Problemas de Matemáticas II
(PAU 2018-2019)
Por Materias

Isaac Musat Hervás

1 de noviembre de 2020

Índice

1. Álgebra

Teoría

Matrices

matriz A	dimensión	Transpuesta A^T	dimensión
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$m \times n$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$	$n \times m$
matriz cuadrada	orden	identidad	matriz triangular
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$	n	$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

- **Suma:** Tienen que tener la misma dimensión y se suman término a término.
- **Producto de una matriz por un número real:** Se multiplican todos los términos de la matriz por ese número.
- **Producto de dos matrices:** Se desarrolla multiplicando matriz fila por matriz columna de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

El número de columnas de la primera matriz tiene que ser igual al número de filas de la segunda.

Determinante de una matriz

- La matriz tiene que ser cuadrada

a) De orden dos: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

b) De orden tres: (Regla de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

- Propiedades:

a) $\begin{vmatrix} a+m & b+n & c+p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n & p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

b) $|A^T| = |A|$

c) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

d) Si cambiamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo.

e) Si una fila o una columna tiene todos sus elementos igual a cero el determinante vale cero.

f) Si dos filas o dos columnas son iguales el determinante vale cero.

g) Si dos filas o dos columnas son proporcionales el determinante vale cero.

h) Si una fila o columna es combinación lineal de las otras el determinante vale cero.

i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+a & h+b & i+c \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

j) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ xa & xb & xc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+xa & h+xb & i+xc \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila multiplicada por un número (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

Matriz Adjunta:

- Adjunto del elemento a_{ij} de una matriz es el valor del determinante resultante de eliminar la fila i y la columna j multiplicado por $(-1)^{i+j}$ y se le denomina A_{ij}.
- Matriz adjunta. $Adj(A) = (A_{ij})$

Cálculo del determinate de una matriz por adjuntos:
Se elige una fila o una columna (cualquiera es válida, siempre será mejor aquella que tenga más ceros), escojo la primera fila para el ejemplo:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Inversa de una matriz:

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^T}{|A|}$$

Una matriz tiene inversa si, y sólo si, $|A| \neq 0$.
A las matrices que tienen inversa se la llama **Regulares** y a las que no la tienen se las llama **Singulares**.
Rango de una matriz
Es el número de filas linealmente independientes.
De forma práctica se calcula por determinantes. Si tenemos una matriz de dimensión 3×4 cogemos matrices cuadradas que tengan el mayor orden posible, tendremos cuatro de orden 3, si el determinante de alguna de ellas es distinto de cero el rango es 3 y habremos terminado, si por el contrario todas son cero el rango ya no puede ser 3 y buscaremos menores de orden 2. Si alguno de estos menores es distinto de cero ya habremos terminado, y el rango será 2, si por el contrario todos son cero tendremos que buscar menores de orden 1, y en el momento que encontremos alguno distinto de cero el rango será 1.

Sistema de Ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & \cdots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \quad = & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \cdots & +a_{mn}x_n = & b_m \end{cases}$$

Matriz del sistema: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

Matriz de variables: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$,

Matriz de términos independientes: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Se trata de una ecuación matricial: $AX = B$.
Si $|A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$ y en este caso el sistema se podrá resolver de la siguiente manera $X = A^{-1}B$

Antes de resolver un sistema estudiar si hay ecuaciones nulas, iguales o proporcionales, para el estudio del rango.

Teorema de Rouché

- Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) = nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Determinado (SCD). Y tiene solución única.
- Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) $<$ nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Indeterminado (SCI). Y tiene infinitas soluciones.
- Si Rango($\overline{A}$) $\neq$Rango(A) se trata de un Sistema Incompatible. Y no tiene solución.

Sistema homogéneos Son aquellos en los que $b_i = 0$, estos siempre tienen solución $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ solución trivial, pero en el caso de que de que Rango(A) $< m$ (nº de incógnitas) estaríamos ante infinitas soluciones, es decir:

- Si Rango(A) $= m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCD $\Longrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ solución trivial.
- Si Rango(A) $< m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCI $\Longrightarrow$ infinitas soluciones.

