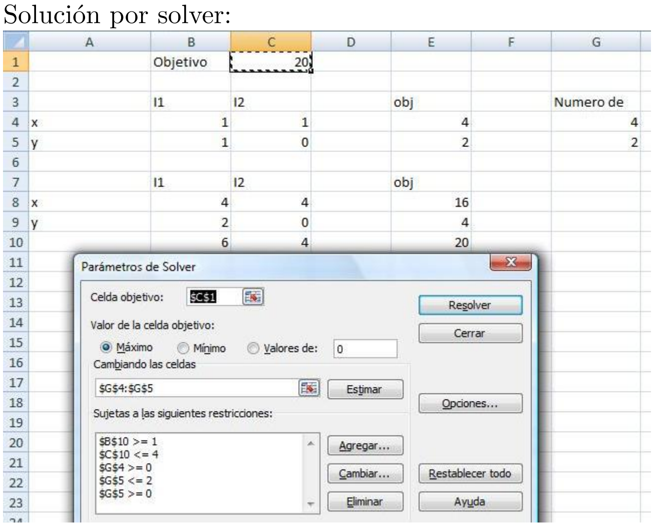


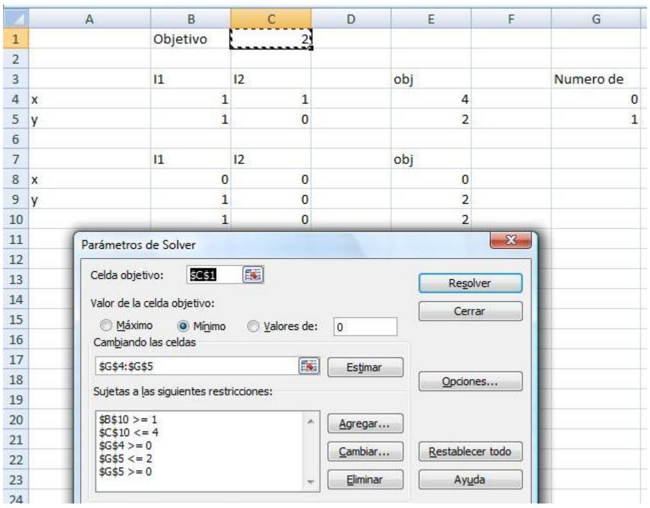
Los vértices son: $A(1, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 2)$, $D(0, 2)$ y $E(0, 1)$.

$$\begin{cases} F(1, 0) = 4 \\ F(4, 0) = 16 \\ F(4, 2) = 20 \;\; \text{Máximo} \\ F(0, 2) = 4 \\ F(0, 1) = 2 \;\; \text{Mínimo} \end{cases}$$

El máximo se encuentra en el punto $C(4, 2)$ con un valor de 20 unidades. El mínimo se encuentra en el punto $E(0, 1)$ con un valor de 2 unidades.

Solución por solver:





2.10. Extremadura

2.10.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.18 Una tienda de electrodomésticos desea adquirir, para su venta posterior, dos tipos de cocinas: vitrocerámicas y de inducción, disponiendo para ello de 3000 euros. Cada cocina vitrocerámica le cuesta 100 euros y cada cocina de inducción 200 euros. El almacén solo tiene espacio para un total de 20 cocinas. El beneficio obtenido por cada vitrocerámica es del 30 % de su precio de coste y el beneficio de cada cocina de inducción es del 25 % también sobre su precio de coste. Además, por razones de mercado el número de cocinas de inducción no puede ser superior a 12. Se pide determinar, justificando las respuestas:

a) ¿Cuántas cocinas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio?

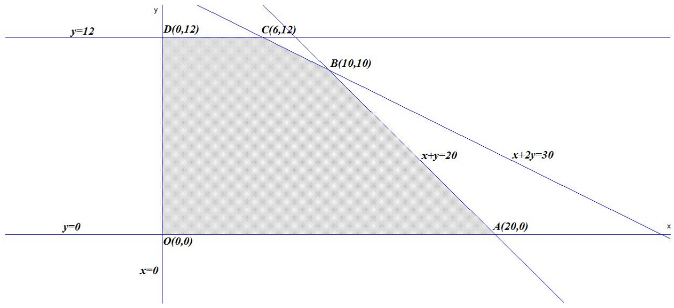
b) ¿Cuál es el valor de dicho beneficio máximo?

Solución:
LLamamos x : nº de vitrocerámicas e y : nº de placas de inducción.

	Coste	Cantidad	Beneficio
Vitrocerámicas	100	1	30
Inducción	200	1	50
	≤ 3000	≤ 20	

a) La región factible es:

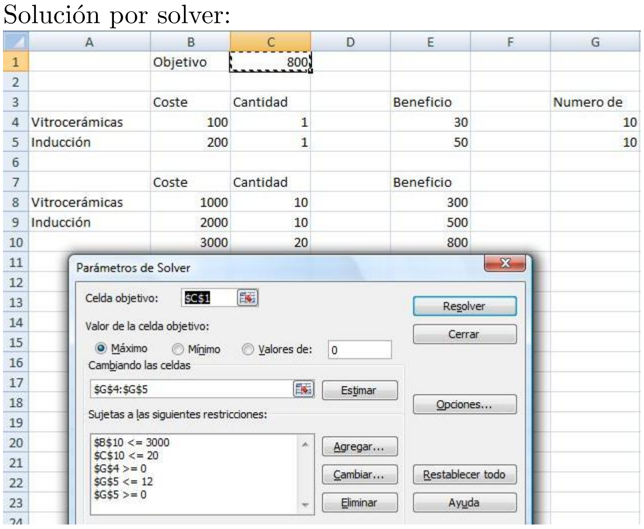
$$\left\{\begin{array}{l} 100x + 200y \leq 3000 \\ x + y \leq 20 \\ y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 2y \leq 30 \\ x + y \leq 20 \\ y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right.$$



Los vértices son: $A(20,0)$, $B(10,10)$, $C(6,12)$ y $D(0,12)$.
La función objetivo es: $f(x,y) = 30x + 50y$

$$\begin{cases} f(20,0) = 600 \\ f(10,10) = 800 \text{ Máximo} \\ f(6,12) = 780 \\ f(0,12) = 600 \end{cases}$$

b) De vitrocerámicas tiene que vender 10 y 10 de placas de inducción con un beneficio máximo de 800 euros.
Solución por solver:



2.10.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.19 Un taller industrial fabrica dos clases de motores A y B. Cada motor de clase A requiere 2 horas de montaje y 1 hora de reglaje, con un beneficio de 220 euro, y cada motor de clase B, 3 horas de montaje y 1/2 hora de reglaje con un beneficio de 280 euros.
Si sólo se dispone cada día de 300 horas para el montaje de motores y de 120 horas para su reglaje y el número de motores de la clase B no puede ser superior a 80, se pide, justificando las respuestas:

a) ¿Cuántos motores de cada clase se deben fabricar para obtener el máximo beneficio?

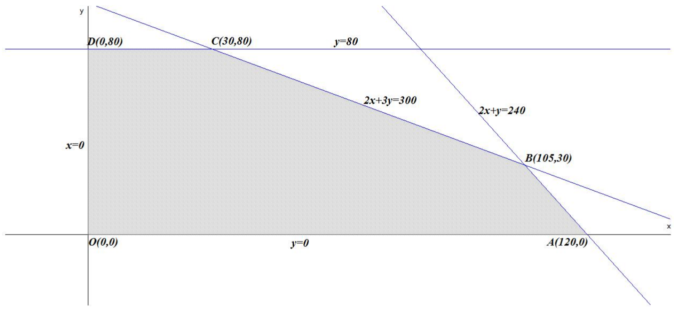
b) ¿Cuál es el valor de dicho beneficio máximo?

Solución:
LLamamos x : nº de motores A e y : nº de motores B.

	Montaje	Reglaje	Beneficio
A	2	1	220
B	3	$0,5$	280
	≤ 300	≤ 120	

a) La región factible es:

$$\begin{cases} 2x+3y \leq 300 \\ x+0,5y \leq 120 \\ y \leq 80 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x+3y \leq 300 \\ 2x+y \leq 240 \\ y \leq 80 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

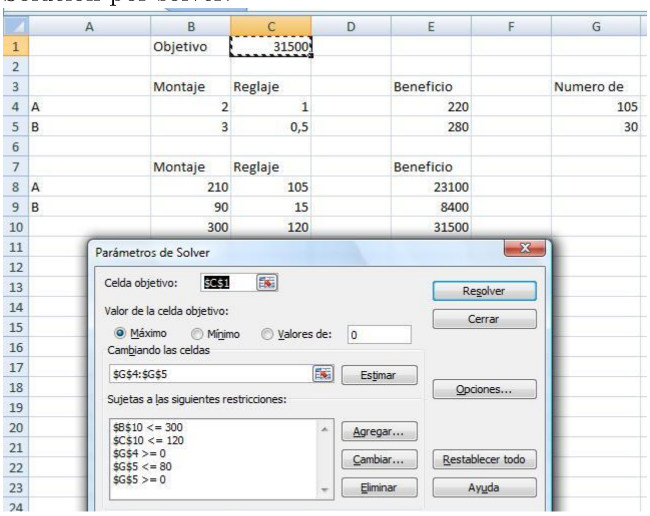


Los vértices son: $A(120,0)$, $B(105,30)$, $C(30,80)$ y $D(0,80)$.

b) $f(x,y) = 220x + 280y$

$$\begin{cases} f(120,0) = 26400 \\ f(105,30) = 31500 \ \text{Máximo} \\ f(30,80) = 29000 \\ f(0,80) = 22400 \end{cases}$$

Se deben fabricar 105 motores del modelo A y 30 del modelo B con un beneficio máximo de 31500 euros.
Solución por solver:



2.11. Madrid

2.11.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.20 Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas. Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con la leche que tiene. Para que haya suficiente para todos los asistentes, tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.

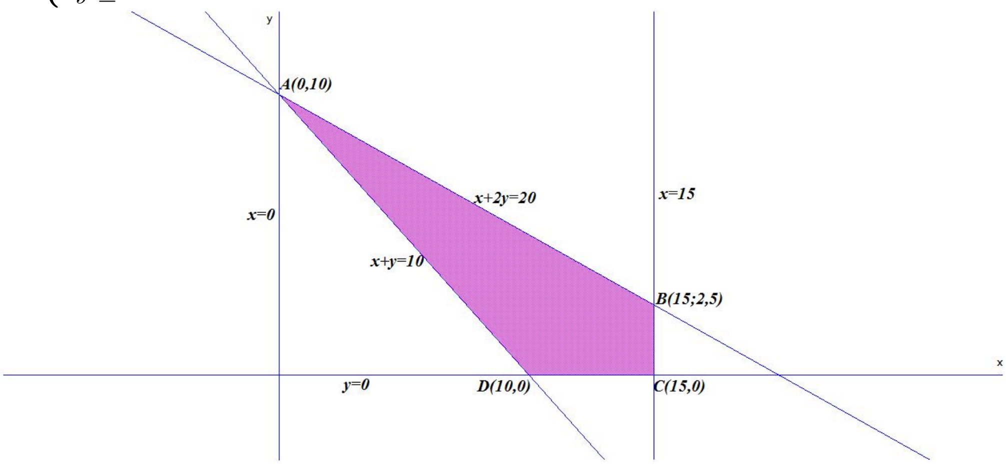
a) Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.

b) Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar el beneficio y calcúlese el beneficio máximo que podría obtenerse.

Solución:
x: litros de helado e y : litros de horchata.

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x, y) = 25x + 12y$ calculando su máximo,, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} x + y \geq 10 \\ x + 2y \leq 20 \\ x \leq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

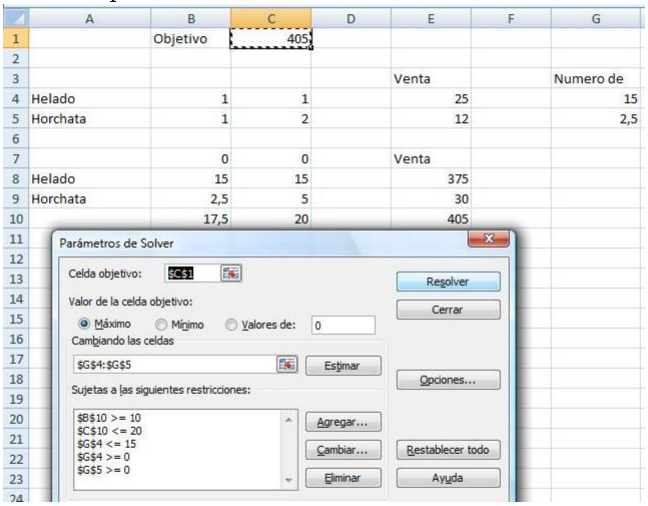


La región S y los vértices a estudiar serán: $A(0, 10)$, $B(15; 5/2)$, $C(15, 0)$ y $D(10, 0)$:

b)

$$\begin{cases} f(0, 10) = 120 \\ f(15; 5/2) = 405 \ \text{Máximo} \\ f(15, 0) = 375 \\ f(10, 0) = 250 \end{cases}$$

El máximo es 405 euros y se alcanza en el punto $B(15; 5/2))$ lo que supone preparar 15 litros de helado y 2,5 litros de horchata.
Solución por solver:



2.11.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

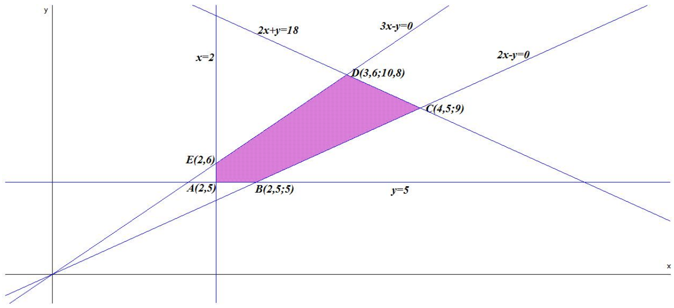
Problema 2.21 Un alcalde quiere instalar un estanque rectangular en un parque de la ciudad con las siguientes características. El estanque deberá tener al menos 2 metros de ancho y al menos 5 metros de largo. Además su largo debe ser al menos 2 veces su ancho pero no más de tres veces su ancho. Cada metro del ancho del estanque cuesta 1000 euros y cada metro de largo 500 euros. Y se cuenta con un presupuesto de 9000 euros.

a) Determínese la región del plano delimitada por las restricciones anteriores sobre las dimensiones del estanque.

b) Si se desea que el estanque respetando esas características tenga el mayor ancho posible, determínense el largo del estanque y su coste.

Solución:
Sea x: ancho e y: largo.

$$\left\{\begin{array}{l} 1000x + 500y \le 9000 \\ y \ge 2x \\ y \le 3x \\ x \ge 2 \\ y \ge 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + y \le 18 \\ 2x - y \le 0 \\ 3x - y \ge 0 \\ x \ge 2 \\ y \ge 5 \end{array}\right.$$



Los vértices a estudiar serán: $A(2,5)$, $B(2,5;5)$, $C(4,5;9)$, $D(3,6;10,8)$ y $E(2,6)$. El mayor ancho lo tiene el punto $C(4,5;9)$ con 4,5 m y un coste de $f(4,5;9) = 9000$ euros. ($f(x,y) = 1000x + 500y$)

2.12. Valencia

2.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.22 Un inversor dispone de 9000 euros y quiere invertir en dos tipos de productos financieros: A y B. La inversión en el producto A debe superar los 5000 euros y, además, esta debe ser el doble, al menos, que la inversión en el producto B. Se sabe que la rentabilidad del producto A es del 2,7 % y la del producto B del 6,3 %.

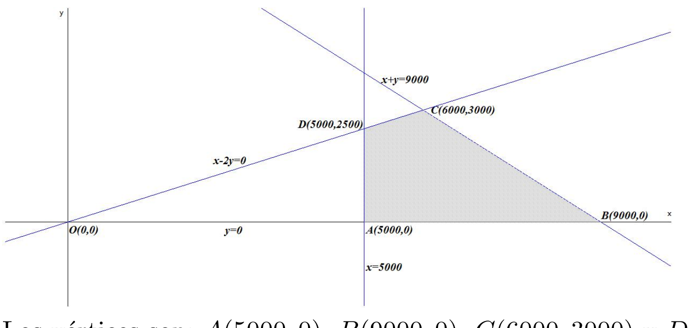
a) ¿Cuánto ha de invertir en cada producto para que la rentabilidad sea máxima?

b) ¿Cuál es esa rentabilidad máxima?

Solución:
LLamamos x : cantidad invertida en A e y : cantidad invertida en B.

a) La región factible es:

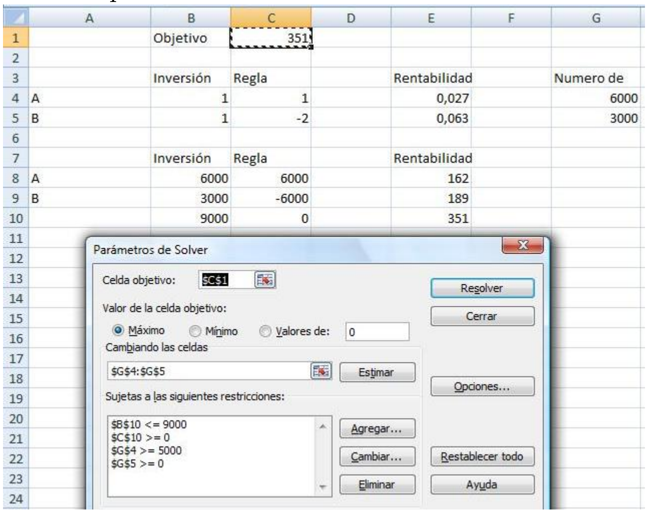
$$\left\{\begin{array}{l} x+y\le 9000\\ x\ge 2y\\ x\ge 5000\\ y\ge 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y\le 9000\\ x-2y\ge 0\\ x\ge 5000\\ y\ge 0\end{array}\right.$$



Los vértices son: $A(5000,0)$, $B(9000,0)$, $C(6000,3000)$ y $D(5000,2500)$. La función objetivo es: $f(x,y) = 0,027x + 0,063y$

$$\left\{\begin{array}{l} f(5000,0) = 135\\ f(9000,0) = 243\\ f(6000,3000) = 351 \ \text{Máximo}\\ f(5000,2500) = 292,5\end{array}\right.$$

b) El máximo se encuentra invirtiendo 6000 euros en A y 3000 euros en B con una rentabilidad de 351 euros.
Solución por solver:



	A	B	C	D	E	F	G
1		Objetivo	351				
2							
3		Inversión	Regla		Rentabilidad		Numero de
4	A	1	1		0,027		6000
5	B	1	-2		0,063		3000
6							
7		Inversión	Regla		Rentabilidad		
8	A	6000	6000		162		
9	B	3000	-6000		189		
10		9000	0		351		

2.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.23 Un taller fabrica dos productos A y B. La producción de una unidad del producto A requiere 30 minutos para montar las piezas que lo forman y 40 minutos para pintarlo y la producción de una unidad del producto B exige 40 minutos para montar las piezas y 30 minutos para pintarlo. Cada día se puede destinar como máximo 10 horas para montar piezas y 11 horas, también como máximo, para pintar los productos producidos. Cada unidad del producto A se vende a 40 euros y cada unidad del producto B se vende a 35 euros.

a) ¿Cuántas unidades se han de producir cada día de cada producto para obtener el máximo ingreso?

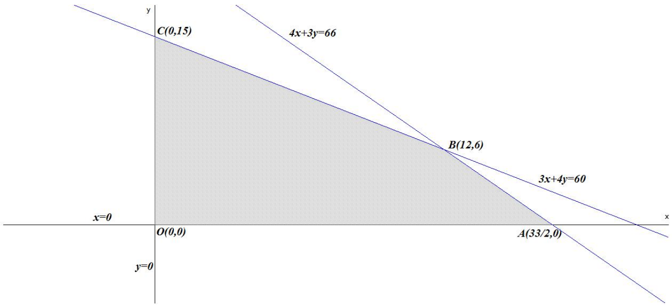
b) ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

Solución:
LLamamos x : nº de productos A e y : nº de productos B.

	Montaje	Pintura	Venta
A	30	40	40
B	40	30	35
	≤ 600	≤ 660	

a) La región factible es:

$$\left\{\begin{array}{l} 30x + 40y \leq 600 \\ 40x + 30y \leq 660 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x + 4y \leq 60 \\ 4x + 3y \leq 66 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right.$$

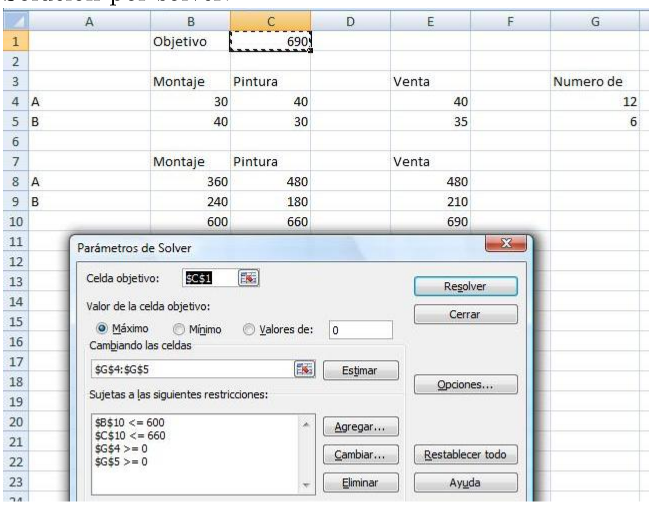


b) Los vértices son: $A(33/2, 0)$, $B(12, 6)$ y $C(0, 15)$.

c) $f(x, y) = 40x + 35y$

$$\begin{cases} f(33/2, 0) = 660 \\ f(12, 6) = 690 \text{ Máximo} \\ f(0, 15) = 525 \end{cases}$$

De productos A tiene que producir 12 y 6 de productos B con un ingreso máximo de 690 euros.
Solución por solver:



2.13. La Rioja

2.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.24 Las restricciones de una problema de programación lineal son las siguientes:

$$x - y \geq 0; \quad y + 2x \leq 9; \quad 2y + x \geq 3; \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

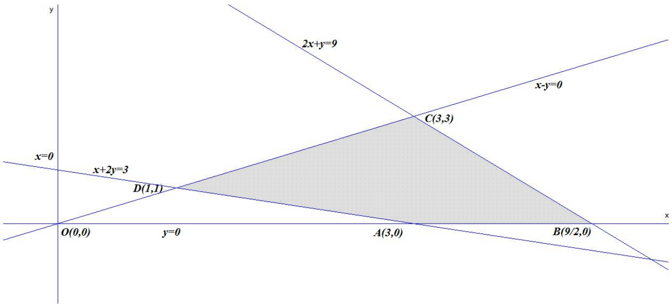
a) Dibuja en el plano la región factible que represente estas restricciones.

b) Los ingresos de una empresa vienen dados por la función $f(x, y) = 2y - 2x + 7$ sujeta a las restricciones anteriores. ¿Para qué valores de x e y obtiene la empresa los máximos ingresos?

Solución:

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ y + 2x \leq 9 \\ 2y + x \geq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



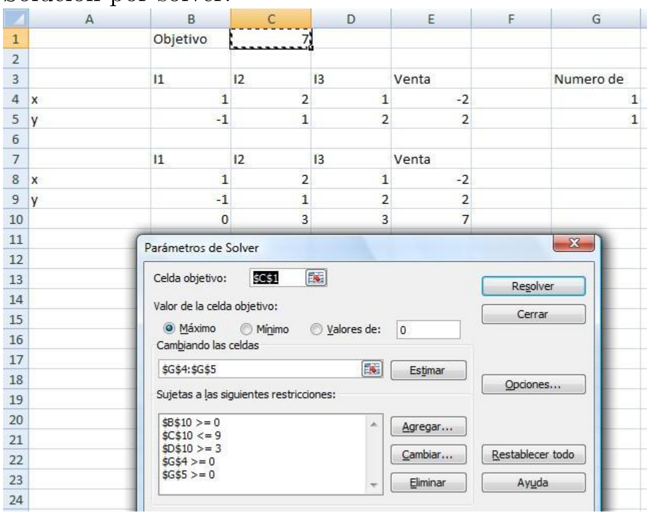
Los vértices son: $A(3,0)$, $B(9/2,0)$, $C(3,3)$ y $D(1,1)$.

b) $f(x,y) = -2x + 2y + 7$

$$\begin{cases} f(3,0) = 1 \\ f(9/2,0) = -2 \\ f(3,3) = 7 \ \text{Máximo} \\ f(1,1) = 7 \ \text{Máximo} \end{cases}$$

El valor máximo está en cualquier punto del segmento que une los puntos $C(3,3)$, $D(1,1)$ y $(2,2)$. Ese valor será 7.

Solución por solver:



	A	B	C	D	E	F	G
1		Objetivo	7				
2							
3		I1	I2	I3	Venta		Numero de
4	x	1	2	1	-2		1
5	y	-1	1	2	2		1
6							
7		I1	I2	I3	Venta		
8	x	1	2	1	-2		
9	y	-1	1	2	2		
10		0	3	3	7		

2.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.25 Para fabricar coches y cunas de bebé disponemos de 80 kg de acero y 120 kg de aluminio. Cada coche se venderá a 200 euros y cada cuna a 150 euros. Para fabricar un coche son necesarios 1 kg de acero y 3 kg de aluminio y para fabricar una cuna 2 kg de acero y 2 kg de aluminio.

a) Dibuja en el plano la región factible que represente las posibles cantidades de coches y cunas que podemos fabricar (respetando las restricciones del problema)

b) Escribe la función que representa los ingresos que se obtienen por las ventas e indica el número de coches y de cunas que se deben fabricar para conseguir los máximos ingresos posibles.

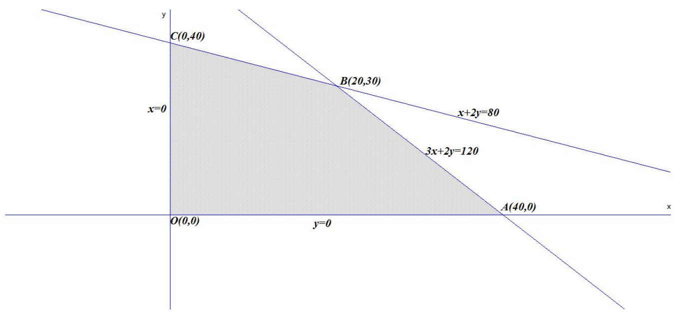
Solución:

LLamamos x : nº de coches e y : nº de cunas.

	Acero	Aluminio	Venta
Coches	1	3	200
Cunas	2	2	150
	≤ 80	≤ 120	

La región factible es:

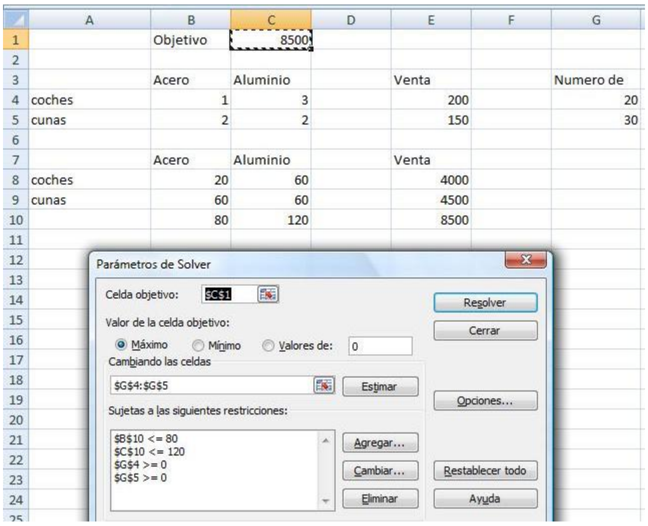
$$\begin{cases} x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(40,0)$, $B(20,30)$ y $C(0,40)$.
$f(x,y) = 200x + 150y$

$$\begin{cases} f(40,0) = 8000 \\ f(20,30) = 8500 \;\; \text{Máximo} \\ f(0,40) = 6000 \end{cases}$$

Se deben fabricar 20 coches y 30 cunas con un beneficio máximo de 8500 euros.
Solución por solver:



2.14. Murcia

2.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

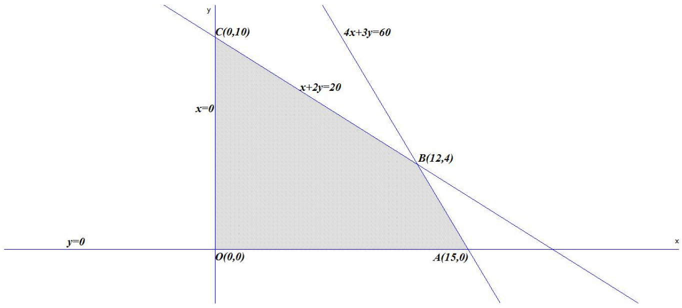
Problema 2.26 En un obrador se elaboran dos tipos de dulces distintos: A y B, siendo sus precios unitarios de 15 euros y 12 euros, respectivamente. Para elaborar un dulce del tipo A se necesitan $\frac{1}{2}$ kilo de azúcar y 8 huevos, mientras que para los del tipo B se requieren 1 kilo de azúcar y 6 huevos. En el obrador solo tienen 10 kilos de azúcar y 120 huevos. ¿Cuántos dulce deben elaborar de cada tipo para que el ingreso obtenido sea máximo? Razone la respuesta.

Solución:
LLamamos x : nº de dulces A e y : nº de dulces B.

	Azucar	Huevos	Venta
A	$0,5$	8	15
B	1	6	12
	≤ 10	≤ 120	

La región factible es:

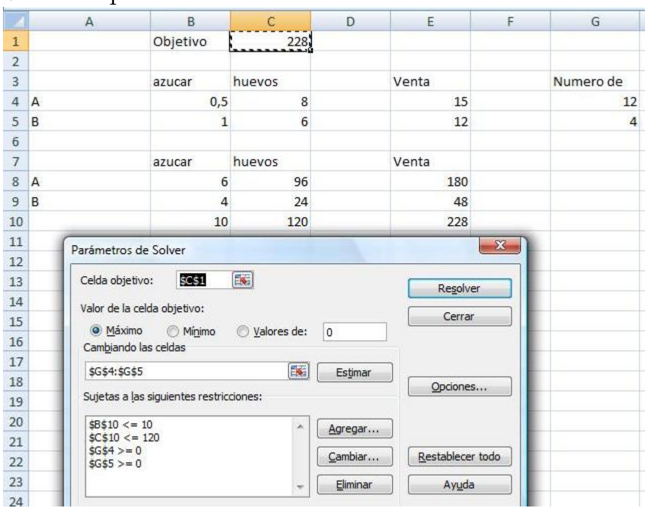
$$\left\{\begin{array}{l} 0,5x + y \leq 10 \\ 8x + 6y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 2y \leq 20 \\ 4x + 3y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right.$$



Los vértices son: $A(15,0)$, $B(12,4)$ y $C(0,10)$.
$f(x,y) = 15x + 12y$

$$\begin{cases} f(15,0) = 225 \\ f(12,4) = 228 \ \text{Máximo} \\ f(0,10) = 120 \end{cases}$$

Se deben fabricar 12 dulces A y 4 dulces B con un precio máximo de 228 euros.
Solución por solver:



	A	B	C	D	E	F	G
1		Objetivo	228				
2							
3		azucar	huevos		Venta		Numero de
4	A	0,5	8		15		12
5	B	1	6		12		4
6							
7		azucar	huevos		Venta		
8	A	6	96		180		
9	B	4	24		48		
10		10	120		228		

2.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.27 Un joven emprendedor quiere montar una empresa informática donde comercializará dos tipos de ordenadores. El tipo A dispondrá de 1 disco duro y 1 una unidad de memoria de pequeña capacidad, mientras que el tipo B tendrá 2 discos duros y su unidad de memoria será de alta capacidad. En total cuenta con 40 unidades de memoria de pequeña capacidad y 30 unidades de memoria de alta capacidad y 80 discos duros. Por cada ordenador del tipo A espera obtener un beneficio de 150 euros y del tipo B de 250 euros.

a) ¿Cuál es la mejor decisión sobre el número de ordenadores a montar de cada tipo?

b) Con esta producción, ¿habría algún excedente en el material mencionado?

Solución:

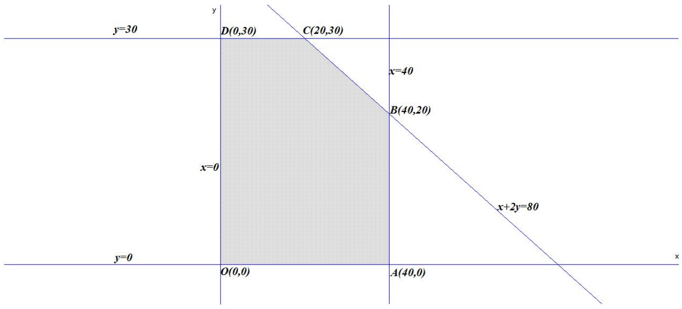
LLamamos x : nº de ordenadores A e y : nº de ordenadores B.

a)

	Memoria PC	Memoria AC	Discoduro	Venta
A	1	0	1	150
B	0	1	2	250
	≤ 40	≤ 30	≤ 80	

La región factible es:

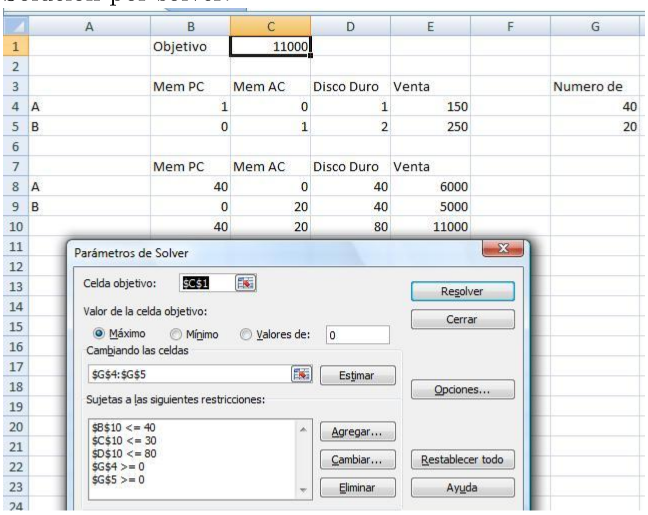
$$\begin{cases} x + 2y \leq 80 \\ x \leq 40 \\ y \leq 30 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(40,0)$, $B(40,20)$, $C(20,30)$ y $D(0,30)$.
$f(x,y) = 150x + 250y$

$$\begin{cases} f(40,0) = 6000 \\ f(40,20) = 11000 \;\; \text{Máximo} \\ f(20,30) = 10500 \\ f(0,30) = 7500 \end{cases}$$

Se deben fabricar 40 ordenadores A y 20 ordenadores B con un beneficio máximo de 11000 euros.
Solución por solver:



b) Memorias de poca capacidad utilizadas $= 40 \Longrightarrow$ no sobra ninguna.
Memorias de alta capacidad utilizadas $= 20 \Longrightarrow$ sobran 10.
Discos duros utilizados $= 80 \Longrightarrow$ no sobra ninguno.

2.15. Navarra

2.15.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.28 Un agricultor quiere dedicar al menos 4 hectáreas al cultivo de dos productos ($C1$ y C2). El beneficio neto obtenido por cada hectárea cultivada es de 3000 euros y 1500 euros, respectivamente. Las necesidades por hectárea y temporada de horas de maquinaria y de kilos de abono son 20 horas y 100 kilos para el cultivo $C1$ y 10 horas y 300 kilos para el cultivo $C2$. Determine cuántas hectáreas conviene dedicar a cada cultivo para que el beneficio total sea máximo, si dispone para esta temporada de 180 horas maquinaria y de 2400 kilos de abono.

a) Plantee el problema.

b) Resuélvalo gráficamente.

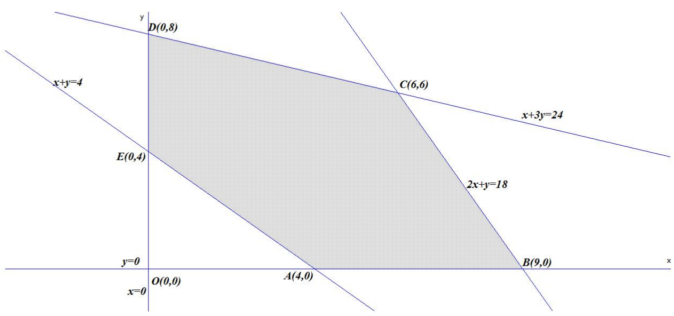
c) Analice gráficamente qué ocurriría si además se desea que el número de hectáreas dedicadas al cultivo $C2$ sea no menor que el doble del número de hectáreas dedicadas al cultivo $C1$.

Solución:
LLamamos x : nº de hectáreas de $C1$ e y : nº de hectáreas de $C2$.

	Hectáreas	H. máquina	Kg abono	Beneficio
$C1$	1	20	100	3000
$C2$	1	10	300	1500
	≥ 4	≤ 180	≤ 2400	

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x + y \geq 4 \\ 20x + 10y \leq 180 \\ 100x + 300y \leq 2400 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \geq 4 \\ 2x + y \leq 18 \\ x + y \leq 24 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

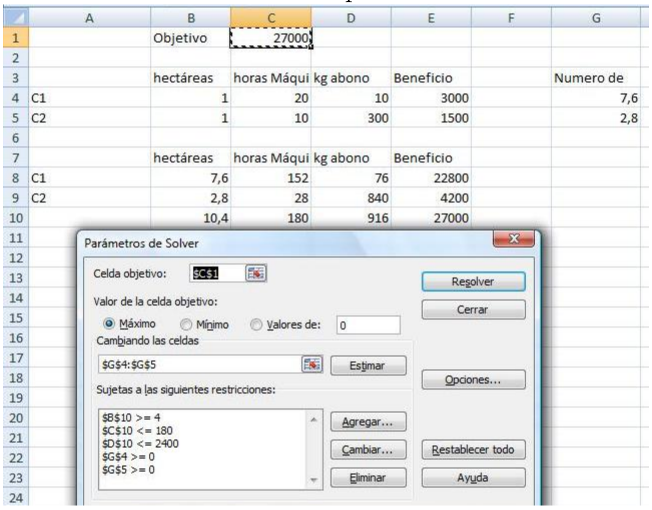


b) Los vértices son: $A(4,0)$, $B(9,0)$, $C(6,6)$, $D(0,8)$ y $E(0,4)$.

c) $f(x, y) = 3000x + 1500y$

$$\begin{cases} f(4,0) = 12000 \\ f(9,0) = 27000 \ \text{Máximo} \\ f(6,6) = 27000 \ \text{Máximo} \\ f(0,8) = 12000 \\ f(0,4) = 6000 \end{cases}$$

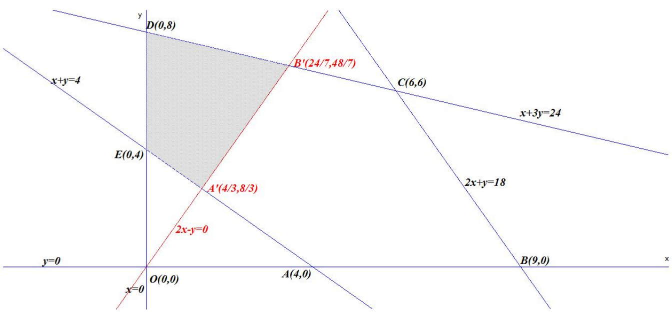
La producción sería máxima en cualquier punto del segmento que une los puntos $B(9,0)$ y $C(6,6)$ con un beneficio para cualquiera de esos puntos de 27000 euros.
El segmento lo determinaría $y = 18 - 2x$ con $x \in [6,9]$, donde x son las hectáreas de $C1$ e y las hectáreas de $C2$ Solución por solver:



	A	B	C	D	E	F	G
1		Objetivo	27000				
2							
3		hectáreas	horas Máqui	kg abono	Beneficio		Numero de
4	C1	1	20	10	3000		7,6
5	C2	1	10	300	1500		2,8
6							
7		hectáreas	horas Máqui	kg abono	Beneficio		
8	C1	7,6	152	76	22800		
9	C2	2,8	28	840	4200		
10		10,4	180	916	27000		

d) Ahora incluimos la inecuación $y \geq 2x$:

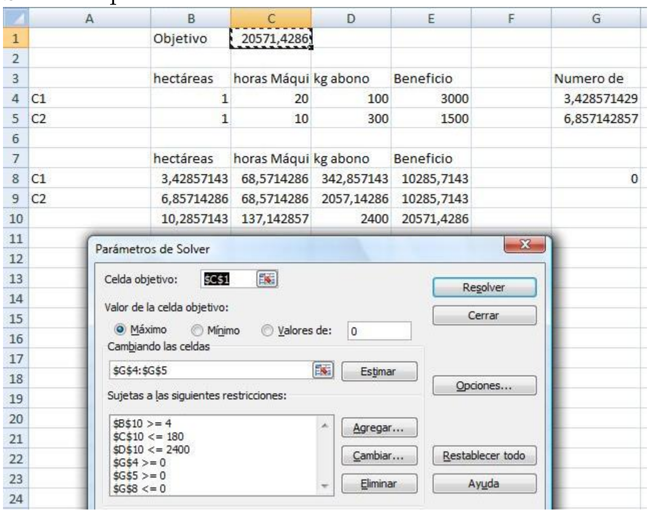
$$\begin{cases} y \geq 2x \\ x + y \geq 4 \\ 2x + y \leq 18 \\ x + y \leq 24 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Considero que las soluciones no tienen que ser enteras, dado que una hectárea puede ser fraccinada. Ahora los vértices son: $A'(4/3, 8/3)$, $B'(24/7, 48/7)$, $D(0, 8)$ y $E(0, 4)$.

$$\begin{cases} f(4/3, 8/3) = 8000 \\ f(24/7, 48/7) = 20571,43 \;\; \text{Máximo} \\ f(0, 8), = 12000 \\ f(0, 4) = 6000 \end{cases}$$

De $C1$ tiene plantar 24/7 de hectáreas y 48/7 de la $C2$, con un beneficio máximo de 20571,43 euros.
Solución por solver:



2.15.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.29 Una empresa tiene dos plantas ($P1$ y $P2$) en las que produce bobinas de acero de tres anchuras ($A1$, $A2$, $A3$). La planta $P1$ tiene maquinaria capaz de fabricar cada hora 10 bobinas de anchura $A1$, 10 bobinas de anchura $A2$ y 20 bobinas de anchura $A3$. La planta $P2$ tiene capacidad para fabricar cada hora 10, 50 y 10 bobinas de cada tipo de anchura, respectivamente. El coste de operación por hora es de 70 euros en la planta $P1$ y de 120 euros en la planta $P2$. La empresa tiene que suministrar cada día al menos 180 bobinas de anchura $A1$, al menos 300 bobinas de anchura $A2$ y al menos 240 bobinas de anchura $A3$. ¿cuántas horas diarias deberá trabajar cada planta para atender la demanda si se desea minimizar el coste total de operación?

a) Plantee el problema.

b) Resuélvalo gráficamente.

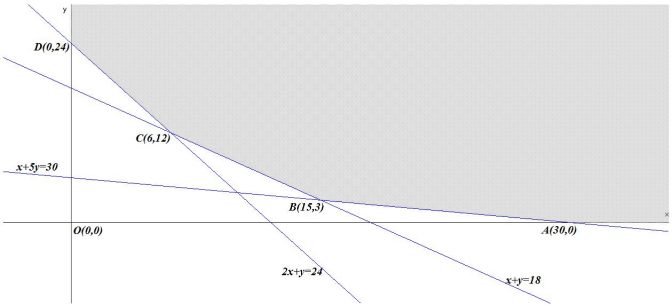
c) Analice gráficamente qué ocurriría si la demanda de bobinas de anchura Al se redujera a la mitad.

Solución:
LLamamos x : nº de horas de la planta $P1$ e y : nº de horas de la planta $P2$.