Regla de Cramer
Sea $\overline{A} = (C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n, B)$, entonces sustituimos la columna B en la matriz $\overline{A}$ por cada una de las columnas y tendremos:

$$x_1 = \frac{|B, C_2, C_3, \cdots, C_n|}{|A|},\ x_2 = \frac{|C_1, B, C_3, \cdots, C_n|}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{|C_1, C_2, \cdots, B|}{|A|}$$

Problemas

1.1. Andalucia

1.1.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.1 Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a + d = 1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX = XA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: $AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -c = b \\ -d = -a \\ a = d \\ b = -c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Como $a + d = 1 \Longrightarrow 2a = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{2} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 1/2 & b \\ -b & 1/2 \end{pmatrix}.$

Como $|X| = 1 \Longrightarrow \frac{1}{4} + b^2 = 1 \Longrightarrow b^2 = \frac{3}{4} \Longrightarrow b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow$

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 \end{pmatrix} \text{ o } X = \begin{pmatrix} 1/2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 1.2 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$ considera el sistema de ecuaciones dado por $X^T A = B^T$, donde, X^T, B^T denotan las traspuestas. Discútelo según los distintos valores de m.

Solución: $X^T A = B^T \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}^T \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m^2-1 & m & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} (2-m)x + y + mz = 2m^2-1 \\ x + my + z = m \\ (2m-1)x + y + z = 1 \end{cases}$$

$|A| = -2(m^3 - 3m + 2) = 0 \Longrightarrow m = 1,\ \ m = -2$

- Si $m \neq 1$ y $m \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ 4F_2 - F_1 \\ 4F_3 + 5F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & -9 & 6 & -1 \\ 0 & 9 & -6 & -31 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & -9 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -32 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\; F_1 = F_2 = F_3 \;\right] \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

1.1.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.3 Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ (m+2)x + y - z = m \\ 3x + (m+2)y + z = m \end{array}\right.$

a) Discute el sistema según los valores de m.

b) Resuelve el sistema, si es posible, para $m = 0$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ m+2 & 1 & -1 & m \\ 3 & m+2 & 1 & m \end{array}\right)$, $|A| = 2m^2 + 8m = 0 \Longrightarrow m = 0$ y $m = -4$.

- Si $m \neq 0$ y $m \neq -4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m = -4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & -5 & -5 & -4 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 + 5F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -32 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

- Si $m = 0$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$. Es un sistema homogéneo con $|A| = 0 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado.

b) $m = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3\lambda \\ y = -5\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 1.4 Calcula en grados los tres ángulos de un triángulo sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.

Solución:
Sea x: ángulo menor, y: ángulo mayor y z: ángulo mediano.

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 180 \\ x = y/2 \\ x + y = 2z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 180 \\ 2x - y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 40^\circ \\ y = 80^\circ \\ z = 60^\circ \end{array}\right.$$

1.2. Aragón

1.2.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.5 Se pide:

a) Determine el rango de la matriz A siguiente, según los diferentes valores del parámetro k

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$$

b) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $k = 1$.

Solución:

a) $|A| = k^3 + 3k^2 + 2k = 0 \Longrightarrow k = 0$, $k = -1$ y $k = -2$.

- Si $k \in \mathbb{R} - \{0, -1, -2\} \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.
- Si $k = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

- Si $k = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

- Si $k = -2$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

b) Si $k = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/6 & -1/2 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1/2 & -1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 1.6 Se pide:

a) El club deportivo Collarada está formado por 60 deportistas de las siguientes disciplinas: esquí alpino, esquí nórdico y escalada. Se sabe que hay 16 deportistas menos de esquí alpino que la suma de los de esquí nórdico y escalada. Además, el número de deportistas de esquí alpino más los de escalada es tres veces el número de deportistas de esquí nórdico. Calcula el número de deportistas de cada disciplina.

b) Sabiendo que $a = -2$, calcule el valor del siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 2a & 3a+2b & 4a-2c \\ 3a & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix}$$

Solución:

a) Sea x: nº de deportistas en esquí alpino, y: nº de deportistas en esquí nórdico y z: nº de deportistas en escalada.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=60 \\ x+16=y+z \\ x+z=3y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=60 \\ x-y-z=-16 \\ x-3y+z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=22 \\ y=15 \\ z=23 \end{array}\right.$$

b)

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 2a & 3a+2b & 4a-2c \\ 3a & 6a+3b & 10-3c \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & a+b & a-c \\ 2 & 3a+2b & 4a-2c \\ 3 & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix} =$$

$$a\left(\begin{vmatrix} 1 & a & a-c \\ 2 & 3a & 4a-2c \\ 3 & 6a & 10a-3c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & b & a-c \\ 2 & 2b & 4a-2c \\ 3 & 3b & 10a-3c \end{vmatrix}\right) =$$

$$a\begin{vmatrix} 1 & a & a-c \\ 2 & 3a & 4a-2c \\ 3 & 6a & 10a-3c \end{vmatrix} = a^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & a-c \\ 2 & 3 & 4a-2c \\ 3 & 6 & 10a-3c \end{vmatrix} = a^2\left[\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & 4a \\ 3 & 6 & 10a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & -c \\ 2 & 3 & -2c \\ 3 & 6 & -3c \end{vmatrix}\right] =$$

$$a^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & 4a \\ 3 & 6 & 10a \end{vmatrix} = a^3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = a^3 = -8$$

1.2.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.7 Se pide:

a) Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde k es un parametro real:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-y+kz=1 \\ -x+y-kz=0 \\ 2x-ky+2kz=-1 \end{array}\right.$$

Determine los valores del parametro real k, para los que este sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) Resuelva el sistema cuando $k=1$.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & -k & 0 \\ 2 & -k & 2k & -1 \end{array}\right)$, $|A|=3k(2-k)=0 \Longrightarrow k=0$ y $k=2$.

- Si $k\neq 0$ y $k\neq 2 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $k=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2+F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

- Si $k=0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2+F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

.

b) $k=1$:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-y+z=1 \\ -x+y-z=0 \\ 2x-y+2z=-1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \\ z=-2 \end{array}\right.$$

Problema 1.8 Se pide:

a) Estudie el rango de la matriz que aparece a continuacion segun los diferentes valores del parametro real m

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 3 & m & 1 \\ 0 & -2 & m \end{array}\right)$$

b) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $m=-1$.

Solución:

a) $|A| = m^2-3m+2=0 \Longrightarrow m=1$ y $m=2$.

- Si $m \in \mathbb{R}-\{1,2\} \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3$.
- Si $m=1$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{array}\right), \ |A|=0 \ \text{y} \ \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

- Si $m=2$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right), \ |A|=0 \ \text{y} \ \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

b) Si $m=-1$:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrr} 1/2 & 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & -1/6 & -1/6 \\ -1 & 1/3 & -2/3 \end{array}\right)$$

1.3. Asturias

1.3.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.9 Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} mx+y-z=0 \\ 2x+my=m \\ x+mz=m \end{array}\right. \qquad m\in\mathbb{R}$$

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de m.

b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $m=1$.

c) Para qué valores de m se tiene la solución $x=0$, $y=1$, $z=1$.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & -1 & 0 \\ 2 & m & 0 & m \\ 1 & 0 & m & m \end{array}\right)$, $|A|=m^3-m=0\Longrightarrow m=0$ y $m=\pm 1$.

- Si $m\neq 0$ y $m\neq \pm 1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2+2F_1 \\ F_3+F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $m=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $m=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-2F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

.

b) $m=1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ 2x+y=1 \\ x+z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-\lambda \\ y=-1-2\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

c) Sustituyendo la solución ($x = 0$, $y = 1$, $z = 1$) dada en el sistema tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} mx + y - z = 0 \\ 2x + my = m \\ x + mz = m \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 - 1 = 0 \\ m = m \\ m = m \end{array}\right.$$

Luego se cumple $\forall m \in \mathbb{R}$

Problema 1.10 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Razona, sin hacerlos, si son posibles los siguientes productos matriciales y, si es el caso, indica las dimensiones de las matrices resultantes.

$$A \cdot A, \quad A \cdot B, \quad A \cdot B \cdot C, \quad C \cdot D$$

b) Calcula las inversas, si existen, de las matrices cuadradas posibles del apartado anterior.

Solución:

a) $dim(A) = 3 \times 3 \Longrightarrow dim(A \cdot A) = 3 \times 3$.
$dim(A) = 3 \times 3$ y $dim(B) = 3 \times 2 \Longrightarrow dim(A \cdot B) = 3 \times 2$.
$dim(A) = 3 \times 3$, $dim(B) = 3 \times 2$ y $dim(C) = 3 \times 1 \Longrightarrow dim(A \cdot B) = 3 \times 2$ pero no se podría multiplicar $A \cdot B \cdot C$.
$dim(C) = 3 \times 1$ y $dim(D) = 1 \times 3 \Longrightarrow dim(C \cdot D) = 3 \times 3$.

b)

$$(A \cdot A)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ |C \cdot D| = 0 \Longrightarrow \nexists (C \cdot D)^{-1}$$

1.3.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.11 Dado el sistema $\left\{\begin{array}{l} x + y + az = a \\ x + (a-1)y + az = 2 \\ -x + z = 2 \end{array}\right.$

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $a = 2$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & a & a \\ 1 & a-1 & a & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$, $|A| = a^2 - a - 2 = 0 \Longrightarrow a = -1$ y $a = 2$.