	$A1$	$A2$	$A3$	Coste
$P1$	10	10	20	70
$P2$	10	50	10	120
	≥ 180	≥ 300	≥ 240	

a) La región factible es:

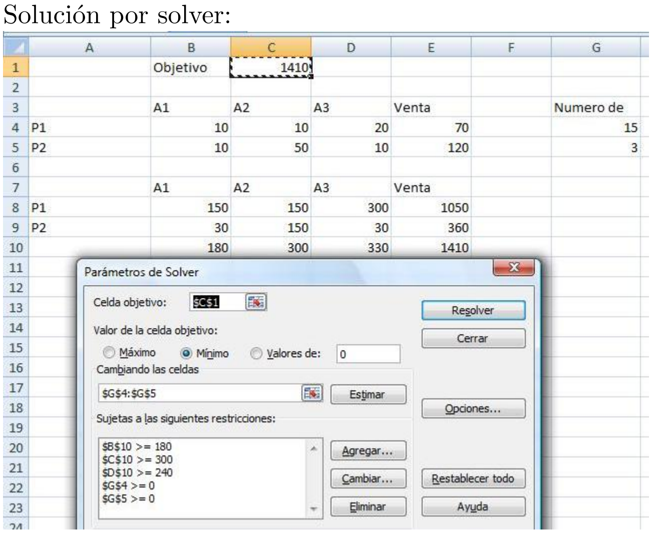
$$\begin{cases} 10x + 10y \geq 180 \\ 10x + 50y \geq 300 \\ 20x + 10y \geq 240 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \geq 18 \\ x + 5y \geq 30 \\ 2x + y \geq 24 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



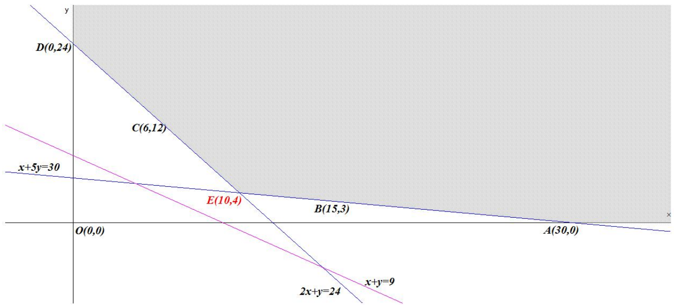
Los vértices son: $A(30,0)$, $B(15,3)$, $C(6,12)$ y $D(0,24)$.
La función objetivo es: $f(x,y) = 70x + 120y$

$$\begin{cases} f(30,0) = 2100 \\ f(15,3) = 1410 \ \text{Mínimo} \\ f(6,12) = 1860 \\ f(0,24) = 2880 \end{cases}$$

b) La planta $P1$ tiene que trabajar 15 horas y 3 horas la $P2$, con un coste mínimo de 1410 euros.
Solución por solver:

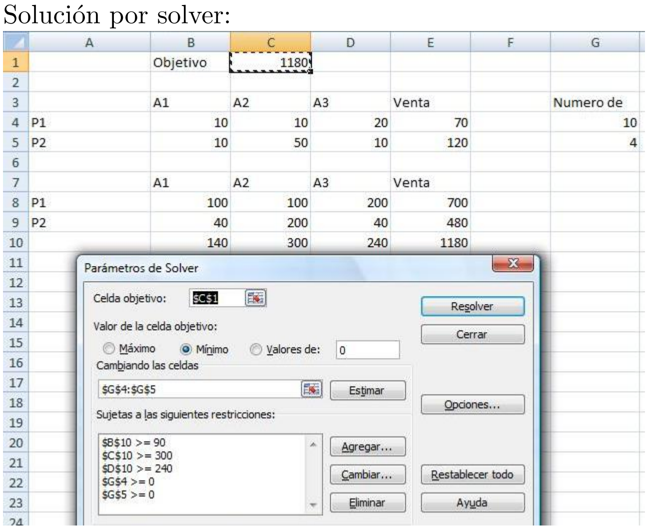


c) La inecuación $10x + 10y \geq 180$ habría que sustituirla por $10x + 10y \geq 90 \Longrightarrow x + y \geq 9$.
Ahora los vértices son: $A(30,0)$, $E(10,4)$ y $D(0,24)$.



$$\begin{cases} f(30,0) = 2100 \\ f(10,4) = 1180 \;\; \text{Mínimo} \\ f(0,24) = 2880 \end{cases}$$

La planta $P1$ tiene que trabajar 10 horas y 4 horas la $P2$, con un coste mínimo de 1180 euros.
Solución por solver:



	A	B	C	D	E	F	G
1		Objetivo	1180				
2							
3		A1	A2	A3	Venta		Numero de
4	P1	10	10	20	70		10
5	P2	10	50	10	120		4
6							
7		A1	A2	A3	Venta		
8	P1	100	100	200	700		
9	P2	40	200	40	480		
10		140	300	240	1180		

2.16. Galicia

2.16.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.30 Una tienda deportiva desea liquidar 2000 camisetas y 1000 chándales de la temporada anterior. Para ello lanza dos ofertas, 1 y 2. La oferta 1 consiste en un lote de una camiseta y un chándal, que se vende a 30 euros; la oferta 2 consiste en un lote de tres camisetas y un chándal, que se vende a 50 euros. No se desea ofrecer menos de 200 lotes de la oferta 1 ni menos de 100 de la oferta 2.

a) Plantea el problema que permite determinar cuántos lotes de cada tipo debe vender para maximizar los ingresos.

b) Representa la región factible.

c) ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar los ingresos? ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

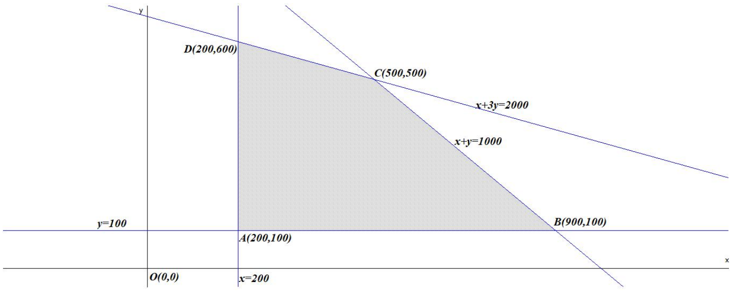
Solución:

LLamamos x : nº de lotes de la oferta 1 e y : nº de lotes de la oferta 2.

	camisetas	chandal	Venta
$OF1$	1	1	30
$OF2$	3	1	50
	≤ 2000	≤ 1000	

a) La región factible es:

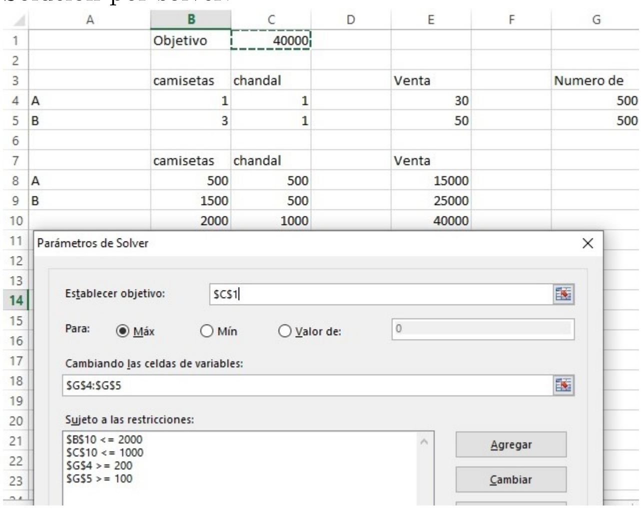
$$\begin{cases} x + 3y \leq 2000 \\ x + y \leq 1000 \\ x \geq 200 \\ y \geq 100 \end{cases}$$



b) Los vértices son: $A(200, 100)$, $B(900, 100)$, $C(500, 500)$ y $D(200, 600)$.
La función objetivo es: $f(x, y) = 30x + 50y$

$$\begin{cases} f(200, 100) = 11000 \\ f(900, 100) = 32000 \\ f(500, 500) = 40000 \ \text{Máximo} \\ f(200, 600) = 36000 \end{cases}$$

c) Del lote 1 hay que vender 500 y del lote 2 otros 500 con un valor de venta máximo de 40000 euros.
Solución por solver:



2.16.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.31 Una bodega produce vinos blancos y tintos. La producción de ambos tipos de vino no debe superar los 90 millones de litros y la producción de vino blanco no debe superar el doble de la de vino tinto ni ser inferior a su mitad. También se sabe que para atender la demanda se deben producir al menos 45 millones de litros. La bodega comercializa el vino blanco a 8 euros el litro y el tinto a 6 euros el litro.

a) Plantea y representa gráficamente el problema.

b) ¿A cuánto ascienden los ingresos máximos y como se consiguen?

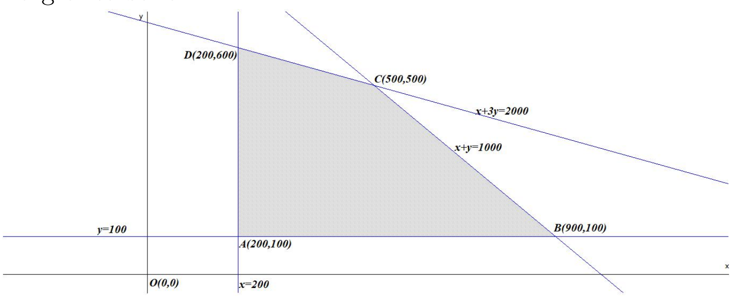
Solución:

LLamamos x : millones de litros de vino blanco e y millones de litros de vino tinto.

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x+y\le 90 \\ x\le 2y \\ x\ge y/2 \\ x+y\ge 45 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y\le 90 \\ x+y\ge 45 \\ x-2y\le 0 \\ 2x-y\ge 0 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

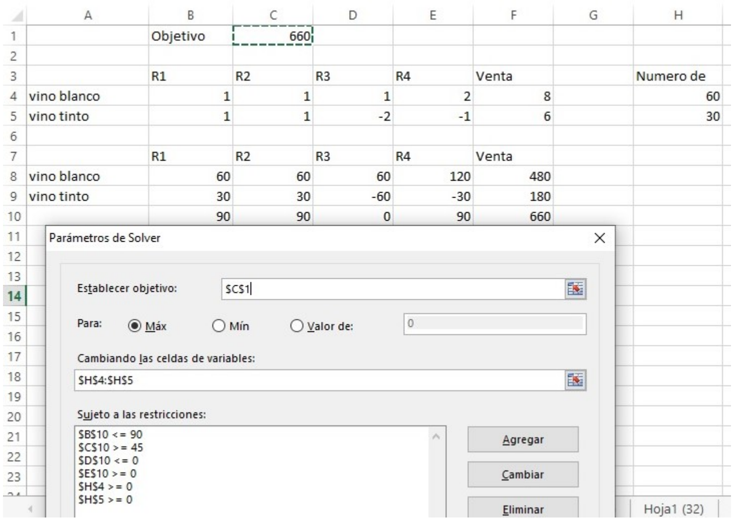
b) La gráfica sería:



Los vértices son: $A(30,15)$, $B(60,30)$, $C(30,60)$ y $D(15,30)$.
La función objetivo es: $f(x,y)=8x+6y$

$$\begin{cases} f(30,15)=330 \\ f(60,30)=660 \text{ Máximo} \\ f(30,60)=600 \\ f(15,30)=300 \end{cases}$$

c) Hay que vender 60 millones de litros de vino blanco y 30 millones de litros de vino tinto, con unos ingresos de 660 millones de euros.
Solución por solver:



2.17. Andalucía

2.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

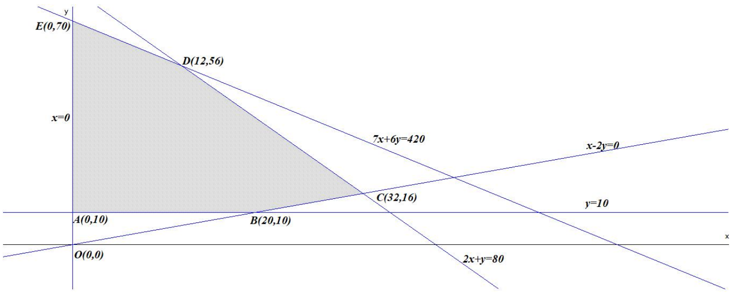
Problema 2.32 Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camiseta lisa necesita 70 g de algodón y 20 g de poliéster y para cada camiseta estampada 60 g de algodón y y 10 g de poliéster. La empresa dispone para ello de 4200 g de algodón y 800g de poliéster. Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y además, el doble de las estampadas debe ser al menos igual al número de lisas. Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

Solución:
LLamamos x : nº de camisetas lisas e y nº de camisetas estampadas.

	algodón	poliéster	Beneficio
camisetas lisas	70	20	5
camisetas estampadas	60	10	4
	≤ 4200	≥ 800	

a) La región factible es:

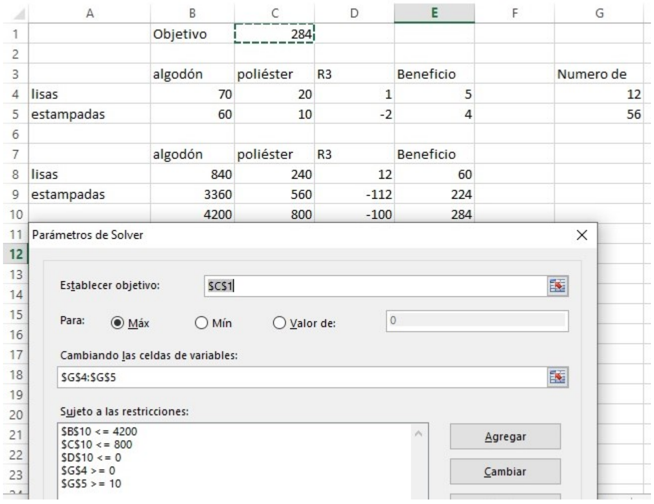
$$\begin{cases} 70x + 60y \leq 4200 \\ 20x + 10y \leq 800 \\ x \leq 2y \\ y \geq 10 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 7x + 6y \leq 420 \\ 2x + y \leq 80 \\ x - 2y \leq 0 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

b) 

Los vértices son: $A(0,10)$, $B(20,10)$, $C(32,16)$, $D(12,56)$ y $E(0,70)$.
La función objetivo es: $f(x,y) = 5x + 4y$

$$\begin{cases} f(0,10) = 40 \\ f(20,10) = 140 \\ f(32,16) = 224 \\ f(12,56) = 284 \text{ Máximo} \\ f(0,70) = 280 \end{cases}$$

c) Hay que vender 12 camisetas lisas y 56 estampadas con un beneficio máximo de 284 euros.
Solución por solver:



	A	B	C	D	E	F	G
1		Objetivo	284				
2							
3		algodón	poliéster	R3	Beneficio		Numero de
4	lisas	70	20	1	5		12
5	estampadas	60	10	-2	4		56
6							
7		algodón	poliéster	R3	Beneficio		
8	lisas	840	240	12	60		
9	estampadas	3360	560	-112	224		
10		4200	800	-100	284		

2.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.33 Una empresa comercializa dos tipos de concéntrado de café, A y B, que se obtienen a partir de tres tipos de grano: de Colombia, de Etiopía y de Costa Rica. Para elaborar, 1 kg de concentrado A se necesitan 4,5 kg de grano de Colombia y 3 kg de grano de Etiopía. Por otra parte, se requieren 7,5 kg de grano de Colombia y 1,5 kg de grano de Costa Rica para elaborar 1 kg de concentrado B. Actualmente la empresa dispone de un máximo de 67,5 kg de grano de Colombia, 30 kg de grano de Etiopía, y 9 kg de grano de Costa Rica. Además, se exige que el número de kilogramos de concentrado A producidos debe ser mayor o igual que la mitad de los kilogramos de concentrado B.

a) Represente la región factible que describe el problema anterior y determine sus vértices.

b) Indique de manera razonada si con las condiciones dadas sería posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.

c) Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de cada kilogramo de concentrado del tipo A es 2 euros y de cada kilogramo del tipo B es 4 euros, ¿cuántos kilogramos del tipo A y cuántos del tipo B se habrán de producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

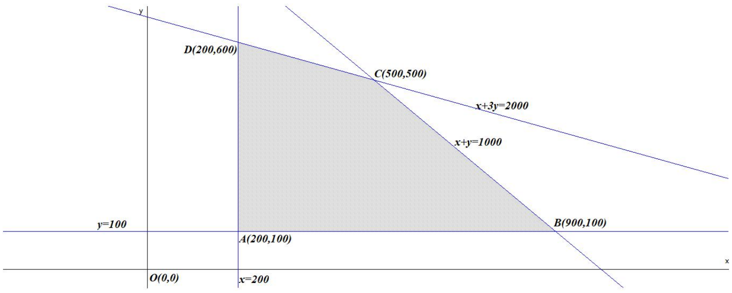
Solución:

LLamamos x : nº de lotes de café A e y : nº de lotes de café B.

	Colombia	Etiopía	Costa Rica	Beneficio
A	$4,5$	3	0	2
B	$7,5$	0	$1,5$	4
	$\leq 67,5$	≤ 30	≤ 9	

a) La región factible es:

$$\left\{\begin{array}{l} 4,5x + 7,5y \leq 67,5 \\ 3x \leq 30 \\ 1,5y \leq 9 \\ x \geq y/2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x + 5y \leq 45 \\ x \leq 10 \\ y \leq 6 \\ 2x - y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right.$$



Los vértices son: $O(0,0)$, $A(10,0)$, $B(10,3)$, $C(5,6)$ y $D(3,6)$.

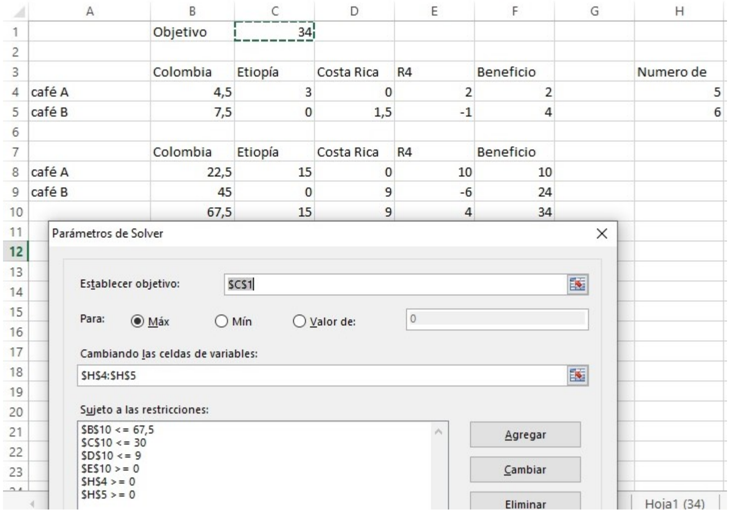
b) El punto $(7,5)$ está fuera de la región factible y no pertenece al conjunto de soluciones posibles.

c) La función objetivo es: $f(x,y) = 2x + 4y$

$$\left\{\begin{array}{l} f(10,0) = 20 \\ f(10,3) = 32 \\ f(5,6) = 34 \text{ Máximo} \\ f(3,6) = 30 \end{array}\right.$$

Debera producir 5 kg de café A y 6 kg de café B para obtener un beneficio máximo de 34 euros.

Solución por solver:


Objetivo
34
Colombia
Etiopía
Costa Rica
R4
Beneficio
Numero de
café A
4,5
3
0
2
2
5
café B
7,5
0
1,5
-1
4
6
Colombia
Etiopía
Costa Rica
R4
Beneficio
café A
22,5
15
0
10
10
café B
45
0
9
-6
24
67,5
15
9
4
34
Parámetros de Solver
Establecer objetivo:
$C$1
Para:
Máx
Mín
Valor de:
0
Cambiando las celdas de variables:
$H$4:$H$5
Sujeto a las restricciones:
$B$10 <= 67,5
$C$10 <= 30
$D$10 <= 9
$E$10 >= 0
$H$4 >= 0
$H$5 >= 0
Agregar
Cambiar
Eliminar
Hoja1 (34)

3. Análisis

Teoría

Tabla de Derivadas

función	derivada	función	derivada
$y = k$	$y' = 0$	$y = x$	$y' = 1$
$y = ax^n$	$y' = nax^{n-1}$	$y = au^n$	$y' = nau^{n-1}u'$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	$y = uv$	$y' = u'v + uv'$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y = \dfrac{u}{v}$	$y = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$	$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
$y = u^v$	$y' = u^v(v' \ln u) + vu^{v-1}u'$	$y = a^u$	$y' = u'a^u \ln a$
$y = e^u$	$y' = u'e^u$	$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$	$y = \tan u$	$y' = u' \sec^2 u$
$y = \cot u$	$y' = -u' \csc^2 u$	$y = \csc u$	$y' = -u' \csc u \cot u$
$y = \sec u$	$y' = u' \sec u \tan u$	$y = \arcsin u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \arccos u$	$y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \arctan u$	$y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
	Regla de la Cadena	$y = f(g(x))$	$y' = g'(x)f'(g(x))$

Representación gráfica de funciones
Hay que seguir los siguientes pasos:

1 Dominio	Buscar Puntos Singulares	2 Signo	$f(x) > 0$ o $f(x) < 0$
3 Ptos. Corte	Corte con OX : $f(x) = 0$ Corte con OY : $x = 0$	4 Simetría :	Par : $f(-x) = f(x)$ con OY Impar : $f(-x) = -f(x)$ con O
5 Asíntotas :	Verticales : $x = p$ $\lim\limits_{x \longrightarrow p} f(x) = \pm\infty$ Horizontales : $y = p$ $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = p$ Si $\exists\, y = p \Longrightarrow$ No Oblicuas Oblicuas : $y = mx + n$ $m = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $n = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx)$	6 Monotonía :	Creciente : $f'(x) > 0$ $\nearrow$ Decreciente : $f'(x) < 0$ $\searrow$ Si $f'(p) = 0$ Punto Crítico : Máximo si $f''(p) < 0$ Mínimo si $f''(p) > 0$ Pto. Inflexión si $f''(p) = 0$ y $f'''(p) \neq 0$
7 Máximos y Mínimos	Máximo : $\nearrow\searrow$ de creciente a decreciente Mínimo : $\searrow\nearrow$ de decreciente a creciente	8 Curvatura :	Cóncava : $f''(x) > 0$ $\cup$ Convexa : $f''(x) < 0$ $\cap$ Si $f''(p) = 0$ Punto Crítico : Pto. Inflexión si de Cóncava a Convexa de Convexa a Cóncava
9 Periodo :	$f(x+T) = f(x)$		

Tabla de Integrales Inmediatas

Tipo	Simple	Compuesta
Potencial $a \neq -1$	$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int f^a \cdot f'\,dx = \frac{f^{a+1}}{a+1}$
Logarítmica	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert$	$\int \frac{f'}{f}\,dx = \ln\lvert f\rvert$
Exponencial	$\int e^x\,dx = e^x$	$\int e^f \cdot f'\,dx = e^f$
Exponencial	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int a^f \cdot f'\,dx = \frac{a^f}{\ln a}$
Seno	$\int \cos x\,dx = \sin x$	$\int f' \cdot \cos f\,dx = \sin f$
Coseno	$\int \sin x\,dx = -\cos x$	$\int f' \cdot \sin f\,dx = -\cos f$
Tangente	$\int \sec^2\,dx = \tan x$	$\int f' \cdot \sec^2 f\,dx = \tan f$
	$\int (1+\tan^2 x)\,dx = \tan x$	$\int f' \cdot (1+\tan^2 f)\,dx = \tan f$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x$	$\int \frac{f'}{\cos^2 f}\,dx = \tan f$
Cotangente	$\int \csc^2\,dx = -\cot x$	$\int f' \cdot \csc^2 f\,dx = -\cot f$
	$\int (1+\cot^2 x)\,dx = -\cot x$	$\int f' \cdot (1+\cot^2 f)\,dx = -\cot f$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x$	$\int \frac{f'}{\sin^2 f}\,dx = -\cot f$
Arco seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}\,dx = \arcsin f$
	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{\sqrt{a^2-f^2}}\,dx = \arcsin \frac{f}{a}$
Arco coseno	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}\,dx = \arccos f$
	$\int \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arccos \frac{x}{a}$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{a^2-f^2}}\,dx = \arccos \frac{f}{a}$
Arco tangente	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$	$\int \frac{f'}{1+f^2}\,dx = \arctan f$
	$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \arctan \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{a^2+f^2}\,dx = \arctan \frac{f}{a}$
Neperiano − Arcotangente	$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx = \ln \pm \arctan x$	Si $M \neq 0$ ax^2+bx+c irreducible

Definición de Derivada

$$f'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad f'(a) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Continuidad: Una función f es continua en un punto a si

$$\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

- Si $\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) \Longrightarrow$ Discontinua no evitable. (La función pega un salto en ese punto)

- Si $\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) \neq f(a) \Longrightarrow$ Discontinua evitable. (La función tiene un agujero en ese punto)

Derivabilidad
Una función f es derivable en un punto a si $f'(a^-) = f'(a^+)$.

$$f'(a^-) = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'(a^+) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si f es una función derivable en un punto a, entonces f tiene que ser continua en a.
Teorema de Weierstrass
Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces f alcanza un máximo y un mínimo en este intervalo.
Teorema de Darboux
Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces f toma en dicho intervalo todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo.
Teorema de Bolzano
Si f es una función continua en el intervalo cerrado y no nulo $[a, b]$ $(a < b)$ y la función toma valores de distinto signo en los extremos de este intervalo (Si signo de $f(a)$ es positivo entonces signo de $f(b)$ es negativo o viceversa). Entonces la función pasa necesariamente por un punto que corta al eje de abcisas, es decir, $\exists c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.
Teorema de Rolle
Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). Si además cumple que $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
Teorema del Valor Medio de Lagrange
Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Primer Teorema Fundamental del Cálculo
Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Definimos en este intervalo la función

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, dt \ \text{ donde } \ c \in [a, b]$$

En estas condiciones, si f es continua en c se cumple que F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.
Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (Regla de Barrow)
Dada una función f continua en el intervalo $[a, b]$ y sea F cualquier función primitiva de f, es decir $F'(x) = f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema de integración por partes
Sean f y g dos funciones reales derivables en el intervalo $[a, b]$. En estas condiciones se cumple

$$\int_a^b f'(x)g(x)\, dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\, dx$$

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$ (sentado un día vi un valiente soldado vestido de uniforme)

Teorema del cambio de variable
Sea g una función con derivada g' continua en $[a,b]$, y sea f una función real y continua en el mismo intervalo. SI hacemos el cambio de variable $t = g(x)$ se cumple que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

Límites cuando $x \longrightarrow \pm\infty$
Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que Grado$(P(x)) = n$ y Grado$(Q(x)) = m$. Sea A el coeficiente del monomio de mayor grado de $P(x)$ y sea B el coeficiente del monomio de mayor grado de $Q(x)$

$$L = \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- $\lim_{x\longrightarrow\infty} P(x) = \pm\infty$ el signo depende del signo del coeficiente de mayor grado de este polinomio.
- Si $n > m \Longrightarrow L =$Signo$\left(\frac{A}{B}\right) \cdot \infty$
- Si $n < m \Longrightarrow L = 0$
- Si $n = m \Longrightarrow L = \frac{A}{B}$

Si $\lim_{x\longrightarrow\infty} P(x)^{Q(x)} = [1^\infty] = e^\lambda$, donde

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} Q(x)(P(x) - 1)$$

Regla de L'Hôpital Sean f y g dos funciones reales y derivables, entonces si

$$\lim_{x\longrightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \ o \ \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right] \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\longrightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aproximaciones cuando $x \longrightarrow 0$

$\sin x \approx x$	$\tan x \approx x$	$e^x \approx 1 + x$	$\log(1+x) \approx x$
$a^x \approx 1 + x\ln a$	$\arcsin x \approx x$	$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$	$\arccos \approx \frac{\pi}{2} - x$

Problemas

3.1. Aragón

3.1.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.1 El precio (en euros) de una acción de una compañía entre las nueve y las diez de la mañana ha venido dado por la siguiente expresión

$$P(x) = 12 - \frac{2x - 8}{x^2 + 4x + 4}$$

donde $x \in [0, 60]$ es el tiempo en minutos desde las nueve de la mañana. Calcular:

a) El precio de la acción a las nueve y media.

b) Entre las nueve y las diez de la mañana, ¿durante cuánto tiempo la acción ha tenido un precio mayor que 12 euros?

c) El máximo y mínimo precio que ha alcanzado la acción entre las nueve y las diez de la mañana.

Solución:

a) $P(30) = \dfrac{3059}{256} = 11,9492$

b) $P'(x) = \dfrac{2(x-10)}{(x+2)^3} = 0 \Longrightarrow x = 10.$

	$[0, 10)$	$(10, 60]$
$P'(x)$	$-$	$+$
$P(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

$P(x) = 12 \Longrightarrow 12 - \dfrac{2x-8}{x^2+4x+4} = 12 \Longrightarrow x = 4.$
Tenemos que cuando $x = 0 \Longrightarrow P(0) = 14$ y la función decrece hasta $x = 4$ donde la función vale $P(4) = 12$ y sigue decreciendo hasta $x = 10$ donde valor es 11,9167, luego el valor es superior a 12 en el intervalo $[0, 4)$.
Por otra parte la función empieza a crecer a partir de $x = 10$ y tenemos que $P(60) = 11,97$, es decir, la función no llega a superar 12 en ningún punto del intervalo $(10, 60]$.
En conclusión el intervalo pedido será $[0, 4)$.

c) El valor máximo se dará en el momento de partida $(0, 14)$ y el mínimo en el punto $(10; 11,9167)$.

Problema 3.2 Se pide:

a) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 6$, con $x \in \mathbb{R}$, encontrar, si existen, a y b tales que f tenga un maximo relativo en $x = -2$ con valor $f(-2) = -6$.

b) Calcular:

$$\int_0^1 \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} - 3xe^{-4x^2} \right) dx$$

Solución:

a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 6$ y $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 3$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(-2) = 0 \Longrightarrow 12a - 4b + 3 = 0 \\ f(-2) = -6 \Longrightarrow -8a + 4b - 6 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 3/4 \\ b = 3 \end{array} \right.$$

$f(x) = \dfrac{3}{4}x^3 + 3x^2 + 3x - 6$
Comprobamos que en $x = -2$ hay un máximo:

$$f''(x) = 6ax + 2b = 6\frac{3}{4}x + 6 = \frac{9}{2}x + 6, \;\; f''(-2) = -9 + 6 = -3 < 0 \;\text{ y }\; f'(-2) = 0$$

$$\Longrightarrow x = -2 \text{ es un máximo}$$

b)

$$\int \frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = 8x^2 + 1 \\ dt = 16x dx \\ dx = \frac{dt}{16x} \end{array} \right] = \int \frac{5x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{dt}{16x} = \frac{5}{16}\int t^{-1/2}\,dt =$$

$$\frac{5}{16} \cdot \frac{t^{1/2}}{1/2} + C = \frac{5\sqrt{8x^2+1}}{8} + C$$

$$\int 3xe^{-4x^2}dx = \left[\begin{array}{c} t = -4x^2 \\ dt = -8x dx \\ dx = \frac{dt}{-8x} \end{array} \right] = \int 3xe^t \frac{dt}{-8x} = -\frac{3}{8}\int e^t dt = -\frac{3}{8}e^t + C = -\frac{3}{8}e^{-4x^2} + C$$

$$\int_0^1 \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} - 3xe^{-4x^2} \right) dx = \left[\frac{5\sqrt{8x^2+1}}{8} + \frac{3}{8}e^{-4x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{8}(7 + 3e^{-4}) = 0,88$$

3.1.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.3 Dada la función

$$f(x) = \frac{4x^2 + 4x + 5}{2x + 1}$$

a) Dominio de f.

b) ¿Para qué valores de x se cumple $f(x) = 5$?

c) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1/2\}$

b) $f(x) = 5 \Longrightarrow \dfrac{4x^2 + 4x + 5}{2x + 1} = 5 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \dfrac{3}{2}$

c) Asíntotas:

- Verticales: en $x=-\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\longrightarrow(-1/2)^-}\frac{4x^2+4x+5}{2x+1}=\left[\ \frac{4}{0^-}\ \right]=-\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow(-1/2)^+}\frac{4x^2+4x+5}{2x+1}=\left[\ \frac{4}{0^+}\ \right]=+\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{4x^2+4x+5}{2x+1}=\infty$$

- Oblicuas:$y=mx+n$

$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{4x^2+4x+5}{2x^2+x}=2$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{4x^2+4x+5}{2x+1}-2x\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2x+5}{2x+1}=1$$

$$y=2x+1$$

d) $f'(x)=\dfrac{2(4x^2+4x-3)}{(2x+1)^2}=0\Longrightarrow x=-\dfrac{3}{2}$ y $x=\dfrac{1}{2}$

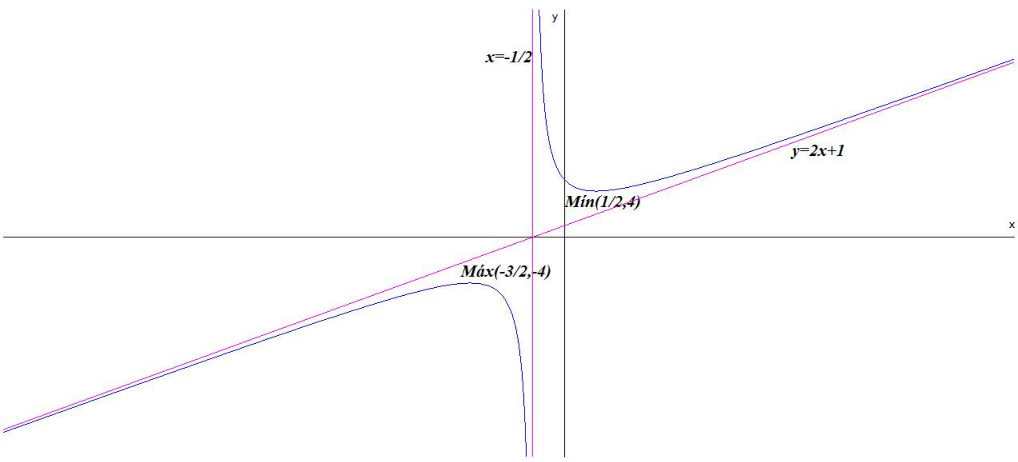
	$(-\infty,-3/2)$	$(-3/2,1/2)$	$(1/2,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función f crece en el intervalo $\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},\infty\right)$.

La función f decrece en el intervalo $\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

La función f tiene un máximo en el punto $\left(-\dfrac{3}{2},-4\right)$.

La función f tiene un mínimo en el punto $\left(\dfrac{1}{2},4\right)$.



Problema 3.4 Tenemos 4000 euros para invertir en dos fondos M y N. Sea x la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo M e y la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo N; así, se cumple $x + y = 4$. El beneficio que se obtiene, en euros, viene dado por

$$B = 10(2x + 1)^2 y$$

Determinar cuánto dinero tenemos que invertir en cada fondo para obtener el máximo beneficio y cuál será ese beneficio máximo.

Solución:
$B(x, y) = 10(2x + 1)^2 y$ y $x + y = 4 \Longrightarrow y = 4 - x \Longrightarrow B(x) = 10(2x + 1)^2(4 - x)$

$$B(x) = -40x^3 + 120x^2 + 150x + 40$$

$$B'(x) = -120x^2 + 240x + 150 = 0 \Longrightarrow x = \frac{5}{2},\ x = -\frac{1}{2} \text{ (no vale)}$$

	$[0, 5/2)$	$(5/2, \infty)$
$B'(x)$	$+$	$-$
$B(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

Luego $x = \dfrac{5}{2}$ es un máximo al que le corresponde un beneficio de 540 euros. Es decir, se invertirían 2500 euros en el fondo M y 1500 euros en el fondo N con un beneficio máximo de 540 euros.

Problema 3.5 Calcular

$$\int_0^1 \left(\frac{5}{3x+1} - \frac{4}{\sqrt{3x+1}} \right) dx$$

Solución:

$$\int \frac{4}{\sqrt{3x+1}}\, dx = \begin{bmatrix} t = 3x + 1 \\ dt = 3dx \\ dx = \frac{dt}{3} \end{bmatrix} = \int \frac{4}{\sqrt{t}} \cdot \frac{dt}{3} = \frac{4}{3} \int t^{-1/2}\, dt =$$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{t^{1/2}}{1/2} + C = \frac{8\sqrt{3x+1}}{3} + C$$

$$\int \frac{5}{3x+1} dx = \begin{bmatrix} t = 3x + 1 \\ dt = 3dx \\ dx = \frac{dt}{3} \end{bmatrix} = \int \frac{5}{t} \frac{dt}{3} = \frac{5}{3} \int \frac{1}{t} dt = \frac{5}{3} \ln|t| + C = \frac{5}{3} \ln|3x + 1| + C$$

$$\int_0^1 \left(\frac{5}{3x+1} - \frac{4}{\sqrt{3x+1}} \right) dx = \left[\frac{5}{3} \ln|3x + 1| - \frac{8\sqrt{3x+1}}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}(10 \ln 2 - 8)$$

3.2. Asturias

3.2.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.6 El precio de una llamada a una línea de pago se descompone en dos conceptos: el establecimiento de llamada (precio fijo) más un coste variable en función de la duración. El coste del establecimiento de llamada es de 1 euro y el coste variable es de 1,2 euros por cada minuto hablado durante los primeros 30 minutos (inclusive), pasando a tarifar los minutos restantes a partir de ese momento a 0,8 euros por minuto.

a) Si $f(x)$ representa el coste total en euros de la llamada en función de la duración en minutos de la misma (x), obtén la expresión de dicha función f y estudia su continuidad en el punto $x = 30$.

b) Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $(0, \infty)$. Si el coste total de una llamada ha sido de 45 euros, ¿cuánto ha durado la llamada?

Solución:

a)

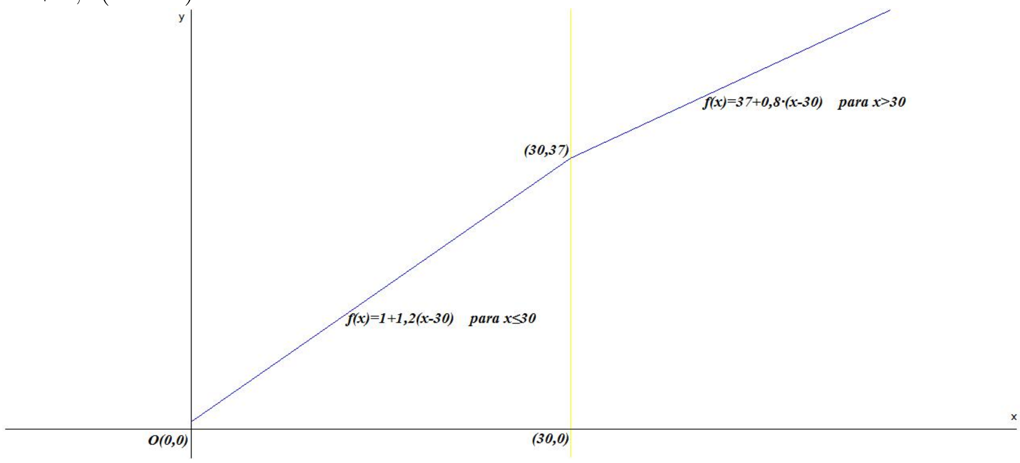
$$f(x) = \begin{cases} 1 + 1,2x & \text{si} \quad 0 \le x \le 30 \\ 37 + 0,8(x - 30) & \text{si} \quad x > 30 \end{cases}$$

Continuidad en $x = 30$:

$$\lim_{x \longrightarrow 30^-} (1 + 1,2x) = 37, \quad \lim_{x \longrightarrow 30^+} (37 + 0,8(x - 30)) = 37 \text{ y } f(30) = 37$$

Luego la función es continua en $x = 30$.

b) $37 + 0,8(x - 30) = 45 \Longrightarrow x = 40$ minutos.



Problema 3.7 La variación instantánea de la cotización viene dada por la función $f(x) = 0,02x^2 + 1$ donde x representa el tiempo que lleva cotizando desde el comienzo de la semana. Se pide:

a) Determinar la función cotización F, si se sabe que dicha función es la primitiva de f y que en el momento inicial la cotización era de 5

b) Estudiar y representar gráficamente la función g definida como $g(x) = f(x) - 9$, $\forall x \in \mathbb{R}$ y calcular el área limitada por la curva g y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$.

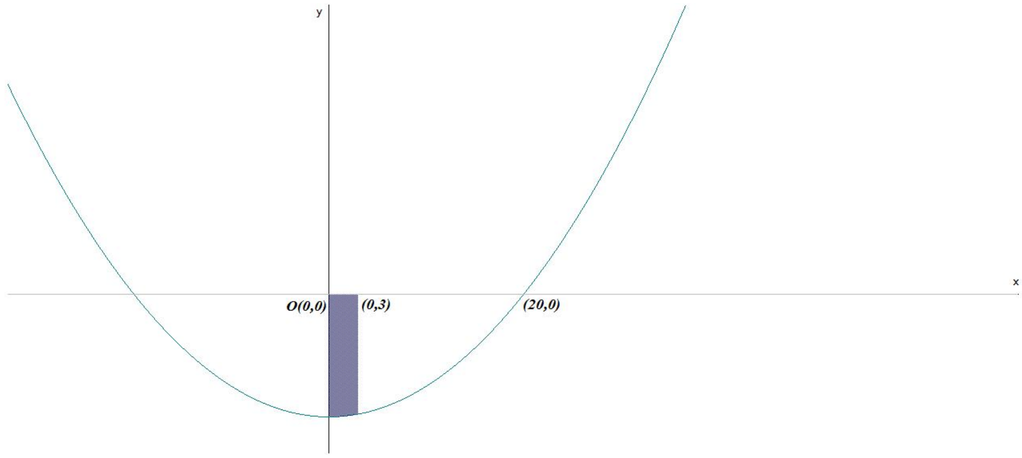
Solución:

a) $F(x) = \int (0,02x^2 + 1)\, dx = \dfrac{0,02x^3}{3} + x + C$, como $F(0) = C = 5 \Longrightarrow F(x) = \dfrac{0,02x^3}{3} + x + 5$

b) $g(x) = f(x) - 9 = 0,02x^2 - 8$. Comprobamos si hay algún punto de corte de la función g con el eje $OX \Longrightarrow 0,02x^2 - 8 = 0 \Longrightarrow x = \pm 20$ puntos que está fuera del recito de integración. Los límites de integración serán desde 0 hasta 3.

$$S_1 = \int_0^3 (0,02x^2 - 8)\, dx = \left. \frac{0,02x^3}{3} - 8x \right]_0^3 = -23,82$$

El área está por debajo del eje OX: $S = |S_1| = 23,82\ u^2$



3.2.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.8 Dos fuentes de energía A y B producen electricidad a la vez durante 6 horas. Si dado un instante de tiempo x en el intervalo [0,6] se tiene que $f(x) = -x^2 + 6x + 3$ representa la electricidad producida por la fuente A y $g(x) = x + 9$ representa la electricidad producida por la fuente B, se pide:

a) Determinar en qué momentos están produciendo la misma cantidad de electricidad ambas fuentes. ¿A cuánto asciende la producción de electricidad de cualquiera de las dos fuentes en esos momentos?

b) Determinar en qué momentos la producción de la fuente A decrece.

c) Obtener el instante de tiempo en el que la producción conjunta de las dos fuentes es máxima.

Solución:

a) $f(x) = g(x) \Longrightarrow -x^2 + 6x + 3 = x + 9 \Longrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $x = 3$ unidades de tiempo.
$f(2) = g(2) = 11$ y $f(3) = g(3) = 12$ unidades de electricidad producida.

b) $f'(x) = -2x + 6 = 0 \Longrightarrow x = 3$

	$[0,3)$	$(3,6]$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

La función empieza a decrecer a partir del momento $x = 3$ unidades de tiempo.

c) LLamamos $h(x) = f(x) + g(x) = -x^2 + 6x + 3 + x + 9 = -x^2 + 7x + 12 \Longrightarrow$
$h'(x) = -2x + 7 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{7}{2}$

	$[0,7/2)$	$(7/2,6]$
$h'(x)$	$+$	$-$
$h(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

El máximo se encuentra en el instante $x = \dfrac{7}{2}$ unidades de tiempo, con una producción de energía conjunta de $h\left(\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{97}{4}$ unidades de energía.

Problema 3.9 Dada la función $f(x) = \dfrac{9}{x} - \dfrac{18}{x^2} - 1$, se pide:

a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 20$.

b) Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 12$.

Solución:

a) $F(x) = \int \left(\dfrac{9}{x} - \dfrac{18}{x^2} - 1\right) = 9\ln x - x + \frac{18}{x} + C$

$F(1) = 17 + C = 20 \Longrightarrow C = 3 \Longrightarrow F(x) = 9\ln x - x + \dfrac{18}{x} + 3$

b) $f(x) = \dfrac{-x^2 + 9x - 18}{x^2}$

I. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

II. Puntos de corte con OY: no hay
Puntos de corte con $OX: -x^2 + 9x - 18 = 0 \Longrightarrow (3, 0)$ y $(6, 0)$

III. Signo:

	$(-\infty, 3)$	$(3, 6)$	$(6, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

IV. Simetría: No hay

V. Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{-x^2 + 9x - 18}{x^2} = \left[\ \frac{-18}{0^+}\ \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{-x^2 + 9x - 18}{x^2} = \left[\ \frac{-18}{0^+}\ \right] = -\infty$$

- Horizontales: $y = -1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{-x^2 + 9x - 18}{x^2} = -1$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales

VI. Monotonía: $f'(x) = \dfrac{9(4 - x)}{x^3} = 0 \Longrightarrow x = 4$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

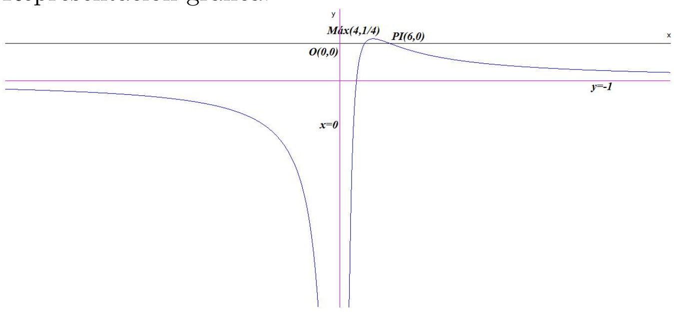
La función crece en el intervalo: $(0, 4)$.
La función decrece en el intervalo: $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$.
La función tiene un máximo en el punto $\left(4, \dfrac{1}{8}\right)$.

VII. Curvatura: $f'(x) = \dfrac{18(x-6)}{x^4} = 0 \Longrightarrow x = 6$

	$(-\infty, 6)$	$(6, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

La función convexa en el intervalo: $(-\infty, 0) \cup (0, 6)$.
La función cóncava en el intervalo: $(6, \infty)$.
La función tiene un punto de inflexión en $(6, 0)$.

VIII. Representación gráfica:



IX. La función corta al eje OX en $x = 3$ y en $x = 6$ ambos puntos dentro del itervalo de integración $[1, 12]$, luego tendremos tres áreas S_1 entre 1 y 3, S_2 entre 3 y 6 y S_3 entre 6 y 12.

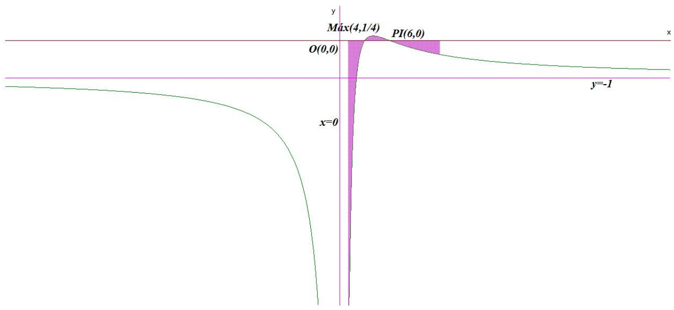
$$F(x) = \int \left(\frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 \right) dx = 9 \ln |x| - x + \frac{18}{x}$$

$$S_1 = \int_1^3 f(x)\, dx = F(3) - F(1) = 9 \ln 3 - 14 \simeq -4,112$$

$$S_2 = \int_3^6 f(x)\, dx = F(6) - F(3) = 9 \ln 2 - 6 \simeq 0,238$$

$$S_3 = \int_6^{12} f(x)\, dx = F(12) - F(3) = 9 \ln 2 - \frac{15}{2} \simeq -1,262$$

$$S = |S_1| + |S_2| + |S_3| = \frac{31}{2} - 9 \ln 3 \simeq 5,612\ u^2$$



3.3. Islas Baleares

3.3.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.10 El número de vehículos que ha pasado cierto día por el peaje de una autopista viene dado por la función:

$$N(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2 & \text{si} \quad 0 \le t \le 9 \\ \\ 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2 & \text{si} \quad 9 < t \le 24 \end{cases}$$

donde N indica el número de vehículos y t el tiempo transcurrido en horas desde las $0:00$ h.

a) ¿Es continua la función $N(t)$?

b) ¿Entre qué horas aumentó el número de vehículos que pasaba por el peaje? ¿en qué horas disminuye?

c) ¿A qué hora pasó el mayor número de vehículos? ¿Cuál fue el número?

Solución:

a) Las ramas son continuas, estudiamos la continuidad en $t = 9$:

$$\lim_{t \longrightarrow 9^-} \left(\left(\frac{t-3}{3} \right)^2 + 2 \right) = 6; \quad \lim_{t \longrightarrow 9^+} \left(10 - \left(\frac{t-15}{3} \right)^2 \right) = 6; \quad f(9) = 6$$

Luego f es continua en el intervalo $[0, 24]$ en el que está definida.

b)

$$N'(t) = \begin{cases} \frac{2}{3}\left(\frac{t-3}{3}\right) & \text{si} \quad 0 \le t \le 9 \\ \\ -\frac{2}{3}\left(\frac{t-15}{3}\right) & \text{si} \quad 9 < t \le 24 \end{cases}$$

En la rama $0 \le t \le 9$: $N'(t) = 0 \Longrightarrow t = 3$

	$(0,3)$	$(3,9)$
$N'(t)$	$-$	$+$
$N(t)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

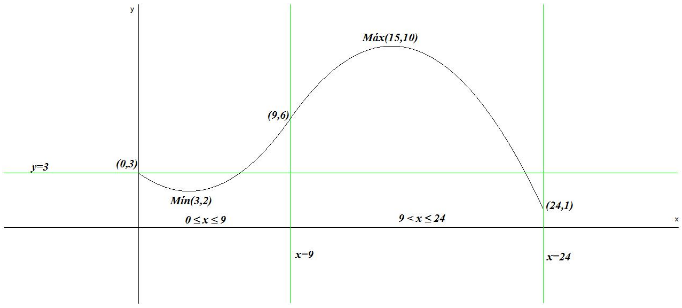
la función decrece en el intervalo $(0, 3)$ y crece en el $(3, 9)$ con un mínimo local en el punto $(3, 2)$.

En la rama $9 < t \le 24$: $N'(t) = 0 \Longrightarrow t = 15$

	$(9,15)$	$(15,24)$
$N'(t)$	$+$	$-$
$N(t)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

la función decrece en el intervalo $(15, 24)$ y crece en el $(9, 15)$ con un máximo local en el punto $(15, 10)$.
Luego la función decrece en el intervalo $(0, 3) \cup (15, 24)$ y crece en el intervalo $(3, 15)$.

c) El mayor número de vehículos pasó a las 15 horas y es de 10 vehículos.



Problema 3.11 El número de visitantes a un museo obtiene y mediante la función

$$V(t) = \frac{300t}{t^3 + 2}$$

donde t es la hora desde la apertura del museo. Supongamos que la hora de apertura del museo es desde las $9:00$ horas de la mañana.

a) ¿Cuando crece y decrece el número de visitantes del museo?

b) ¿Cuando recibe el museo el número más grande de visitantes? ¿Cuál es el número?

c) ¿En qué valor de t se produce un punto de inflexión de $V(t)$?

Solución:

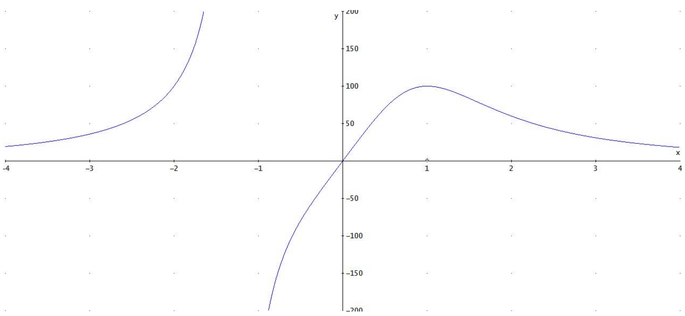
a) $V'(t) = -\dfrac{600(t^3 - 1)}{(t^3 + 2)^2} = 0 \Longrightarrow t = 1$

	$[0, 1)$	$(1, 24]$
$V'(t)$	$+$	$-$
$V(t)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

La función crece durante la primera hora (hasta las 10:00) y después decrece hasta la hora de cierre del museo.

b) La función presenta un máximo en la primera hora con un total de $V(1) = 100$ visitantes.

c) $V'(t) = \dfrac{1800t^2(t^3 + 4)}{(t^3 + 2)^3} = 0 \Longrightarrow t = 0$ y $t = \sqrt[3]{4}$. De estos dos puntos sólo es punto de inflexión $t = \sqrt[3]{4} = 1,587$, ya que en $t = 0$ la función no cambia de curvatura.



3.3.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.12 Un artículo de consumo estuvo a la venta durante 8 años, y su precio $P(t)$ (en miles de euros) varió con el tiempo t (en años) que llevaba en el mercado según la función

$$P(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 40 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 6 \\ \\ -\frac{113}{14}t^2 + \frac{3826}{7} & \text{si} \quad 6 < t \leq 8 \end{cases}$$

a) ¿Cuál fue el precio de salida del producto?

b) ¿Es continua la función? ¿Es derivable? Encontrar los conjuntos de continuidad y derivabilidad.

c) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento del precio del producto.

d) Averigua en qué momento se alcanzaron los precios máximo y mínimo y cuáles fueron estos precios.

Solución:

a) $P(0) = 40$, es decir, 40000 euros.

b) Las ramas son continuas, estudiamos la continuidad en $t = 6$:

$$\lim_{t \longrightarrow 6^-} \left(\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 40 \right) = 256; \ \lim_{t \longrightarrow 6^+} \left(-\frac{113}{14}t^2 + \frac{3826}{7} \right) = 256; \ f(6) = 256$$

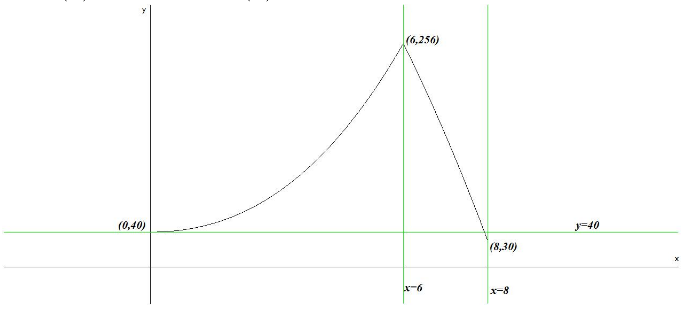
Luego f es continua en el intervalo $[0, 8]$ en el que está definida. Derivabilidad en $t = 6$

$$P'(t) = \begin{cases} t^2 + 8t & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 6 \\ \\ -\frac{113}{7}t & \text{si} \quad 6 < t \leq 8 \end{cases} \Longrightarrow P'(6^-) = 48, \ P'(6^+) = -\frac{678}{7}$$

Luego P no es derivable en $t = 6$.
La función es continua en el intervalo $[0, 8]$ y derivable en el intervalo $[0, 6) \cup (6, 8]$

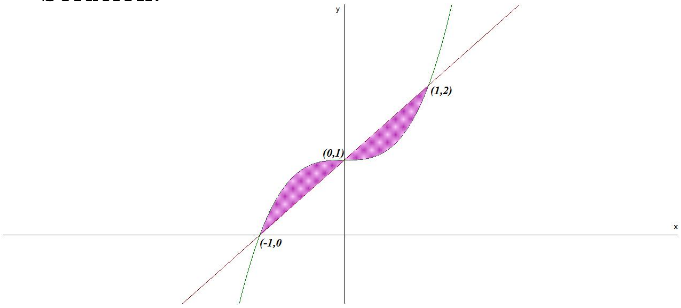
c) En la rama $0 \leq t \leq 6$: $N'(t) = 0 \Longrightarrow t = 0$ y $t = -8$(N0 vale). Tenemos $P(t) > 0 \Longrightarrow$ la función es creciente en el intervalo $[0, 6]$.
En la rama $6 < t \leq 8$: $N'(t) = 0 \Longrightarrow t = 0$. Tenemos $P'(t) < 0 \Longrightarrow$ la función decrece en el intervalo $(6, 8]$

d) El valor máximo se dará en $t = 6 \Longrightarrow P(6) = 256$ (256000 euros). El valor mínimo se dará en $P(0) = 40$ o en $P(8) = 30$. En nuestro caso será en $t = 8$ con 30000 euros.



Problema 3.13 Dibujar el área cerrada entre los gráficas de las funciones siguientes: $f(x) = x^3+1$ y $g(x) = x + 1$. Calcular el área del recinto anterior.

Solución:



$f(x) = g(x) \Longrightarrow x^3 + 1 = x + 1 \Longrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pm 1$. Luego tendremos dos áreas, S_1 entre -1 y 0 y S_2 entre 0 y 1.

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\,dx = \int (x^3 - x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$

$$S_1 = \int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))\,dx = F(0) - F(-1) = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$S_2 = \int_{0}^{1} (f(x) - g(x))\,dx = F(1) - F(0) = -\frac{1}{4} - 0 = -\frac{1}{4}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\,u^2$$

3.4. Islas Canarias

3.4.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.14 Durante los 5 últimos años, el beneficio de una empresa, en cientos de miles de euros,viene dado por la función:

$$b(t) = \begin{cases} 2t & \text{si} \quad t \in [0, 3] \\ \\ 6 - \frac{(t-3)^2}{2} & \text{si} \quad t \in (3, 5] \end{cases}$$

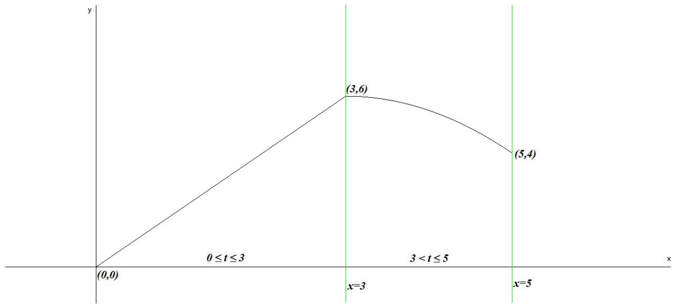
siendo t el tiempo en años. Justificando la respuesta:

a) ¿Cuándo ha crecido y ha decrecido $b(t)$?

b) En su caso, determinar cuándo se observan los máximos y mínimos locales de $b(t)$, así como los correspondientes valores.

c) ¿Cuándo el beneficio fue igual a 500000 euros?

Solución:



a) $b'(t) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad t \in [0,3] \\ \\ 3-t & \text{si} \quad t \in (3,5] \end{cases}$. En la rama $[0,3]$: $b'(t) > 0$ y la función es siempre creciente. En la rama $(3,5]$: $b'(t) = 0 \Longrightarrow t = 3$ que no pertenece a la rama y $b'(t) < 0$ en toda la rama. En conclusión la función cece en $[0,3]$ y decrece en $(3,5]$

b) Se observa un máximo en el punto $(3,6)$ y un mínimo en $(0,0)$.

c) En la rama $[0,3]$: $2t = 5 \Longrightarrow t = 2,5$ años.
En la rama $(3,5]$: $6 - \frac{(t-3)^2}{2} = 5 \Longrightarrow t = 4,41$ y $t = 1,59$ años. La solución $t = 1,59$ no es válida.

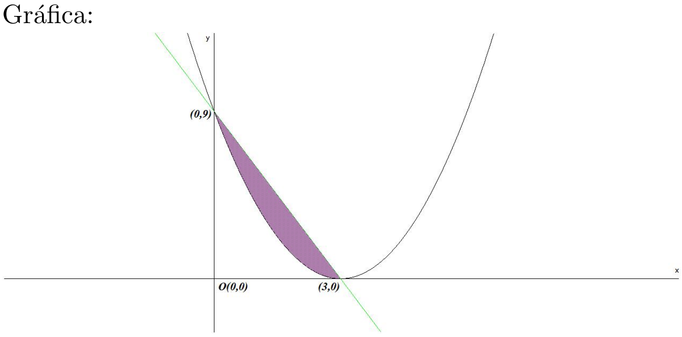
Problema 3.15 Un rincón de una plaza tiene una superficie limitada por $y = (x-3)^2$ e $y = -3x+9$ $(x \geq 0,\ y \geq 0)$ Si se mide en metros, se pide:

a) Representar la superficie.

b) Para hacerla transitable, se ha de rellenar de hormigón cuyo coste (incluido trabajo y transporte) es de 70 euros por metro cuadrado. Si se desperdicia las dos novenas partes del hormigón comprado, ¿cuánto costará hacer el relleno?

Solución:

a) Gráfica:



b)

$$S_1 = \int_0^3 [(x-3)^2 - (-3x+9)]\, dx = \int_0^9 (x^2 - 3x)\, dx = \left. \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_0^3 = -\frac{9}{2}$$

$$S = |S_1| = \left| -\frac{9}{2} \right| = \frac{9}{2}\ \text{m}^2$$

Sea t el hormigón que tenemos que comprar para 4,5 m^2. Como se desperdicia las $\frac{2}{9}t$ partes: $t - \frac{2}{9}t = \frac{9}{2} \Longrightarrow t = \frac{81}{14}$ es el hormigón que debemos comprar, lo que nos da un precio de $\frac{81}{14} \cdot 70 = 405$ euros.

3.4.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.16 El beneficio de un parque acuático depende, principalmente, de la estación del año. La función que representa el beneficio, expresado en millones de euros, durante el último año fraccionado en meses es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+8}{2} & \text{si} \quad 0 \le x \le 4 \\ -x^2 + 12x - 26 & \text{si} \quad 4 < x \le 8 \\ 6 & \text{si} \quad 8 < x \le 12 \end{cases}$$

Justificando las respuestas:

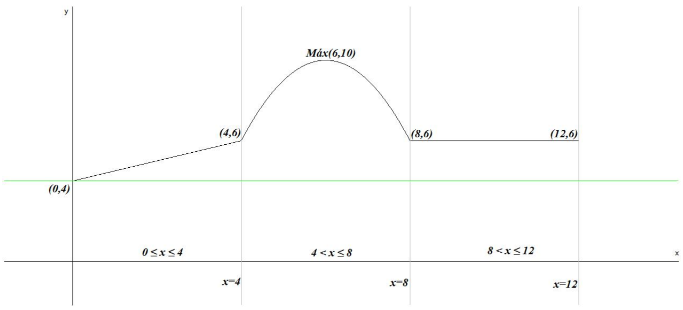
a) Representar gráficamente la función. ¿Cuándo ha crecido y decrecido el beneficio?

b) Calcular en qué momentos se obtuvieron los beneficios máximo y mínimo y a cuánto ascendían estas cantidades.

c) ¿Cuándo fue el beneficio igual a 6.000.000 euros?

Solución:

a) Gráfica:



b) La rama $0 \le x \le 4$ es una recta que parte del punto $(0,4)$ y crece hasta el punto $(4,6)$ donde se une a la parábola en la rama $4 < x \le 8$: $f(x) = -x^2 + 12x - 26 \Longrightarrow f'(x) = -2x + 12 = 0 \Longrightarrow x = 6$ y $f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(6) = -2 < 0 \Longrightarrow$ en $x = 6$ hay un máximo que correponde al punto $(6,10)$ y esta función decrece desde ese punto hasta el punto $(8,6)$ donde cambia a la rama $8 < x \le 12$ donde la función no decrece ni crece, es constante. En conclusión: El mínimo de la función se situa en el punto $(0,4)$ y el máximo en el punto $(6,10)$.

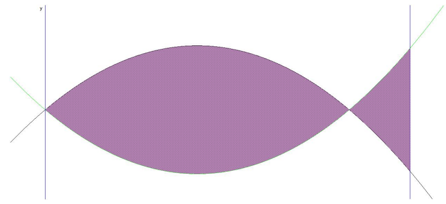
c) Se pueden ver en la gráfica las dos soluciones en los meses $x = 4$ y $x = 8$ soluciones de la ecuación de segundo grado:

$$-x^2 + 12x - 26 = 6 \Longrightarrow x^2 - 12x + 32 = 0 \Longrightarrow x = 4, \;\; x = 8$$

Problema 3.17 En una pared, a la entrada de un puerto pesquero, se va construir un mosaico de piedra en forma de pez como indica la figura adjunta, definida por las parábolas $y_1 = -\frac{1}{10}x^2 + x + 5$ e $y_2 = \frac{1}{10}x^2 - x + 5$, entre $x = 0$ y $x = 12$. Los valores de x e y se expresan en metros.

a) Determinar la superficie total de la figura.

b) Para construir el mosaico, la empresa A asegura que es capaz de recubrir de piedra 1 m^2 de superficie en 1,5 horas de trabajo, y cobra cada hora a 120 euros. La empresa B afirma que tarda 2 horas en recubrir 1 m^2 de superficie y cobra la hora a 85 euros. Asimismo, la empresa A cobra 10 euros por m^2 de piedra, mientras que la empresa B cobra 12 euros/m^2 por el mismo tipo de piedra. ¿Qué empresa hará el trabajo con un menor coste?



Solución:

a) $y_1 = y_2 \Longrightarrow -\frac{1}{10}x^2 + x + 5 = \frac{1}{10}x^2 - x + 5 \Longrightarrow x^2 - 10x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 10$. Luego tendremos dos áreas S_1 con un intervalo de integración $[0, 10]$ y S_2 con un intervalo de integración $[10, 12]$.

$$F(x) = \int (y_1 - y_2)\, dx = \int \left(-\frac{x^2}{5} + 2x\right) dx = -\frac{x^3}{15} + x^2$$

$$S_1 = \int_0^{10} (y_1 - y_2)\, dx = F(10) - F(0) = \frac{100}{3} - 0$$

$$S_2 = \int_{10}^{12} (y_1 - y_2)\, dx = F(12) - F(10) = \frac{144}{5} - \frac{100}{3} = -\frac{68}{15}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{100}{3} + \frac{68}{15} = \frac{568}{15}\ \text{m}^2$$

b) La empresa A tardará $\dfrac{568}{15} \cdot 1,5 = \dfrac{284}{5}$ horas lo que genera un coste de $\dfrac{284}{5} \cdot 120 = 6816$ euros.

La empresa B tardará $\dfrac{568}{15} \cdot 2 = \dfrac{1136}{15}$ horas lo que genera un coste de $\dfrac{1136}{15} \cdot 85 = 19312/3 \simeq 6437,33$ euros.

Sería más barata la empresa B.

3.5. Cantabria

3.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.18 Dada la función: $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes OX y OY.

b) Las asíntotas.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

d) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

e) Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

Solución:

a) Dominio de f: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow$ No hay.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -\frac{1}{4} \Longrightarrow (0, -1/4)$.

b) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \left[\frac{5}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \left[\frac{5}{0^+}\right] = +\infty$$

$x = -2$

$$\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \left[\frac{5}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^+} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \left[\frac{5}{0^-}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:** $y = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2-4} = 1$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

c) $f'(x) = -\dfrac{10x}{(x^2-4)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente	decreciente

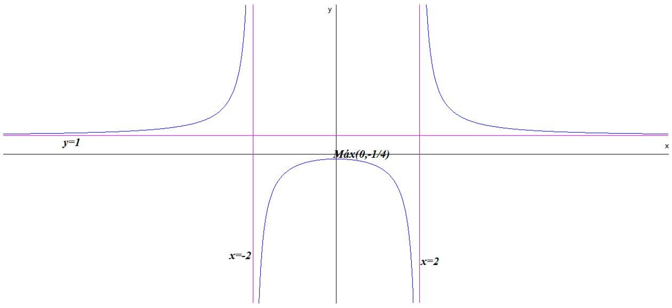
La función es decreciente en el intervalo $(0, 2) \cup (2, \infty)$, y creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$, tiene un máximo en el punto $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$.

d) $f''(x) = \dfrac{10(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} \neq 0 \Longrightarrow$ No hay puntos de inflexión.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2 + \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava$\cup$	convexa$\cap$	cóncava$\cup$

Cóncava: $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ y Convexa: $(-2, 2)$.

e) Representación:



Problema 3.19 Dada Una empresa juguetera puede vender x unidades al mes de un determinado modelo de tren eléctrico, al precio de $518 - x^2$ euros por unidad. Por otra parte, el fabricante tiene gastos mensuales: unos fijos de 225 euros y otros de $275x$ euros que dependen del número x de unidades.
Hallar el número de unidades que maximizan el beneficio mensual. ¿A cuánto ascienden los ingresos?

Solución:
Venta: $V(x) = (518 - x^2)x$ y Gastos: $G(x) = 225 + 275x$. La función beneficio será: $B(x) = V(x) - G(x) = (518 - x^2)x - (225 + 275x) = -x^3 + 243x - 225$

$$B'(x) = -3x^2 + 243 = 0 \Longrightarrow x = \pm 9$$

Esta claro que la solución negativa no es válida. $B''(x) = -6x \Longrightarrow B(9) = -54 < 0 \Longrightarrow x = 9$ es un máximo. Los beneficios serían de $B(9) = 1233$ euros. Los ingresos sin contar con los gastos serían $V(9) = 3933$ euros y los gastos $G(9) = 2700$ euros.

Problema 3.20 Dada la función: $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 6x$

a) Los puntos de corte con los ejes OX y OY.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

c) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

d) Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

e) Calcular el área de la región delimitada por la curva y el eje OX.

Solución:

a)
- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow -2x^3 - 4x^2 + 6x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$, $(1, 0)$ y $(-3, 0)$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$.

b) $f'(x) = -6x^2 - 8x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -1,869$ y $x = 0,535$

	$(-\infty; -1,869)$	$(-1,869; 0,535)$	$(0,535; +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

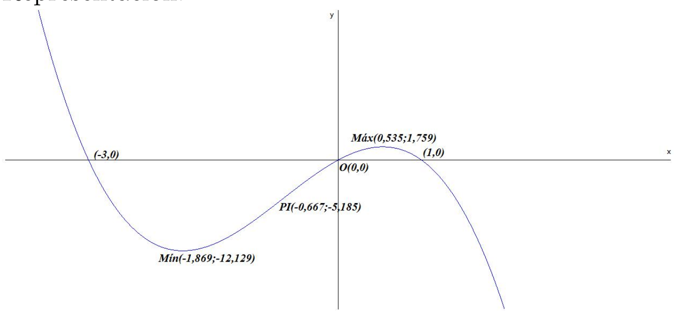
La función es decreciente en el intervalo $(-\infty; -1,869) \cup (0,535; +\infty)$, y creciente en el intervalo $(-1,869; 0,535)$, tiene un máximo en el punto $(0,535; 1,759)$ y un mínimo en $(-1,869; -12,129)$.

c) $f''(x) = -12x - 8 = 0 \Longrightarrow x = -0,667.$

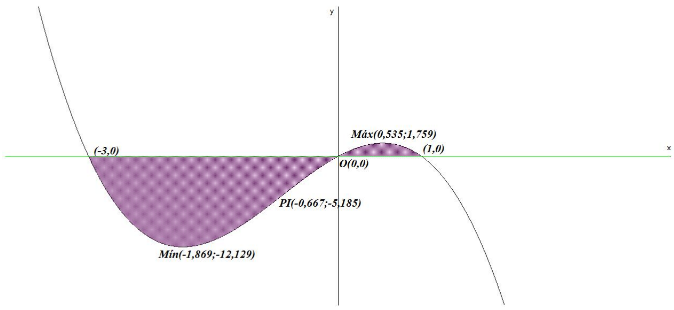
	$(-\infty; -0,667)$	$(-0,667; +\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	cóncava$\cup$	convexa$\cap$

Cóncava: $(-\infty; -0,667)$, Convexa: $(-0,667; \infty)$ con un punto de inflexión en $(-0,667; -5,185)$

d) Representación:



e) El área a calcular:



Luego tendremos dos áreas S_1 con un intervalo de integración $[-3, 0]$ y S_2 con un intervalo de integración $[0, 1]$.

$$F(x) = \int (-2x^3 - 4x^2 + 6x)\, dx = -\frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} + 3x^2$$

$$S_1 = \int_{-3}^{0} (-2x^3 - 4x^2 + 6x)\, dx = F(0) - F(-3) = 0 - \frac{45}{2} = -\frac{45}{2}$$

$$S_2 = \int_{0}^{1} (-2x^3 - 4x^2 + 6x)\, dx = F(1) - F(0) = \frac{7}{6} - 0 = \frac{7}{6}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{45}{2} + \frac{7}{6} = \frac{71}{3}\ u^2$$

3.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.21 Dada la función: $f(x) = -x^2 + 3x + 5$

a) Obtener los puntos de corte con los ejes OX y OY.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

c) Dibujar la región delimitada por la curva anterior y la recta $y = x - 3$.

d) Calcular el área de la región anterior.

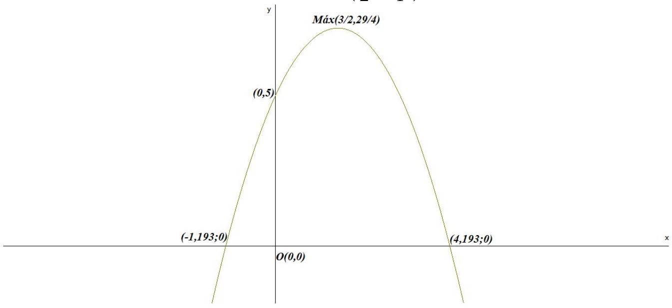
Solución:

a)
- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow -x^2 + 3x + 5 = 0 \Longrightarrow (4,193;0)$ y $(-1,193;0)$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 5 \Longrightarrow (0,5)$.

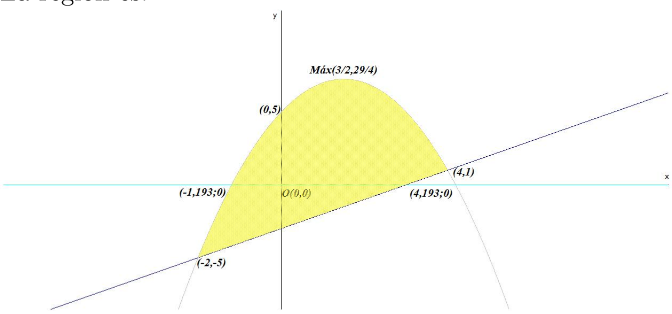
b) $f'(x) = 3 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 3/2$

	$(-\infty, 3/2)$	$(3/2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente	decreciente

La función es decreciente en el intervalo $(3/2; +\infty)$, y creciente en el intervalo $(-\infty, 3/2)$, tiene un máximo en el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{29}{4}\right)$.



c) La región es:



d) $f(x) = y \Longrightarrow -x^2 + 3x + 5 = x - 3 \Longrightarrow -x^2 + 2x + 8 = 0 \Longrightarrow x = -2$ y $x = 4$.

$$F(x) = \int (f(x) - y)\, dx = \int (-x^2 + 2x + 8)\, dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 8x$$

$$S_1 = \int_{-2}^{4} (-x^2 + 2x + 8)\, dx = F(4) - F(-2) = \frac{80}{3} + \frac{28}{3} = 36$$

$$S = |S_1| = 36\ u^2$$

Problema 3.22 Sea ahora la función: $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 - 2x - 15}$. ¿En qué puntos es discontinua? ¿Se puede definir de nuevo esta función para evitar alguna discontinuidad?

Solución:
La función es continua en $\mathbb{R} - \{-3, 5\}$. Estudiamos que tipo de discontinuidad hay en $x = -3$ y en $x = 5$.
En $x = -3$:

$$\lim_{x \longrightarrow -3} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 2x - 15} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow -3} \frac{2x - 1}{2x - 2} = \frac{7}{8}$$

En este punto hay una discontinuidad evitable. (Hay un agujero)
En $x = 5$

$$\lim_{x \longrightarrow 5} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 2x - 15} = \pm\infty$$

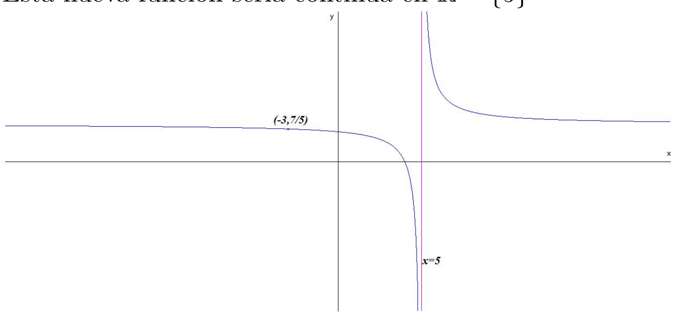
$$\lim_{x \longrightarrow 5^-} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 2x - 15} = \left[\frac{8}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^+} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 2x - 15} = \left[\frac{8}{0^+}\right] = +\infty$$

En este punto hay una discontinuidad no evitable. (Hay un salto, de hecho se trata de una asíntota vertical)
La función g extensión por continuidad de f sería:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 - 2x - 15} & \text{si} \quad x \neq -3 \\ \\ \dfrac{7}{8} & \text{si} \quad x = 3 \end{cases}$$

Esta nueva función sería continua en $\mathbb{R} - \{5\}$



Problema 3.23 Dada la función, determinar los valores de a y b para los que la función es continua en $x = -2$ y en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} -6x + 3 & \text{si} \quad -4 < x < -2 \\ x^2 + ax + 5 & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \\ \frac{x+15}{x+b} & \text{si} \quad 0 \le x < 3 \end{cases}$$

Solución:
Continuidad en $x = -2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -2^-} (-6x + 3) = 15 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -2^+} (x^2 + ax + 5) = 9 - 2a \end{array} \right. \Longrightarrow 15 = 9 - 2a \Longrightarrow a = -3$$

Continuidad en $x = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} (x^2 + ax + 5) = 5 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{x+15}{x+b} = \dfrac{15}{b} \end{array}\right. \Longrightarrow 5 = \frac{15}{b} \Longrightarrow b = 3$$

Problema 3.24 Determinar las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{2x^2+5}{x^2+4x-21}$. Si existen asíntotas verticales, esbozar la posición de la gráfica respecto a las mismas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

Solución:
Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 3$

$$\lim_{x\longrightarrow 3} \frac{2x^2+5}{x^2+4x-21} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 3^-} \frac{2x^2+5}{x^2+4x-21} = \left[\frac{23}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{2x^2+5}{x^2+4x-21} = \left[\frac{23}{0^+}\right] = +\infty$$

  $x = -7$

$$\lim_{x\longrightarrow -7} \frac{2x^2+5}{x^2+4x-21} = \pm\infty$$

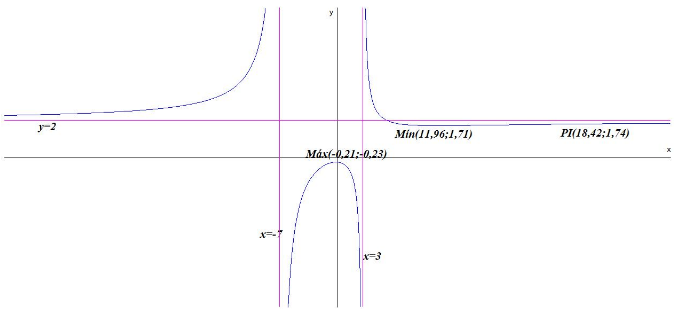
$$\lim_{x\longrightarrow -7^-} \frac{2x^2+5}{x^2+4x-21} = \left[\frac{103}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -7^+} \frac{2x^2+5}{x^2+4x-21} = \left[\frac{103}{0^-}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:** $y = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{2x^2+5}{x^2+4x-21} = 2$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.



3.6. Castilla León

3.6.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.25 Un estudio basado en los datos censales sobre la evolución de la población en una ciudad española revela que, en el período 2005-2015, el número de habitantes (en miles) sigue la función

$$p(t) = (t-2)^2(1-2t) + 252t + 116$$

donde t indica el tiempo medido en años, siendo $t = 0$ el tiempo correspondiente al año 2005. Tomando $p(t)$, determina los periodos de crecimiento y decrecimiento del número de habitantes de dicha ciudad. ¿En qué momento del tiempo el número de habitantes es máximo? ¿Qué número de habitantes tiene la ciudad en ese momento?

Solución:

$$p(t) = (t-2)^2(1-2t) + 252t + 116 = -2t^3 + 9t^2 + 240t + 120$$

$$p'(t) = -6t^2 + 18t + 240 = 0 \Longrightarrow t = 8, \;\; t = -5(\text{no vale})$$

	$[0,8)$	$(8,+\infty)$
$p'(t)$	$+$	$-$
$p(t)$	creciente	decreciente

La población crece en el intervalo $[0,8)$, es decir, desde el 2005 hasta el 2013, y decrece en el intervalo $(8,\infty)$, es decir, desde el año 2013 hasta la actualidad. Por tanto, la mayor población se encuentra el año 2013 (Máximo en $t = 8$) con $p(8)\cdot 1000 = 1592000$ habitantes.

Problema 3.26 La producción de petróleo (millones de barriles) de un pozo petrolífero a lo largo del tiempo x (años) se mide según la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 17x & \text{si} \quad 0 \le x < 5 \\ -3x^2 + 30x + 10 & \text{si} \quad 5 \le x < 10 \\ 10 & \text{si} \quad x \ge 10 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función $f(x)$. ¿Cuántos barriles de petróleo produce dicho pozo cuando $x = 8$?

b) Calcula el área limitada por la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[2,3]$.

Solución:

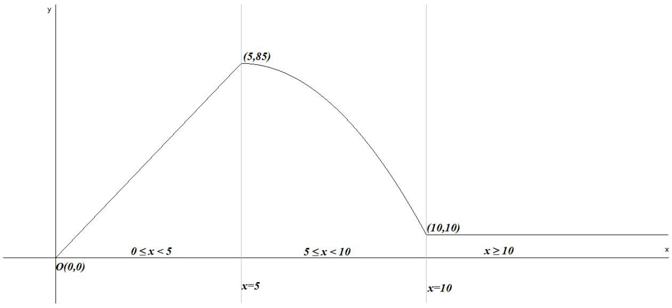
a) Continuidad en $x = 5$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 5^-} (17x) = 85 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 5^+} (-3x^2 + 30x + 10) = 85 \\ f(5) = 85 \end{array}\right. \Longrightarrow f \text{ continua}$$

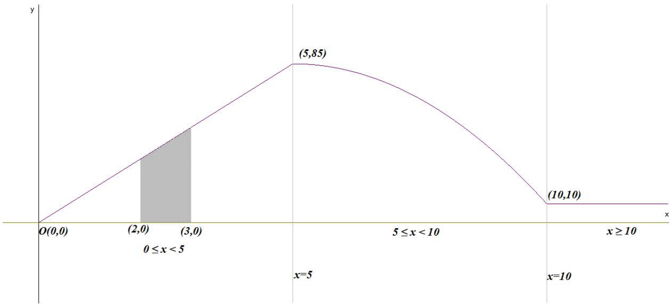
Continuidad en $x = 10$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 10^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 10^-} (-3x^2 + 30x + 10) = 10 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 10^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 10^+} 10 = 10 \\ f(10) = 10 \end{array}\right. \Longrightarrow f \text{ continua}$$

$$f(8) = 58$$



b) $S = \displaystyle\int_2^3 17x\, dx = \left.\frac{17x^2}{2}\right]_2^3 = \frac{85}{2}\ u^2$



3.6.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

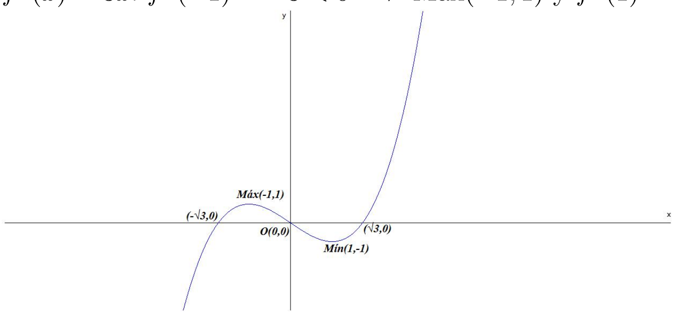
Problema 3.27 Representa gráficamente la función $y = -ax^3 - bx + c$, sabiendo que pasa por el origen de coordenadas y que tiene un mínimo relativo en el punto $(x, y) = (1, -1)$. Justifica brevemente la representación gráfica obtenida.
Solución:

$$f(x) = -ax^3 - bx + c \Longrightarrow f'(x) = -3ax^2 - b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 0 \Longrightarrow c = 0 \\ f(1) = -1 \Longrightarrow -a - b + c = -1 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow -3a - b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = 0 \end{array}\right.$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \Longrightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}$$

Puntos de corte: $(0, 0)$ y $(\pm\sqrt{3}, 0)$
Monotonía: $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$
$f''(x) = 3x$. $f''(-1) = -3 < 0 \Longrightarrow$ Máx$(-1, 1)$ y $f''(1) = 3 > 0 \Longrightarrow$ Mín$(1, -1)$



Problema 3.28 Un alumno asiste a una clase que dura 60 minutos. Se estima que la capacidad de atención de un alumno en cada instante de tiempo t viene dada por la función $f(t) = -2t^2+120t+5$, con $t \in [0, 60]$.

a) Calcula la capacidad de atención cuando lleva una hora de clase.

b) Halla el instante de tiempo t (en minutos) en el que la capacidad de atención es máxima. ¿Cuál es la capacidad de atención máxima?

Solución:

a) $f(60) = 5$

b) $f'(t) = 120 - 4t = 0 \Longrightarrow t = 30$. $f''(t) = -4 \Longrightarrow f(30) = -4 < 0 \Longrightarrow t = 30$ es un máximo con un valor de $f(30) = 1805$

3.7. Castilla La Mancha

3.7.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2018

Problema 3.29 Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 4x - (3/2) & \text{si} \quad x \le c \\ (x-2)^2 + (3/2) & \text{si} \quad x > c \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$?

b) Para $c = 1$, representa gráficamente la función f.

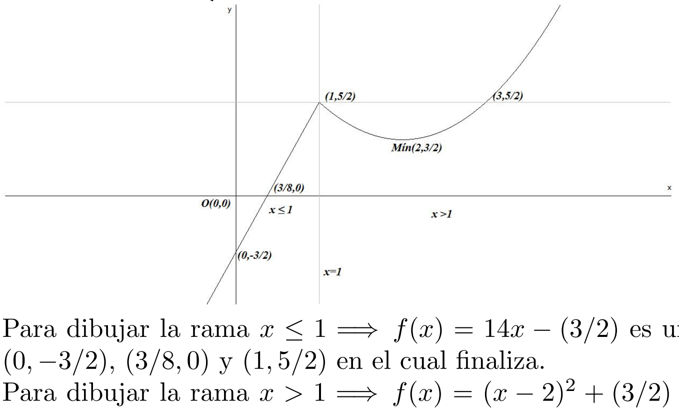
Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow c^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow c^-} (4x - (3/2)) = 4c - (3/2) \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow c^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow c^+} ((x-2)^2 + (3/2)) = (c-2)^2 + (3/2) \end{array} \right. \Longrightarrow 4c - \frac{3}{2} = (c-2)^2 + \frac{3}{2} \Longrightarrow$$

$$-c^2 + 8c - 7 = 0 \Longrightarrow c = 1, \quad c = 7$$

b) Si $c = 1$: $f(x) = \begin{cases} 4x - (3/2) & \text{si} \quad x \le 1 \\ (x-2)^2 + (3/2) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$



Para dibujar la rama $x \le 1 \Longrightarrow f(x) = 14x - (3/2)$ es una recta que pasa por los puntos: $(0, -3/2)$, $(3/8, 0)$ y $(1, 5/2)$ en el cual finaliza.
Para dibujar la rama $x > 1 \Longrightarrow f(x) = (x-2)^2 + (3/2)$ es una parábola que pasa por los puntos: $(1, 5/2)$, $(2, 3/2)$ y $(3, 5/2)$. Como $f'(x) = 2(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $f''(x) = 2 \Longrightarrow f(2) = 2 > 0 \Longrightarrow$ el punto $(2, 3/2)$ es un mínimo local.

Problema 3.30 La función $v(t) = 48t^2 - 2t^3$ nos da el número de ordenadores afectado por un virus informático, siendo t el tiempo (en horas) desde que se localizó el primer ordenador con virus

a) Averigua, si existe, el momento en el que el virus dejará de propagarse.

b) Estudia cuando aumenta y cuando disminuye la propagación del virus.

c) ¿En qué momento se produce el número máximo de ordenadores afectados? ¿cuántos ordenadores?

Solución:

a) $v(t) = 48t^2 - 2t^3 = 0 \Longrightarrow t = 0$ y $t = 24$. A partir de las 24 horas la función es negativa y, por tanto, el virus ha dejado de propagarse.

b) $v'(t) = 96t - 6t^2 = 0 \Longrightarrow t = 0$ y $t = 16$.
$v''(t) = 96 - 12t \Longrightarrow v(0) = 96 > 0 \Longrightarrow t = 0$ es un mínimo con un valor de $f(0) = 0$. $v(16) = -96 < 0 \Longrightarrow t = 16$ es un máximo con un valor de $f(16) = 4096$.

	$[0,16)$	$(16,24)$
$p'(t)$	$+$	$-$
$p(t)$	creciente	decreciente

El número de ordenadores infectados crece en el intervalo $[0,16)$ horas, y decrece en el intervalo $(16,24)$ horas.

c) La mayor cantidad de ordenadores infectados se encuentra a las 16 horas con 4096 en total.