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\underline{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left[\ F_1 = F_2\ \right] \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) $a = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + 2z = 2 \\ x + y + 2z = 2 \\ -x + z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + 2z = 2 \\ -x + z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 1.12 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$

a) Estudia para que valores de x se cumple $A^3 - I = O$ (I matriz identidad y O matriz nula).

b) Calcula A^{12} para los valores de x que verifican la condición anterior.

c) Para $x = 0$ y sabiendo que ese valor verifica la condición del primer apartado, calcula, si existe, la inversa de A.

Solución:

a)

$$A^3 - I = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}^3 - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 & -2x & -3x^2 \\ -x^2 & 0 & 2x \\ -2x & x^2 & x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow x = 0$$

b) Si $x = 0 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^{12} = (A^3)^4 = I^4 = I$$

c) Para $x=0 \Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \Longrightarrow |A|=1 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

$$A^3=A^2\cdot A=I \Longrightarrow A^2=A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

1.4. Islas Baleares

1.4.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.13 Dado el sistema $\begin{cases} (a+2)x+(a-1)y-z=1\\ ax-y+z=-1\\ 11x+ay-z=a\end{cases}$

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de $a\in\mathbb{R}$.

b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $a=0$.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a+2 & a-1 & -1 & 1\\ a & -1 & 1 & -1\\ 11 & a & -1 & a\end{array}\right)$, $|A|=-a^2+9a-20=0 \Longrightarrow a=4$ y $a=5$.

- Si $a\neq 4$ y $a\neq 5 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=4$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & -1 & 1\\ 4 & -1 & 1 & -1\\ 11 & 4 & -1 & 4\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ 3F_2-2F_1\\ 6F_3-11F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & -1 & 1\\ 0 & -9 & 5 & -5\\ 0 & -9 & 5 & 35\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & -1 & 1\\ 0 & -9 & 5 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 40\end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $a=5$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & -1 & 1\\ 5 & -1 & 1 & -1\\ 11 & 5 & -1 & 5\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ 7F_2-5F_1\\ 7F_3-11F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & -1 & 1\\ 0 & -27 & 12 & -12\\ 0 & -9 & 4 & 24\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 3F_3-F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & -1 & 1\\ 0 & -27 & 12 & -12\\ 0 & 0 & 0 & 84\end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) $a=0$:

$$\begin{cases} 2x-y-z=1\\ -y+z=-1\\ 11x-z=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-1/10\\ y=-1/10\\ z=-11/10\end{cases}$$

Problema 1.14 Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix}$

Calcular x e y que verifique; $B - AC = AD$

Solución:

$B - AC = \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xy-2y^2+2 \\ 3/2-2y^2 \end{pmatrix}$

$AD = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(3-y)-2y \\ -2y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -xy-2y^2+2 \\ 3/2-2y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(3-y)-2y \\ -2y \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} -xy-2y^2+2 = 2x(3-y)-2y \\ 3/2-2y^2 = -2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1/9 \;\; y = 3/2 \\ x = 1/13 \;\; y = -1/2 \end{cases}$$

1.4.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.15 Dado el sistema $\begin{cases} 4x+3y+2z = 0 \\ 2x+y-z = m \\ 6x+6y+m^2z = -9 \end{cases}$

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de $m \in \mathbb{R}$.

b) Resuélvelo en los casos de compatible indeterminado.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & m \\ 6 & 6 & m^2 & -9 \end{array}\right)$, $|A| = 2(9-m^2) = 0 \Longrightarrow a = \pm 3$.

- Si $m \neq \pm 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 6 & 6 & 9 & -9 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & 3 & 12 & -18 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 3F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -36 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $m = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & 6 & 9 & -9 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 6 \\ 0 & 3 & 12 & -18 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 3F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) $m = 3$:

$$\left\{\begin{array}{l} 4x + 3y + 2z = 0 \\ -y - 4z = 6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{9}{2} + \dfrac{5}{2}\lambda \\ y = -6 - 4\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 1.16 Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$

Calcular x, y y z que verifique; $AB - 2C = D$

Solución:

$$AB - 2C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y - 2 \\ x + 2y - 2 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y - z = 2 \\ x + 2y - z = 2 \\ x - z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

1.5. Islas Canarias

1.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.17 Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y sea I_2 la matriz identidad de orden 2.

a) Calcular el valor de x de modo que se verifique la igualdad: $B^2 = A$.

b) Calcular el valor de x de modo que se verifique la igualdad: $A - I_2 = B^{-1}$.

c) Calcular el valor de x para que $A \cdot B = I_2$.