Problema 3.31 Se considera la función $f(x) = \begin{cases} |x+2|+t & \text{si} \quad x \le -1 \\ (x-t)^2 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = -1$?

b) Para $t = 3$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, +\infty)$.

c) Para $t = 3$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-1, +\infty)$.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} |x+2|+t & \text{si} \quad x \le -1 \\ (x-t)^2 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases} \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} -(x+2)+t & \text{si} \quad x \le -2 \\ (x+2)+t & \text{si} \quad -2 < x \le -1 \\ (x-t)^2 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

a) Para que la función f sea continua en $x = -1$ los límites laterales deben de coincidir:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} ((x+2)+t) = 1+t \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} (x-t)^2 = (-1-t)^2 \end{cases} \Longrightarrow 1+t = (-1-t)^2 \Longrightarrow$$

$$-t^2 - t = 0 \Longrightarrow t = 0, \;\; t = -1$$

b) Para $t = 3$ y en el intervalo $(-1, +\infty) \Longrightarrow f(x) = (x-3)^2 \Longrightarrow f'(x) = 2(x-3) = 0 \Longrightarrow$ $x = 3$. Por el criterio de la segunda derivada: $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(3) = 2 > 0 \Longrightarrow$ hay un mínimo en el punto $(3, 0)$

c) Por el apartado anterior la función decrece en el intervalo $(-1, 0)$ y crece en $(1, +\infty)$

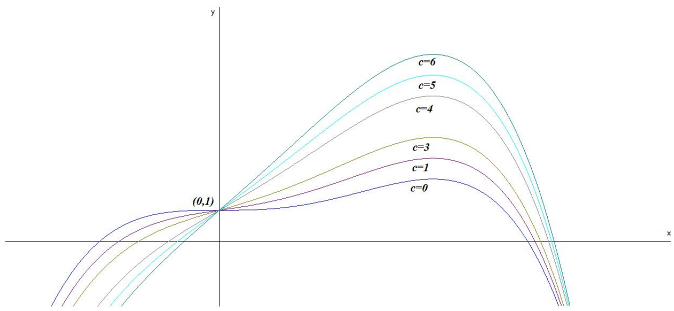
Problema 3.32 Sea la función $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx + 1$. Sabemos que presenta un punto de inflexión en el punto de abcisa $x = 0$, un máximo en $x = 1$ y la pendiente de la recta tangente en $x = -1$ es 24. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c.
Solución:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx + 1 \Longrightarrow f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + c \Longrightarrow f''(x) = 12ax^2 + 6bx$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(0) = 0 \Longrightarrow (0, 1) \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 4a + 3b + c = 0 \\ f'(-1) = 24 \Longrightarrow -4a + 3b + c = 24 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -3 \\ b = \frac{12-c}{3} \end{array} \right.$$

Hay infinitas funciones que cumplen estas condiciones según variemos el valor del parámetro c:

$$f(x) = -3x^4 + \frac{12-c}{3}x^3 + cx + 1$$



3.7.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.33 Se considera la función $f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x + t & \text{si} & x \le -3 \\ 4 & \text{si} & -3 < x < 3 \\ (x-4)^2 - 5 & \text{si} & x \ge 3 \end{array} \right.$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = -3$.

b) Para $t = 3$, representa gráficamente la función f.

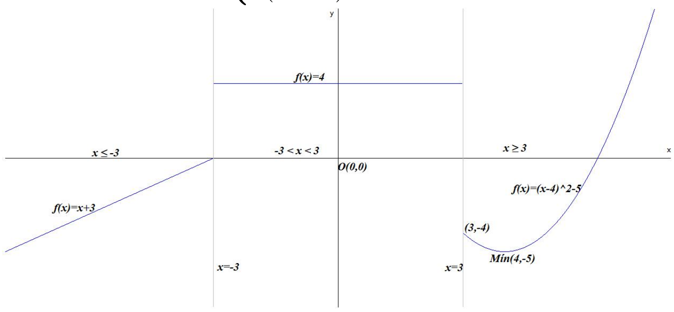
Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow -3^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -3^-} (x + t) = -3 + t \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -3^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -3^+} 4 = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow -3 + t = 4 \Longrightarrow t = 7$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} 4 = 4 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} ((x-4)^2 - 5) = -4 \end{array} \right. \Longrightarrow \text{discontinua}$$

b) Para $t = 3$: $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si} \quad x \le -3 \\ 4 & \text{si} \quad -3 < x < 3 \\ (x-4)^2 - 5 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$



Problema 3.34 Sabemos que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un mínimo en el punto (1,1) y corta al eje de ordenadas en 4. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c.
Solución:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 2ax + b$$

$$\begin{cases} f(1) = 1 \Longrightarrow a + b + c = 1 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 2a + b = 0 \\ f(0) = 4 \Longrightarrow c = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -6 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

Problema 3.35 Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x-4 & \text{si} \quad x < c \\ -3 & \text{si} \quad c \le x \le 0 \\ x^2 - 10x & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$?

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$.

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, +\infty)$.

Solución:

a)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow c^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow c^-} (-x-4) = -c-4 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow c^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow c^+} (-3) = -3 \end{cases} \Longrightarrow -c-4 = -3 \Longrightarrow c = -1$$

b) En el intervalo $(0, +\infty)$ es $f(x) = x^2 - 10x \Longrightarrow f'(x) = 2x - 10 = 0 \Longrightarrow x = 5$ La función tiene un extremo en el punto $(5, -25)$. $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(5) = 2 > 0 \Longrightarrow$ el extremo calculado es un mínimo.

	$(0,5)$	$(5,\infty)$
$f'(t)$	$-$	$+$
$f(t)$	decreciente	creciente

c) La función decrece en el intervalo $(0, 5)$, y crece en el intervalo $(5, \infty)$.

Problema 3.36 Los costes de fabricación de un modelo de vehículo $C(x) = -x^3+45x^2-243x+500$ (en miles de euros) en función del número de vehículos (en cientos) fabricados $(1 \le x \le 27)$

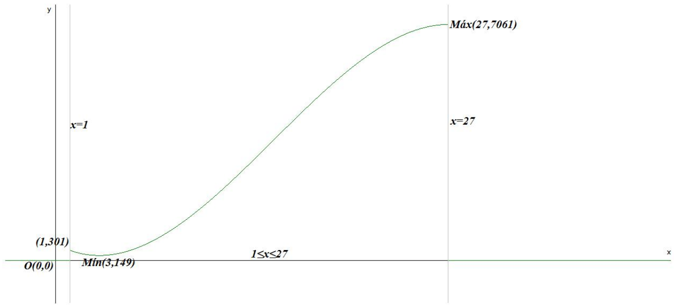
a) Determina la cantidad de vehículos que dan el coste máximo y mínimo.

b) ¿A qué valor ascienden ambos?

Solución:

a) $C'(x) = -3x^2 + 90x - 243 = 0 \Longrightarrow x = 3$ y $x = 27$
$C''(x) = 90 - 6x$. En $x = 3 \Longrightarrow c''(3) = 72 > 0 \Longrightarrow$ el punto $(3, 149)$ es un mínimo, es decir, se fabrican tres vehículos con un coste de producción de 149000 euros.
En $x = 27 \Longrightarrow c''(27) = -72 < 0 \Longrightarrow$ el punto $(27, 7061)$ es un máximo, es decir, se fabrican 27 vehículos con un coste de producción de 7061000 euros.

b) contestado en el apartado anterior.



3.8. Cataluña

3.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.37 La gráfica de la función $f(x) = ax + b + \dfrac{8}{x}$ pasa por el punto $(-2, -6)$ y la recta tangente en este punto es paralela al eje de abscisas.

a) Calcule el valor de a.

b) Calcule el valor de b.

Solución:

a)
$$f(x) = ax + b + \frac{8}{x} \Longrightarrow f'(x) = a - \frac{8}{x^2}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} f(-2) = -6 \Longrightarrow -2a + b = -2 \\ f'(-2) = 0 \Longrightarrow a - 2 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 2 \end{array} \right.$$
$$f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x}$$

b) contestado en el apartado anterior.

Problema 3.38 La función $f(x) = \dfrac{40}{x^2 - 22x + 125}$ muestra aproximadamente la venta diaria, en miles de unidades, de un perfume de moda en función de x, donde x es el día del mes de febrero.

a) ¿Cuántas unidades de perfume se vendieron, aproximadamente, el día 5 de febrero? ¿Cuál es el incremento de ventas entre el día 7 y el día 9 de febrero?

b) ¿Qué día del mes de febrero se vendieron más perfumes y cuántas unidades se vendieron?

Solución:

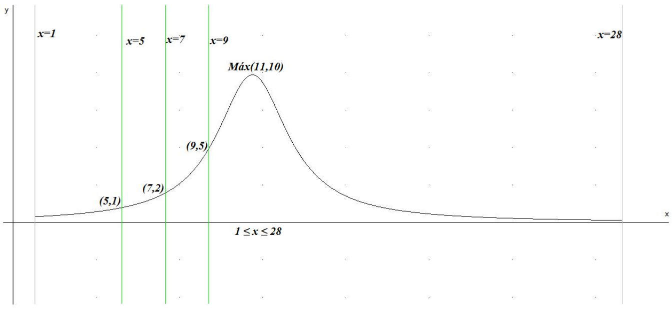
a) $f(5) = 1$, es decir, 1000 unidades.

b) $f(7) = 2$ y $f(9) = 5$ se paso de 2000 a 5000 unidades con un incremento de 3000 unidades.

c) $f'(x) = -\dfrac{80(x-11)}{(x^2-22x+125)^2} = 0 \Longrightarrow x = 11$

	$(1, 11)$	$(11, 28)$
$f'(t)$	$+$	$-$
$f(t)$	creciente	decreciente

La venta crece desde el día 1 hasta el 11 donde tendrá la máxima venta con 10000 unidades vendidas. A partir de este momento la venta decrece hasta el úlimo día de mes.



Problema 3.39 Una tienda abre al público desde las 10 horas hasta las 21 horas. Se sabe que los ingresos por ventas, en función de la hora del día, vienen dados por la función:
$I(t) = -5(m-t)^2 + n$, para $10 \le t \le 21$.

a) Encuentre el valor de m sabiendo que los ingresos máximos se producen a las 18 horas.

b) Encuentre el valor de n sabiendo que a las 21 horas hay unos ingresos de 500 euros.

Solución:

a) $I'(t) = 10m - 10t$ y $I'(18) = 0 \Longrightarrow 10m - 180 = 0 \Longrightarrow m = 18$. Comprobamos que la función $I(t) = -5(18t)^2 + n$ tiene un máximo en $t = 18$:
$I'(t) = 180 - 10t \Longrightarrow I''(t) = -10 \Longrightarrow I''(18) = -10 < 0$ y se trata de un máximo.

b) $I(t) = -5(18-t)^2 + n$ e $I(21) = -5(18 \cdot 21)^2 + n = 500 \Longrightarrow n - 45 = 500 \Longrightarrow n = 545$

Problema 3.40 Considere la función $f(x) = 2x^3 + ax$. Calcule el valor de la constante a para que esta función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -1$. Diga si se trata de un máximo o de un mínimo y dé también el valor que toma la función $f(x)$ en este punto.
Solución:
$f'(x) = 6x^2 + a$, como $f'(-1) = 0 \Longrightarrow 6 + a = 0 \Longrightarrow a = -6$.
La función es $f(x) = 2x^3 - 6x \Longrightarrow\Longleftarrow f'(x) = 6x^2 - 6 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$ y $f''(x) = 12x \Longrightarrow f''(-1) = -12 < 0 \Longrightarrow$ hay un máximo en el punto $(-1, 4)$.

Problema 3.41 Un nutricionista, después de hacer un estudio personalizado a un paciente, le propone una dieta. Según el modelo del nutricionista, el peso en kilogramos del paciente seguirá la función

$$f(x) = \frac{63x + 510}{x + 6}$$

donde x denota el número de meses que lleva siguiendo la dieta.

a) Justifique que la función f es estrictamente decreciente cuando $x \geq 0$.

b) Determine el peso inicial del paciente y cuánto pesará al cabo de dos meses siguiendo la dieta según el modelo. ¿Hacia qué valor tenderá su peso a largo plazo? Argumente si este valor límite se alcanzará en algún momento.

Solución:

a) El $\text{Dom}(f) = [0, \infty)$ y $f'(x) = -\dfrac{132}{(x+6)^2} < 0 \ \ \forall x \in [0, \infty)$, luego la función es decreciente en todo el dominio de la función.

b) $f(0) = \dfrac{510}{6} = 85$ kg y $f(2) = \dfrac{159}{2} = 79,5$ kg.
$\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{63x + 510}{x + 6} = 63$ kg. A este valor se aproximará a largo plazo pero nunca se alcanzará.

Problema 3.42 Un comerciante puede comprar artículos a 350 euros la unidad. Si los vende a 750 euros la unidad, vende 30. Se sabe que la relación entre estas dos variables (el precio de venta y el número de unidades vendidas) es lineal y que, por cada descuento de 20 euros en el precio de venta, incrementa las ventas en 3 unidades. Considerando que el comerciante sólo comprará el número de artículos que sabe que venderá:

a) Escriba la función de beneficios a partir del número de veces x que se aplica el descuento.

b) Determine el precio de venta que hace máximos los beneficios del comerciante y justifique que es un máximo. Determine cuántas unidades venderá.

Solución:

a) $B(x) = (400 - 20x)(30 + 3x) = -60x^2 + 600x + 12000$

b) $B'(x) = 600 - 120x = 0 \Longrightarrow x = 5$ y $B''(x) = -120 \Longrightarrow B''(5) = -120 < 0 \Longrightarrow x = 5$ veces que aplicaría el descuento daría el máximo beneficio.
Por tanto, el precio de la venta es $750 - 5 \cdot 20 = 650$ euros. El número de unidades vendidas será de $30 + 5 \cdot 3 = 45$ unidades.

$f'(x) = 6x^2 + a$, como $f'(-1) = 0 \Longrightarrow 6 + a = 0 \Longrightarrow a = -6$.
La función es $f(x) = 2x^3 - 6x \Longrightarrow\Longleftarrow f'(x) = 6x^2 - 6 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$ y $f''(x) = 12x \Longrightarrow f''(-1) = -12 < 0 \Longrightarrow$ hay un máximo en el punto $(-1, 4)$.

3.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.43 Para la campaña de este verano, una tienda de deportes que vende patinetes eléctricos espera vender 40 patinetes a un precio de 1.000 euros por patinete. Según un estudio de mercado, la relación entre el número de veces que se rebaja el precio del patinete en 50 euros y el número de patinetes vendidos es lineal, y, por cada 50 euros de rebaja en el precio de venta de cada patinete, habrá un incremento de las ventas de 10 patinetes más.

a) Escriba la función de ingresos de la tienda en función del número de veces que rebaje en 50 euros el precio inicial de 1.000 euros del patinete.

b) Encuentre cuál debe ser el precio del patinete para obtener los ingresos máximos. Encuentre también el número de patinetes que se venderán y los ingresos que se obtendrán con este precio.

Solución:

a) $I(x) = (40 + 10x)(1000 - 50x) = -500x^2 + 8000x + 40000$

b) $I'(x) = 8000 - 1000x = 0 \Longrightarrow x = 8$ y $B''(x) = -1000 \Longrightarrow B''(8) = -1000 < 0 \Longrightarrow x = 8$ veces que aplicaría el descuento daría el máximo beneficio.
Por tanto, el precio de la venta es $1000 - 50 \cdot 8 = 600$ euros. El número de unidades vendidas será de $40 + 10 \cdot 8 = 120$ unidades. El beneficio final sería de $120 \cdot 600 = 72000$ euros.

Problema 3.44 Se prevé un cambio importante en la población de una determinada zona por cuestiones medioambientales. El número de habitantes de la zona, en millones, vendrá dado por la función $P(t) = \dfrac{t^2 + 28}{(t+2)^2}$, donde t mide el tiempo en años desde el momento actual ($t = 0$)

a) Diga cuál es el número de habitantes de la zona actualmente y cuál será este número a muy largo plazo.

b) ¿En qué momento se llegará al número mínimo de habitantes? ¿Cuántos habitantes habrá en ese momento? ¿Cuál es el número máximo de habitantes que se alcanza en esta zona?

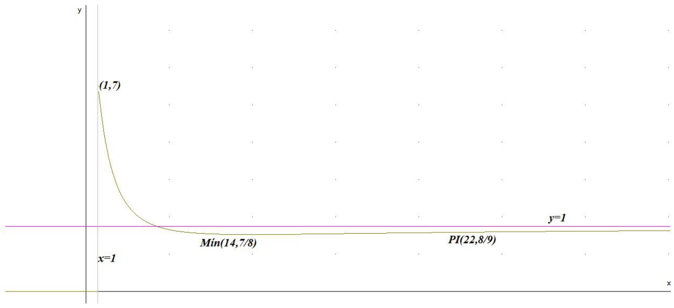
Solución:

a) $P(0) = \dfrac{28}{4} = 7 \Longrightarrow$ en la actualidad hay 7000000 habitantes.
$\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} P(t) = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} P(t) = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{t^2 + 28}{(t+2)^2} = 1 \Longrightarrow$ A largo plazo la población se mantendría aproximadamente a 1000000 de habitantes.

b) $P'(t) = \dfrac{4(t-14)}{(t+2)^3} = 0 \Longrightarrow t = 14$

	$(1, 14)$	$(14, \infty)$
$P'(t)$	$-$	$+$
$P(t)$	decreciente	creciente

La función decrece desde el momento actual hasta dentro de 14 años donde se llegaría al mínimo con una población de $\dfrac{7}{8} \cdot 1000000 = 875000$ habitantes. A partir de este año la función crece estabilizandose sobre el millón de habitantes.
La mayor cantidad de habitantes es en la actualidad con 7000000 habitantes.



Problema 3.45 Considere una función $f(x)$ cuya primera derivada es $f'(x) = 2x^2 + bx + 4$, donde b es un parametro real.

a) Determine el valor de b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = -1$ y razone si se trata de un máximo o de un mínimo.

b) Si se sabe que la gráfica de la función $f(x)$ pasa por el punto $(0, 3)$, encuentre la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en este punto.

Solución:

a) $f'(-1) = 2 - b + 4 = 0 \Longrightarrow b = 6 \Longrightarrow f'(x) = 2x^2 + 6x + 4 = 0 \Longrightarrow x = -2, \ x = -1$

$$f''(x) = 4x + 6 \Longrightarrow f''(-1) = 2 > 0 \Longrightarrow x = -1 \text{ Mínimo}$$

b) $m = f'(0) = 4 \Longrightarrow y - 3 = 4(x - 0) \Longrightarrow y = 4x + 3$

3.9. País Vasco

3.9.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.46 Se considera la curva $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) Determinar los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión.

c) Encontrar los puntos de corte con el eje OX. Realizar la representación gráfica de la función.

d) Calcular el área del recinto finito delimitado por la curva y el eje de abscisas OX.

Solución:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Longrightarrow f''(x) = 6x - 12$$

a) $f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = 3$.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

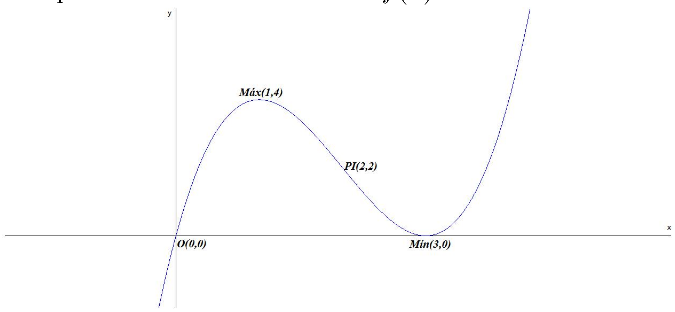
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(1, 3)$.

b) Por el apartado anterior, la función presenta un máximo local en el punto $(1,4)$ y un mínimo local en $(3,0)$.
Para calcular los puntos de inflexión: $f''(x) = 0 \Longrightarrow 6x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 2$

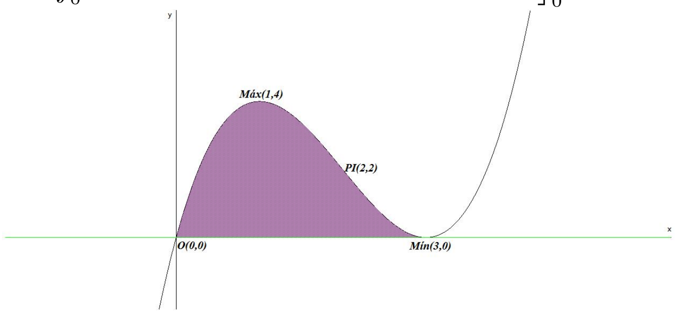
	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa$\cap$	cóncava$\cup$

La función sería convexa en el intervalo $(-\infty, 2)$ y cóncava el $(2, \infty)$ con un punto de inflexión en $(2,2)$.

c) Los puntos de corte con OX: $f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Longrightarrow (0,0)$ y $(3,0)$.



d) $S = \displaystyle\int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{27}{4}\ u^2$



Problema 3.47 Se pide:

a) Hallar la función polinómica de segundo grado cuyo gráfico pasa por el punto $(0,0)$, y tiene un máximo en el punto $(1,1)$.

b) Hallar el área del recinto finito delimitado por la curva obtenida y el eje de abscisas OX.

Solución:

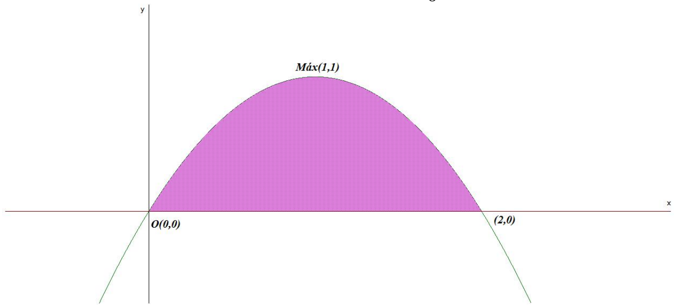
a) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 2ax + b$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 0 \Longrightarrow c = 0 \\ f(1) = 1 \Longrightarrow a + b + c = 1 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 2a + b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{array}\right.$$

$$f(x) = -x^2 + 2x$$

b) $f(x) = 0 \Longrightarrow -x^2 + 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$:

$$S = \int_0^2 (-x^2 + 2x)\, dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 \Big]_0^2 = \frac{4}{3}\, u^2$$



3.9.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.48 Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - c$.

a) Encontrar los valores de los parámetros a, b y c para que la función pase por el punto $(0, 0)$ y tenga un extremo relativo en el punto $(2, -4)$.

b) Determinar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $f(x)$.

c) Calcular el área de la región delimitada por el gráfico de la función y el eje de abscisas.

Solución:

a) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - c \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Longrightarrow f''(x) = 6x + 2a$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 0 \Longrightarrow -c = 0 \\ f(2) = -4 \Longrightarrow 8 + 4a + 2b - c = -4 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12 + 4a + b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{array}\right.$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

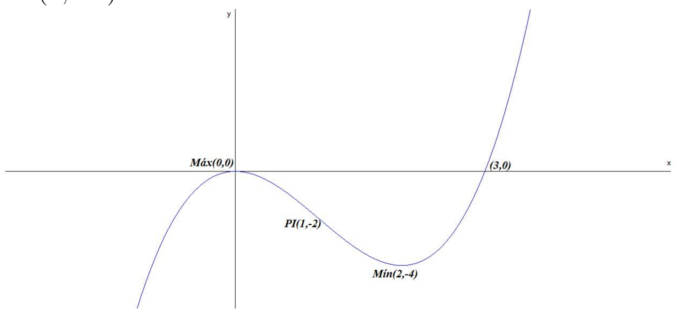
b) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(0, 2)$.
Con un máximo en el punto $(0, 0)$ y un mínimo en el punto $(2, -4)$.
Para los puntos de inflexión hacemos $f''(x) = 6x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 1$

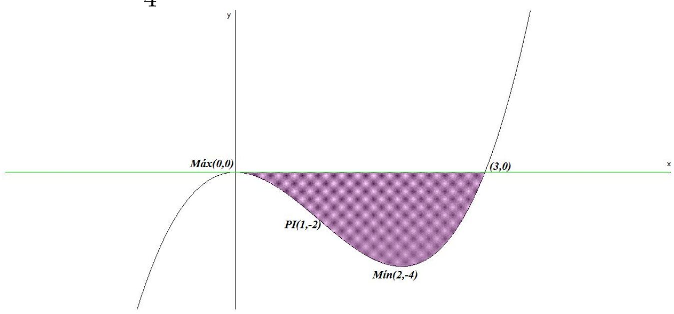
	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa$\cap$	cóncava$\cup$

La función sería convexa en el intervalo $(-\infty, 1)$ y cóncava el $(1, \infty)$ con un punto de inflexión en $(1, -2)$.



c) $S_1 = \displaystyle\int_0^2 (x^3 - 3x^2)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} - x^3\right]_0^3 = -\frac{27}{4}$

$S = |S_1| = \dfrac{27}{4}\ u^2$



Problema 3.49 Sean las funciones $f(x) = x^4 - 4$ y $g(x) = 3x^2$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones, así como los extremos relativos y los puntos de inflexión si los hubiera.

b) Representa gráficamente ambas funciones sobre el mismo eje de coordenadas.

c) Calcula el área de la región delimitada por ambas curvas.

Solución:

a) Estudio de $f(x) = x^4 - 4$:

- Puntos de corte: $x^4 - 4 = 0 \Longrightarrow (\pm\sqrt{2}, 0)$ con OX y $(0, -4)$ con OY.
- $f'(x) = 4x^3 = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(0, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$. Con un mínimo en el punto $(0, -4)$.

Estudio de $g(x) = 3x^2$:

- Puntos de corte: $3x^2 = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ con OX y con OY.

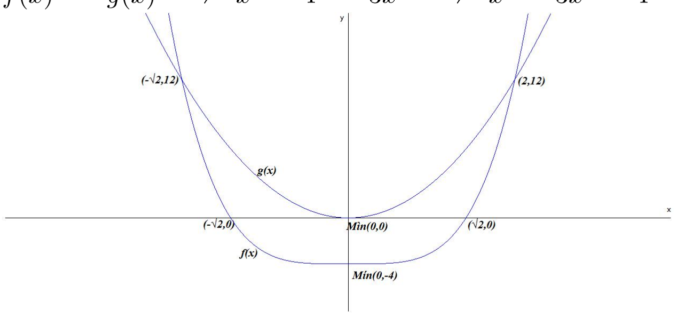
- $f'(x) = 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(0, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$. Con un mínimo en el punto $(0, -4)$.

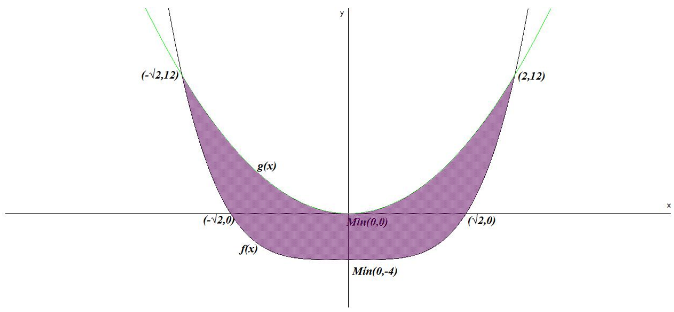
Ninguna de las funciones tiene puntos de inflexión.

b) $f(x) = g(x) \Longrightarrow x^4 - 4 = 3x^2 \Longrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2 \Longrightarrow (\pm 2, 12)$



c) $S_1 = \int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\,dx = \int_{-2}^{2} (x^4 - 3x^2 - 4)\,dx = \left.\dfrac{x^5}{5} - x^3 - 4x\right]_{-2}^{2} = -\dfrac{96}{5}$

$S = |S_1| = \dfrac{96}{5}\ u^2$



3.10. Extremadura

3.10.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.50 Durante la crecida de un río, la Confederación Hidrográfica del Tajo ha estimado que el caudal (en m^3/s) ha variado durante las primeras 6 horas de acuerdo con la función:

$$C(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 20 \quad (0 \le t \le 6)$$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar las horas de máximo y mínimo caudal.

b) Calcular dichos valores máximo y mínimo.

c) Hallar el valor del área encerrada por la función $C(t)$ y el eje OX entre los valores $t = 3$ y $t = 5$.

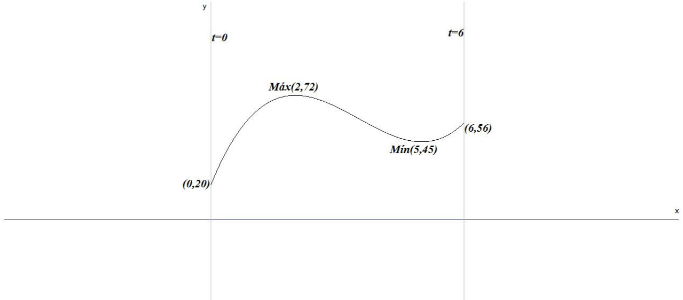
Solución:

a) $C'(t) = 6t^2 - 42t + 60 = 0 \Longrightarrow t = 2$ y $t = 5$

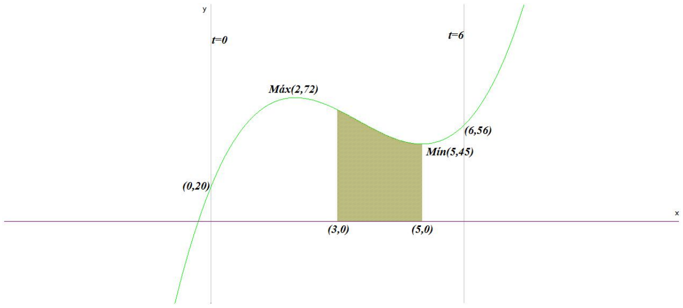
	$[0,2)$	$(2,5)$	$(5,6]$
$C'(t)$	$+$	$-$	$+$
$C(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

Luego hay un máximo en $t = 2$ horas y un mínimo en $t = 5$ horas, ambos locales.

b) $C(2) = 72$ m^3/s es el caudal máximo y $C(5) = 45$ m^3/s es el caudal mínimo. El valor mínimo absoluto estaría en la hora cero con $C(0) = 20$ m^3/s.



c) La función no corta al eje OX en el intervalo $[3, 5]$:
$$S = \int_3^5 (2t^3 - 21t^2 + 60t + 20)\, dt = \left.\frac{t^4}{2} - 7t^3 + 30t^2 + 20t\right]_3^5 = 106\ u^2$$



Problema 3.51 El precio de cada acción de una determinada empresa oscila entre 2 y 8 euros. La facturación de dicha empresa en bolsa depende del precio de la acción y viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} 3 + Ax & \text{si} \quad 2 \le x \le 5 \\ 53 + 2x + Bx^2 & \text{si} \quad 5 < x \le 8 \end{cases}$$

siendo $F(x)$ la facturación de la empresa en bolsa (en miles de euros) y x el precio de la acción (en euros). Se sabe que para un precio de la acción de 5 euros la facturación es de 13 mil euros y que la función es continua. Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar las constantes A y B.

b) Calcular las asíntotas verticales de la función $F(x)/(x^2 - 3x - 4)$ en el intervalo $[2, 5]$.

Solución:

a)

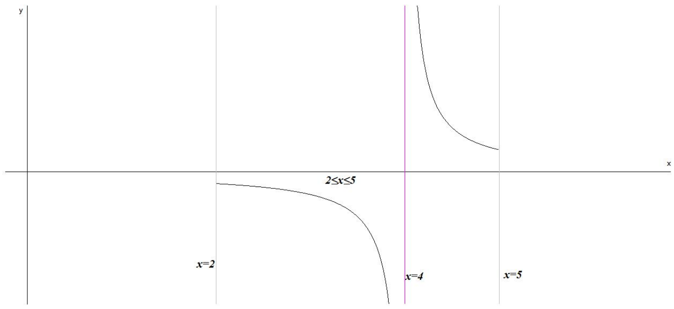
$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\longrightarrow 5^-} F(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 5^-}(3+Ax)=3+5A\\ \lim\limits_{x\longrightarrow 5^+} F(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 5^+}(53+2x+Bx^2)=63+25B\end{array}\right. \Longrightarrow 3+5A=63+25B\Longrightarrow A-5B=12$$

$$f(5)=13\Longrightarrow 3+5A=13\Longrightarrow A=2\Longrightarrow B=-2$$

.

b) Sea $f(x)=\dfrac{F(x)}{x^2-3x-4}=\dfrac{3+2x}{x^2-3x-4}$ en el intervalo $[2,5]$.
Las posibles asíntotas verticales son: $x^2-3x-4=0\Longrightarrow x=-1$ y $x=4$. Como $x=-1\notin[2,5]$ la única asíntota vertical posible es $x=4$:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\longrightarrow\, 4^-}\dfrac{3+2x}{x^2-3x-4}=\left[\dfrac{11}{0^-}\right]=-\infty\\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow\, 4^+}\dfrac{3+2x}{x^2-3x-4}=\left[\dfrac{11}{0^+}\right]=+\infty\end{array}\right.$$



3.10.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.52 La potencia requerida por la maquinaria eléctrica de una empresa durante las 10 horas de su funcionamiento viene dada por la expresión:

$$P(t)=-t^3+15t^2-48t+50\ \ (0\le t\le 10)$$

donde t es el tiempo aproximado en horas y $P(t)$ la potencia expresada en kilowatios (kw). Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar a qué horas se produce el máximo y el mínimo de esta potencia.

b) Calcular dichos valores máximo y mínimo.

c) Calcular el área encerrada por la función $P(t)$ y el eje OX entre $t=l$ y $t=5$.

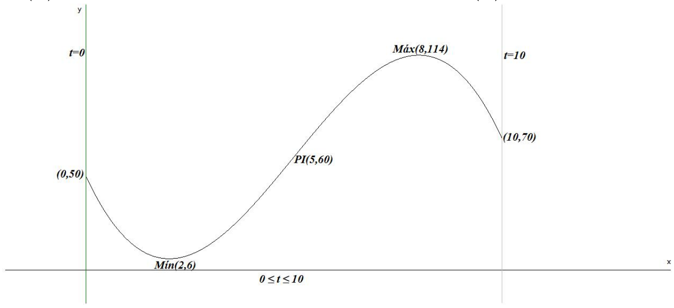
Solución:

a) $P'(t) = -3t^2 + 30t - 48 = 0 \Longrightarrow t = 2$ y $t = 8$

	$[0, 2)$	$(2, 8)$	$(8, 10]$
$P'(t)$	$-$	$+$	$-$
$P(t)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

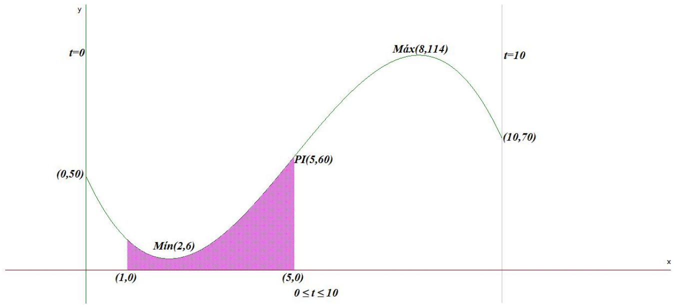
Luego hay un mínimo en $t = 2$ horas y un máximo en $t = 8$ horas, ambos locales.

b) $P(2) = 6$ Kw es la potencia mínima y $P(8) = 114$ Kw de potencia máxima.



c) La función no corta al eje OX en el intervalo $[3, 5]$:

$$S = \int_1^5 (-t^3 + 15t^2 - 48t + 50)\, dt = -\frac{t^4}{4} + 5t^3 - 240t^2 + 50t\Bigg]_1^5 = 88\ u^2$$



Problema 3.53 En un cultivo de bacterias desarrollado durante 6 horas se produce cierta sustancia de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$S(t) = At^3 - 2Bt^2 + 5t, \quad 1 \le t \le 6$$

donde $S(t)$ es la cantidad de sustancia producida (en ml) y t el tiempo de desarrollo del cultivo. Se sabe que la producción de la sustancia es mínima a las 5 horas, momento en el cual se inhibe la actividad bacteriana y la producción es de 0 ml.

a) Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

b) Calcular las asíntotas de la función $S(t)/(t^2(t-2))$ en el intervalo $(1, \infty)$.

Solución:

$$S(t) = At^3 - 2Bt^2 + 5t \Longrightarrow S'(t) = 3At^2 - 2Bt + 5$$

a) $S(t) = At^3 - 2Bt^2 + 5t \Longrightarrow S'(t) = 3At^2 - 2Bt + 5$

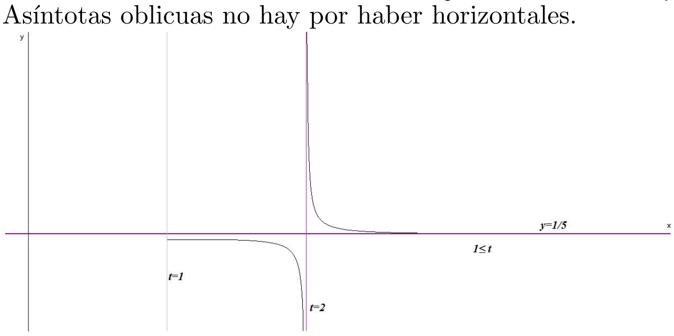
$$\left\{\begin{array}{l} S(5) = 0 \Longrightarrow 125A - 50B + 25 = 0 \\ S'(5) = 0 \Longrightarrow 75A - 20B + 5 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1/5 \\ b = 1 \end{array}\right.$$

$$S(t) = \frac{1}{5}t^3 - 2t^2 + 5t$$

b) $f(x) = \dfrac{S(t)}{t^3 - 2t^2} = \dfrac{\frac{1}{5}t^3 - 2t^2 + 5t}{t^3 - 2t^2}$ en el intervalo $(1, \infty)$.
Las posibles asíntotas verticales son: $t^3 - 2t^2 = 0 \Longrightarrow t = 0$ y $t = 2$. Como $t = 0 \notin (1, \infty)$ la única asíntota vertical posible es $t = 2$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{t \longrightarrow 2^-} \dfrac{\frac{1}{5}t^3 - 2t^2 + 5t}{t^3 - 2t^2} = \left[\dfrac{18/5}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{t \longrightarrow 2^+} \dfrac{\frac{1}{5}t^3 - 2t^2 + 5t}{t^3 - 2t^2} = \left[\dfrac{18/5}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

Tiene una asíntota horizontal en $y = \dfrac{1}{5}$ ya que $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} \dfrac{\frac{1}{5}t^3 - 2t^2 + 5t}{t^3 - 2t^2} = \dfrac{1}{5}$
Asíntotas oblicuas no hay por haber horizontales.



3.11. Madrid

3.11.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.54 *(2 puntos)* La derivada de una función real de variable real, $f(x)$, viene dada por la expresión:

$$f'(x) = 2x^2 - 4x - 6$$

a) Obténgase la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(0, 3)$.

b) Determínense los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si corresponden a máximos o mínimos relativos y estúdiese la concavidad ($\cup$) y convexidad ($\cap$) de esta función.

Solución:

a) $f(x) = \displaystyle\int (2x^2 - 4x - 6)\, dx = \dfrac{2x^3}{3} - 2x^2 - 6x + C$ como $f(0) = 3 \Longrightarrow C = 3$ luego la función será:

$$f(x) = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 - 6x + 3$$

b) $f'(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 3$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$, y es decreciente en el intervalo $(-1, 3)$. Tiene un Máximo en $\left(-1, \dfrac{19}{3}\right)$ y un mínimo en $(3, -15)$.

$f''(x) = 4x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 1$:

	$(-\infty, 1)$	$(-1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

La función tiene un punto de inflexión en el punto $\left(1, -\dfrac{13}{3}\right)$

Problema 3.55 Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{8}{x^2 + 4}$$

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y obténganse sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese.

b) Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

a) $f'(x) = -\dfrac{16x}{(x^2 + 4)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$, y es decreciente en el intervalo $(0, \infty)$. Tiene un máximo en $(0, 2)$.
Asíntotas:

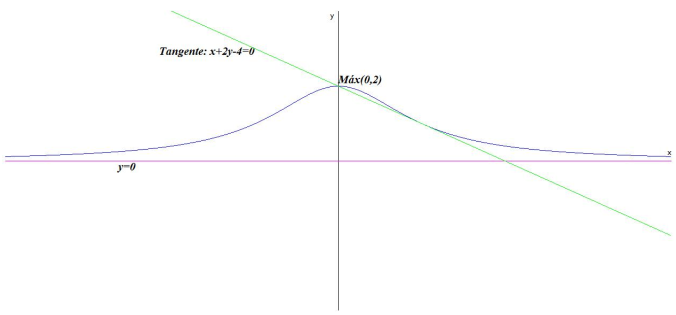
- Verticales: No hay, el denominador no se anula nunca.
- Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{8}{x^2 + 4} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) La pendiente de la recta es $m = f'(2) = -\dfrac{1}{2}$ y el punto de tangencia será $(2, f(2)) = (2, 1)$.
La recta es:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Longrightarrow x + 2y - 4 = 0$$



Problema 3.56 La función real de variable real, $f(x)$, se define según la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + k & \text{si} \quad x \le 0 \\ 1 - x^2 & \text{si} \quad 0 < x \le 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

a) Analícese la continuidad de la función en todo su dominio según los valores de k.

b) Considerando $k = 0$, obténgase el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} (e^x + k) = 1 + k \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (1 - x^2) = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow 1 + k = 1 \Longrightarrow k = 0$$

Si $k \neq 0$ la función es discontinua en $x = 0$.
Continuidad en $x = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} (1 - x^2) = -8 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \end{array} \right. \Longrightarrow$$

En $x = 3$ la función es siempre discontinua, en resumen: Si $k = 0$ f es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$. Si $k \neq 0$ f es continua en $\mathbb{R} - \{0, 3\}$

b) Con $k = 0$:

$$S_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} e^x\,dx = e^x\Big]_{-1}^{0} = 1 - e^{-1}$$

$$S_2 = \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} (1 - x^2)\,dx = x - \frac{x^3}{3}\Big]_{0}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 1 - e^{-1} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} - \frac{1}{e} \simeq 1,3\ u^2$$

3.11.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.57 Se considera la función real de variable real $f(x) = 2x^3 - 8x$.

a) Determínese en qué puntos la tangente a la curva $y = f(x)$ es horizontal.

b) Calcúlese el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

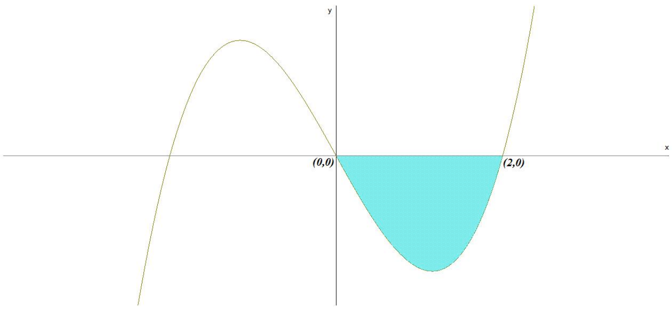
Solución:

a) $f(x) = 2x^3 - 8x \Longrightarrow f'(x) = 6x^2 - 8 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{4}{3}} = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $2x^3 - 8x = 0 \Longrightarrow x = 0$, $x = 2$ y $x = -2$. Luego la función no corta el eje de abcisas en el intervalo $[0, 2]$:

$$S_1 = \int_0^2 (2x^3 - 8x)\,dx = \left.\frac{x^4}{2} - 4x^2\right]_0^2 = -8$$

$$S = |S_1| = |-8| = 8\ u^2$$



Problema 3.58 Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 - 9} & \text{si} \quad x < 3 \\ x^2 - 4 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de f.

b) Determínese si f tiene asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.

Solución:

a)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} \dfrac{x^3}{x^2 - 9} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} (x^2 - 4) = 5 \end{cases}$$

Luego la función es discontinua no evitable en $x = 3$, en ese punto hay un salto. f es continua en $\mathbb{R} - \{\pm 3\}$ (En $x = -3$ hay una asíntota vertical)

b) Asíntotas:

- Verticales:
  En $x = 3$ hay una asíntota por la izquierda, se ha visto en el apartado anterior.
  En $x = -3$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -3^-} \dfrac{x^3}{x^2 - 9} = \left[\dfrac{-27}{0^+}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -3^+} \dfrac{x^3}{x^2 - 9} = \left[\dfrac{-27}{0^-}\right] = +\infty \end{cases}$$

- Horizontales: No hay.

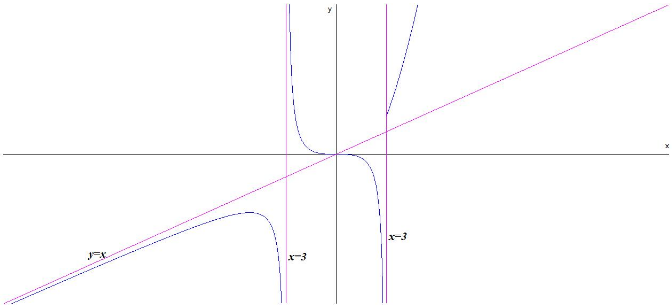
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 9} = -\infty$$

- Oblícuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3 - 9x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 9} - x \right) = 0$$

$$y = x$$



Problema 3.59 Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

a) Determínense los puntos de corte con los ejes de coordenadas así como los límites de la función cuando x tiende a infinito y a menos infinito.

b) Determínense los valores de x en los que la pendiente de la recta tangente a la función es igual a 3.

Solución:

a) Con el eje OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 3 \Longrightarrow (0, 3)$.
Con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0 \Longrightarrow (1, 0)$ y $(-3, 0)$.

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} (x^3 + x^2 - 5x + 3) = -\infty \quad \lim_{x \longrightarrow \infty} (x^3 + x^2 - 5x + 3) = \infty$$

b) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$ y $f'(a) = 3 \Longrightarrow 3a^2 + 2a - 5 = 3 \Longrightarrow 3a^2 + 2a - 8 = 0 \Longrightarrow a = -2$ y $a = \frac{4}{3}$.