Solución:

a) $B^2 = A \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = 1$

b) $A - I_2 = B^{-1} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = 0$

c) $A \cdot B = I_2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x+1 \\ x+1 & x+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow x = -1$$

Problema 1.18 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\left\{\begin{array}{l} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

Solución:

$$\begin{cases} 2X+3Y=\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ X-2Y=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \Longrightarrow . \begin{cases} 2X+3Y=\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ -2X+4Y=\begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 14 & -6 & 2 \end{pmatrix} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$7Y=\begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ 21 & -7 & 14 \end{pmatrix} \Longrightarrow Y=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X-2Y=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow X=2\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.19 Dado el sistema

$$\begin{cases} 2x+y+3z=2 \\ 5x+2y+4z=-1 \\ 3x+y+k^2z=3k \end{cases}$$

a) Discutirlo para los distintos valores del parámetro k.

b) Resolverlo para $k=2$.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & k^2 & 3k \end{array}\right)$, $|A|=1-k^2=0 \Longrightarrow k=\pm 1$.

- Si $k\neq \pm 1 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $k=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)=\begin{bmatrix} F_1 \\ 2F_2-5F_1 \\ 2F_3-3F_1 \end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -12 \\ 0 & -1 & -7 & -12 \end{array}\right)=$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_2 \end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $k=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)=\begin{bmatrix} F_1 \\ 2F_2-5F_1 \\ 2F_3-3F_1 \end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -12 \\ 0 & -1 & -7 & 0 \end{array}\right)=$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_2 \end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) $k=2$:

$$\left\{\begin{array}{l}2x+y+3z=2\\5x+2y+4z=-1\\3x+y+4z=6\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=1\\y=-9\\z=3\end{array}\right.$$

Problema 1.20 Sea la matriz $C = A \cdot B$, donde:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Encontrar los valores de m para los que existe inversa de la matriz C.

b) Calcular la matriz inversa de C en el caso de $m = 2$.

Solución:

a) $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m+1 & 2m+2 \\ 1-m & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |C| = 2(m+1)(m-1) = 0 \Longrightarrow m = \pm 1 \Longrightarrow \exists C^{-1}\ \ \forall m \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

b) Si $m = 2 \Longrightarrow C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$

1.6. Cantabria

1.6.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.21 Considere el sistema: $\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ t & -1 & 1 \\ t & 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dependiente del parámetro t.

a) Clasifique, en función del valor de t, el tipo de sistema.

b) Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $t = 1$.

Solución:
Se trata de un sistema homogéneo.

a) $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ t & -1 & 1 \\ t & 0 & t \end{pmatrix}$, $|A| = 2t - 2t^2 = 0 \Longrightarrow t = 0$ y $t = 1$.

- Si $t \neq 0$ y $t \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución trivial $x = y = z = 0$)
- Si $t = 1$:
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $|A| = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

- Si $t=0$:
$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $|A|=0$ $\begin{vmatrix} 1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2<$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) $t=1$:

$$\begin{cases} x+y+z=0\\ x-y+z=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-\lambda\\ y=0\\ z=\lambda\end{cases}$$

Problema 1.22 Sean $M=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ y $v=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

a) Calcule, razonadamente, el rango de M.

b) Determine todos los vectores v tales que $M^2v=M^{-1}v$.

Solución:

a) $|M|=1\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(M)=3$

b) $M^2v=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1\\ -4 & 1 & 4\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2x+y+z\\ -4x+y+4z\\ -x-y+4z\end{pmatrix}$

$M^{-1}v=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1\\ 5 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4x-2y+z\\ 5x-2y+z\\ 2x-y+z\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2x+y+z\\ -4x+y+4z\\ -x-y+4z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4x-2y+z\\ 5x-2y+z\\ 2x-y+z\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 3x-y-z=0\\ 2x-y=0\\ x-z=0\end{cases}$$

Sistema homogéneo:
$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \Longrightarrow |A|=0$ y $\begin{vmatrix} 3 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2<$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

$$\begin{cases} 3x-y-z=0\\ 2x-y=0\\ x-z=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\lambda\\ y=2\lambda\\ z=\lambda\end{cases} \Longrightarrow v=\begin{pmatrix} \lambda\\ 2\lambda\\ \lambda\end{pmatrix}$$

1.6.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.23 Considere el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} a^2x+ay+z=-1\\ ax+ay+a^2z=0\end{cases}$ dependiente del parámetro a.

a) Clasifique, en función del parámetro a, el sistema anterior (existencia y unicidad de soluciones).

b) Calcule todas las soluciones en el caso $a=2$.