3.12. Valencia

3.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.60 Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{2 - x}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Solución:

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ el único punto de corte con los ejes coordenados es el $(0,0)$.

b) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{x^2}{2-x} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x^2}{2-x} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x^2}{2-x} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2}{2-x} = -\infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x - x^2} = -1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{2-x} + x\right) = -2$$

$$y = -x - 2$$

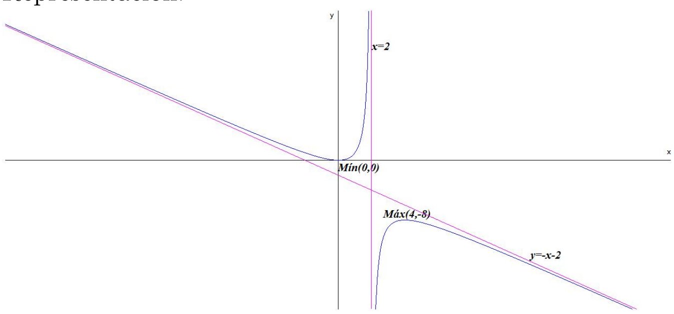
c) $f'(x) = -\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 4$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$, y es creciente en el intervalo $(0, 2) \cup (2, 4)$.

d) Tiene un máximo en $(4, -8)$ y un mínimo en $(0, 0)$.

e) Representación:



Problema 3.61 En los primeros 6 años, una empresa obtuvo unos beneficios (en decenas de miles de euros) que pueden representarse mediante la función $f(t) = t^3 - 8t^2 + 15t$, donde t es el tiempo en años transcurridos.

a) Determinar los periodos en los que la empresa tuvo beneficios y en los que tuvo pérdidas.

b) ¿En qué valor de t se alcanzó el máximo beneficio y cuál fue este?

c) ¿En qué valor de t se tuvo la máxima pérdida y cuál fue esta?

d) Suponiendo que a partir de los 6 años los beneficios siguen la misma función, ¿volverá a tener la empresa periodos alternos de beneficios y pérdidas? Justifica la respuesta.

Solución:

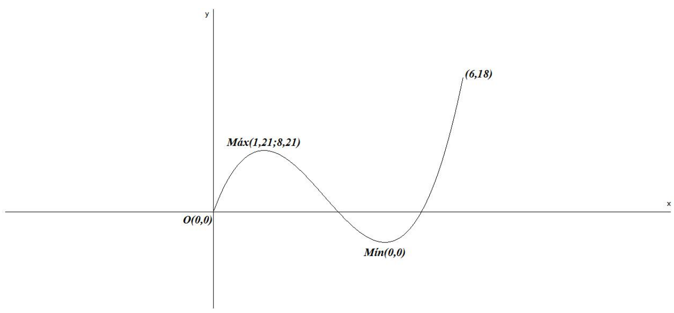
a) $f(t) = t^3 - 8t^2 + 15t = 0 \Longrightarrow t = 0$, $t = 3$ y $t = 5$.

	$(0,3)$	$(3,5)$	$(5,6)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

Hasta el tercer año la función tiene beneficios, entre el tercer y quinto año tiene pérdidas, volviedo a tener beneficios a partir del quinto año.

b) $f'(t) = 3t^2 - 16t + 15 = 0 \Longrightarrow t = 4,12$ y $t = 1,21$.

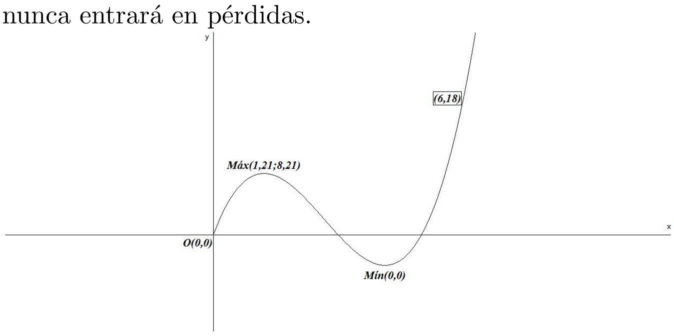
	$[0;1,21)$	$(1,21;4,12)$	$(4,12;6]$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$



La función tiene un máximo local en el punto $(1,21;8,21)$, pero el máximo absoluto estaría en $t = 6 \Longrightarrow (6,18)$.

c) La función tiene un mínimo local en el punto $(4,12;-4,06)$, además sería el mínimo absoluto.

d) La función es polinómica de tercer grado y siempre creciente en el intervalo $(6;\infty)$, como en $t = 6 \Longrightarrow f(6) = 18$, a partir de este punto la función seguirá creciendo en beneficios y nunca entrará en pérdidas.



3.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.62 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Solución:

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$

- Punto de corte con el eje OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 3/2)$
- Puntos de corte con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow \dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x-2} = 0 \Longrightarrow (-1, 0)$ y $(3, 0)$.

b) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = -2$

$$\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-} \frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2} = \left[\frac{5}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^+} \frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2} = \left[\frac{5}{0^-}\right] = -\infty$$

$x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2} = \left[\frac{-4}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2} = \left[\frac{-4}{0^+}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:** $y = 1$

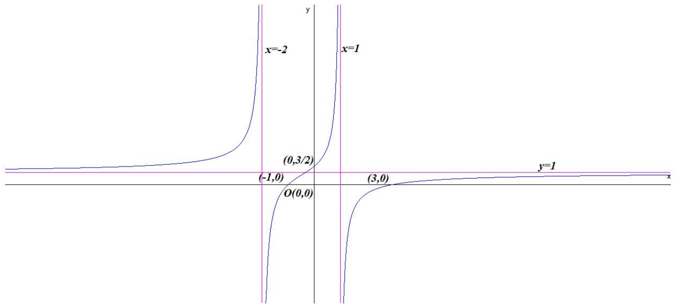
$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2} = 1$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

c) $f'(x) = \dfrac{3x^2+2x+7}{(x^2+x-2)^2} \neq 0 \Longrightarrow$ no hay extremos relativos y, como $f'(x) > 0$, la función es siempre creciente en el intervalo: $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$

d) No hay ni máximos ni mínimos.

e) Representación:



Problema 3.63 Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{ax^2}{x^2+1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de a para que la función $y = f(x)$ sea continua en todo su dominio.

b) Para el valor de a obtenido, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

c) Para el valor de a obtenido, calcula las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

d) Calcula $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)dx$.

Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (x^2 - 3x + 3) = 1 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{ax^2}{x^2+1} = \dfrac{a}{2} \end{array} \right. \Longrightarrow 1 = \frac{a}{2} \Longrightarrow a = 2$$

b)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

En la rama $x \le 1 \Longrightarrow f'(x) = 2x - 3$ es decreciente ya que $f'(x) < 0$ en $(-\infty, 1]$.
En la rama $x > 1 \Longrightarrow f'(x) = 4x(x^2 + 1)^2 > 0$ y es creciente en $(1, \infty)$

c) En la rama $x \le 1 \Longrightarrow f(x) = x^2 - 3x + 3$ se trata de un polinomio y, por tanto, no tiene asíntotas.
En la rama $x > 1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$. No tiene asíntotas verticales, porque el denominador no se anula nunca, tiene una horizontal en $y = 2$ ya que $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{2x^2}{x^2+1} = 2$. Oblicuas no tiene por tener horizontales.

d) $$\int_{-2}^{1} f(x)dx = \int_{-2}^{1} (x^2 - 3x + 3)\, dx = \left. \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 3x \right]_{-2}^{1} = \frac{33}{2}$$

3.13. La Rioja

3.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.64 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x^2 + a & \text{si } 1 \le x < 2 \\ b(-x+4) & \text{si } 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valores de a y b es continua la función?

b) Utilizando los valores $a = 0$ y $b = 2$, esboza una representación gráfica de la función $f(x)$.

c) Con los valores a y b del apartado anterior, calcula el área limitada por el eje OX y la gráfica de la función.

Solución:

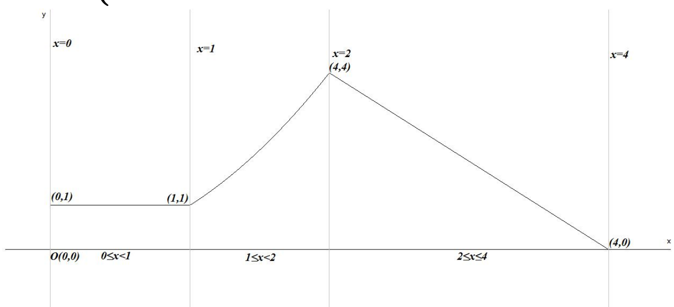
a) Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} (x^2 + a) = 1 + a \end{array} \right. \Longrightarrow 1 = 1 + a \Longrightarrow a = 0$$

Continuidad en $x = 2$:

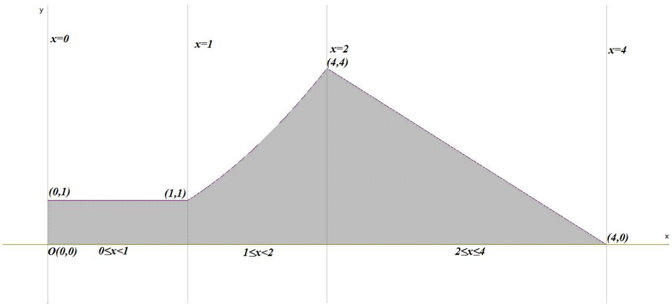
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} (x^2 + a) = 4 + a \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} (b(-x+4)) = 2b \end{array} \right. \Longrightarrow 4 + a = 2b \Longrightarrow 2b = 4 \Longrightarrow b = 2$$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ -2x + 8 & \text{si } 2 \le x \le 4 \end{cases}$



c) Hay que calcular tres áreas:
S_1 en el intervalo $[0, 1)$ es un cuadrado de lado 1, luego $S_1 = 1\ u^2$
S_2 en el intervalo $[1, 2) \Longrightarrow S_2 = \displaystyle\int_1^2 x^2\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{7}{3}\ u^2$
S_3 en el intervalo $[2, 4)$ es un triángulo de base 2 y altura 4, luego $S_3 = \frac{8}{2} = 4\ u^2$
Luego:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 1 + \frac{7}{3} + 4 = \frac{22}{3}\ u^2$$



Problema 3.65 El efecto (e) de un medicamento viene dado por la parte positiva de la función $e(t) = 100t(12 - t)$, en la que t es el tiempo, expresado en meses, transcurrido desde que se toma el medicamento.

a) ¿Cuándo es máximo el efecto que produce el medicamento?

b) ¿En qué periodos aumenta y disminuye el efecto?

Solución:

a) $e'(t) = 200(6 - t) = 0 \Longrightarrow t = 6$.

	$(0,6)$	$(6,\infty)$
$e'(t)$	$+$	$-$
$e(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función crece hasta el mes sexto donde hay un máximo con una efectividad de 3600.

b) La efectividad aumenta hasta el sexto mes y disminuye hasta el mes 12 donde la efectividad es cero.

Problema 3.66 Se considera la función

$$f(x) = \frac{a(x+1)}{(x-1)^2}$$

a) Determina el valor de a para que la tangente en $x = 0$ sea paralela a la recta $y = x + 3$.

b) Para $a = l$, determina las asíntotas de la función y esboza una representación gráfica para ella.

Solución:

a) $f'(x) = -\dfrac{a(x+3)}{(x-1)^3}$, $m = f'(0) = 1 \Longrightarrow 3a = 1 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{3}$ y $b = f(0) = \dfrac{1}{3}$. La ecuación de la tangente en $x = 0$:

$$y - \frac{1}{3} = x \Longrightarrow y = x + \frac{1}{3}$$

b) Si $a = 1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$

Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x+1}{(x-1)^2} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

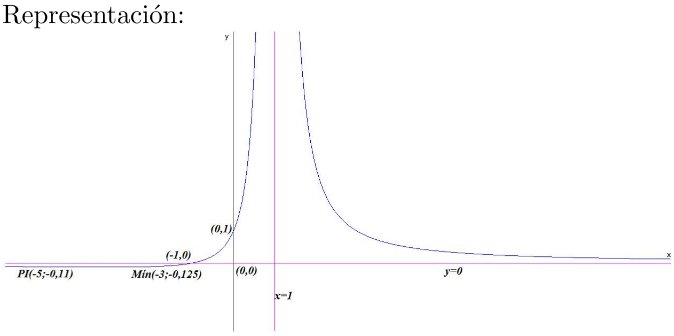
$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x+1}{(x-1)^2} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x+1}{(x-1)^2} = 0$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

Representación:



3.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.67 Sea la función

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

a) Determina la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Determina sus asíntotas.

c) Calcula el área que encierra el eje X, la tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 1$ (calculada en el primer apartado) y la recta $x = 2$.

Solución:

a) $b = f(1) = 0$, $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$, $m = f'(1) = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow y = \dfrac{1}{2}(x-1)$

b) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = -1$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{x-1}{x+1} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty$$

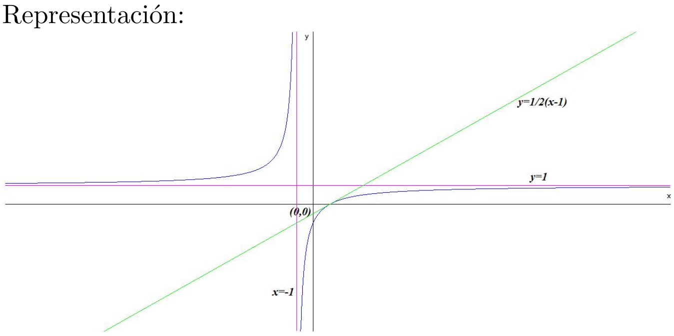
$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x-1}{x+1} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:** $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$$

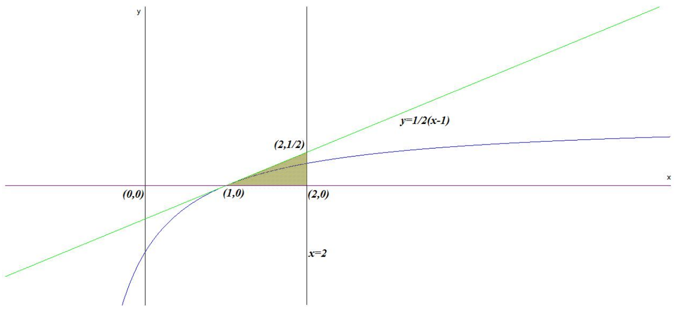
- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

Representación:



c)

$$S = \int_1^2 \frac{1}{2}(x-1)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg]_1^2 = \frac{1}{4}\ u^2$$



Se observa que el área pedida es de un triángulo de base 1 y altura 1/2: $S = \frac{1 \cdot 1/2}{2} = \frac{1}{4}\ u^2$

Problema 3.68 Sea la función

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - 3x^2$$

a) Estudia razonadamente sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcula sus extremos relativos y esboza una representación gráfica.

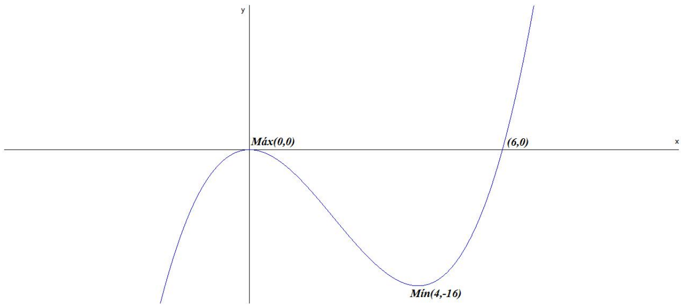
Solución:

a) $f(x) = \dfrac{3x^2}{2} - 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 4$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función crece en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ y decrece en el intervalo $(0, 4)$.

b) Hay un máximo en el punto $(0, 0)$ y un mínimo en $(4, -16)$.



Problema 3.69 Sea la función
$$f(x) = \frac{2x}{4-x^2}$$

a) Estudia razonadamente sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

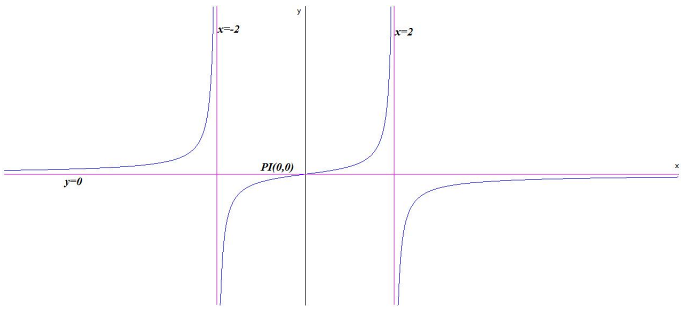
b) Calcula sus asíntotas si las tiene y esboza una representación gráfica.

Solución:

a) $f(x) = \dfrac{2(x^2+4)}{(x^2-4)^2} > 0 \Longrightarrow f$ es creciente en todo el dominio de la función, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, y no tiene extremos relativos.

b) Asíntotas:

- **Verticales:**
  $x = -2$
  $$\lim_{x\longrightarrow -2^-} \frac{2x}{4-x^2} = \left[\frac{-4}{0^-}\right] = +\infty$$
  $$\lim_{x\longrightarrow -2^+} \frac{2x}{4-x^2} = \left[\frac{-4}{0^+}\right] = -\infty$$
  $x = 2$
  $$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{2x}{4-x^2} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$
  $$\lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{2x}{4-x^2} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$
- **Horizontales:** $y = 0$
  $$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{2x}{4-x^2} = 0$$
- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.



3.14. Murcia

3.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

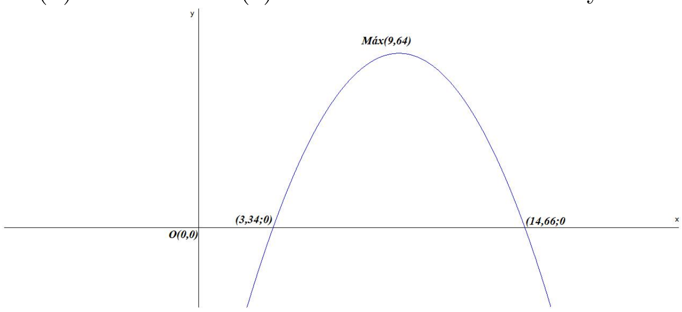
Problema 3.70 Una empresa, que vende un cierto artículo al precio unitario de 40 euros, tiene por función de coste, $C(x) = 2x^2 + 4x + 98$, donde x es el número de unidades producidas del artículo. Calcular el número de unidades que debe vender para que el beneficio de la empresa sea máximo. Obtener el beneficio (ingresos menos los costes) máximo obtenido.

Solución:

La función beneficio será: $B(x) = 40x - C(x) = -2x^2 + 36x - 98$

$B'(x) = -4x + 36 = 0 \Longrightarrow x = 9$ unidades

$B''(x) = -4 \Longrightarrow B''(9) = -4 < 0 \Longrightarrow$ en $x = 9$ hay un máximo local con un beneficio de 64 euros.



Problema 3.71 Dada la función $f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad 1 \le x \le 3 \\ x + b & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$

a) Determinar a y b para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Hallar $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$

Solución:

a) Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (x + a) = 1 + a \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} (x^2 - 2) = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow 1 + a = -1 \Longrightarrow a = -2$$

Continuidad en $x = 3$:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 3^-} (x^2 - 2) = 7 \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 3^+} (x + b) = 3 + b \end{array}\right. \Longrightarrow 7 = 3 + b \Longrightarrow b = 4$$

b) $$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 (x^2 - 2)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - 2x\right]_1^3 = \frac{14}{3}$$

Problema 3.72 Se pide:

a) Sea la función $f(x) = ax^3 + bx$, calcular los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1, 1)$ y que en este punto la pendiente de la recta tangente vale -3.

b) Si en la función anterior $a = 1$ y $b = -12$, determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus puntos extremos.

Solución:

a) $f(x) = ax^3 + bx \Longrightarrow f'(x) = 3ax^2 + b$

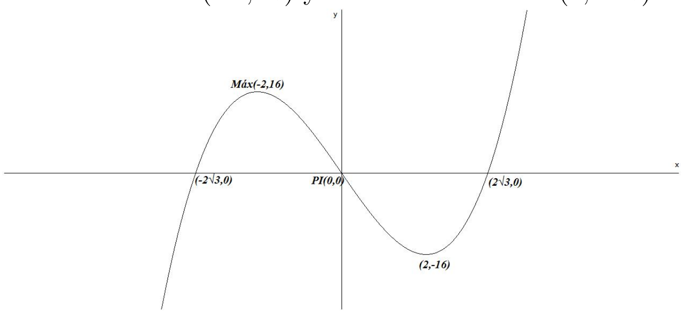
$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = 1 \Longrightarrow a + b = 1 \\ f'(1) = -3 \Longrightarrow 3a + b = -3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -2 \\ b = 3 \end{array} \right.$$

$$f(x) = -2x^3 + 3x$$

b) $f(x) = x^3 - 12x \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función crece en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ y decrece en el intervalo $(-2, 2)$. Tiene un máximo local en $(-2, 16)$ y un mínimo local en $(2, -16)$



Problema 3.73 Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las recta $y = 6 - 2x$ y la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$. Calcular su área.

Solución:

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow 6 - 2x = -x^2 + 2x + 3 \Longrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Longrightarrow x = 1 \text{ y } x = 3$$

$$S_1 = \int_1^3 (f(x) - g(x))\, dx = \int_1^3 (x^2 - 4x + 3)\, dx = \left. \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_1^3 = -\frac{4}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{4}{3}\ u^2$$

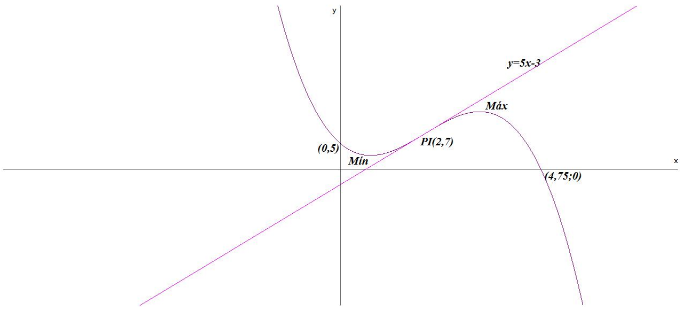
3.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.74 Determine el punto de la gráfica de la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 7x + 5$ en la que la pendiente de la recta tangente sea máxima. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en ese punto?

Solución:
LLamamos $m(x) = f'(x) = -3x^2 + 12x - 7 \Longrightarrow m'(x) = -6x + 12 = 0 \Longrightarrow x = 2$. Como

$m''(x) = -6 \Longrightarrow m''(2) = -6 < 0 \Longrightarrow x = 2$ es un máximo de la función pendiente $m(x)$ y $m(2) = 5$. El punto de tangencia es $(2, f(2)) = (2, 7)$:

$$y - 7 = 5(x - 2) \Longrightarrow y = 5x - 3$$



Problema 3.75 Representar gráficamente la región limitada por las funciones $f(x) = 9 - x^2$ y $g(x) = x^2 - 9$. Calcular su área.

Solución:
$f(x) = g(x) \Longrightarrow 9 - x^2 = x^2 - 9 \Longrightarrow 2x^2 - 18 = 0 \Longrightarrow x = -3$ y $x = 3$
$S_1 = \displaystyle\int_{-3}^{3} (f(x) - g(x))\, dx = \int_{-3}^{3} (2x^2 - 18)\, dx = \left.\frac{2x^3}{3} - 18x\right]_{-3}^{3} = -72$

$$S = |S_1| = 72 \ u^2$$

Problema 3.76 Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

b) $f(x) = xe^{2x}$

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$

b) $f(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = e^{2x}(1 + 2x)$

Problema 3.77 Dada la función $f(x) = 2e^{x+1}$

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $x = 1$.

b) Calcular el área de la región del plano limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

a) $f'(x) = 2e^{x+1} \Longrightarrow m = f'(1) = 2e^2$ y $f(1) = 2e^2$:

$$y - 2e^2 = 2e^2(x - 1)$$

b) $S = \displaystyle\int_0^1 2e^{x+1}\, dx = 2e^{x+1}\Big]_0^1 = 2e(e - 1) \ u^2 \simeq 9,34 \ u^2$

3.15. Navarra

3.15.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.78 El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función $f(x) = -3x^2 + 30x + 20$, con $0 \leq x \leq 8$, donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

a) ¿Cuál es el beneficio si la empresa no gasta en publicidad? ¿Cuál es el beneficio si la empresa gasta 1000 euros en publicidad?

b) Determine el gasto en publicidad que produce el máximo beneficio. ¿Cuál es el máximo beneficio?

c) Explique cómo aumenta o disminuye el beneficio en función del gasto en publicidad.

d) ¿Cuánto gasta la empresa en publicidad cuando el beneficio es mínimo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

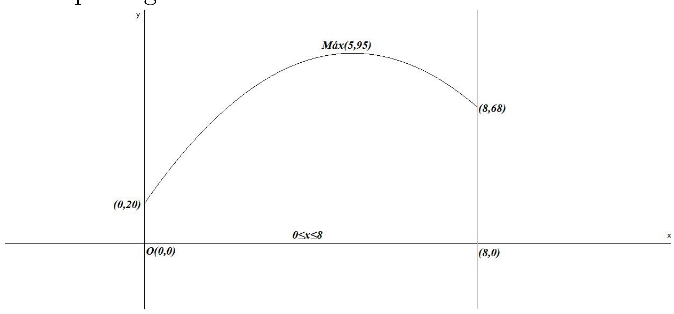
Solución:

a) Si no se gasta en publicidad: $f(0) = 20$ sería de 20000 euros.
Si se gasta 1000 euros en publicidad sería el beneficio será $f(1) = 47$, es decir, 47000 euros.

b) $f'(x) = 30 - 6x = 0 \Longrightarrow x = 5$, $f''(x) = -6 \Longrightarrow f''(5) = -6 < 0$ luego hay un máximo local en $x = 5$. Esto quiere decir que el benficio máximo se obtiene cuando se invierten 5000 euros en publicidad y este máximo será $f(5) = 95$, es decir, 95000 euros.

c) A medida que aumentamos la inversión en publicidad de 0 a 5000 euros los beneficios aumentan, si invertimos por encima de 5000 euros los beneficios empiezan a disminuir hasta los 68000 euros de beneficio que se obtendrían con una inversión de 8000 euros.

d) La empresa gastaría cero euros cuando obtiene el menor beneficio, que sería de 20000 euros.



Problema 3.79 Se pide:

a) Calcule la derivada de la función $f(x) = \cos^3(5x^2) + x\ln(1 - 2x)$

b) Calcule $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2 + 1}}$

c) Calcule $\displaystyle\int_0^1 2xe^{3x^2}dx$

Solución:

a) $f'(x) = 3\cos^2(5x^2)(-10x\sin(5x^2)) + \ln(1-2x) + x\frac{-2}{1-2x} = -15x\cos(5x^2)\sin(10x^2) + \frac{2x}{2x-1} + \ln(1-2x)$

b) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2+1}} \left[\begin{array}{c} t = 4x^2+1 \\ dt = 8xdx \\ dx = \frac{dt}{8x} \end{array}\right] = \int \frac{x}{\sqrt{t}}\frac{dt}{8x} = \frac{1}{8}\int t^{-1/2}dt = \frac{1}{8}\frac{t^{1/2}}{1/2} + C = \frac{\sqrt{t}}{4} + C = \frac{\sqrt{4x^2+1}}{4} + C$

c) $\displaystyle\int_0^1 2xe^{3x^2}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 6xe^{3x^2}dx = \left.\frac{e^{3x^2}}{3}\right]_0^1 = \frac{e^3-1}{3}$

3.15.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.80 Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 24$, calcule:

a) Intervalos de concavidad y convexidad. Punto de inflexión.

b) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = -2$.

Solución:

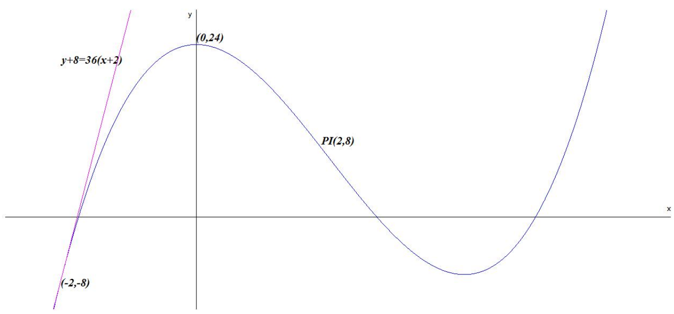
a) $f'(x) = 3x^2 - 12x \Longrightarrow f''(x) = 6x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 2$

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

La función es convexa en el intervalo $(-\infty, 2)$ y cóncava en el intervalo $(2, \infty)$. Tiene un punto de inflexión en $(2, 8)$.

b) LLamamos $b = f(-2) = -8$ y $m = f'(-2) = 36$ la recta tangente en su ecuación punto pendiente es:

$$y + 8 = 36(x + 2)$$



Problema 3.81 Se pide:

a) Dibuje el recinto comprendido entre las curvas $y = x^3 - 4x$, $y = -x$, $x = 1$ y $x = -1$.

b) Calcule el área de dicho recinto.

Solución:

a) Representamos $f(x) = x^3 - 4x$
$x^3 - 4x = 0 \Longrightarrow (0,0)$, $(2,0)$ y $(-2,0)$
$f'(x) = 3x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

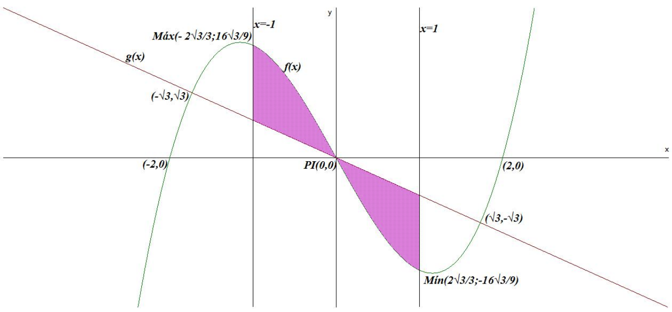
	$\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función tiene un máximo en $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{16\sqrt{3}}{9}\right)$ y un mínimo en $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{16\sqrt{3}}{9}\right)$
$f''(x) = 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

La función es convexa en el intervalo $(-\infty, 0)$ y cóncava en el intervalo $(0, \infty)$. Tiene un punto de inflexión en $(0,0)$.

Representamos $g(x) = -x$ que es una recta que pasa por el punto $(0,0)$ y por $(1,-1)$:



b) El recinto de integración será el intervalo $[-1,1]$, comprobamos que las curvas sólo tienen un punto de corte común dentro del intervalo: $f(x) = g(x) \Longrightarrow x = 0$, que está dentro del intervalo y $x = \pm\sqrt{3}$ que están fuera del intervalo. Tenemos dos recintos de integración uno en el intervalo $[-1,0]$ y $[0,1]$:

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))dx = \int (x^3 - 4x + x)\, dx = \int (x^3 - 3x)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}$$

$$S_1 = \int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))dx = F(0) - F(-1) = \frac{5}{4}$$

$$S_2 = \int_{0}^{1} (f(x) - g(x))dx = F(1) - F(0) = -\frac{5}{4}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{5}{2}\ u^2$$

3.16. Galicia

3.16.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.82 El número de espectadores de una serie (N), en millones, en función del tiempo (t), en años, sigue un modelo dado por la función: $N(t) = K + \dfrac{8t}{1+t^2}$

a) Calcula el valor de K si se sabe que al final del segundo año el número de espectadores era de 4,2 millones.

b) Estudia el crecimiento, el decrecimiento y el momento y valor máximo de la audiencia.

Solución:

a) $N(2) = K + \dfrac{16}{5} = 4,2 \Longrightarrow K = 1$ millón. Luego $N(t) = 1 + \dfrac{8t}{1+t^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{8(1-t^2)}{(t^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow t = \pm 1$ años, la solución negativa no tiene relevancia.

	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

La función tiene un máximo en $(1,5)$, al año se llega a los 5 millones de espectadores.

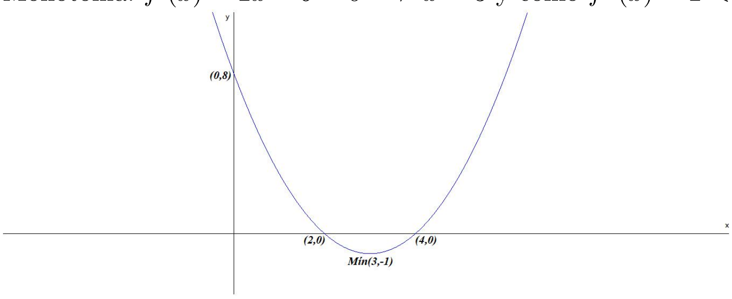
Problema 3.83 Dada la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$

a) Realiza su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremo relativo.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y los ejes de coordenadas.

Solución:

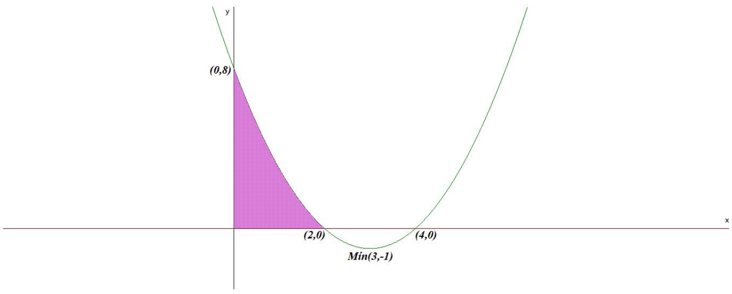
a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Los puntos de corte con el eje OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0,8)$, con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Longrightarrow (2,0)$ y $(4,0)$.
Monotonía: $f'(x) = 2x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 3$ y como $f''(x) = 2 < 0$ se trata de un mínimo.



b)

$$S_1 = \int_0^2 (x^2 - 6x + 8)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right]_2^4 = \frac{20}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{20}{3}\ u^2$$



3.16.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.84 El precio de venta de un electrodoméstico en un centro comercial (en cientos de euros) viene dado por la función:

$$P(t) = \frac{44}{t^2 - 4t + 16} + 2$$

siendo t el tiempo transcurrido en años desde el momento en que se puso a la venta.

a) Calcula el precio de lanzamiento del producto. ¿En qué momento el precio del electrodoméstico vuelve a ser el mismo que el precio del lanzamiento?

b) Determina los periodos en los que el precio del electrodoméstico ha aumentado y ha disminuido. ¿Cuál ha sido el precio de venta máximo? ¿En qué momento se ha producido?

c) Estudia la tendencia del precio de venta del electrodoméstico con el paso del tiempo.

Solución:

a) $P(0) = \frac{44}{16} + 2 = \frac{19}{4}$ y $P(t) = \frac{44}{t^2 - 4t + 16} + 2 = \frac{19}{4} \Longrightarrow \frac{11t(4-t)}{(4(t^2 - 4t + 16))} = 0 \Longrightarrow t = 0$ y $t = 4$. A los 4 años vuelve a tener el mismo precio de lancezamiento.

b) $P'(t) = \frac{88(2-t)}{(t^2 - 4t + 16)^2} = 0 \Longrightarrow t = 2$

	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$P'(t)$	$+$	$-$
$P(t)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

La función tiene un máximo en $(2, 17/3)$, a los dos años y se llega a los $1700/3 = 566,67$ euros.

c) $\lim\limits_{t\longrightarrow +\infty} P(t) = \lim\limits_{t\longrightarrow +\infty} \left(\frac{44}{t^2 - 4t + 16} + 2 \right) = 2$. El precio tiende a estabilizarse en 200 euros.

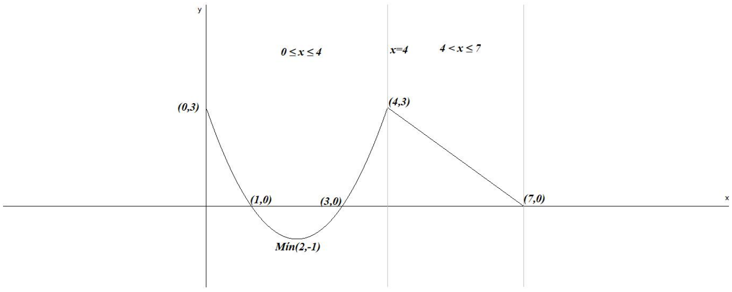
Problema 3.85 Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si} \quad 0 \le x \le 4 \\ 7 - x & \text{si} \quad 4 < x \le 7 \end{cases}$

a) Representa la función estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremos relativos. ¿Para qué valores de x es $f(x) \ge 0$?.

b) Calcula el área del recinto limitado por los ejes y la parte de la función tal que $f(x) \ge 0$.

Solución:

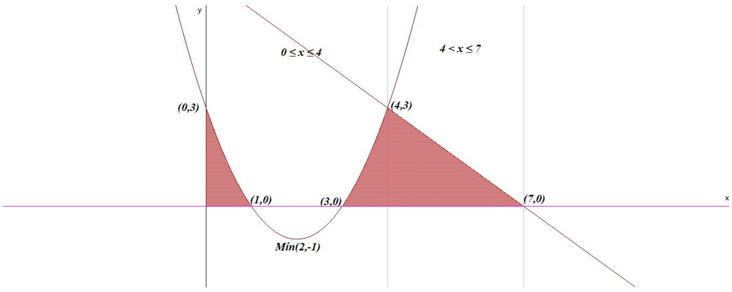
a) $f(0) = 3 \Longrightarrow (0,3)$, $f(4) = 3 \Longrightarrow (4,3)$ y $f(7) = 0 \Longrightarrow (7,0)$. Otros puntos de corte de $f(x) = x^2 - 4x + 3 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = 3 \Longrightarrow (1,0)$ y $(3,0)$.
En la rama $0 \le x \le 4 \Longrightarrow f'(x) = 2x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $f''(x) = 2$ por lo que el punto $(2,-1)$ es un mínimo. La rama $4 < x \le 7$ es una recta que une los puntos $(4,3)$ y $(7,0)$:



La función es decreciente en el intervalo $[0,2) \cup (4,7]$ y creciente en el intervalo $(2,4)$. Tiene un mínimo relativo en el punto $(2,-1)$ y un máximo relativo en el punto $(4,3)$ valor igual al inicial $(0,4)$.
La función $f(x) \ge 0$ el intervalo $[0,1] \cup [3,7]$

b) $S_1 = \displaystyle\int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 = \frac{4}{3}$
$S_2 = \displaystyle\int_3^4 (x^2 - 4x + 3)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_3^4 = \frac{4}{3}$
$S_3 = \displaystyle\int_4^7 (7 - x)\, dx = \left. 7x - \frac{x^2}{2}\right]_4^7 = \frac{9}{2}$

$$S = |S_1| + |S_2| + |S_3| = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{9}{2} = \frac{43}{6} \simeq 7,17\ u^2$$



3.17. Andalucía

3.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.86 Se considera Ia función $f(x) = x^3 - 9x + 2$

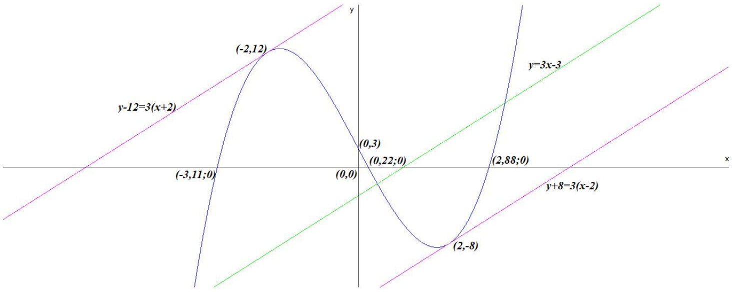
a) Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica que sean paralelas a la recta $y = 3x - 3$.

b) Estudie la monotonía y la curvatura de la función f.

c) Calcule $\int f(x)\,dx$.

Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 - 9 \Longrightarrow m = f'(a) = 3a^2 - 9 = 3 \Longrightarrow a = \pm 2 \Longrightarrow f(2) = -8 \Longrightarrow y + 8 = 3(x-2)$ y $f(-2) = 12 \Longrightarrow y - 12 = 3(x+2)$:



b) Monotonía: $f'(x) = 3x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

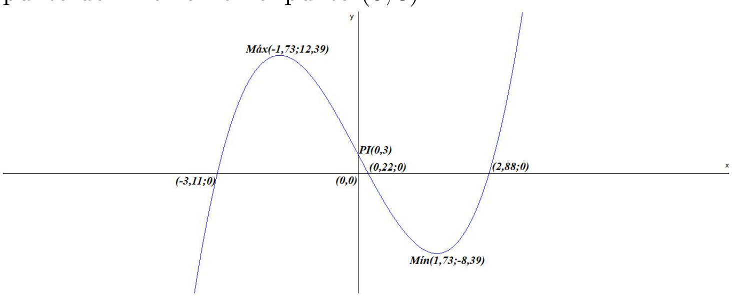
	$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$\left(\sqrt{3}, \infty\right)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función crece en el intervalo $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right)$ y deceece en el intervalo $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. La función tiene un máximo en el punto $(-\sqrt{3}, 2 + 6\sqrt{3}) = (-1,73; 12,39)$ y un mínimo en el punto $(\sqrt{3}, 2 - 6\sqrt{3}) = (1,73; -8,39)$

Curvatura: $f''(x) = 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

La función es convexa en el intervalo $(-\infty, 0)$ y cóncava en el intervalo $(0, \infty)$. Tiene un punto de inflexión en el punto $(0, 3)$.



c) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int (x^3 - 9x + 2)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} + 2x + C$

Problema 3.87 Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + a & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

a) Determine el valor del parámetro a para que f sea continua en todo su dominio. Para ese valor de a, estudie la derivabilidad de f.

b) Para $a = -2$, estudie la monotonía y curvatura de la función f. ¿Tiene algún punto de inflexión?

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:

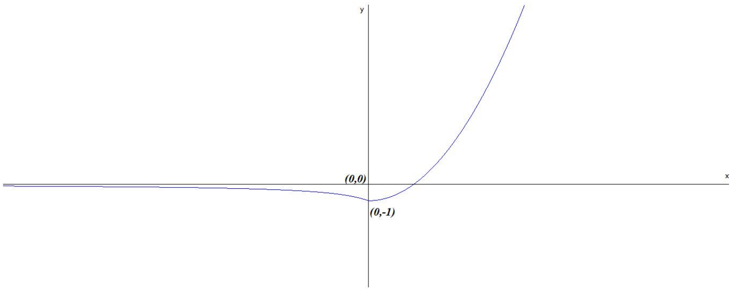
$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{1}{x-1} = -1$$

.

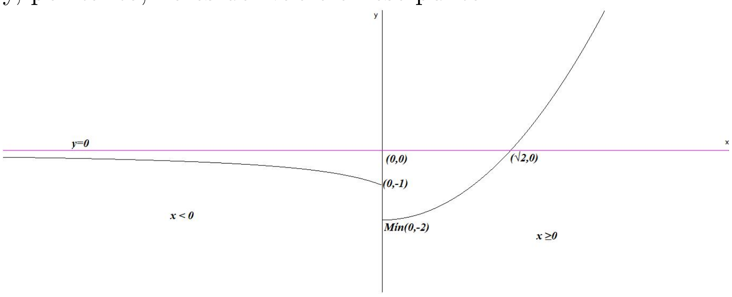
$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} (x^2 + a) = a$$

. Luego $a = -1$. $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(0^-) = -1 \\ f(0^+) = 0 \end{cases} \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.

Para $a = 0$ f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.



b) Para $a = -2$: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ La función no es continua en $x = 0$ hay un salto y, por tanto, no es derivable en ese punto.



En la rama $x < 0$:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0, \quad \forall x \in (-\infty, 0)$$

Luego f es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

La función es convexa en el intervalo $(-\infty, 0)$ y no tiene puntos de inflexión.
En esta rama habría una asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \longrightarrow -\infty$.

En la rama $x \geq 0$: Empezaría en el punto $(0, f(0)) = (0, -2)$ $f'(x) = 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $f'(x) > 0 \ \ \forall x \in [0, \infty) \Longrightarrow f$ es creciente en el intervalo $[0, \infty)$ con un mínimo relativo en $(0, -2)$

$$f''(x) = 2 > 0 \Longrightarrow f \text{ cóncava en } [0, \infty)$$

en esta rama tampoco habría puntos de inflexión.

3.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.88 El coste de producción de un bien en una fábrica viene dado por $C(x) = 2(2x - 1)^2 + 1$, con $0 \leq x \leq 2$, donde x es la cantidad producida en millones de kilogramos.

a) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función $C(x)$.

b) Determine la cantidad a producir para que el coste de producción sea mínimo. ¿Cuál es dicho coste?

c) Realice un esbozo de la gráfica de la función $C(x)$.

Solución:

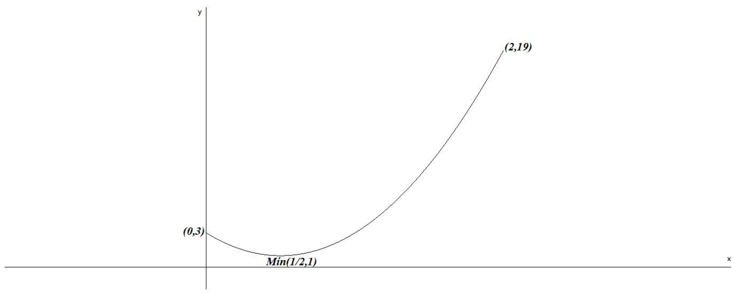
a) $C'(x) = 8(2x - 1) = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

	$\left[0, \dfrac{1}{2}\right)$	$\left(\dfrac{1}{2}, 2\right]$
$C'(x)$	$-$	$+$
$C(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función crece en el intervalo $\left(\dfrac{1}{2}, 2\right]$ y deceece en el intervalo $\left[0, \dfrac{1}{2}\right)$.

b) La función tiene un mínimo reltivo en el punto $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$. Tiene que producir medio millón de kg con un coste de 1 unidad que previamente sea establecida.

c) Esbozo:



Problema 3.89 El De una cierta función f, sabemos que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3$.

a) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, y calcule la abscisa de sus extremos relativos.

b) Determine la curvatura de f y halle la abscisa de su punto de inflexión.

c) Calcule la función f, sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(-1, 3)$.

Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función crece en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y deceece en el intervalo $(-1, 1)$. Tiene un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

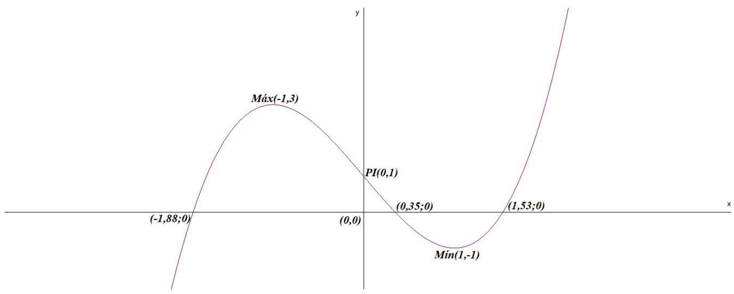
b) $f''(x) = 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

La función es convexa en el intervalo $(-\infty, 0)$, es cóncava en el intervalo $(0, \infty)$ y tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

c) $F(x) = \displaystyle\int (3x^2 - 3)\, dx = x^3 - 3x + C$

$F(-1) = 3 \Longrightarrow C + 2 = 3 \Longrightarrow C = 1 \Longrightarrow F(x) = F(x) = x^3 - 3x + 1$



4. Probabilidad

Teoría

Frecuencia absoluta de un suceso A es el número de veces que se repite dicho suceso $\Longrightarrow f(A)$

Frecuencia relativa de un suceso A es la proporción de veces que ha sucedido A de N experiencias $\Longrightarrow f_r(A) = \dfrac{f(A)}{N}$

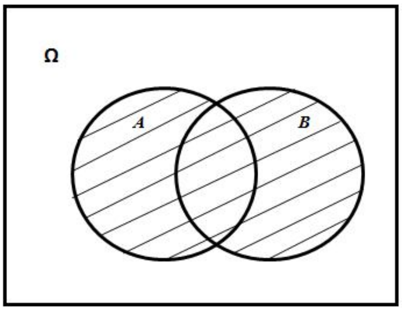
Ley de los grandes números: $\lim\limits_{N \longrightarrow \infty} f_r(A) = P(A)$

Ley de Laplace: $P(A) = \dfrac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$

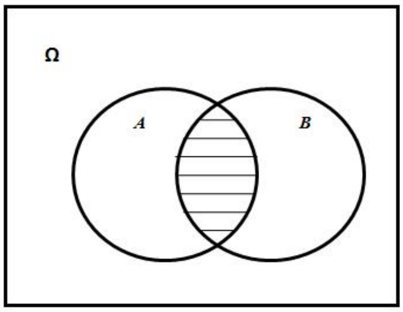
$\Omega \equiv$ **Espacio muestral** es el de todos los sucesos, sería el suceso seguro: $P(\Omega) = 1$.

$\emptyset \equiv$ **Espacio vacio** es el de ningún suceso, sería el suceso imposible: $P(\emptyset) = 0$.

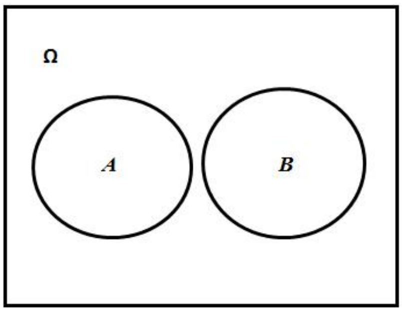
Diagramas de Venn: (esquemas usados en la teoría de conjuntos)



Unión de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos del conjunto A con todos los de B: $A \cup B$



Intersección de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos comunes entre los conjuntos A y B: $A \cap B$



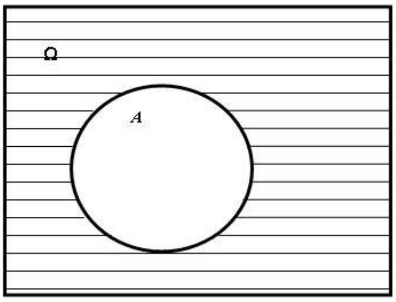
Sucesos Incompatibles: Dos sucesos son incompatibles si su intersección es vacía. $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cap B) = 0$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

En el caso de que los dos sucesos sean incompatibles la fórmula quedaría:

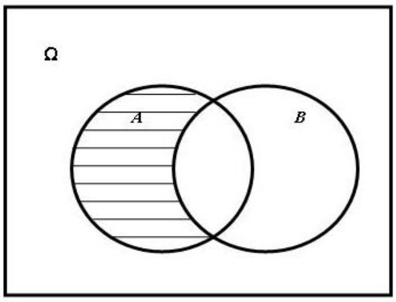
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Sucesos independientes: Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.



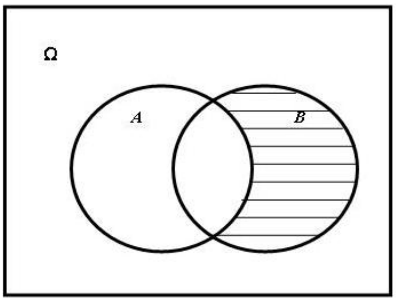
$\overline{A}$ es el suceso contrario o complementario de A:

$$\overline{A} = \Omega - A \Longrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$



$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$



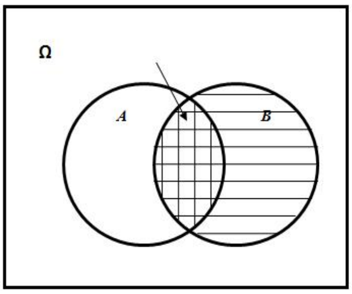
Leyes de Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Probabilidad condicionada: es la probabilidad de que ocurra un suceso A sabiendo que ha ocurrido el suceso B: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Teorema de Bayes: $P(A|B) = \dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

Teorema de la probabilidad total: Si $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \Omega$ y los sucesos A_i con $i = 1, ..., 5$ son incompatibles dos a dos (intersección vacía), entonces:

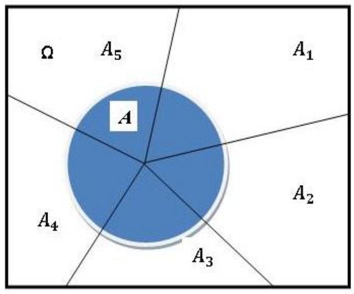
$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) + P(A_4)P(A|A_4) + P(A_5)P(A|A_5)$$



Probabilidad condicionada:

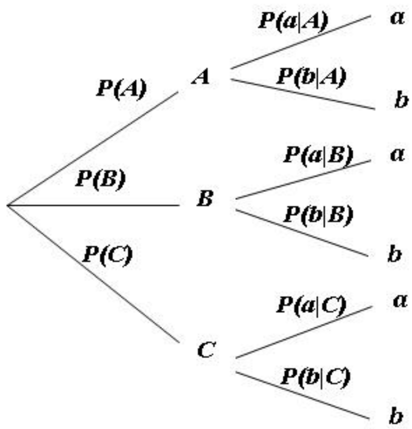
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

probabilidad total



$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1)+P(A_2)P(A|A_2)+P(A_3)P(A|A_3)+P(A_4)P(A|A_4)+P(A_5)P(A|A_5)$$

Organización por árboles:



Organización por tablas de contingencia:

	Renault	Seat	Mercedes	Totales
Blanco	15	20	10	45
Negro	300	455	200	955
	315	475	210	1000

$$P(B|S) = \frac{20}{475}, \;\; P(N|M) = \frac{200}{210}, \;\; P(B) = \frac{45}{1000}, \;\; P(M) = \frac{210}{1000}$$

Problemas

4.1. Aragón

4.1.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.1 Según los datos del Instituto Nacional de Estadística, el 49,3 % de la población aragonesa son hombres y el 50,7 % son mujeres. Del total de hombres, un 80,9 % tienen menos de 65 años; del total de mujeres, un 75,9 % tienen menos de 65 años.

a) Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer de menos de 65 años?

b) Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 65 años?

c) Elegimos una persona de Aragón de entre las que tienen menos de 65 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

d) Si se eligen al azar (con reemplazamiento) tres personas de Aragón, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de las tres sea mujer?

Solución:

LLamamos V : al suceso hombre, M al suceso mujer y $M65$ al suceso "menos de 65 años":

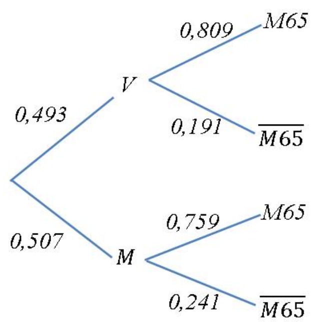
a)

$$P(M \cap M65) = P(M65|M)P(M) = 0,759 \cdot 0,507 = 0,385$$

b)

$$P(M65) = P(M65|V)P(V) + P(M65|M)P(M) =$$

$$0,809 \cdot 0,493 + 0,759 \cdot 0,507 = 0,784$$



c)

$$P(M|M65) = \frac{P(M65|M)P(M)}{P(M65)} = \frac{0,759 \cdot 0,507}{0,784} = 0,49$$

d)

$$P(\text{al menos una es mujer}) = 1 - P(VVV) = 1 - 0,493^3 = 0,88$$

4.1.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.2 Una empresa tiene 64 trabajadores repartidos en tres departamentos: Administración, Producción y Ventas. Se ha hecho un estudio sobre si los trabajadores saben inglés o no, con los siguientes resultados:

	Administración	Producción	Ventas
Sabe Inglés	12	30	6
No sabe Inglés	4	11	1

a) Elegimos al azar un trabajador de la empresa, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés?

b) Elegimos al azar un trabajador de entre los que saben inglés, ¿cuál es la probabilidad de que sea del departamento de Ventas?

c) Elegimos al azar un trabajador de la empresa. Sea A el suceso "el trabajador es del departamento de Administración" y B el suceso "el trabajador sabe inglés". ¿Son los sucesos A y B independientes?

d) Elegimos al azar (sin reemplazamiento) tres trabajadores de la empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo departamento?

Solución:

LLamamos A : al suceso "el trabajador es del departamento de Administración", B al suceso "el trabajador sabe inglés", P al suceso "el trabajador es de producción" y V al suceso "el trabajador es de ventas".

	A	P	V	Total
B	$0,188$	$0,469$	$0,094$	$0,75$
$\overline{B}$	$0,062$	$0,171$	$0,016$	$0,25$
Total	$0,250$	$0,640$	$0,110$	1

a) $P(B) = 0,75$

b) $P(V|B) = \dfrac{P(V \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,094}{0,75} = 0,1253$

c) $\left\{\begin{array}{l} P(A \cap B) = 0,1875 \\ P(A) = 0,250 \\ P(B) = 0,75 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} P(A \cap B) = 0,1875 \\ P(A) \cdot P(B) = 0,250 \cdot 0,75 = 0,1875 \end{array}\right. \Longrightarrow$
$P(A \cap B) = P(S) \cdot P(B) \Longrightarrow$ A y B son independientes.

d) $P(\text{mismo departamnto}) = P(AAA) + P(PPP) + P(VVV) = \dfrac{16}{64} \cdot \dfrac{15}{63} \cdot \dfrac{14}{62} + \dfrac{41}{64} \cdot \dfrac{40}{63} \cdot \dfrac{39}{62} + \dfrac{7}{64} \cdot \dfrac{6}{63} \cdot \dfrac{5}{62} = 0,27$

4.2. Asturias

4.2.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.3 El abogado A se encargó del 30 % de los casos que llegaron a un bufete el año pasado, de los cuales ganó el 70 % en los tribunales. El abogado B se encargó del 60 % de los casos que llegaron, de los que ganó en los tribunales el 90 %. Por último, el abogado C se encargó del 10 % restante de casos, ganando en los tribunales el 50 % de ellos. Si se elige al azar un caso de los que llegó el año pasado al bufete:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya ganado en los tribunales?

b) Si el caso elegido se ganó, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya llevado el abogado B?

Solución:

LLamamos G al suceso gana.

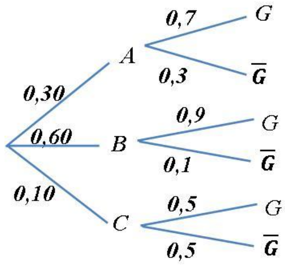
a)

$$P(G) = P(G|A)P(A)+P(G|B)P(B)+P(G|C)P(C) =$$

$$0,7 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,1 = 0,8$$

b)

$$P(B|G) = \frac{P(G|B)P(B)}{P(G)} = \frac{0,9 \cdot 0,6}{0,8} = 0,67$$



Problema 4.4 En el almacén de un supermercado hay 400 tetrabriks de leche de la marca A y 100 de la marca B. Además se sabe que el 5 % de los tetrabriks de la marca A están caducados, así como el 10 % de los tetrabriks de la marca B. Si se elige un tetrabrik de leche al azar de esos 500 tetrabriks que hay en el almacén, se pide:

a) Determinar la probabilidad de que sea de la marca B y no esté caducado.

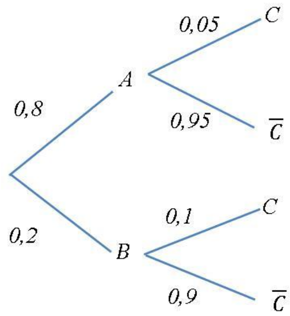
b) Determinar la probabilidad de que sea de la marca B o esté caducado.

Solución:
LLamamos C al suceso caducado.

a) $P(B\cap\overline{C}) = P(\overline{C}|B)P(B) = 0,9{\cdot}0,2 = 0,18$

b) $P(B\cap C) = P(C|B)P(B) = 0,1{\cdot}0,2 = 0,02$

$P(B\cup C) = P(B)+P(C)-P(B\cap C) = 0,2+0,06-0,02 = 0,24$



4.2.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.5 De los estudiantes de secundaria que fueron al viaje de estudios, se determina que tres quintas partes de ellos han consumido alcohol y que un cuarto de ellos han fumado. Además se sabe que el veinte por ciento de ellos han consumido alcohol y fumado.

a) Si un estudiante elegido al azar ha fumado, ¿cuál es la probabilidad de que haya consumido alcohol?

b) Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya fumado y no haya bebido alcohol?

Solución:
LLamamos A al suceso ”han consumido alcohol” y F al suceso ”han fumado”.

$$P(A) = \frac{3}{5}, \quad P(F) = \frac{1}{4}, \quad P(A\cap F) = 0,2$$

a) $P(A|F) = \dfrac{P(A\cap F)}{P(F)} = \dfrac{0,2}{1/4} = 0,8$

b) $P(\overline{A}\cap\overline{F}) = P(\overline{A\cup F}) = 1-P(A\cup F) = 1-(P(A)+P(F)-P(A\cap F)) = 1-\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{4}-0,2\right) = 0,35$

Problema 4.6 En una agencia de viajes online se ha observado que el 80 % de los clientes compra un billete de avión, el 60 % compra un bono de hotel y el 50 % compra las dos cosas. Elegido un cliente al azar de esa agencia, se pide:

a) Calcular la probabilidad de que compre un billete de avión o un bono de hotel.

b) Calcular la probabilidad de que compre un bono de hotel si se sabe que compró un billete de avión.

Solución:
LLamamos A al suceso "compra billete de avión" y H al suceso "compra bono de hotel".

$$P(A) = 0,8, \quad P(H) = 0,6, \quad P(A\cap H) = 0,5$$

a) $P(A\cup H) = P(A) + P(H) - P(A\cap H) = 0,8 + 0,6 - 0,5 = 0,9$

b) $P(H|A) = \dfrac{P(H\cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,5}{0,8} = 0,625$

4.3. Islas Baleares

4.3.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.7 Tenemos un dado equilibrado y dos urnas, ambas con las bolas que describimos a continuación:

- Urna I: 1 bola negra, 3 bolas rojas y 6 bolas verdes.
- Urna II: 2 bolas negras, 6 bolas rojas y 2 bolas verdes.

Lanzamos el dado. Si sale 1 o 2, vamos a la urna I. Si sale 3, 4, 5 o 6, acudimos a la urna II. Extraemos al azar una bola de la urna correspondiente.

a) Hacer un diagrama de árbol que represente el experimento con todas las probabilidades.

b) Calcular las probabilidades siguientes:

   a) $p(\{3,4,5,6\}$ y $\{\text{bola roja}\})$.
   b) $p(\{\text{bola verde}\}|\{1\})$.
   c) $p(\{\text{bola roja}\}|\{5\})$.
   d) $p(\{2\}$ y $\{\text{bola verde}\})$.

c) Calcular la probabilidad de que la bola extraída haya sido roja y que haya sido negra. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída haya sido verde? ¿Cuánto vale la suma de las tres probabilidades? Justifica la respuesta.

Solución:
LLamamos C al suceso caducado.

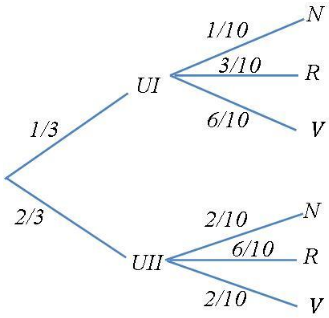
a) Calculamos:

$p(\{3,4,5,6\}$ y $\{\text{bola roja}\}) = \mathrm{P}(\mathrm{UII} \cap \mathrm{R}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$.

$p(\{\text{bola verde}\}|\{1\}) = \mathrm{P}(\mathrm{V}|\mathrm{UI}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

$p(\{\text{bola roja}\}|\{5\}) = \mathrm{P}(\mathrm{R}|\mathrm{UII}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

$p(\{2\}$ y $\{\text{bola verde}\}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{10} = \frac{1}{10}$.



b) $P(R) = P(R|UI)P(UI) + P(R|UII)P(UII) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

$P(N) = P(N|UI)P(UI) + P(N|UII)P(UII) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

$P(V) = P(V|UI)P(UI) + P(V|UII)P(UII) = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$$P(R) + P(N) + P(V) = 1$$

Problema 4.8 Tenemos dos urnas descritas a continuación:

- Urna I: 2 bolas negras, 1 bola roja y 3 bolas verdes.
- Urna II: 1 bola negra, 2 bolas rojas y 1 bola verde.

El experimento consiste en extraer una bola al azar de la urna I, introducirla en la urna II, remover y extraer, finalmente, una bola al azar de la urna II.

a) Hacer un diagrama en árbol que represente el experimento con las probabilidades asociadas.

b) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea

  a) $p(\{\text{bola roja}\})$.
  b) $p(\{\text{bola negra}\})$.
  c) $p(\{\text{bola verde}\})$.

c) Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo fuera?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera fuera roja siendo roja la segunda?

Solución:

a) Calculamos:

$P(R2) = P(R2|N1)P(N1) + P(R2|R1)P(R1) +$

$P(R2|V1)P(V1) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{6} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6} = \frac{13}{30} = 0,433$

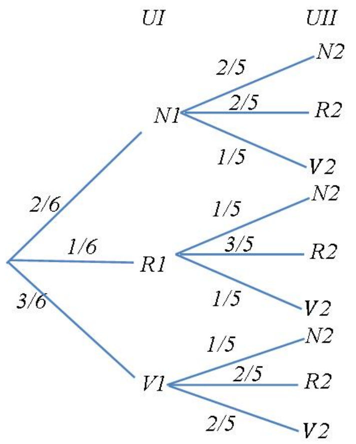
$P(N2) = P(N2|N1)P(N1) + P(N2|R1)P(R1) +$

$P(N2|V1)P(V1) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{6} = \frac{4}{15} = 0,267$

$P(V2) = P(V2|N1)P(N1) + P(V2|R1)P(R1) +$

$P(V2|V1)P(V1) = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6} = \frac{3}{10} = 0,3$

$$P(R) + P(N) + P(V) = 1$$



b) $P(N1|N2) = \dfrac{P(N2|N1)P(N1)}{P(N2)} = \dfrac{\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{4}{15}} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

c) $P(R1|R2) = \dfrac{P(R2|R1)P(R1)}{P(R2)} = \dfrac{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{13}{30}} = \dfrac{3}{13} = 0,231$

4.3.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.9 En una máquina se han fabricado 100 piezas, de las cuales 15 han presentado algún defecto.

a) Calcular la proporción de piezas que no son defectuosas.

b) Calcular la probabilidad de que, si examinamos dos piezas al azar, ambas resulten defectuosas.

c) Si cogemos dos piezas al azar y la primera es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda no lo sea?

Solución:

LLamamos D al suceso defectuosas.

a) $P(D) = \frac{15}{100} = 0,15$ y $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,15 = 0,85$

b) $P(DD) = \frac{15}{100}\cdot\frac{14}{99} = \frac{7}{330} = 0,021$

c) $P(\overline{D2}|D1) = \frac{85}{99} = 0,86$

Problema 4.10 El Una empresa tiene dos fábricas, en la primera son donde mujeres el 60 % de los trabajadores y en la segunda son hombres el 55 % de los trabajadores. Se elige al azar un trabajador de cada fábrica para pertenecer al comité de empresa. Supongamos que el hecho de pertenecer a una fábrica es independiente de pertenecer a la otra.

a) Calcular la probabilidad de los sucesos siguientes:

1) *a*) $A =$ "Ambos son hombres".
   b) $B =$ "Sólo uno es mujer".
   c) $C =$ "Ambos son mujeres".

b) Razona si el suceso contrario del evento C es el A, el B, el $A \cap B$, el $A \cup B$ o algún otro suceso, y Calcular su probabilidad.

Solución:
LLamamos $F1$: a la primera fábrica, $F2$ a la segunda, H a hombre y M a mujer.

	Hombre	Mujer
$F1$	$0,4$	$0,6$
$F2$	$0,55$	$0,45$

a) $P(A) = P(H1 \cap H2) = 0,4 \cdot 0,55 = 0,22$

$$P(B) = P(M1 \cap H2) + P(H1 \cap M2) = 0,6 \cdot 0,55 + 0,4 \cdot 0,45 = 0,51$$

$$P(C) = P(M1 \cap M2) = 0,6 \cdot 0,45 = 0,27$$

b) $\overline{C} = A \cup B \Longrightarrow P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,22 + 0,51 = 0,73$

4.4. Islas Canarias

4.4.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.11 Una empresa fabrica altavoces para equipos de cine en casa en tres factorías situadas en Japón, Alemania y España. Estos altavoces son de 4 tipos: central, delanteros, efectos y "subwoofer". En Japón se fabrican altavoces de los 4 tipos siendo idéntica la cantidad de cada uno. En Alemania sólo se fabrican los "subwoofer" y de efectos, siendo la producción de los de efectos doble que los otros. En España se fabrican todos menos el "subwoofer", con idéntica producción de cada tipo. Finalmente, también sabemos que la producción de la fábrica de Japón es doble que la de Alemania, y ésta coincide con la española.

a) Construir el árbol de probabilidades.

b) Elegido, al azar un altavoz fabricado por esta empresa, ¿cuál es la probabilidad de que sea un altavoz central?

c) Si compramos un altavoz central de esta empresa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en España?

Solución: LLamamos J : a Japón, A : a Alemania, E : a España, C : a central, D a delanteros, EF : a efectos y S : a "subwoofer".

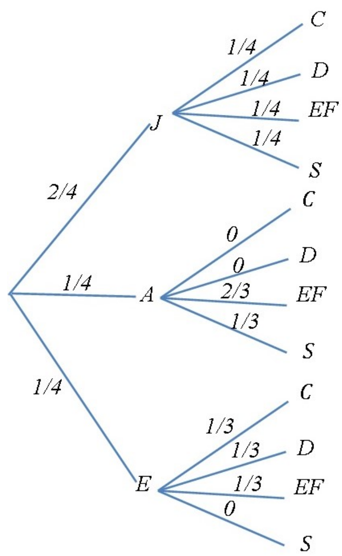
a)

$$P(C) = P(C|J)P(J)+P(C|A)P(A)+P(C|E)P(E) =$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}+0\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{24}=0,208$$

b)

$$P(E|C) = \frac{P(C|E)P(E)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{5}{24}} = \frac{2}{5} = 0,4$$



4.4.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.12 Una empresa informática comercializa un programa de retoque fotográfico. Un 50 % de las licencias de este programa se han vendido para sistemas Windows, un 40 % para MacOS y un 10 % para Linux. Transcurrido un año de la compra, renuevan la licencia un 90 % de los usuarios de Windows, un 60 % de los de Linux y un 75 % de los de MacOS.

a) Construir el árbol de probabilidades.

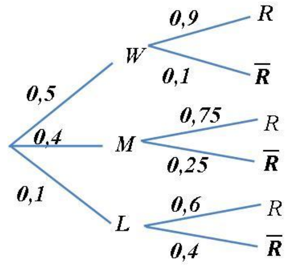
b) Se recibe una llamada de un usuario que ha renovado la licencia. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un usuario Linux?

c) Se eligen al azar 10 propietarios de licencias de este programa para una encuesta de opinion. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos sea usuario Linux?

Solución: LLamamos W : a Windows, M : a MacOS, L : a Linux y R : a renueva.

a) $P(R) = P(R|W)P(W) + P(R|M)P(M) + P(R|L)P(L) = 0,9\cdot 0,5 + 0,75\cdot 0,4 + 0,6\cdot 0,1 = 0,81$

$$P(L|R) = \frac{P(R|L)P(L)}{P(R)} = \frac{0,6\cdot 0,1}{0,81} = 0,074$$



b) $p = P(L) = 0,1 \Longrightarrow B(10;0,1)$

$$P(X\geq 1) = 1-P(X=0) = 1-\binom{10}{0}0,1^0\cdot 0,9^{10} = 0,65$$

4.5. Cantabria

4.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.13 De los 360 alumnos de nuevo ingreso de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, conocemos el número de matriculados en el Centro de Idiomas de la Universidad.

Los datos completos aparecen en la siguiente tabla:

	Matriculados Idiomas	No Matriculados Idiomas	Total
Económicas	57	63	120
Adminis. y D.Empre	106	134	240
Total	163	197	360

Elegido un alumno al azar,

a) ¿Calcular la probabilidad de que no esté matriculado en el Centro de Idiomas?

b) Si sabemos que el alumno pertenece al Grado en Económicas, ¿cuál es la probabilidad de que esté inscrito en el Centro de Idiomas?

c) Calcular la probabilidad de que sea del Grado en Administración y D. de Empresas y no esté inscrito en el Centro de Idiomas.

Solución: LLamamos I : a Inglés, E : a Económicas y A : a Administración y dirección de Empresa.

a) $P(\overline{I}) = \dfrac{197}{360} = 0,547$

b) $P(I|E) = \dfrac{P(I \cap E)}{P(E)} = \dfrac{57/360}{120/360} = \dfrac{19}{40} = 0,475$

c) $P(A \cap \overline{I}) = \dfrac{134}{360} = 0,37$

4.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.14 Se tienen dos urnas. La urna I tiene 2 bolas negras, 3 rojas y 5 amarillas. La urna II contiene 3 bolas negras, 4 rojas y 3 amarillas. Se lanza un dado. Si sale 1, 3 o 5, se extrae una bola de la urna I. Si sale 2, 4 o 6, se extrae una bola de la urna II.

a) Calcular la probabilidad que tenemos de extraer una bola amarilla.

b) Si hemos extraído una bola roja, ¿cuál es la probabilidad de que se haya extraído de la urna I?

c) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola amarilla de la urna II?

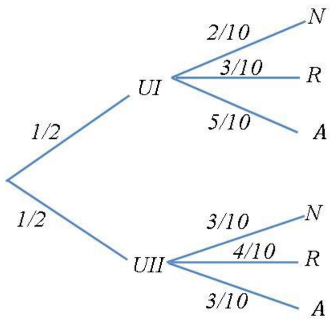
Solución:

LLamamos UI : a la urna I, UII a la urna II, N bola negra, R bola roja y A bola amarilla.

a)

$$P(A) = P(A|UI)P(UI)+P(A|UII)P(UII) =$$

$$\frac{5}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5} = 0,4$$



b)

$$P(R) = P(R|UI)P(UI)+P(R|UII)P(UII) =$$

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{20} = 0,35$$

$$P(UI|R) = \frac{P(R|UI)P(UI)}{P(R)} = \frac{\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{20}} = \frac{3}{7} = 0,429$$

c)

$$P(A \cap UII) = P(A|UII)P(UII) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{20} = 0,15$$

4.6. Castilla León

4.6.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.15 El 15 % de los paquetes repartidos por una empresa de transporte llegan defectuosos. Entre los paquetes que llegan defectuosos un 9 % llega fuera de plazo, mientras que entre los no defectuosos sólo un 2 % llega fuera de plazo. Se elige un paquete al azar repartido por esta empresa:

a) Calcula la probabilidad de que el paquete elegido llegue fuera de plazo.

b) Sabiendo que el paquete elegido llega fuera de plazo, ¿qué probabilidad hay de que llegue defectuoso?

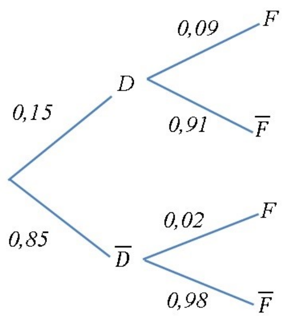
Solución:

LLamamos D : a defectuoso y F fuera de plazo.

a)

$$P(F) = P(F|D)P(D) + P(F|\overline{D})P(\overline{D}) =$$

$$0,09 \cdot 0,15 + 0,02 \cdot 0,85 = 0,0305$$



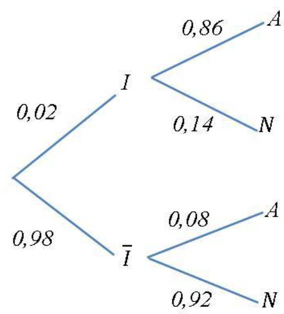
b)

$$P(D|F) = \frac{P(F|D)P(D)}{P(F)} = \frac{0,09 \cdot 0,15}{0,0305} = 0,443$$

4.6.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.16 Una multinacional farmacéutica elabora un test para la detección precoz de la enfermedad producida por el virus del Ébola. El test da positivo en el 86 % de las personas que son portadoras del virus y da negativo en el 92 % de las personas que no son portadoras del virus.

Además, en una cierta zona geográfica el 2 % de la población es portadora del virus. Se elige al azar una persona de esa zona geográfica y se la somete al test. Calcula razonadamente la probabilidad de que sea portadora del virus sabiendo que el test ha dado positivo.
Solución:
LLamamos I : a infectado, A da positivo y N da negativo.



- $$P(A) = P(A|I)P(I) + P(A|\overline{I})P(\overline{I}) =$$
  $$0,86 \cdot 0,02 + 0,08 \cdot 0,98 = 0,0956$$

- $$P(I|A) = \frac{P(A|I)P(I)}{P(A)} = \frac{0,86 \cdot 0,02}{0,0956} = 0,18$$

Problema 4.17 Supongamos que tenemos una moneda de 2 euros trucada de manera que la probabilidad de que al lanzarla al aire salga cara es el triple de que salga cruz. Calcula razonadamente la probabilidad de que al lanzarla una vez al aire salga cruz.
Solución:
LLamamos C : cara y X cruz.
Cada cuatro veces se lance la moneda tres veces debería salir cruz: $P(X) = \dfrac{1}{4}$

Problema 4.18 Se consideran dos sucesos independientes A y B. Si la probabilidad de que ocurra A es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de que ocurran ambos a la vez es $\frac{1}{3}$, calcula la probabilidad de que no ocurra A y no ocurra B .
Solución:
Como A y B son dos sucesos independientes: $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot P(B) = \frac{1}{3} \Longrightarrow P(B) = \frac{2}{3}$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

4.7. Castilla La Mancha

4.7.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2018

Problema 4.19 En un cierto banco el 5 % de los créditos concedidos son para la compra de una casa. De los créditos concedidos para la compra de una casa, el 40 % resultan impagados. Del resto de créditos concedidos que no son para la compra de una casa, se sabe que el 10 % de ellos resultan impagados.

a) Calcula la probabilidad de que elegido un crédito al azar sea de los impagados.

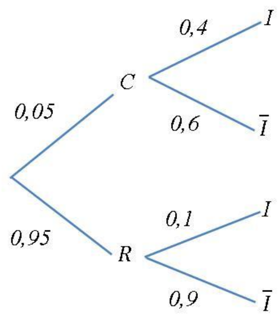
b) Sabiendo que un crédito se ha pagado, ¿cuál es la probabilidad de que el crédito fuera para una casa?

Solución:
LLamamos I : a impago, C a casa y R al resto.

a)

$$P(I) = P(I|C)P(C) + P(I|R)P(R) =$$

$$0,4 \cdot 0,05 + 0,1 \cdot 0,95 = 0,115$$



b)

$$P(C|\bar{I}) = \frac{P(\bar{I}|C)P(C)}{P(\bar{I})} = \frac{0,6 \cdot 0,05}{1 - 0,115} = 0,0339$$

Problema 4.20 En una clase de pintura hay 27 alumnos, 14 son de Albacete, 5 son de Cuenca y 8 de Toledo.

a) Se sortean dos entradas entre todos los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas entradas le toquen a alumnos que no son de Albacete? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas).

b) Si sorteamos 5 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que las 5 sean para alumnos de Cuenca?

Solución:
LLamamos A : de Albacete, C de Cuenca y T de Toledo.

$$P(A) = \frac{14}{27} = 0,519, \quad P(C) = \frac{5}{27} = 0,185, \quad P(T) = \frac{8}{27} = 0,296$$

a) $P(\overline{A}) = \dfrac{13}{27} \Longrightarrow P(\overline{AA}) = \left(\dfrac{13}{27}\right)^2 = 0,232$

b) $P(CCCCC) = \dfrac{5}{27} \cdot \dfrac{4}{26} \cdot \dfrac{3}{25} \cdot \dfrac{2}{24} \cdot \dfrac{1}{23} = 1,238696890 \cdot 10^{-5}$

4.7.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.21 En una universidad el 40 % de los estudiantes son aficionados a la lectura, el 50 % al cine, y al 70 % les gusta el cine o la lectura o ambas cosas.

a) Se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la lectura y el cine?

b) Si elegimos un estudiante al azar y le gusta la lectura, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el cine?

Solución:
LLamamos L : le gusta la lectura y C le gusta el cine.

$$P(L) = 0,4, \quad P(C) = 0,5, \quad P(L \cup C) = 0,7$$

a) $P(L \cap C) = P(L) + P(C) - P(L \cup C) = 0,4 + 0,5 - 0,7 = 0,2$

b) $P(C|L) = \dfrac{P(L \cap C)}{P(L)} = \dfrac{0,2}{0,4} = 0,5$

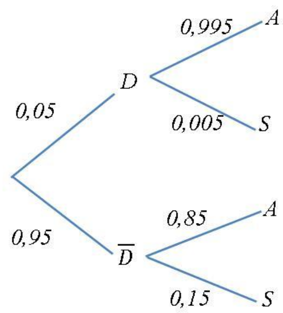
Problema 4.22 El 5 % de los estudiantes matriculados en una determinada asignatura de bachillerato son deportistas aficionados. El 0,5 % de estos alumnos deportistas aficionados obtienen una calificación de suspenso en dicha asignatura. Mientras que el 15 % de los alumnos no deportistas aficionados obtienen una calificación de suspenso.

a) Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido un suspenso en la citada asignatura?

b) Sabiendo que un alumno elegido al azar ha obtenido un suspenso, ¿cuál es la probabilidad de que sea deportista aficionado?

Solución:

LLamamos D : a deportista aficionado, A aprueba y S suspende.



a)

$$P(S) = P(S|D)P(D) + P(S|\overline{D})P(\overline{D}) =$$

$$0,005 \cdot 0,05 + 0,15 \cdot 0,95 = 0,14275$$

b)

$$P(D|S) = \frac{P(S|D)P(D)}{P(S)} = \frac{0,005 \cdot 0,05}{0,14275} = 0,00175$$

4.8. Cataluña

4.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Sin problemas de este tipo.

4.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Sin problemas de este tipo.

4.9. País Vasco

4.9.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.23 Sean A y B dos sucesos tales que, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, y la probabilidad de la unión de ambos sucesos es $\frac{3}{4}$. Calcular:

a) La probabilidad de que ocurra el suceso A, condicionada a que se ha producido el suceso B.

b) La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

c) La probabilidad de que ocurra el suceso A y no ocurra el suceso B.

d) La probabilidad de que ocurra solo uno de los dos sucesos.

Solución:

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Longrightarrow P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=$

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{12}$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$$

b) $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$

c) $P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{5}{12}$

d) $P(\text{sólo uno})=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}$

Problema 4.24 Se dispone de dos urnas diferentes: A y B. La urna A contiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras, mientras que la urna B contiene 10 bolas negras. Se toma al azar una bola de cada una de las urnas al mismo tiempo y se intercambian (es decir, la bola extraída de la urna A se introduce en la urna B y la bola extraída de la urna B se introduce en la urna A). Si a continuación se extrae una bola de la urna A, ¿cuál es la probabilidad de que sea negra?

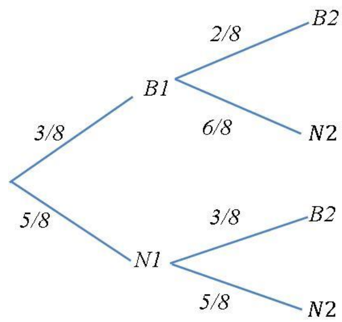
Solución:

$$A:\left\{\begin{array}{l}3\ B\\5\ N\end{array}\right.\qquad B:\left\{\begin{array}{l}0\ B\\10\ N\end{array}\right.$$

$P(N2)=P(N2|B1)P(B1)+P(N2|N1)P(N1)=$

$$\frac{6}{8}\cdot\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}=\frac{43}{64}=0,672$$

En la urna A:



4.9.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.25 En un instituto hay tres grupos de 1º de bachillerato con el mismo número de estudiantes. En el grupo A dos tercios de los/las estudiantes practican algún tipo de deporte, mientras que en los grupos B y C solo lo hacen la mitad de los/las estudiantes. Entre todo el alumnado se escoge una persona al azar, y resulta que no practica deporte. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha persona pertenezca al grupo A?

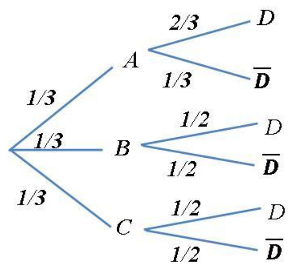
Solución:

LLamamos D : a practica deporte.

$$P(\overline{D}) = P(\overline{D}|A)P(A)+P(\overline{D}|B)P(B)+P(\overline{D}|C)P(C) =$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{9}=0,444$$

$$P(A|\overline{D}) = \frac{P(\overline{D}|A)P(A)}{P(\overline{D})} = \frac{1/3\cdot 1/3}{4/9} = \frac{1}{4} = 0,25$$



Problema 4.26 En una determinada población, la probabilidad de ser mujer y padecer diabetes es el 6 %, mientras que la de ser hombre y no padecer diabetes es el 37 %. En dicha población hay un 54 % de mujeres.
Se elige una persona al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca diabetes?

b) Si la persona elegida es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que no padezca diabetes?

c) Si la persona elegida resulta tener diabetes, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Solución:
LLamamos D : padece diabetes, H hombre y M mujer.

	D	$\overline{D}$	Total
H		$0,37$	
M	$0,06$		$0,54$
Total			

$\Longrightarrow$

	D	$\overline{D}$	Total
H	$0,09$	$0,37$	$0,46$
M	$0,06$	$0,48$	$0,54$
Total	$0,15$	$0,85$	1

a) $P(D) = 0,15$

b) $P(\overline{D}|M) = \dfrac{P(\overline{D}\cap M)}{P(M)} = \dfrac{0,48}{0,54} = 0,889$

c) $P(M|D) = \dfrac{P(M\cap D)}{P(D)} = \dfrac{0,06}{0,15} = 0,4$

4.10. Extremadura

4.10.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.27 En un bosque hay 50 abetos, 30 cipreses y 120 pinos. Una enfermedad provocada por una oruga afecta a 25 abetos, 9 cipreses y 48 pinos. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que un pino elegido al azar esté infectado por la oruga.

b) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga.

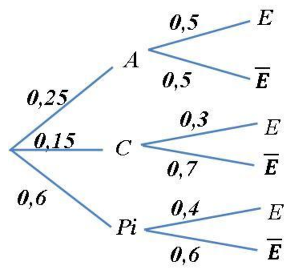
c) Si se selecciona un árbol al azar y está infectado por la oruga, ¿cuál es la. probabilidad de que sea un pino?

Solución:
LLamamos A : abetos, C : cipreses, Pi : pinos y E : enfermos.

$$P(A) = \frac{50}{200} = 0,25, \quad P(C) = \frac{30}{200} = 0,15, \quad P(Pi) = \frac{120}{200} = 0,6$$
$$P(E|A) = \frac{25}{50} = 0,5, \quad P(E|C) = \frac{9}{30} = 0,3, \quad P(E|Pi) = \frac{48}{120} = 0,4$$

a) $P(E|Pi) = 0,4$

b)



$$P(E) = P(E|A)P(A)+P(E|C)P(C)+P(E|Pi)P(Pi) =$$

$$0,5 \cdot 0,25 + 0,3 \cdot 0,15 + 0,4 \cdot 0,6 = 0,41$$

c)

$$P(Pi|E) = \frac{P(E|Pi)P(Pi)}{P(E)} = \frac{0,4 \cdot 0,6}{0,41} = 0,585$$

4.10.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.28 En una bodega, el 50 % del vino que se fabrica es tinto, el 30 % blanco y el resto rosado. Una vez en las barricas se vuelve agrio el 5 % del vino tinto el 10 % del vino blanco y el 7 % del vino rosado, mediante muestreo estratificado con afijación proporcional

a) Calcular la probabilidad de que una barrica elegida al azar contenga vino blanco y que además dicho vino esté agrio.

b) Calcular la probabilidad de que una barrica de vino tinto contenga vino con buen sabor.

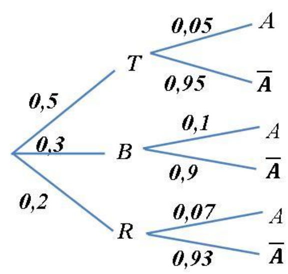
c) Si se selecciona al azar una barrica y el vino está agrio, ¿cuál es la probabilidad de que contenga vino tinto?

Solución:
LLamamos T : vino tinto, B : vino blanco, R : vino rosado y A : agrio.

a) $P(B\cap A) = P(A|B)P(B) = 0,1 \cdot 0,3 = 0,03$

b) $P(\overline{A}|T) = 0,95$

c)



$$P(T|A) = \frac{P(A|T)P(T)}{P(A)} = \frac{0,05 \cdot 0,5}{1 - 0,931} = 0,3623$$

4.11. Madrid

4.11.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.29 Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,8$ y $P(A \cap \overline{B}) = 0,1$.

a) Calcúlese la probabilidad de que ocurra el suceso A si no ha ocurrido el suceso B y determínese si los sucesos A y B son independientes. $\overline{B}$ denota el complementario del suceso B.

b) Obténgase la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos, A o B.

Solución:
Voy a resolver este problema organizando los valores en una tabla de intersecciones:

	Sucesos		
	A	$\overline{A}$	Totales
B			$0,8$
$\overline{B}$	$0,1$		
Totales	$0,6$		1

$\Longrightarrow$

	Sucesos		
	A	$\overline{A}$	Totales
B	$0,5$	$0,3$	$0,8$
$\overline{B}$	$0,1$	$0,1$	$0,2$
Totales	$0,6$	$0,4$	1

a) $P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{0,1}{0,2} = 0,5$

$$\left\{\begin{array}{l} P(A\cap\overline{B}) = 0,1 \\ P(A) = 0,6 \\ P(\overline{B}) = 0,2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} P(A\cap\overline{B}) = 0,1 \\ P(A)\cdot P(\overline{B}) = 0,6\cdot 0,2 = 0,12 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$P(A\cap\overline{B}) \neq P(A)\cdot P(\overline{B}) \Longrightarrow$ A y $\overline{B}$ no son independientes.

b) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0,6 + 0,8 - 0,5 = 0,9$

Problema 4.30 De un estudio realizado en una región, se deduce que la probabilidad de que un niño de primaria juegue con consolas de videojuegos más tiempo del recomendado por los especialistas es 0,60. Entre estos niños, la probabilidad de fracaso escolar se eleva a 0,30 mientras que, si no juegan más tiempo del recomendado, la probabilidad de fracaso escolar es 0,15. Seleccionado un niño al azar de esta región.

a) Obténgase la probabilidad de que tenga fracaso escolar.

b) Si tiene fracaso escolar, determínese cuál es la probabilidad de que no juegue con estas consolas más tiempo del recomendado.

Solución:

Sea V el suceso juega con consola de videojuegos más tiempo del recomendado y F el suceso fracaso escolar.
$P(V) = 0,6 \Longrightarrow P(\overline{V}) = 0,4$, $P(F|V) = 0,30$ y $P(F|\overline{V}) = 0,15$

$$P(F|V) = 0,30 = \frac{P(F\cap V)}{P(V)} \Longrightarrow P(F\cap V) = 0,30\cdot 0,6 = 0,18$$

$$P(F|\overline{V}) = 0,15 = \frac{P(F\cap\overline{V})}{P(\overline{V})} \Longrightarrow P(F\cap\overline{V}) = 0,15\cdot 0,4 = 0,06$$

Voy a resolver este problema organizando los valores en una tabla de intersecciones:

	Sucesos		
	V	$\overline{V}$	Totales
F	$0,18$	$0,06$	
$\overline{F}$			
Totales	$0,6$	$0,4$	1

$\Longrightarrow$

	Sucesos		
	V	$\overline{V}$	Totales
F	$0,18$	$0,06$	$0,24$
$\overline{F}$	$0,42$	$0,34$	$0,76$
Totales	$0,6$	$0,4$	1

a) $P(F) = 0,24$

b) $P(\overline{V}|F) = \dfrac{P(\overline{V} \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0,06}{0,24} = 0,25$

4.11.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.31 Los escolares de un cierto colegio de Madrid fueron encuestados acerca de su alimentación y de su ejercicio físico. Una proporción de 2/5 hacían ejercicio regularmente y 2/3 siempre desayunaban. Además, entre los que siempre desayunan, una proporción de 9/25 hacían ejercicio regularmente. Se elige al azar un escolar de ese colegio

a) ¿Es independiente que siempre desayune y que haga ejercicio regularmente?

b) Calcúlese la probabilidad de que no siempre desayune y no haga ejercicio regularmente.

Solución:
E : hace ejercicio, $\overline{E}$: no hace ejercicio, D : desayuna y $\overline{D}$: no desayuna.
$P(E) = \dfrac{2}{5}$, $P(\overline{E}) = \dfrac{3}{5}$, $P(D) = \dfrac{2}{3}$, $P(\overline{D}) = \dfrac{1}{3}$ y $P(E|D) = \dfrac{9}{25} = \dfrac{P(E \cap D)}{P(D)} \Longrightarrow P(E \cap D) = \dfrac{9}{25} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{25}$

Ponemos los datos en una tabla:

	Escolares		
	E	$\overline{E}$	Totales
D	6/25		2/3
$\overline{D}$			1/3
Totales	2/5	3/5	1

$\Longrightarrow$

	Escolares		
	E	$\overline{E}$	Totales
D	6/25	32/75	2/3
$\overline{D}$	4/25	13/75	1/3
Totales	2/5	3/5	1

a) $\left\{\begin{array}{l} P(E \cap D) = 6/25 \\ P(E) = 2/5 \\ P(D) = 2/3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} P(E \cap D) = 6/25 \\ \\ P(E) \cdot P(D) = 2/5 \cdot 2/3 = 4/15 \end{array}\right. \Longrightarrow$
$P(E \cap D) \neq P(E) \cdot P(D) \Longrightarrow$ E y D no son independientes.

b) $P(\overline{E}|\overline{D}) = \dfrac{13}{75}$

Problema 4.32 Sean A y B dos sucesos con $P(A) = 0,3$, $P(B|A) = 0,4$, $P(B|\overline{A}) = 0,6$. Calcúlese:

a) $P(A|B)$.

b) $P(\overline{A}|\overline{B})$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

Solución:
Tenemos $P(A) = 0,3$ y $P(\overline{A}) = 0,7$, además:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$$

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(A)} \Longrightarrow P(\overline{A} \cap B) = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42$$

Ponemos los datos en una tabla:

	Sucesos		
	A	$\overline{A}$	Totales
B	$0,12$	$0,42$	
$\overline{B}$			
Totales	$0,3$	$0,7$	1

$\Longrightarrow$

	Sucesos		
	A	$\overline{A}$	Totales
B	$0,12$	$0,42$	$0,54$
$\overline{B}$	$0,18$	$0,28$	$0,46$
Totales	$0,3$	$0,7$	1

a)
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,12}{0,54} = 0,222$$

b)
$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0,28}{0,46} = 0,61$$

4.12. Valencia

4.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.33 En una cierta ciudad, las dos terceras partes de los hogares tienen una Smart TV, de los cuales, las tres octavas partes han contratado algún servicio de televisión de pago, porcentaje que baja al 30 % si consideramos el total de los hogares. Si se elige un hogar al azar

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV pero sí haya contratado televisión de pago?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga Smart TV si sabemos que ha contratado televisión de pago?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV si sabemos que no ha contratado televisión de pago?

Solución:
LLamamos TV : televisión y SM : Smart TV.

$$P(TV|SM) = \frac{P(TV \cap SM)}{P(SM)} \Longrightarrow P(TV \cap SM) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = 0,25$$

	Sucesos		
	TV	$\overline{TV}$	Totales
SM	$0,25$		$0,67$
$\overline{SM}$			
Totales	$0,3$		1

$\Longrightarrow$

	Sucesos		
	TV	$\overline{TV}$	Totales
SM	$0,25$	$0,42$	$0,67$
$\overline{SM}$	$0,05$	$0,28$	$0,33$
Totales	$0,3$	$0,7$	1

a) $P(\overline{SM} \cap TV) = 0,05$

b) $P(SM|TV) = \dfrac{P(SM \cap TV)}{P(TV)} = \dfrac{0,25}{0,3} = 0,83$

c) $P(\overline{SM}|\overline{TV}) = \dfrac{P(\overline{SM} \cap \overline{TV})}{P(\overline{TV})} = \dfrac{0,28}{0,7} = 0,4$

Problema 4.34 Sabemos que el 5 % de los hombres y el 2 % de las mujeres que trabajan en una empresa tienen un salario mensual mayor que 5000 euros. Se sabe también que el 30 % de los trabajadores de dicha empresa son mujeres.

a) Calcula la probabilidad de que un trabajador de la empresa, elegido al azar, tenga un salario mensual mayor que 5000 euros.

b) Si se elige al azar un trabajador de la empresa y se observa que su salario mensual es mayor que 5000 euros, ¿cuál es la probabilidad de que dicho trabajador sea mujer?

c) ¿Qué porcentaje de trabajadores de la empresa son hombres con un salario mensual mayor que 5000 euros?

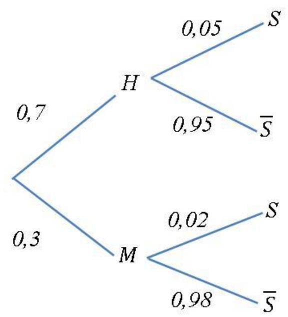
Solución:

LLamamos H : hombre, M : mujer y S : superior a 5000 euros.

a)

$$P(S) = P(S|H)P(H) + P(S|M)P(M) =$$

$$0,05 \cdot 0,7 + 0,02 \cdot 0,3 = 0,041$$



b)

$$P(M|S) = \frac{P(S|M)P(M)}{P(S)} = \frac{0,02 \cdot 0,3}{0,041} = 0,146$$

c)

$$P(H \cap S) = P(S|H)P(H) = 0,05 \cdot 0,7 = 0,035$$

4.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.35 Un modelo de coche se fabrica en tres versiones: Van, Urban y Suv. El 25 % de los coches son de motor híbrido. El 20 % son de tipo Van y el 40 % de tipo Urban. El 15 % de los de tipo Van y el 40 % de los de tipo Urban son híbridos. Se elige un coche al azar. Calcula:

a) La probabilidad de que sea de tipo Urban, sabiendo que es híbrido.

b) La probabilidad de que sea de tipo Van, sabiendo que no es híbrido.

c) La probabilidad de que sea híbrido, sabiendo que es de tipo Suv.

d) La probabilidad de que no sea de tipo Van ni tampoco híbrido.

Solución:

LLamamos H : híbrido.

$$P(H \cap \text{Van}) = P(H|\text{Van})P(\text{Van}) = 0,15 \cdot 0,2 = 0,03$$

$$P(H \cap \text{Urban}) = P(H|\text{Urban})P(\text{Urban}) = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16$$

	Van	Urban	Sub	Total
H	$0,03$	$0,16$		$0,25$
$\overline{H}$				
Total	$0,2$	$0,4$		

$\Longrightarrow$

	Van	Urban	Sub	Total
H	$0,03$	$0,16$	$0,06$	$0,25$
$\overline{H}$	$0,17$	$0,24$	$0,34$	$0,75$
Total	$0,2$	$0,4$	$0,4$	1

a) $P(\text{Urban}|H) = \dfrac{\text{Urban} \cap H}{P(H)} = \dfrac{0,16}{0,25} = 0,64$

b) $P(\text{Van}|\overline{H}) = \dfrac{\text{Van} \cap \overline{H}}{P(\overline{H})} = \dfrac{0,17}{0,75} = 0,227$

c) $P(H|\text{Sub}) = \dfrac{H \cap \text{Sub}}{P(\text{Sub})} = \dfrac{0,06}{0,4} = 0,15$

d) $P(\overline{\text{Van}} \cap \overline{H}) = P(\overline{\text{Van} \cup H}) = 1 - P(\text{Van} \cup H) = 1 - (P(\text{Van}) + P(H) - P(\text{Van} \cap H)) = 1 - (0,2 + 0,25 - 0,03) = 0,58$

Problema 4.36 Un estudiante acude a la universidad el 70 % de las veces usando su propio vehículo, y el doble de veces en transporte público que andando. Llega tarde el 1 % de las veces que acude andando, el 3 % de las que lo hace en transporte público y el 6 % de las que lo hace con su propio vehículo. Se pide:

a) La probabilidad de que un día cualquiera llegue puntualmente.

b) La probabilidad de que haya acudido en transporte público, sabiendo que ha llegado tarde.

c) La probabilidad de que no haya acudido andando, sabiendo que ha llegado puntualmente.

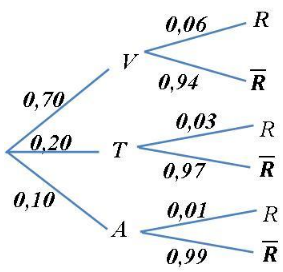
Solución:
LLamamos V : vehículo propio, T : transporte público, A andando y R llega con retraso.
a)

$$P(\overline{R}) = P(\overline{R}|V)P(V) + P(\overline{R}|T)P(T) + P(\overline{R}|A)P(A) =$$

$$0,94 \cdot 0,7 + 0,97 \cdot 0,2 + 0,99 \cdot 0,1 = 0,951$$

b)

$$P(T|R) = \frac{P(R|T)P(T)}{P(R)} = \frac{0,03 \cdot 0,2}{1 - 0,951} = 0,122$$



c)

$$P(\overline{A}|\overline{R}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{P(\overline{A \cup R})}{P(\overline{R})} =$$

$$\frac{1 - P(A \cup R)}{P(\overline{R})} = \frac{1 - (P(A) + P(R) - P(A \cap R))}{P(\overline{R})} = \frac{1 - (P(A) + P(R) - P(R|A)P(A))}{P(\overline{R})} =$$

$$\frac{1 - (0,1 + (1 - 0,951) - 0,01 \cdot 0,1)}{0,951} = 0{,}896$$

4.13. La Rioja

4.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.37 El 65 % de los empleados de una empresa manejan un nuevo programa informático, de ellos, un 40 % además hablan inglés. Por otra parte, la cuarta parte de los que no manejan el nuevo programa también hablan inglés. Se elige un empleado al azar.

a) Calcula la probabilidad de que hable inglés y maneje el nuevo programa.

b) Calcula la probabilidad de que hable inglés.

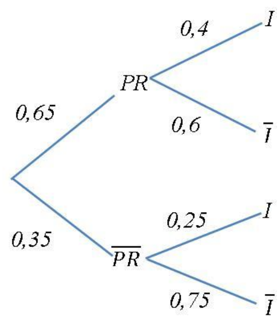
c) Si el empleado habla inglés, calcula la probabilidad de que maneje el nuevo programa

Solución:

LLamamos PR : maneja programa informático e I habla inglés.

a)

$$P(PR \cap I)) = P(I|PR)P(PR) = 0,4 \cdot 0,65 = 0,26$$



b)

$$P(I) = P(I|PR)P(PR) + P(I|\overline{PR})P(\overline{PR}) =$$

$$0,4 \cdot 0,65 + 0,25 \cdot 0,35 = 0,3475$$

c)

$$P(PR|I) = \frac{P(I|PR)P(PR)}{P(I)} = \frac{0,4 \cdot 0,65}{0,3475} = 0,748$$

4.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.38 La probabilidad de que Alberto conteste a un mensaje de Whatsapp es 0,1. En los últimos 20 minutos ha recibido 3 mensajes.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste a los tres?

b) ¿Cuál es probabilidad de que conteste exactamente a uno?

c) ¿Cuál es probabilidad de que conteste al menos a uno?

d) ¿Cuál es probabilidad de que no conteste a ninguno?

Solución:

$$B(20; 0,1)$$

a) $P(X = 3) = \left(\begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array} \right) \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^0 = 0,001$

b) $P(X = 1) = \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right) \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^2 = 0,243$

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array} \right) \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^3 = 0,271$

d) $P(X = 0) = \left(\begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array} \right) \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^3 = 0,729$

4.14. Murcia

4.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

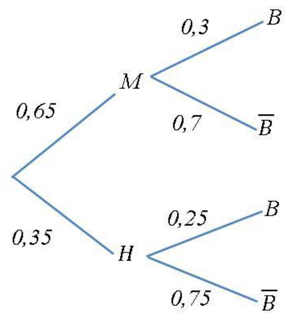
Problema 4.39 En el coro universitario el 65 % de sus componentes son mujeres. El 30 % de las mujeres y el 25 % de los hombres son bilingües. Si elegimos al azar a un componente del coro:

a) ¿Cuál es la probabilidad que sea bilingüe?

b) Sabiendo que es bilingüe, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Solución:

LLamamos H : hombre, M : mujer y B bilingue.



a)

$$P(B) = P(B|M)P(M) + P(B|H)P(H) =$$

$$0,3 \cdot 0,65 + 0,25 \cdot 0,35 = 0,2825$$

b)

$$P(M|B) = \frac{P(B|M)P(M)}{P(B)} = \frac{0,3 \cdot 0,65}{0,2825} = 0,69$$

Problema 4.40 Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,2$ y $P(A|B) = 0,5$. Calcular $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$.

Solución:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,2 - 0,1 = 0,4$$

4.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.41 En un taller mecánico el 70 % de los coches que se reparan son del modelo A y el resto de un modelo B. Después de 6 meses, el 95 % de los coches del modelo A no vuelven al taller mientras que del modelo B sólo no vuelven el 80 %. Si elegimos un coche al azar:

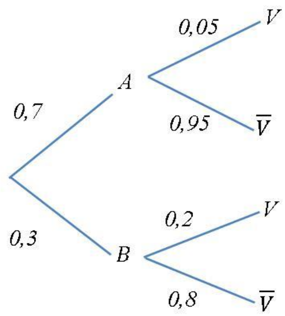
a) ¿Cuál es la probabilidad de que vuelva al taller antes de 6 meses?

b) Si se observa que antes de los seis meses vuelve al taller, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo B?

Solución:

LLamamos V : vuelve al taller.

a)



$$P(V) = P(V|A)P(A) + P(V|B)P(B) =$$

$$0,05 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,095$$

b)

$$P(B|V) = \frac{P(V|B)P(B)}{P(V)} = \frac{0,2 \cdot 0,3}{0,095} = 0,632$$

Problema 4.42 En un hospital de la región de Murcia se está probando una nueva terapia para dejar de fumar. De los pacientes que entran en este ensayo el 45 % prueba la terapia y el resto no. Después de un año el 70 % de los que siguieron la terapia y el 40 % de los que no la siguieron han dejado de fumar. Se elige al azar a un paciente fumador de este hospital:

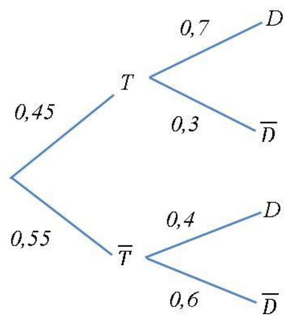
a) Calcule la probabilidad de que después de un año haya dejado de fumar.

b) Si transcurrido un año el paciente sigue fumando, calcule la probabilidad de que haya seguido la nueva terapia.

Solución:

LLamamos T : ha tenido terapia y D ha dejado de fumar.

a)



$$P(D) = P(D|T)P(T) + P(D|\overline{T})P(\overline{T}) =$$

$$0,7 \cdot 0,45 + 0,4 \cdot 0,55 = 0,535$$

b)

$$P(T|\overline{D}) = \frac{P(\overline{D}|T)P(T)}{P(\overline{D})} = \frac{0,3 \cdot 0,45}{1 - 0,535} = 0,29$$

4.15. Navarra

4.15.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.43 Un centro tiene dos clases de bachillerato (A y B). La clase A tiene 40 estudiantes, de los cuales 10 estudian alemán. La clase B tiene 25 estudiantes, de los cuales 5 estudian alemán. Se seleccionan al azar dos estudiantes de la clase A y uno de B. Calcule:

a) La probabilidad de que ninguno de los tres estudie alemán.

b) La probabilidad de que únicamente uno de ellos estudie alemán.

c) La probabilidad de que alguno de ellos estudie alemán.

(Escriba las fórmulas necesarias)

Solución:
LLamamos Al : a estudia alemán.

a) $3\overline{Al}$ es el suceso los tres no estudian alemán:

$$P(3\overline{Al}) = \frac{30}{40}\cdot\frac{29}{39}\cdot\frac{20}{25} = \frac{29}{65} = 0,446$$

b) $1Al$ es el suceso sólo un estudia alemán, hay tres sucesos posibles $\{Al, \overline{Al}, \overline{Al}\}$, $\{\overline{Al}, Al, \overline{Al}\}$ y $\{\overline{Al}, \overline{Al}, Al\}$

$$P(1Al) = P(\{Al, \overline{Al}, \overline{Al}\}) + P(\{\overline{Al}, Al, \overline{Al}\}) + P(\{\overline{Al}, \overline{Al}, Al\}) =$$

$$\frac{10}{40}\cdot\frac{30}{39}\cdot\frac{20}{25} + \frac{30}{40}\cdot\frac{10}{39}\cdot\frac{20}{25} + \frac{30}{40}\cdot\frac{29}{39}\cdot\frac{5}{25} = \frac{109}{260} = 0,419$$

c) $P(\text{alguno}) = 1 - P(\text{ninguno}) = 1 - P(3\overline{Al}) = 1 - 0,446 = 0,554$

4.15.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.44 Según un estudio reciente, el 80 % de los jóvenes españoles entre 18 y 23 años estudia, el 40 % tiene un contrato laboral y el 25 % simultanea estudios y trabajo. Se selecciona un joven al azar.

a) Calcule la probabilidad de que únicamente estudie.

b) Calcule la probabilidad de que no estudie ni trabaje.

c) Sabiendo que no estudia, calcule la probabilidad de que trabaje.

(Escriba las fórmulas necesarias)
Solución:
LLamamos E : estudia y T trabaja.

	T	$\overline{T}$	Total
E	$0,25$		$0,8$
$\overline{E}$			
Total	$0,4$		1

$\Longrightarrow$

	T	$\overline{T}$	Total
E	$0,25$	$0,55$	$0,8$
$\overline{E}$	$0,15$	$0,05$	$0,2$
Total	$0,4$	$0,6$	1

a) $P(E\cap\overline{T}) = 0,55$

b) $P(\overline{E}\cap\overline{T}) = 0,05$

c) $P(T|\overline{E}) = \dfrac{P(T\cap\overline{E})}{P(\overline{E})} = \dfrac{0,15}{0,2} = 0,75$

4.16. Galicia

4.16.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.45 Los videojuegos que se consumen en Galicia se juegan el 45 % en consola y el resto en el móvil. De los que se juegan en consola, el 70 % son de acción, el 10 % de estrategia y el resto de otras categorías. De los juegos para móvil, un 25 % son de acción, otro 25 % de estrategia y el resto de otras categorías.

a) ¿Qué porcentaje de los videojuegos consumidos en Galicia son de acción?

b) Se elige al azar un jugador que está jugando a un juego de estrategia: ¿cuál es la probabilidad de que lo esté haciendo a través del móvil?

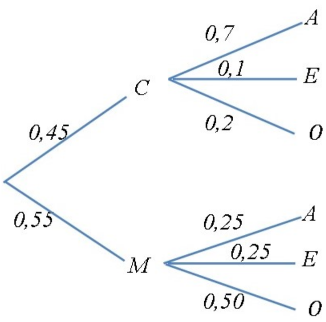
Solución:

LLamamos C : juega en consola, M juega en móvil, A juego de acción, E juego de estrategia y O otras categorías.

a)

$$P(A) = P(A|C)P(C) + P(A|M)P(M) =$$

$$0,7 \cdot 0,45 + 0,25 \cdot 0,55 = 0,4525$$



b)

$$P(E) = P(E|C)P(C) + P(E|M)P(M) =$$

$$0,1 \cdot 0,45 + 0,25 \cdot 0,55 = 0,1825$$

$$P(M|E) = \frac{P(E|M)P(M)}{P(E)} = \frac{0,25 \cdot 0,55}{0,1825} = 0,753$$

Problema 4.46 En una población, de cada 100 consumidores de agua mineral 30 consumen la marca A, 25 la marca B y el resto la marca C. Además, el 30 % de consumidores de A, el 20 % de consumidores de B y el 40 % de consumidores de C son mujeres.

a) Se selecciona al azar un consumidor de agua mineral de esa población: ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

b) Si se ha seleccionado al azar una mujer, halla la probabilidad de que consuma la marca B.

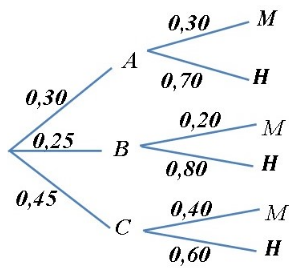
Solución:

LLamamos A : consumen de la marca A, B consumen de la marca B, C consumen de la marca C, M son mujeres y H son hombres.
$P(A) = \frac{30}{100} = 0,3$, $P(B) = \frac{25}{100} = 0,25$ y $P(C) = \frac{45}{100} = 0,45$.

a)

$$P(M) = P(M|A)P(A)+P(M|B)P(B)+P(M|C)P(C) =$$

$$0,3 \cdot 0,3 + 0,20 \cdot 0,25 + 0,40 \cdot 0,45 = 0,32$$



b)

$$P(B|M) = \frac{P(M|B)P(B)}{P(M)} = \frac{0,20 \cdot 0,25}{0,32} = 0,15625$$

4.16.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.47 En una ciudad, el 20 % de las personas que acceden a un centro comercial proceden del centro de la ciudad, el 45 % de barrios periféricos y el resto de pueblos cercanos. Efectúan alguna compra el 60 %, el 75 % y el 50 % de cada procedencia respectivamente.

a) Si en un determinado día visitan el centro comercial 2000 personas, ¿cuál es el número esperado de personas que no realizan compras?

b) Si elegimos al azar una persona que ha realizado alguna compra en ese centro comercial, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de un pueblo cercano?

Solución:

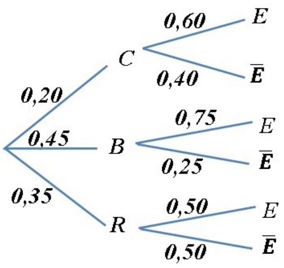
LLamamos C : proceden del centro de la ciudad, B proceden de barrios periféricos, R proceden de pueblos cercanos y E efectúan alguna compra.

a)

$$P(\overline{E}) = P(\overline{E}|C)P(C)+P(\overline{E}|B)P(B)+P(\overline{E}|R)P(R) =$$

$$0,2\cdot 0,4+0,45\cdot 0,25+0,35\cdot 0,50 = 0,3675$$

$2000\cdot P(\overline{E}) = 2000\cdot 0,3675 = 735$ personas no efectuarán compras.



b)

$$P(R|E) = \frac{P(E|R)P(R)}{P(E)} = \frac{0,50\cdot 0,35}{1-0,3675} = 0,2767$$

Problema 4.48 Para la construcción de un panel luminoso se dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 150 bombillas azules y 250 bombillas rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es 0,01 si es blanca, 0,02 si es azul y 0,03 si es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor;

a) Calcula la probabilidad de que la bombilla no funcione.

b) Sabiendo que la bombilla elegida funciona, calcula la probabilidad de que dicha bombilla no sea roja.

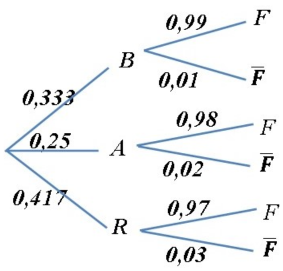
Solución:

LLamamos B : bombillas blancas, A bombillas azules, R bombillas rojas y $\overline{F}$ no funciona. $P(B) = \frac{200}{600} = 0,333$, $P(A) = \frac{150}{600} = 0,25$ y $P(R) = \frac{250}{600} = 0,417$.

a)

$$P(\overline{E}) = P(\overline{E}|B)P(B)+P(\overline{E}|A)P(A)+P(\overline{E}|R)P(R) =$$

$$\frac{200}{600}\cdot 0,01+\frac{150}{600}\cdot 0,02+\frac{250}{600}\cdot 0,03 = 0,0208$$



b)

$$P(\overline{R}|F) = \frac{P(\overline{R}\cap F)}{P(F)} = \frac{P(F|B)P(B)+P(F|A)P(A)}{1-0,0208} =$$

$$\frac{0,99\cdot \frac{200}{600}+0,98\cdot\frac{150}{600}}{1-0,0208} = 0,587$$

4.17. Andalucía

4.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.49 El 65 % de los turistas que visitan una provincia elige alojamientos en la capital y el resto en zonas rurales. Además, el 75 % de los turistas que se hospedan en la capital y el 15 % de los que se hospedan en zonas rurales lo hace en hoteles, mientras que el resto lo hace es apartamentos turísticos. Se elige al azar un turista de los que se han alojado en esa provincia.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en un hotel?

b) Si se sabe que se ha hospedado en un apartamento turístico, ¿cuál es la probabilidad de que el apartamento esté en zonas rurales?

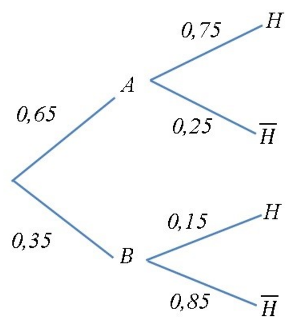
Solución:

LLamamos A : alojamientos en la capital, B alojamientos en zonas rurales, H en hoteles y $\overline{H}$ en apartamentos turísticos.

a)

$$P(H) = P(H|A)P(A) + P(H|B)P(B) =$$

$$0,75 \cdot 0,65 + 0,15 \cdot 0,35 = 0,54$$



b)

$$P(B|\overline{H}) = \frac{P(\overline{H}|B)P(B)}{P(\overline{H})}$$

$$\frac{0,85 \cdot 0,35}{1 - 0,54} = 0,6467$$

Problema 4.50 El 69 % de los habitantes de una determinada ciudad ven series, el 35 % películas y el 18 % no ven ni series ni películas. Se elige al azar un habitante de la ciudad.

a) Calcule la probabilidad de que vea series o películas.

b) Sabiendo que ve series, calcule la probabilidad de que vea películas.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que vea series y no vea películas?

Solución:

LLamamos A : ven series y B ven películas.
$P(A) = 0,69$, $P(B) = 0,35$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,18$

	B	$\overline{B}$	Total
A			0,69
$\overline{A}$		0,18	
Total	0,35		1

$\Longrightarrow$

	B	$\overline{B}$	Total
A	0,22	0,47	0,69
$\overline{A}$	0,13	0,18	0,31
Total	0,35	0,65	1

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B} = 1 - P(A \cup B) = 0,18 \Longrightarrow P(A \cup B) = 0,82$

b) $P(B|A) = \dfrac{B \cap A}{P(A)} = \dfrac{0,22}{0,69} = 0,3188$

c) $P(A \cap \overline{B}) = 0,47$

4.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.51 Una marca de patinetes eléctricos fabrica tres modelos distintos A, B y C. El modelo A supone el 25 % de su producción, el B el 40 % y el resto de la producción corresponde al modelo C. Transcurridos tres meses desde su venta, se comprobó que el 15 % de patinetes del modelo A, el 10 % del B y el 12 % del C había presentado alguna avería. Se elige al azar un patinete de esta marca.

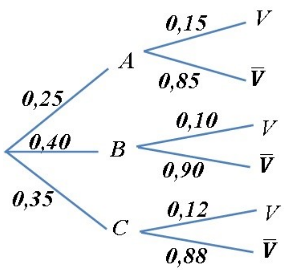
a) Calcule la probabilidad de que dicho patinete haya presentado alguna avería.

b) Si sabemos que el patinete elegido es del modelo A, ¿cuál es la probabilidad de que no haya presentado avería?

c) Calcule la probabilidad de que haya presentado avería o sea del modelo C.

Solución:

LLamamos A : patinete A, B patinete A, C patinete C y V presentan avería.



a)

$$P(V) = P(V|A)P(A) + P(V|B)P(B) + P(V|C)P(C) =$$

$$0,15\cdot 0,25 + 0,10\cdot 0,40 + 0,12\cdot 0,35 = 0,1195$$

b) $P(\overline{V}|A) = 0,85$

c) $P(V\cup C) = P(V) + P(C) - P(V\cap C) = P(V) + P(C) - (P(V|C)P(C)) = 0,1195 + 0,35 - (0,12\cdot 0,35) = 0,4275$

Problema 4.52 De dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral se sabe que: $P(A\cap B) = 0,2$, $P(A\cup B) = 0,4$, $P(A|B) = 0,8$.

a) Calcule $P(A)$ y $P(B)$.

b) ¿Son los sucesos A y B independientes? Razone la respuesta.

c) Calcule $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

Solución:

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \Longrightarrow P(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A|B)} = \dfrac{0,2}{0,8} = 0,25$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Longrightarrow P(B) = P(A\cup B) + P(A\cap B) - P(A) = 0,4 + 0,2 - 0,25 = 0,35.$

b) $P(A\cap B) = 0,2 \neq P(A)\cdot P(B) = 0,25\cdot 0,35 = 0,0875 \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

c) $P(\overline{A}\cup\overline{B}) = P(\overline{A\cap B}) = 1 - P(A\cap B) = 1 - 0,2 = 0,8.$

5. Estadística

Teoría

Gráficos:

- Varable discreta: con diagrama de barras.

$$x_i,\ \ p(x_i) = p_i,\ \ \sum p_i = 1$$

$$\text{Media} = \mu = \sum x_i p_i,\ \ \text{Varianza} = \sigma^2 = \sum p_i(x_i - \mu)^2 = \sum p_i x_i - \mu^2$$

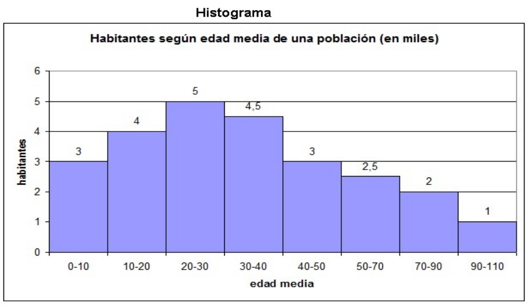
$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$

- Variable continua: histogramas (intervalos)

$$x_i,\ \ f_i,$$

$$\text{Media} = \overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum x_i},\ \ \text{Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i(x_i - \overline{X})^2}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \overline{X}^2$$

$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$



Distribución Binomial B(n, p):

$$P(X = a) = \binom{n}{a} p^a q^{n-a}$$

p es la probabilidad de éxito y $q = 1 - p$ la probabilidad de fracaso. Por ejemplo, si B$(7, 0, 4) \Longrightarrow$ $n = 7$, $p = 0,4$ y $q = 0,6$:

$$P(X = 2) = \binom{7}{2} 0,4^2 0,6^5 = 0,261$$

$$P(X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3),\ \text{ó}$$

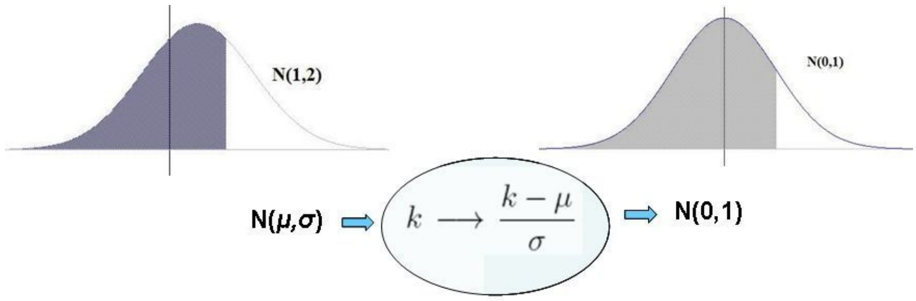
$$P(X \le 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - (P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7))$$

Su Media= $\mu = np$, su Varianza= $\sigma^2 = npq$ y su Desviación Típica= $\sqrt{\text{Varianza}}$.
Distribución Normal N(μ, σ):

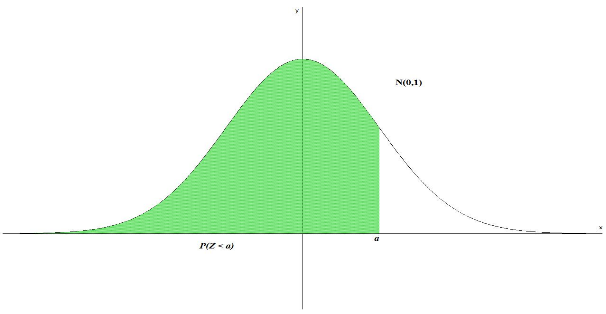
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Tipificación Paso de una normal $\mathrm{N}(\mu,\sigma)$ a otra $\mathrm{N}(0,1)$: $k \longrightarrow \dfrac{k-\mu}{\sigma}$, si queremos calcular $P(a < X < b)$ y X es de una normal $\mathrm{N}(\mu,\sigma)$ entonces Z seguirá una normal $\mathrm{N}(0,1)$

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$



Cuando una distribución binomial $B(n,p)$ cumple $np > 3$ y $nq > 3$, se aproxima a una normal $N(np, \sqrt{npq})$, si son mayores de 5 la aproximación es perfecta.



$$P(Z > a) = 1 - P(Z < a), \quad P(Z < -a) = 1 - P(Z < a)$$

$$P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$$

La corrección por continuidad de Yate seguirá las siguientes reglas:
$P(x = a) = P(a - 0,5 \le X \le a + 0,5)$
$P(X \le a) = P(X \le a + 0,5)$
$P(X < a) = P(X \le a - 0,5)$
$P(X > a) = P(X \ge a + 0,5)$
$P(X \ge a) = P(X \ge a - 0,5)$
Cálculo de $z_{\alpha/2}$ con un **Nivel de confianza** del 95 %: $NC = 0,95 = 1 - \alpha$ ($\alpha =$**Nivel de significación**)$\Longrightarrow$ $\alpha = 0,05$. Para una distribución bilateral tendremos $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025 \Longrightarrow P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975$ se busca en la tabla $N(0,1)$ y obtenemos $z_{\alpha/2} = 1,96$
Para muestras aleatorias de tamaño n con media $\overline{X}$ de una $N(\mu,\sigma)$ la media $\overline{X}$ se distribuye como una normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
Error: $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Intervalo de Confianza: $(\overline{X}-E,\overline{X}+E)=\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de medias.
Proporciones: Sea $\hat{p}$ proporción de la muestra de tamaño n, se distribuye como una $N\left(p,\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$
Error: $E=z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
Intervalo de Confianza: $(\hat{p}-E,\hat{p}+E)=\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},\hat{p}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de proporciones.

Problemas

5.1. Aragón

5.1.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.1 Se va a realizar un estudio de mercado para estimar la proporción de consumidores que conoce una determinada marca de yogures. Para ello se va a tomar una muestra aleatoria simple de consumidores, se va a preguntar a cada uno si conoce la marca y a partir de los resultados se construirá el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 91 %.

a) Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0,08 ¿qué tamaño de la muestra debemos escoger?

b) Decidimos tomar una muestra de tamaño de 175 consumidores; les preguntamos y un total de 126 responden que conocen la marca. Calcular el intervalo de confianza al 91 % para la proporción de consumidores que conocen la marca.

Solución:

a) $NC = 0,91 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,09 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,045$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,045 = 0,955 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,695$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow 0,04 = 1,695\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{1,695 \cdot 0,5}{0,04}\right)^2 = 448,91 \Longrightarrow$$

$$n = 449$$

b) $n = 175$ y $\hat{p} = \dfrac{126}{175} = 0,72$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,695\sqrt{\frac{0,72 \cdot 0,28}{175}} = 0,0575$$

$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,72-0,0575; 0,72+0,0575) = (0,6625; 0,7775) = (66,25\,\%; 77,75\,\%)$

5.1.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.2 Se sabe que el peso de las manzanas de un agricultor tiene distribución normal con desviación típica igual a 20 g. Queremos construir un intervalo de confianza para la media del peso de las manzanas del agricultor.

a) Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 93 % tenga una amplitud menor o igual que 8 g.

b) Decidimos tomar una muestra de tamaño 12. Pesamos las manzanas y obtenemos los siguientes resultados (en gramos)

178, 221, 196, 231, 210, 168, 203, 186, 196, 214, 230, 224

Calcular un intervalo de confianza al 93 % para la media del peso de las manzanas del agricultor.

Solución:

$$N(\mu; 20)$$

a) $NC = 0,93 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,07 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,035$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,035 = 0,965 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,815$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 4 = 1,815\frac{20}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{1,815 \cdot 20}{4}\right)^2 = 82,36 \Longrightarrow n = 83$$

b) $n = 12$ y $\overline{X} = 204,75$:

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,815\frac{20}{\sqrt{12}} = 10,479$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (204,75 - 10,479; 204,75 + 10,479) = (194,271; 215,229)$$

5.2. Asturias

5.2.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.3 Se supone que el tiempo de cada consulta en un determinado centro de salud sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 1,5 minutos.

a) Para estimar dicho tiempo medio por consulta, se considera una muestra aleatoria de 961 consultas, las cuales han tenido una duración media de 6 minutos. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la duración media de las consultas en ese centro de salud, al 95 % de confianza.

b) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera duración media por consulta a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,2 minutos y un nivel de confianza del 95 %?

Solución:

$$N(\mu; 1,5)$$

a) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$n = 961$ y $\overline{X} = 6$:

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{1,5}{\sqrt{961}} = 0,09484$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (6 - 0,09484; 6 + 0,09484) = (5,90516; 6,09484)$$

b)

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,2 = 1,96\frac{1,5}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{1,96 \cdot 1,5}{0,2}\right)^2 = 216,09 \Longrightarrow n = 217$$

Problema 5.4 Para hacer un estudio sobre el uso de las nuevas tecnologías (NT) por parte de los adolescentes, se tomó una muestra aleatoria de 100 adolescentes, de los cuales 10 respondieron que las usaban 4 horas a la semana, 15 que las usaban 5 horas por semana, 20 que las usaban 7 horas por semana y otros 20 que las usaban 8 horas por semana, 15 adolescentes dijeron que las usaban 9 horas a la semana, 10 que las usaban 10 horas y otros 10 que las usaban 15 horas. Su supone además que el tiempo que dedican semanalmente a las nuevas tecnologías los adolescentes sigue una distribución normal con desviación típica 1,7 horas.

a) Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el tiempo medio semanal dedicado a las NT por los adolescentes, al 90 % de confianza.

b) Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción de adolescentes que usan las nuevas tecnologías más de 6 horas a la semana, al 90 % de confianza.

Solución:

$$N(\mu; 1,7)$$

a) $NC = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,64$

$n = 100$ y $\overline{X} = 8$:

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,64\frac{1,7}{\sqrt{100}} = 0,2788$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (8 - 0,2788; 8 + 0,2788) = (7,7212; 8,2788)$$

b) $\hat{p} = P(\{\text{más de 6 horas}\}) = \dfrac{75}{100} = 0,75$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow E = 1,64\sqrt{\frac{0,75 \cdot 0,25}{100}} = 0,071$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,75 - 0,071; 0,75 + 0,071) = (0,679; 0,821) = (67,9\,\%; 82,1\,\%)$$

5.2.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.5 Calcular

a) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de turistas asiáticos en Asturias a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,05 y un nivel de confianza del 95 %?

b) En una muestra aleatoria de 800 turistas que visitan Asturias se obtuvo que solo 80 de ellos son asiáticos. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo para estimar la proporción de turistas asiáticos en Asturias.

Solución:

a) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow 0,05 = 1,96\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 0,5}{0,05}\right)^2 = 384{,}16 \Longrightarrow$$

$$n = 385$$

b)

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow E = 1,96\sqrt{\frac{0,1\cdot 0,9}{800}} = 0,0208$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,1 - 0,0208; 0,1 + 0,0208) = (0,0792; 0,1208) = (7,92\,\%; 12,08\,\%)$$

Problema 5.6 Con el objetivo de estudiar los ingresos anuales de los ejecutivos de multinacionales, se seleccionó una muestra aleatoria de 576 ejecutivos, cuyos ingresos totales (suma de los ingresos de los 576 ejecutivos) el último año ascendieron a 28,8 millones de euros. Se supone además que los ingresos anuales de este tipo de ejecutivos sigue una distribución normal con desviación típica 3000 euros.

a) Construye un intervalo de confianza para los ingresos medios anuales de este colectivo, al 99 % de confianza.

b) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar los verdaderos ingresos medios anuales a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 500 euros y un nivel de confianza del 99 %?

Solución:

$$N(\mu; 3000)$$

a) $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,58$

$n = 576$ y $\overline{X} = 50000$:

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,58\frac{3000}{\sqrt{576}} = 322,5$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (50000 - 322,5; 50000 + 322,5) = (49677,5; 50322,5)$$

b)

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 500 = 2,58\frac{3000}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{2,58\cdot 3000}{500}\right)^2 = 239,6304 \Longrightarrow$$

$$n = 340$$

5.3. Islas Baleares

5.3.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.7 Resolver los siguientes apartados:

a) El peso de los habitantes de una ciudad tiene una media de 67 kg y una desviación típica de 5 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que la media del peso de 100 personas supere los 68,5 kg? ¿Y que sea menor que 68 kg ?.

b) En un hospital se ha tomado la temperatura a una muestra de 64 pacientes, para estimar la temperatura media de los enfermos. La media de la muestra ha sido de 37,1 C, y la desviación típica de la población es de 1,04 C. Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza es del 99 %. Interpreta el resultado en el entorno del problema.

Solución:

a) $N(67;5)$ y $n = 100 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(\mu; \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(67;0,5)$

$P(\overline{X} \geq 68,5) = P\left(Z > \dfrac{68,5-67}{0,5}\right) = P(Z > 3) = 1 - P(Z < 3) = 1 - 0,9987 = 0,0013$

$P(\overline{X} \leq 68) = P\left(Z < \dfrac{68-67}{0,5}\right) = P(Z < 2) = 0,9772$

b) $n = 64$, $\overline{X} = 37,1$, $\sigma = 1,04$ y $NC = 0,99$:
$\alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005 \Longrightarrow P(Z < Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow$
$Z_{\alpha/2} = 2,58$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,58\frac{1,04}{\sqrt{64}} = 0,3354$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (37,1 - 0,3354; 37,1 + 0,3354) = (36,76; 37,44)$$

5.3.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.8 El 70 % de los alumnos de bachillerato tienen móvil.

a) Si un centro tiene 1.400 alumnos de bachillerato, ¿cuántos se espera que tengan móvil?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, en una muestra aleatoria con repetición de 150 alumnos de bachillerato, haya más de 100 con teléfono móvil?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que, en una muestra aleatoria con repetición de 200 alumnos de bachillerato, haya 140 o menos con teléfono móvil?

Solución:

$$B(n;0,7)$$

a) $np = 1400 \cdot 0,7 = 980$ alumnos

b) $B(150;0,7)$ tenemos $n > 10$, $np = 105 > 5$ y $nq = 45 > 5 \Longrightarrow B(150;0,7)$ se comporta como $N(nq, \sqrt{npq}) = N(105;5,61)$

$P(X > 100) = P\left(Z > \dfrac{100,5-105}{5,61}\right) = P(Z > -0,8) = 1 - P(Z < -0,8) = 1 - (1 - P(Z < 0,8)) = 0,7881$

c) $B(200;0,7)$ tenemos $n > 10$, $np = 140 > 5$ y $nq = 60 > 5 \Longrightarrow B(200;0,7)$ se comporta como $N(nq, \sqrt{npq}) = N(140;6,481)$

$P(X \leq 140) = P\left(Z < \dfrac{140,5-140}{6,481}\right) = P(Z < 0,08) = 0,5319$

5.4. Islas Canarias

5.4.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.9 A partir de una muestra de 225 parados, se estima que un intervalo de confianza para la prestación social media que reciben está entre 407,72 y 442,28 euros (ambos incluidos). Suponiendo hipótesis de normalidad, con una desviación típica de 90 euros:

a) ¿Cuál es la media muestral obtenida?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?

c) Usando la estimación puntual de la prestación social media obtenida en el apartado a), ¿cuál es la probabilidad de que la media de la prestación social de 25 parados sea mayor o igual que 430 euros?