Solución:
Se trata de un sistema homogéneo.

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a^2 & a & 1 & -1 \\ a & a & a^2 & 0 \end{array}\right)$, $|A_1| = \begin{vmatrix} a^2 & a \\ a & a \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow a^3 - a^2 = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 1$.

$|A_2| = \begin{vmatrix} a^2 & 1 \\ a & a^2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow a^4 - a = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 1$.

$|A_3| = \begin{vmatrix} a^2 & -1 \\ a & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow -a = 0 \Longrightarrow a = 0$.

$|A_4| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow a^2 - 1 = 0 \Longrightarrow a = -1$ y $a = 1$.

- Si $a \neq 0$ y $a \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.
- Si $a = 0$:
  $\left\{\begin{array}{l} z = -1 \\ 0 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{array}\right.$ sistema es compatible indeterminado.
- Si $a = 1$:
  $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = -1 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow$ sistema es incompatible.
- Si $a = -1$:
  $\left\{\begin{array}{l} x - y + z = -1 \\ -x - y + z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1/2 \\ y = 1/2 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$ sistema es compatible indeterminado.

b) $a = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} 4x + 2y + z = -1 \\ 2x + 2y + 4z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\lambda \\ y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{7}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 1.24 Consideremos el sistema dependiente del parámetro t:

$$\left\{\begin{array}{l} tx + y - z = 0 \\ 2ty + z = 1 \\ -x + ty + 2z = 1 \end{array}\right.$$

a) Determine razonadamente si el sistema es incompatible o compatible, determinado o indeterminado en función del valor del parámetro t.

b) Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $t = 1$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} t & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2t & 1 & 1 \\ -1 & t & 2 & 1 \end{array}\right)$, $|A| = 3t^2 - 2t - 1 = 0 \Longrightarrow t = 1$ y $t = -1/3$.

- Si $t \neq 1$ y $t \neq -1/3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $t=-1/3$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1/3 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -2/3 & 1 & 1\\ -1 & -1/3 & 2 & 1 \end{array}\right)\quad |A|=0\quad \begin{vmatrix} -1/3 & 1\\ 0 & -2/3 \end{vmatrix}=2/9\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix} -1/3 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\frac{4}{3}\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$

Luego el sistema es incompatible.

- Si $t=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indetermnado}$$

b) $t=1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=0\\ 2y+z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-3\lambda\\ y=\lambda\\ z=1-2\lambda \end{array}\right.$$

1.7. Castilla León

1.7.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.25 Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\\ 3\\ 6 \end{pmatrix}$.

a) Estudie la existencia y unicidad de soluciones segun los valores del parametro m.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones anterior para el caso $m=2$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & m & 4\\ 2 & 1 & 0 & 3\\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right);\quad |A|=2(m-1)=0\Longrightarrow m=1$$

- Si $m\neq 1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ n$^{\underline{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 0 & 3\\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-2F_1\\ F_3-2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & -1 & -2 & -5\\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $m = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+2z=4 \\ 2x+y=3 \\ 2x+2y+2z=6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{array}\right.$$

Problema 1.26 Se pide:

a) Encontrar los valores de k para que la matriz $A = \begin{pmatrix} k-1 & 2 & -2 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sea invertible.

b) Encontrar la inversa de A para $k = 2$.

Solución:

a) $|A| = k(k-1) = 0 \Longrightarrow k = 0$ y $k = 1 \Longrightarrow \exists\, A^{-1}\ \forall k \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

b) Si $k = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.7.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.27 Se pide:

a) Discutir según los valores del parámetro el sistema de ecuaciones lineales m

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ 2x+y+mz=4 \end{array}\right.$$

b) Resolverlo para $m = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & m & 4 \end{array}\right); \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas y el sistema va a ser siempre compatible indeterminado, independientemente del valor de m.

b) Si $m = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3-2\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 1.28 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ x-y & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular los valores de x e y, para que el producto AM sea igual a la inversa de la matriz N.

Solución:

$$AM = N^{-1} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ x-y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2x-y & 1 \\ y-x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = 3, \;\; y = 4$$

1.8. Castilla La Mancha

1.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2018

Problema 1.29 Se pide:

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \overline{R}$

$$\begin{cases} ax + 2y = a^2 \\ -x + y + z = 5 \\ x - ay - z = -(4+a) \end{cases}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 1$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 0 & a^2 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -a & -1 & -(4+a) \end{array}\right)$, $|A| = a^2 - a = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 1$.

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \quad |A| = 0 \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego el sistema es incompatible.

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indetermnado}$$

b) $a = 1$:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3y + z = 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 6 - 3\lambda \end{cases}$$

Problema 1.30 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $AX - 2B = C$.

Solución:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

b) $AX - 2B = C \Longrightarrow AX = C + 2B \Longrightarrow X = A^{-1}(C + 2B)$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 10 \\ -9 & -12 & -23 \end{pmatrix}$$

1.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.31 Se pide:

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \overline{R}$

$$\begin{cases} x - (a-2)y - z = 1 \\ x - 2y + z = -4 \\ x - 3y + az = -a^2 \end{cases}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 3$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -(a-2) & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & a & -a^2 \end{array} \right)$, $|A| = a^2 - 5a + 6 = 0 \Longrightarrow a = 2$ y $a = 3$.

- Si $a \neq 2$ y $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 2 & -4 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & 3 & -5 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - 3F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 3 & -9 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -10 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indetermnado}$$

b) $a = 3$:

$$\left\{\begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ -y + 2z = -5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 6 + 3\lambda \\ y = 5 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 1.32 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula razonadamente el rango de la matriz A segun los valores del parametro $a \in \mathbb{R}$.

b) Para $a = 1$ calcula razonadamente la matriz X que verifica que $XA = B - X$.

Solución:

a) $|A| = a(a+2) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = -2$.

- Si $a \neq 0$ y $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$
- Si $a = 0 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.
- Si $a = -2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

b) $XA = B - X \Longrightarrow XA + X = B \Longrightarrow X(A + I) = B \Longrightarrow X = B(A + I)^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 3/8 & 0 & 1/4 \\ 1/16 & 1/2 & -1/8 \end{pmatrix}$$

1.9. Cataluña

1.9.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.33 Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro k:

$$\left\{\begin{array}{l} x + 3y + 2z = -1 \\ x + k^2y + 3z = 2k \\ 3x + 7y + 7z = k - 3 \end{array}\right.$$

a) Discute el sistema para los diferentes valores del parámetro k.

b) Resuelve el sistema para el caso de $k = -1$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & k^2 & 3 & 2k \\ 3 & 7 & 7 & k-3 \end{array}\right)$, $|A| = k^2 - 1 = 0 \Longrightarrow k = \pm 1$.

- Si $k \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $k = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 7 & -4 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $k = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 7 & -2 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) $k = -1$:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ x + y + 3z = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 - 7\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

Problema 1.34 Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Calcula para que valores del parametro a se satisface la igualdad $M^2 - M - 2I = O$, donde I es la matriz identidad y O es la matriz nula, ambas de orden 2.

b) A partir de la igualdad del apartado anterior, encuentra una expresion general para calcular la matriz inversa de M y, a continuacion, calcula la inversa de M para el caso de $a = \sqrt{2}$.

Solución:

a) $M^2 - M = 2I \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = \pm\sqrt{2}$

b) $M^2 - M = 2I \Longrightarrow M(M - I) = 2I \Longrightarrow M\left[\frac{1}{2}(M - I)\right] = I \Longrightarrow M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I)$

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1.9.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.35 Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1\\ 1 & a & 1\\ 4 & 3a & 1\end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Encuentra los valores del parámetro a para el que la matriz es invertible.

b) Estudia la posicion relativa de los planos $\pi_1 : x+(a-1)z=0$, $\pi_2 : x+ay+z=1$ y $\pi_3 : 4x+3ay+z=3$ en funcion de los valores del parametro a.

Solución:

a) $|A|=-a(a+1)=0 \Longrightarrow a=0$ y $a=-1 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall a\in\mathbb{R}-\{0,-1\}$

b) Consideramos el sistema:

$$\begin{cases} x+(a-1)z=0\\ x+ay+z=1\\ 4x+3ay+z=3\end{cases} \Longrightarrow \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a-1 & 0\\ 1 & a & 1 & 1\\ 4 & 3a & 1 & 3\end{array}\right) \Longrightarrow$$

$|A|=-a(a+1)=0 \Longrightarrow a=0$ y $a=-1$

- Si $a\neq 0$ y $a\neq -1 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única). Los tres planos se cortan en un punto.