Solución:

a) $n = 225$ e $IC = [407,72; 442,28] = [\overline{X} - E; \overline{X} + E] \Longrightarrow$

$$\begin{cases} \overline{X} - E = 407,72 \\ \overline{X} + E = 442,28 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{X} = 425 \\ E = 17,28 \end{cases}$$

b)

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 17,28 = Z_{\alpha/2}\frac{90}{\sqrt{225}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,88$$

$$P(Z < 2,88) = 0,998 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,004 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 0,996 = 99,6\,\%$$

c) Estamos en una $N(425; 90)$ y sacamos una muestra $n = 25 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(425; \frac{90}{\sqrt{25}}\right) = N\,(425; 18)$:

$$P(\overline{X} \geq 430) = P\left(Z > \frac{430 - 425}{18}\right) = P(Z > 0,28) = 1 - P(Z < 0,28) = 0,3897$$

Problema 5.10 Se desea estimar la proporción p de individuos daltónicos de una población a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de individuos de tamaño n.

a) A partir de estudios realizados en poblaciones similares, se cree que el porcentaje de daltónicos en esta población está en torno al 30 %. Utilizando este valor, calcular el tamaño de la muestra para que, con un nivel de confianza del 0,95, el error cometido en la estimación de p sea inferior al 3,1 %.

b) Finalmente se toma una muestra de 64 individuos, en la que se observa un 35 % de individuos daltónicos. Determinar, usando un nivel de confianza del 99 %, el correspondiente intervalo de confianza para la proporción de daltónicos de la población.

Solución:

a) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow 0,031 = 1,96\sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96}{0,031}\right)^2 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 839,48 \Longrightarrow$$

$$n = 840$$

b) $n = 64$, $\hat{p} = 0,35$ y $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,58$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 2,58\sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{64}} = 0,1538$$

$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,35-0,1538; 0,35+0,1538) = (0,1962; 0,5038) = (19,62\,\%; 50,38\,\%)$

Problema 5.11 En cierta región, el peso de los jóvenes que sufren diabetes tipo 2 sigue una distribución normal de media 89 kilogramos y desviación típica igual a 20 kilogramos. Determinar:

a) El porcentaje de jóvenes de esa región, con diabetes tipo 2 que pesa entre 86 y 100 kilogramos.

b) La probabilidad de que el peso medio de un grupo de 25 jóvenes de esa región, con diabetes tipo 2, sea superior a 90 kilogramos.

Solución:

$$N(89; 20)$$

a) $P(86 \leq X \leq 100) = P\left(\frac{86-89}{20} < Z < \frac{100-89}{20}\right) = P(-0,15 < Z < 0,55) = P(Z < 0,55) - P(Z < -0,15) = P(Z < 0,55) - (1 - P(Z < 0,15)) = 0,7088 - (1 - 0,5596) = 0,2684 \Longrightarrow 26,84\,\%$

b) $n = 25 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(89; \frac{20}{\sqrt{25}}\right) = N\,(89; 4)$.

$P(\overline{X} \geq 90) = P\left(Z > \dfrac{90-89}{4}\right) = P(Z > 0,25) = 1 - P(Z < 0,25) = 1 - 0,5987 = 0,4013$

5.4.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.12 Un estudio sobre la proporción de habitantes mayores de 60 años, sin dispositivos móviles, de una determinada ciudad, ha dado el intervalo de confianza $[0,1804, 0,2196]$, con un nivel de confianza del 95 %. Suponiendo que dicha proporción se puede aproximar por una distribución normal:

a) ¿Cuál es la proporción muestral de habitantes sin dispositivos móviles?

b) ¿Cuál es el tamaño de la muestra utilizado?

c) Con un nivel de confianza del 99 % y con la misma información muestral, ¿cuál sería el correspondiente intervalo?

Solución:

a) $IC = [0,1804, 0,2196] = [\hat{p} - E; \hat{p} + E] \Longrightarrow$

$$\begin{cases} \hat{p} - E = 0,1804 \\ \hat{p} + E = 0,2196 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \hat{p} = 0,2 \\ E = 0,0196 \end{cases}$$

b) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow 0,0196 = 1,96\sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{n}} \Longrightarrow n = 1600$$

c) $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,58$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow E = 2,58\sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{1600}} = 0,0258$$

$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,2 - 0,0258; 0,2 + 0,0258) = (0,1742; 0,2258) = (17,42\,\%; 22,58\,\%)$

Problema 5.13 Debido a la problemática de tráfico por las mañanas en el acceso a las grandes ciudades, una empresa quiere estudiar el tiempo empleado en llegar al puesto de trabajo de sus trabajadores. Para una muestra de 100 empleados, se ha obtenido un tiempo medio de 40 minutos. Si la variable sigue una distribución normal cuya desviación típica es de 12 minutos.

a) Determinar el intervalo de confianza para la media con un nivel de confianza del 88 %

b) ¿Qué tamaño muestral se necesita para estimar el tiempo en llegar al trabajo, con un error de 4 minutos y con un nivel de confianza del 95 %?

Solución:

$$N(\mu; 12)$$

a) $n = 100$, $\overline{X} = 40$ y $NC = 0,88 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,12 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,06$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,06 = 0,94 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,555$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,555\frac{12}{\sqrt{100}} = 1,866$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (40 - 1,866; 40 + 1,866) = (38,134; 41,866)$$

b) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 4 = 1,96\frac{12}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 34,5744 \Longrightarrow n = 35$$

Problema 5.14 En una empresa hay 250 empleados. Su edad sigue una distribución normal de media 44 años y de desviación típica 18 años.

a) ¿Cuántos empleados se espera que haya con más de 62 años?

b) ¿Cuántos empleados se espera que haya con menos de 40 años?

c) Halla el número de empleados que podría conseguir el carnet joven de transporte que promociona el Ayuntamiento si el requisito es ser mayor de edad y no haber cumplido los 30 años.

Solución:

$$N(44; 18)$$

a) $P(X \geq 62) = P\left(Z > \dfrac{62-44}{18}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$

$$250 \cdot P(X \geq 62) = 250 \cdot 0,1587 = 39,675$$

Entre 39 y 40 trabajadores, se estima, que tienen más de 62 años.

b) $P(X \leq 40) = P\left(Z < \dfrac{40-44}{18}\right) = P(Z < -0,22) = 1 - P(Z < 0,22) = 1 - 0,5871 = 0,4129$

$$250 \cdot P(X \leq 40) = 250 \cdot 0,4129 = 103,225$$

Entre 103 y 104 trabajadores, se estima, que tienen menos de 40 años.

c) $P(18 \leq X \leq 30) = P\left(\dfrac{18-44}{18} < Z < \dfrac{30-44}{18}\right) = P(-1,44 < Z < -0,78) = P(Z < -0,78) - P(Z < -1,44) = 1 - P(Z < 0,78) - (1 - P(Z < 1,44)) = P(Z < 1,44) - P(Z < 0,78) = 0,9251 - 0,7823 = 0,1428$

$$250 \cdot P(18 \leq X \leq 30) = 250 \cdot 0,1428 = 35,7$$

Entre 35 y 36 trabajadores, se estima, que podrían conseguir el carnet joven de transporte.

5.5. Cantabria

5.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.15 El gasto mensual en alquiler de los inquilinos de la zona centro de determinada ciudad, sigue una distribución normal con desviación típica 73 euros. Una muestra aleatoria de 350 inquilinos da como resultado una renta media de 689,3 euros.

a) Obtener el intervalo de confianza del 93 % para la renta media.

b) ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 91 % sea un tercio del obtenido en el apartado anterior?

Solución:

$$N(\mu; 73)$$

a) $n = 350$, $\overline{X} = 689,3$ y $NC = 0,93 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,07 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,035$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,035 = 0,965 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,815$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,815\frac{73}{\sqrt{350}} = 7,0822$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (689,3 - 7,0822; 689,3 + 7,0822) = (682,2178; 696,3822)$$

b) $E = \frac{7,0822}{3} = 2,361$ y $NC = 0,91 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,09 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,045$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,045 = 0,955 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,705$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2,361 = 1,705\frac{73}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 2779,089 \Longrightarrow n = 2780$$

5.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.16 La edad de los asistentes a un concierto de música clásica celebrado recientemente en la ciudad, sigue una distribución normal con desviación típica de 3 años. Una muestra aleatoria de 350 espectadores ha dado como resultado una edad media de 64,3 años.

a) Obtener el intervalo de confianza del 92 % para la edad media de los asistentes.

b) ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra si deseamos que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98 % sea 0,7?

Solución:

$$N(\mu; 3)$$

a) $n = 350$, $\overline{X} = 64,3$ y $NC = 0,92 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,08 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,04$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,04 = 0,96 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,755$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,755\frac{3}{\sqrt{350}} = 0,2814$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (64,3 - 0,2814; 64,3 + 0,2814) = (64,0186; 64,5814)$$

b) $E = 0,7$ y $NC = 0,98 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,02 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,01$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,01 = 0,99 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,325$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,7 = 2,325\frac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 2779,089 \Longrightarrow n \ge 99,287 \Longrightarrow n = 100$$

5.6. Castilla León

5.6.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.17 Las autoridades sanitarias están estudiando los efectos del tabaco en la salud. El tiempo que tarda un fumador en dejar definitivamente de fumar se ajusta a una distribución normal, de media 5 meses y desviación típica 2 meses. Con esta información:

a) Calcula la probabilidad de que un fumador tarde más de 4 meses en dejar definitivamente de fumar?

b) Si se toman 50 fumadores, calcula la probabilidad de que el tiempo medio que tardan los 50 fumadores en dejar definitivamente de fumar sea inferior a 6 meses.

Solución:

$$N(5; 2)$$

a) $P(X \ge 4) = P\left(Z > \frac{4-5}{2}\right) = P(Z > -0,5) = P(Z < 0,5) = 0,6915$

b) $n = 50 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(5; \frac{2}{\sqrt{50}}\right) = N(5; 0,283)$

$$P(\overline{X} \le 6) = P\left(Z < \frac{6-5}{0,283}\right) = P(z < 3,54) = 0,9998$$

Problema 5.18 En el aeropuerto A, se toma una muestra de 100 días y se observa que en 25 hay saturación aérea. Con esos datos, se calculan dos intervalos de confianza para el parámetro proporción de días con saturación aérea en el aeropuerto A: $[0,122; 0,378]$ y $[0,165; 0,335]$ ¿Cuál es el intervalo de menor confianza? Justifica tu respuesta.

Solución:

- $IC = [0,122; 0,378] = [\hat{p} - E; \hat{p} + E] \Longrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{p} - E = 0,122 \\ \hat{p} + E = 0,378 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{p} = 0,25 \\ E = 0,128 \end{array} \right.$$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,128 = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{100}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = z = 2,956$$

$$P(Z < 2,96) = 0,9985 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,003 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 0,997 = 99,7\,\%$$

- $IC = [0,165; 0,335] = [\overline{X} - E; \overline{X} + E] \Longrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{p} - E = 0,165 \\ \hat{p} + E = 0,335 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{p} = 0,25 \\ E = 0,085 \end{array} \right.$$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,085 = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{100}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = z = 1,963$$

$$P(Z < 1,96) = 0,9750 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 0,95 = 95\,\%$$

- el intervalo $[0,165; 0,335]$ es el de menor confianza.

5.6.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.19 Se sabe que el tiempo de resolución de los exámenes propuestos por un profesor universitario sigue una distribución normal de media 74 minutos.

a) Si en el primer examen de este curso la desviación típica poblacional σ del tiempo de resolución fue 8 minutos, ¿cuál es la probabilidad de haber necesitado para resolver el examen más de los 90 minutos disponibles?

b) En el segundo examen la desviación típica poblacional σ del tiempo de resolución fue de 9 minutos. Si se presentaron 36 alumnos a este segundo examen, determina la probabilidad de que el tiempo medio de resolución de esos alumnos fuera inferior a 77 minutos.

Solución:

$$N(74; \sigma)$$

a) $N(74; 8)$. $P(X \geq 90) = P\left(Z > \frac{90-74}{8}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

b) $N(74; 9)$ y $n = 36 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(74; \frac{9}{\sqrt{36}}\right) = N(74; 1,5)$

$$P(\overline{X} \leq 77) = P\left(Z < \frac{77-74}{1,5}\right) = P(z < 2) = 0,9772$$

5.7. Castilla La Mancha

5.7.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2018

Problema 5.20 Se ha tomado una muestra aleatoria del contenido en gramos de azúcar en frascos de 500 gramos de kétchup en una muestra de 10 frascos y ha resultado ser: 60, 80, 120, 95, 65, 70, 75, 85, 100 y 90. Suponiendo que el contenido en azúcar en gramos del kétchup se distribuye según una ley normal de desviación típica $\sigma = 10$ gramos, se pide:

a) Halla el intervalo de confianza del 97 % para el contenido medio de azúcar en un frasco de 500 gramos de kétchup.

b) Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza.

c) ¿Crees que la media poblacional μ del contenido en gramos de azúcar es de 85 gramos con una probabilidad del 98,5 %? Razona tu respuesta.

Solución:

a) $n = 10$, $\overline{X} = 84$ y $NC = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,015 = 0,985 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,17$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 2,17\frac{10}{\sqrt{10}} = 6,86$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (84 - 6,86; 84 + 6,86) = (77,14; 90,86)$$

b) Si se aumenta el tamaño muestral, mientras que la desviación típica y el nivel de confianza permanecen inalterables, el error se hace más pequeño y, en consecuencia, la amplitud del intervalo disminuye.

c) $NC = 0,985 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,015 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,0075$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,0075 = 0,9925 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,43$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 2,43\frac{10}{\sqrt{10}} = 7,68$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (84 - 7,68; 84 + 7,68) = (76,32; 91,68)$$

85 gramos está dentro del intervalo de confianza y se aceptaría que puede ser la media con una confianza del 98,5 %.

Problema 5.21 El tiempo de atención a un paciente por parte de un centro médico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 2$ minutos. Se hace un estudio de los tiempos de atención de 10 clientes al azar, siendo estos tiempos: 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15 y 16 minutos respectivamente.

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de atención al paciente por parte del centro, con un nivel de confianza del 95 %.

b) ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto?

Solución:

a) $n = 10$, $\overline{X} = 10,3$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{2}{\sqrt{10}} = 1,24$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (10,3 - 1,24; 10,3 + 1,24) = (9,06; 11,54)$$

b)

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1,96\frac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 15,37 \Longrightarrow n = 16$$

5.7.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.22 El tiempo de uso de móvil por día de los alumnos de un instituto sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 20$ minutos. Se eligió una muestra aleatoria de 36 alumnos y se observó que la media de tiempo usando el móvil para esa muestra era de 2 horas.

a) Halla un intervalo de confianza para la media de tiempo de uso de móvil por día con un nivel de confianza del 95 %.

b) ¿Se puede admitir que la media poblacional sea $\mu = 2,3$ horas con un nivel de confianza del 95 %? Explica razonadamente cómo se podría aumentar o disminuir la amplitud del intervalo. Razona tus respuestas.

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 94,64 %?

Solución:

a) $n = 36$, $\overline{X} = 2$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{0,3}{\sqrt{36}} = 0,098$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (2 - 0,098; 2 + 0,098) = (1,902; 2,098)$$

b) $\mu = 2,3$ horas no está dentro del intervalo de confianza y no se aceptaría que pueda ser la media con una confianza del 95 %.

c) $NC = 0,9464 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,0536 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,0268$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}0268 = 0,9732 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,93$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,93\frac{0,3}{\sqrt{100}} = 0,0579$$

Problema 5.23 El contenido en grasas saturadas por litro de leche sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 0,1$ g/l. Se tomó una muestra aleatoria de 100 litros de leche obteniéndose el intervalo de confianza $(0,682; 0,718)$ para el contenido medio de grasas saturadas en la muestra.

a) Calcula el contenido medio de grasas saturadas para los 100 litros de leche de la muestra.

b) Calcula el nivel de confianza con el que se ha obtenido dicho intervalo.

c) Halla un intervalo de confianza para la el contenido medio de grasas saturadas con un nivel de confianza del 95 %.

d) ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con un nivel de confianza del 95 %, el error máximo admisible sea menor que 0,01 g/l?

Solución:

a) $IC = (0,682; 0,718) = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) \Longrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{X} - E = 0,682 \\ \overline{X} + E = 0,718 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{X} = 0,7 \\ E = 0,018 \end{array} \right.$$

b)

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,018 = Z_{\alpha/2}\frac{0,1}{\sqrt{100}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,8$$

$$P(Z < 1,8) = 0,9641 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0{,}0718 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 0,9282 \Longrightarrow 92,82\,\%$$

c) $n = 100$, $\overline{X} = 0,7$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{0,1}{\sqrt{100}} = 0,0196$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (0,7 - 0,0196; 0,7 + 0,0196) = (0,6804, 0,7196)$$

d)

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,01 = 1,96\frac{0,1}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 384,16 \Longrightarrow n = 385$$

5.8. Cataluña

5.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Sin problemas de este tipo.

5.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Sin problemas de este tipo.

5.9. País Vasco

5.9.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.24 En una población se toma una muestra aleatoria de 500 personas y se les pregunta si son aficionadas al deporte o no. De ellas 350 respondieron que sí son aficionadas al deporte y el resto que no. Con esta información se pide:

a) Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que son aficionadas al deporte. Calcular, además, el error máximo para dicho nivel de confianza.

b) Interpretar los resultados obtenidos.

Solución:

a) $n = 500$, $\hat{p} = \frac{350}{500} = 0,7$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{500}} = 0,0402$$

$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,7 - 0,0402; 0,7 + 0,0402) = (0,6598; 0,7402) = (65,98\,\%; 74,02\,\%)$

b) La proporción de población que son aficionados al deporte está entre el 65,98 % y el 74,02 % con una probabilidad del 95 % de que esta afirmación sea correcta.

Problema 5.25 En una determinada ciudad el gasto anual en transporte público realizado por las familias sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 75 euros. Se toma una muestra aleatoria de 100 familias, de la que se obtiene un gasto medio de 250 euros.

a) Calcular entre qué valores estará el gasto medio de la población con un nivel de confianza del 99 %.

b) ¿Qué tamaño debería tener la muestra para que el error máximo sea de 10 euros con un nivel de confianza del 99 %?

Solución:

a) $n = 100$, $\overline{X} = 250$ y $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,58$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 2,58\frac{75}{\sqrt{100}} = 19,35$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (250 - 19,35; 250 + 19,35) = (230,65; 269,35)$$

b)

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 10 = 2,58\frac{75}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 374,4225 \Longrightarrow n = 375$$

5.9.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.26 Tras realizar una prueba de cultura general entre los habitantes de cierta población, se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución normal, de media 68 y desviación típica 18. Se desea clasificar a los habitantes en tres grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de cultura general excelente), de manera que el primer grupo abarque un 20 % de la población, el segundo un 65 %, y el tercero el 15 % restante. ¿Cuáles son las puntuaciones que marcan el paso de un grupo a otro?
Solución:

$$N(68; 18)$$

- El 20 %:
  $P(X \leq a) = P\left(Z < \dfrac{a-68}{18}\right) = 0,2 \Longrightarrow P\left(Z < \dfrac{-a+68}{18}\right) = 0,8 \Longrightarrow \dfrac{-a+68}{18} = 0,845 \Longrightarrow a = 52,79$
- El $20\,\% + 65\,\% = 85\,\%$:
  $P(X \leq a) = P\left(Z < \dfrac{a-68}{18}\right) = 0,85 \Longrightarrow \dfrac{a-68}{18} = 1,035 \Longrightarrow a = 86,63$

En conclusión:

- Por debajo de una calificación de 52,79 puntos estarán el 20 % de la población con baja cultura general.
- Con una calificación comprendida entre 52,79 y 86,63 puntos estarán el 65 % de la población con cultura general aceptable.
- Con una calificación superior a 86,63 puntos estarán el 15 % de la población con cultura general excelente.

Problema 5.27 La nota de la Evaluación para el Acceso a la Universidad del alumnado que se ha preinscrito en la carrera A sigue una distribución normal de media 6,8 y desviación típica 0,6. Por otro lado, la nota de los/las alumnos/as que se han preinscrito en la carrera B sigue una distribución normal de media 7 y desviación típica 0,5. Si en ambos casos solo se puede admitir al 25 % del alumnado preinscrito, ¿cuál de las dos carreras requerirá una nota mínima más baja?

Solución:

- A se comporta como una $N(6,8; 0,6)$, el 25 %:
  $P(X \geq a) = 1 - P\left(Z < \dfrac{a-6,8}{0,6}\right) = 0,25 \Longrightarrow P\left(Z < \dfrac{a-6,8}{0,6}\right) = 0,75 \Longrightarrow \dfrac{a-6,8}{0,6} = 0,675 \Longrightarrow a = 7,205.$
- B se comporta como una $N(7; 0,5)$, el 25 %:
  $P(X \geq a) = 1 - P\left(Z < \dfrac{a-7}{0,5}\right) = 0,25 \Longrightarrow P\left(Z < \dfrac{a-7}{0,5}\right) = 0,75 \Longrightarrow \dfrac{a-7}{0,5} = 0,675 \Longrightarrow a = 7,338.$

La nota de corte es más baja en la carrera A.

5.10. Extremadura

5.10.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.28 El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono sigue una distribución normal con desviación típica 24 horas. Se pregunta a 100 clientes por el tiempo invertido en la portabilidad, obteniéndose una media de 36 horas. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % para la media de tiempo que tarda dicha compañía en hacer efectiva la portabilidad.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 5?

Solución:

$$N(\mu; 24)$$

a) $n = 100$, $\overline{X} = 36$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{24}{\sqrt{100}} = 4,704$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (36 - 4,704; 36 + 4,704) = (31,296; 40,704)$$

b) $E = \dfrac{5}{2} = 2,5$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2,5 = 1,96\frac{24}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 354,041856 \Longrightarrow n = 355$$

5.10.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.29 Se realiza un estudio sobre el tiempo de reacción de los conductores ante un imprevisto. Se considera una población de 10000 condudores, de los cuales 5000 tienen una antigüedad superior a 10 años, 3000 tienen una antigüedad entre 1 y 10 años y el resto tienen una antigüedad inferior a 3 años. Se selecciona una muestra de 500 conductores mediante muestreo estratificado cou afijación proporcional. Se pide, justificando la respuesta:

a) ¿Cuántos conductores de cada uno de los estratos mencionados anteriormente se incluirán en la muestra.

b) En los conductores con una antigüedad de menos de 3 años que resultan elegidos de la muestra, se obnerva que el tiempo medio de reacción es de 1,2 segundos. Supuesta que dicha variable tiene distribudón normal con desviación típica 0,3 segundos, proporcionar uu intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de reacción de estos conductores.

Solución:

a) A es la antigüedad en la conducción.

	$a > 10$	$3 < A < 10$	$A < 3$	Total
Población	5000	3000	2000	10000
Muestra	x	y	z	500

$$\frac{5000}{x} = \frac{3000}{y} = \frac{2000}{z} = \frac{10000}{500} \Longrightarrow$$
$$x = 250, \quad y = 150, \quad z = 100$$

b) $A < 3 \Longrightarrow n = 100$, $\overline{X} = 1,2$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{0,3}{\sqrt{100}} = 0,0588$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (1,2 - 0,0588; 1,2 + 0,0588) = (1,1412; 1,2588)$$

5.11. Madrid

5.11.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.30 El precio mensual de las clases de Pilates en una región se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y varianza 49 euros^2.

a) Seleccionada una muestra aleatoria simple de 64 centros en los que se imparte este tipo de clases, el precio medio mensual observado fue de 34 euros. Obténgase un intervalo de confianza al 99,2 % para estimar el precio medio mensual, μ, de las clases de Pilates.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 3 euros, con una confianza del 95 %.

Solución:
$N(\mu; 7)$ ya que $\sigma^2 = Var(X) = 49 \Longrightarrow \sigma = 7$

a) $n = 64$, $\overline{X} = 34$ y $NC = 0,992$:
$1 - \alpha = 0,992 \Longrightarrow \alpha = 0,008 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,004$
$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,004 = 0,996 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 2,65$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,65\frac{7}{\sqrt{64}} = 2,319 \Longrightarrow$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (34 - 2,319; 34 + 2,319) = (31,681; 36,319)$$

b) $E = 3$ y $NC = 95\,\% \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 3 = 1,96\frac{7}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(1,96\frac{7}{3}\right)^2 = 20,91 \Longrightarrow n = 21$$

Problema 5.31 El peso de las mochilas escolares de los niños de 5º y 6º de primaria, medido en kilogramos, puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kilogramos y desviación típica $\sigma = 105$ kilogramos.

a) En un estudio se tomó una muestra aleatoria simple de dichas mochilas escolares y se estimó el peso medio utilizando un intervalo de confianza del 95 %. La amplitud de este intervalo resultó ser 0,49 kilogramos. Obténgase el número de mochilas seleccionadas en la muestra.

b) Supóngase que $\mu = 6$ kilogramos. Seleccionada una muestra aleatoria simple de 225 mochilas escolares, calcúlese la probabilidad de que el peso medio muestral supere los 5,75 kilogramos, que es la cantidad máxima recomendada para los escolares de estos cursos.

Solución:

$$N(\mu; 1,5)$$

a) $2E = 0,49 \Longrightarrow E = 0,245$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{1,5}{\sqrt{n}} = 0,245 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,5 \cdot 1,96}{0,245}\right)^2 = 144 \Longrightarrow$$

$$n = 144$$

b) $\mu = 6$, $\sigma = 1,5$ y $n = 225$.

$$P(\overline{X} \geq 5,75) = P\left(Z \geq \frac{5,75 - 6}{1,5/\sqrt{225}}\right) = P(Z \geq -2,5) =$$

$$1 - P(Z \leq -2,5) = 1 - (1 - P(Z \leq 2,5)) = P(Z \leq 2,5) = 0,9938$$

5.11.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.32 Una máquina rellena paquetes de harina. El peso de la harina en cada paquete se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 25 gramos.

a) Se analiza el peso del contenido de 15 paquetes. La media muestral de estos pesos resulta ser 560 gramos. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional.

b) Se sabe que la media poblacional del peso de la harina de un paquete es 560 gramos. Calcúlese la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 565 gramos para una muestra de 50 paquetes.

Solución:

$$N(\mu; 25)$$

a) $n = 15$, $\overline{X} = 560$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{25}{\sqrt{15}} = 12,652$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (547,348; 572,652)$$

b) $\mu = 560 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(560, \frac{25}{\sqrt{50}}\right) = N(560; 3,54)$

$$P(\overline{X} \geq 565) = P\left(Z \geq \frac{565 - 560}{3,54}\right) = P(Z \geq 1,41) =$$

$$1 - P(Z \leq 1,41) = 1 - 0,9207 = 0,0793$$

Problema 5.33 Para estudiar el absentismo laboral injustificado, se desea estimar la proporción de trabajadores, P, que no acuden a su puesto de trabajo sin justificación al menos un día al año.

a) Sabiendo que la proporción poblacional de absentismo laboral injustificado es $P = 0,22$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de trabajadores para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 4 %.

b) Tomada al azar una muestra de 1000 trabajadores, se encontró que 250 había faltado injustificadamente a su puesto de trabajo al menos una vez al año. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de individuos que se ausentan en el trabajo al menos una vez al año sin ninguna justificación.

Solución:

a) $p = 0,22$, $q = 0,78$ y $z_{\alpha/2} = 2,576$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{2,576}{0,04}\right)^2 (0,22 \cdot 0,78) = 711,69$$

Luego $n = 712$.

b) $n = 1000$, $z_{\alpha/2} = 1,96$ $p = \dfrac{250}{1000} = 0,25 \Longrightarrow q = 0,75$.

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{1000}} = 0,0268$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (0,25 - 0,0268; 0,25 + 0,0268) =$$
$$(0,2232; 0,2768) = (22,32\,\%; 27,68\,\%)$$

5.12. Valencia

5.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Sin problemas de este tipo.

5.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Sin problemas de este tipo.

5.13. La Rioja

5.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.34 Una cadena de supermercados compra naranjas en contenedores cada uno de los cuales contiene 400 bolsas cuyo peso medio es 6 kg con una desviación típica de 550 gr.

a) Se toma al azar un contenedor, ¿cuál es la probabilidad de que la media de los pesos de las bolsas de ese contenedor sea menor que 5 kg y 950 gr?

b) Pedro no conoce el peso medio de las bolsas pero sabe que la desviación típica es 550 gr. Ha pesado todas las bolsas de un contenedor (400) y ha obtenido un peso medio de 6 kg y 30 gr. Con esos datos ha calculado para el peso medio de las bolsas un intervalo de confianza del 90 % ¿Cuál es el intervalo calculado por Pedro?

Solución:

a) $P(\overline{X} \leq 5,95)) = P\left(Z < \dfrac{5,95-6}{0,55/\sqrt{400}}\right) = P(Z < -1,82) = 1 - P(Z < 1,82) = 1 - 0,9656 = 0,0344$

b) $n = 15$, $\overline{X} = 6,03$ y $NC = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,645\frac{0,55}{\sqrt{400}} = 0,045$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (6,03 - 0,045; 6,03 + 0,045) = (5,985; 6,075)$$

Problema 5.35 Un balón de baloncesto debe pesar entre 567 y 650 gr. Se han fabricado los balones con los que se jugará en China a finales de verano la Copa del Mundo. El peso de los balones fabricados sigue una distribución normal de desviación típica 25 gr. Se distribuyen en cajones de 100 unidades.

a) Si el peso medio de los balones fuese 605 gr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de los balones de un cajón superase los 603 gr?

b) El peso medio de una muestra de 4 cajones (400 balones) es de 610 gr, determina un intervalo de confianza del 95 % para la media de la producción.

Solución:

a) $P(\overline{X} \geq 603)) = P\left(Z > \dfrac{603-605}{25/\sqrt{100}}\right) = P(Z > -0,8) = 1 - P(Z < -0,8) = 1 - (1 - P(Z < 0,8)) = P(Z < 0,8) = 0,7881$

b) $n = 400$, $\overline{X} = 610$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{25}{\sqrt{400}} = 2,45$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (610 - 2,45; 610 + 2,45) = (607,55; 612,45)$$

5.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.36 Una máquina envasa café en bolsas siguiendo una distribución normal de 500 gr de peso medio y una desviación típica de 30 gr. Las bolsas se empaquetan en cajas de 100 unidades.

a) Se toma al azar una caja de 100 bolsas, ¿cuál es la probabilidad de que la media de los pesos de las bolsas de esa caja sea menor que 495 gr?

b) Cristina no conoce el peso medio de las bolsas, aunque conoce la desviación típica (30 gr) Ha pesado un paquete de 100 bolsas y ha obtenido un peso medio de 505 gr; con estos datos ha calculado un intervalo de confianza del 95 % para la media. ¿Cuál es el intervalo determinado por Cristina?

Solución:

$$N(500; 30)$$

a) $n = 100$, $P(\overline{X} \leq 495)) = P\left(Z < \dfrac{495-500}{30/\sqrt{100}}\right) = P(Z < -1,67) = 1 - P(Z < 1,67) = 1 - 0,9525 = 0,0475$

b) $n = 100$, $\overline{X} = 505$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{30}{\sqrt{100}} = 5,88$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (505 - 5,88; 505 + 5,88) = (499,12; 510,88)$$

Problema 5.37 El peso de los estudiantes que ingresan en la Universidad sigue una distribución normal de desviación típica 15 kg.

a) Si el peso medio fuese 70 kg, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de 100 estudiantes superase los 72 kg?

b) El peso medio de una muestra de 225 alumnos es de 72 kg, determina un intervalo de confianza del 95 % para el peso medio de los estudiantes que ingresan en la Universidad.

Solución:

$$N(\mu; 15)$$

a) $n = 100$, $\mu = 70$, $P(\overline{X} \geq 72)) = P\left(Z > \dfrac{72-70}{15/\sqrt{100}}\right) = P(Z > 1,33) = 1 - P(Z < 1,33) = 1 - 0,9082 = 0,0918$

b) $n = 225$, $\overline{X} = 72$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{15}{\sqrt{225}} = 1,96$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (72 - 1,96; 72 + 1,96) = (70,04; 73,96)$$

5.14. Murcia

5.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.38 El tiempo, en años, de renovación de un ordenador portátil se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica de 0,9 años. Si tomamos al azar a 900 usuarios, se obtiene una media muestral de 3,5 años. Hallar el intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de renovación de un ordenador portátil.

Solución:

$$N(\mu; 0,9), \quad n = 900, \quad NC = 95\,\% \;\text{ y }\; \overline{X} = 3,5$$

$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{0,9}{\sqrt{900}} = 0,0588$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (3,5 - 0,0588; 3,5 + 0,0588) = (3,4412; 3,5588)$$

Problema 5.39 El tiempo en minutos de conexión a Internet de los estudiantes de un centro de secundaria, sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. Para poder estimar la media del tiempo de conexión, se construye un intervalo de confianza con un error menor o igual a 5 minutos, con un nivel de confianza del 95 %. Determine cuál es el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar.

Solución:

$$N(\mu; 10), \quad E = 5 \;\text{ y }\; NC = 95\,\%$$

$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 5 = 1,96\frac{10}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 15,3664 \Longrightarrow n = 16$$

5.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.40 Se sabe que la estatura de los individuos de Murcia es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de 6 cm. Se toma una muestra aleatoria de 225 individuos y da una media de 176 cm. Obtenga un intervalo de confianza, con un 99 % de confianza, para la media de la estatura de la población.

Solución:

$$N(\mu; 6), \quad n = 225, \quad NC = 99\,\% \;\text{ y }\; \overline{X} = 176$$

$NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,9795 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,58$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 2,58\frac{6}{\sqrt{225}} = 1,032$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (176 - 1,032; 176 + 1,032) = (174,968; 177,032)$$

Problema 5.41 En un estudio realizado por una empresa se ha obtenido que el intervalo de confianza de una variable, a un nivel de confianza del 95 %, es: $(6,824; 9,176)$. Hallar la media y el tamaño de la muestra para obtener dicho intervalo conociendo que la varianza de la distribución es de 9. Explique cada uno de los pasos realizados.
Solución:

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{X}+E=9,176\\ \overline{X}+E=6,824\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\overline{X}=8\\ E=1,176\end{array}\right. \quad \text{y} \quad \sigma=\sqrt{9}=3$$

$NC = 0,95 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1-\dfrac{\alpha}{2} = 1-0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1,176 = 1,96\frac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 25$$

5.15. Navarra

5.15.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.42 En una muestra aleatoria entre estudiantes de bachillerato de una región, 150 afirmaron que participan en actividades de voluntariado y 350 afirmaron que no realizan ese tipo de actividades.

a) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que no realizan actividades de voluntariado, con un nivel de confianza del 96 %.

b) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que participan en actividades de voluntariado, con un nivel de confianza del 92 %.

(Escriba las fórmulas necesarias)

Solución:

$$n = 500, \ \ \hat{p} = \frac{150}{500} = 0,3 \ \text{ y } \ \hat{q} = \frac{350}{500} = 0,7$$

a) $NC = 0,96 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,04 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,02$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1-\dfrac{\alpha}{2} = 1-0,02 = 0,98 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,055$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \Longrightarrow$$

$$E = 2,055\sqrt{\frac{0,3\cdot 0,7}{500}} = 0,042115$$

$IC = (\hat{q}-E; \hat{q}+E) = (0,7-0,042115; 0,7+0,042115) = (0,657885; 0,742115) = (65,79\,\%; 74,21\,\%)$

b) $NC = 0,92 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,08 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,04$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1-\dfrac{\alpha}{2} = 1-0,04 = 0,96 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,755$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \Longrightarrow E = 1,755\sqrt{\frac{0,3\cdot 0,7}{500}} = 0,03597$$

$$IC = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) = (0,3 - 0,03597; 0,3 + 0,03597) = (0,26403; 0,33597) =$$
$$(26,40\,\%; 33,60\,\%)$$

5.15.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.43 La duración de un tipo de batería para teléfonos móviles es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de tres meses. Se toma una muestra aleatoria de diez baterías y se miden las siguientes duraciones (en meses): 15.7, 7.2, 21.6, 19.4, 14.5, 17.3, 15.2, 23.4, 21.5 y 15.8

a) Construya un intervalo de confianza para la duración media de este tipo de baterías, con un nivel de confianza del 98 %.

b) Determine cuál debe ser el tamaño de la muestra para que el error máximo se reduzca a la mitad.

(Escriba las fórmulas necesarias)
Solución:

$$N(\mu; 3)$$

a) $n = 10$, $\overline{X} = 17,16$ y $NC = 0,98 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,02 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,01 = 0,99 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,325$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 2,325\frac{3}{\sqrt{10}} = 2,20569$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (17,16 - 2,20569; 17,16 + 2,20569) = (14,95431; 19,36569)$$

b) $E = \dfrac{2,205688667}{2} = 1,102844333$, y $Z_{\alpha/2} = 2,325$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1,102844333 = 2,325\frac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 40$$

5.16. Andalucía

5.16.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.44 Se desea estimar la proporción de individuos que piensan votar a un cierto partirlo político en una determinada ciudad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 300 individuos de la ciudad, resultando que 135 de ellos piensan votar a ese partido.

a) Calcule un intervalo de confianza al 97 % para la proporción de individuos que piensen votar a ese partido en dicha ciudad.

b) Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestre para estimar la proporción con un error inferior al 2 %.

(Escriba las fórmulas necesarias)

Solución:

$$n = 300, \quad \hat{p} = \frac{135}{300} = 0,45 \;\; \text{y} \;\; \hat{q} = \frac{165}{300} = 0,55$$

a) $NC = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,015 = 0,988 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,17$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \Longrightarrow$$

$$E = 2,17\sqrt{\frac{0,45\cdot 0,55}{300}} = 0,0623$$

$IC = (\hat{q}-E; \hat{q}+E) = (0,45-0,0623; 0,45+0,0623) = (0,3877; 0,5123) = (38,77\,\%; 51,23\,\%)$

b) $Z_{\alpha/2} = 2,17$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,02 = 2,17\sqrt{\frac{0,45\cdot 0,55}{n}} \Longrightarrow$$
$$n \ge 2913,632 \Longrightarrow n = 2914$$

Problema 5.45 Los directivos de una empresa desean estimar el tiempo medio que tardan los empleados en llegar al puesto de trabajo desde sus domicilios. Admitimos que dicho tiempo sigue una distribución Normal de desviación típica 8 minutos. Se elige al azar una muestra de 9 empleados de esa empresa, obteniéndose los siguientes resultados, expresados en minutos:

10 17 8 27 6 9 32 5 21

a) Determine un intervalo de confianza al 92 % para la media poblacional. .

b) Con una confianza del 95,5 %, ¿qué tamaño muestral mínimo sería necesario para estimar el tiempo medio con un error inferior a 1,5 minutos?

(Escriba las fórmulas necesarias)
Solución:

$$N(\mu; 8)$$

a) $n = 9$, $\overline{X} = 15$ y $NC = 0,92 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,08 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,04$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,04 = 0,96 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,75$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,75\frac{8}{\sqrt{9}} = 4,67$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (15 - 4,67; 15 + 4,67) = (10,33; 19,67)$$

b) $E = 1,5$, y $Z_{\alpha/2} = 2,005$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1,5 = 2,005\frac{8}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 114,35 \Longrightarrow n = 115$$

5.16.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.46 Las puntuaciones obtenidas por los participantes en un concurso se distribuyen siguiendo una ley Normal de varianza 36 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria de 64 concursantes, cuya puntuación media es 35 puntos.

a) Obtenga un intervalo, con un 92 % de confianza para la puntuación media de los participantes en dicho concurso.

b) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de concursantes, con un error inferior a 2 puntos y un nivel de confianza del 98 %.

(Escriba las fórmulas necesarias)
Solución:

$$N(\mu; 6)$$

a) $n = 64$, $\overline{X} = 35$ y $NC = 0,92 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,08 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,04$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,04 = 0,96 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,75$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,75\frac{6}{\sqrt{64}} = 1,275$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (35 - 1,275; 35 + 1,275) = (33,725; 36,275)$$

b) $E = 2$, y $Z_{\alpha/2} = 2,33$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2 = 2,33\frac{6}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 48,86 \Longrightarrow n = 49$$

Problema 5.47 Se quiere estimar la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco. Para ello se escoge aleatoriamente una muestra de 50 expedientes sanitarios de enfermos hospitalizados, resultando que el 22 % de ellos revelan que la enfermedad fue causada por el tabaco.

a) Para un nivel de confianza del 92 %, calcule un intervalo de confianza para la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco.

b) Determine cuántos expedientes hay que elegir como mínimo para que, con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral anteriores, el error que se cometa al estimar la proporción de los enfermos hospitalizarlos por causas debidas al tabaco sea inferior al 3 %.

Solución:

$$n = 50, \quad \hat{p} = 0,22 \;\text{ y }\; \hat{q} = 1 - 0,22 = 0,78$$

a) $NC = 0,92 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,08 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,04$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,04 = 0,96 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,75$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \Longrightarrow$$

$$E = 1,75\sqrt{\frac{0,22 \cdot 0,78}{50}} = 0,1025$$

$$IC = (\hat{q}-E; \hat{q}+E) = (0,22-0,1025; 0,22+0,1025) = (0,1175; 0,3225) = (11,75\,\%; 32,25\,\%)$$

b) $Z_{\alpha/2} = 1,75$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,03 = 1,75\sqrt{\frac{0,22 \cdot 0,78}{n}} \Longrightarrow$$
$$n \geq 583,917 \Longrightarrow n = 584$$

5.17. Galicia

5.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.48 Un estudio electoral con una muestra de 400 electores obtiene un intervalo para la proporción de votantes de un partido de [0,23;0,31].

a) ¿Cuánto vale la proporción muestral?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza con el que se estableció el intervalo?

c) ¿Cuál es el error máximo cometido con el intervalo anterior?

Solución:

a) $p = \dfrac{0,31 + 0,23}{2} = 0,27$

b) $E = 0,31 - 0,27 = 0,04$ y $E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,04 = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0,27\cdot 0,73}{400}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,802 \Longrightarrow$ $P(Z < 1,80) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9641 \Longrightarrow \alpha = 0,0718 \Longrightarrow NC = 1 - 0,0718 = 0,9282$, $NC = 92,82\,\%$

c) Como ya hemos calculado es de $\pm 4\,\%$.

Problema 5.49 Después de años de utilizarlo se sabe que la puntuación de un test de uso habitual en cierta rama industrial sigue una distribución normal de media 74 y desviación típica 16. En una empresa se decide realizarlo a 100 de sus empleados.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga una media muestral superior a 78 puntos, de seguirse la pauta general?

b) ¿Y la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 74 puntos?

Solución:

$$N(74, 16)$$

a) $P(\overline{X} > 78) = P\left(Z > \dfrac{78-74}{16/\sqrt{100}}\right) = P(Z > 2,5) = 1 - P(Z < 2,5) = 1 - 0,9938 = 0,0062.$

b) $P(\overline{X} < 74) = P\left(Z < \dfrac{74-74}{16/\sqrt{100}}\right) = P(Z < 0) = 0,5.$

5.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.50 Se tomó una muestra aleatoria de 100 jóvenes y se les midió el nivel de glucosa en sangre obteniendo una media muestral de 105 mg/cm^3. Se sabe que la desviación típica en la población es de 15 mg/cm^3.

a) Obtén un intervalo de confianza, al 95 %, para el nivel de glucosa en sangre en la población.

b) ¿Cuánto vale el error máximo en el intervalo anterior?

c) ¿Qué ocurre con la amplitud del intervalo si el nivel de confianza es del 99 %?

Solución:

$$N(105; 15)$$

a) $n = 100$, $\overline{X} = 105$ y $Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{15}{\sqrt{100}} = 2,94$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (105 - 2,94; 105 + 2,94) = (102,06; 107,94)$$

b) $E = 2,94$.

c) La amplitud del intervalo aumenta: $Z_{\alpha/2} = 2,575$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 2,575\frac{15}{\sqrt{100}} = 3,8625$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (105 - 3,8625; 105 + 3,8625) = (101,14; 108,86)$$

Intervalo que tiene una amplitud mayor.

Problema 5.51 En una muestra aleatoria de $n = 25$ estudiantes de bachillerato, el 75 % afirman querer realizar estudios universitarios.

a) Calcula un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes de bachillerato que quieren realizar estudios universitarios con un nivel de confianza del 90 %.

b) Si se sabe que 8 de cada 10 estudiantes de bachillerato afirman querer realizar estudios universitarios y tomamos una muestra aleatoria de $n = 100$ estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de estudiantes de la muestra que quieren realizar estudios universitarios sea superior al 65 %?

Solución:

$$n = 25, \quad \hat{p} = 0,75 \text{ y } \hat{q} = 1 - 0,75 = 0,25$$

a) $NC = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,10 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \Longrightarrow$$

$$E = 1,645\sqrt{\frac{0,75\cdot 0,25}{25}} = 0,1425$$

$IC = (\hat{q}-E; \hat{q}+E) = (0,75-0,1425; 0,75+0,1425) = (0,6075; 0,8925) = (60,75\,\%; 89,25\,\%)$

b) $p \approx N\left(\hat{p}; \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = N(0,8; 0,04)$

$$P(p \geq 0,65) = P\left(Z > \frac{0,65-0,8}{0,04}\right) = P(Z > -3,75) = P(Z < 3,75) = 0,9999$$