- Si $a=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 4 & 0 & 1 & 3\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-4F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 5 & 3\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 2F_3-5F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

Los tres planos tienen en ningún punto en común.
π_1 con π_2: $\frac{1}{1}\neq\frac{-1}{1} \Longrightarrow \pi_1$ y π_2 se cortan.
π_1 con π_3: $\frac{1}{4}\neq\frac{-1}{1} \Longrightarrow \pi_1$ y π_3 se cortan.
π_2 con π_3: $\frac{1}{4}\neq\frac{1}{1} \Longrightarrow \pi_2$ y π_3 se cortan.
No hay puntos comunes a los tres planos, pero se cortan dos a dos como en un prisma triangular.

- Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 4 & -3 & 1 & 3\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-4F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 0 & -3 & 9 & 3\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-3F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

Los tres planos tienen en común infinitos puntos.
π_1 con π_2: $\frac{1}{1}\neq\frac{0}{-1} \Longrightarrow \pi_1$ y π_2 se cortan.

π_1 con π_3: $\frac{1}{4} \neq \frac{0}{-3} \Longrightarrow \pi_1$ y π_3 se cortan.
π_2 con π_3: $\frac{1}{4} \neq \frac{-1}{-3} \Longrightarrow \pi_2$ y π_3 se cortan.
Los tres planos se cortan en una recta común, como un libro abierto de tres hojas distintas.
La recta común sería:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 1.36 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula AB y BA.

b) Justifica que si el producto de dos matrices cuadradas no nulas tiene como resultado la matriz nula, entonces el determinante de alguna de las dos matrices ha de ser cero.

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$

b) Si $AB = O \Longrightarrow |AB| = |O| = 0 \Longrightarrow |AB| = |A||B| = 0 \Longrightarrow |A| = 0$ o $|B| = 0$.

1.10. País Vasco

1.10.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.37 Discutir, en función de m, el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} (m+3)x + my + mz = m - 1 \\ 3x + mz = m - 2 \\ -y + z = m - 3 \end{array} \right.$$

Resolver en los casos de indeterminación, suponiendo que existan.
Solución:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m+3 & m & m & m-1 \\ 3 & 0 & m & m-2 \\ 0 & -1 & 1 & m-3 \end{array} \right)$, $|A| = m(m-3) = 0 \Longrightarrow m = 0$ y $m = 3$.

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $m = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array} \right) =$$

$$\Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $m = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 6x + 3y + 3z = 2 \\ -3y + 3z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 1.38 Dada la matriz $A(a)$

$$A(a) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

calcular, razonadamente, el valor de a para que el determinante de $A(a)^2$ valga 4.

Solución:

$$|A(a)^2| = |A(a)|^2 = a^2 = 4 \Longrightarrow a = \pm 2$$

1.10.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.39 Discutir, en función de los valores de A, el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 6 \\ x + y - z = 1 \\ 2x - 2y + Az = A \end{array}\right.$$

Solución:

$\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & A & A \end{array}\right)$, $|M| = -A - 18 = 0 \Longrightarrow A = -18$.

- Si $A \neq -18 \Longrightarrow |M| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 3 = \text{Rango}(\overline{M}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $A = -18$:

$$\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -18 & -18 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & -6 & -24 & -30 \end{array}\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 6F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

Problema 1.40 Dada una matriz de tamaño 3×3 cuyo determinante es igual a 5, se realizan sucesivamente las siguientes operaciones:

- se cambian entre sí la primera y segunda fila,
- se multiplica a la tercera columna por -2,
- se multiplica a toda la matriz por 2 y
- se traspone la matriz.

Calcular de forma razonada el valor del determinante de la matriz obtenida.
Solución:
Sea A la matriz y $|A| = 5$ si permutamos dos filas obtenemos una matriz B con $|B| = -5$, si multiplicamos una columna por -2 obtenemos una matriz C con $|C| = 10$, si multiplicamos toda matriz por 2 obtenemos una matriz D con $|D| = 2^3 \cdot 10 = 80$ y $|D^T| = |D| = 80$.

1.11. Extremadura

1.11.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.41 Discute en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y + az = 1 \\ ax + y - z = 2 \\ 5x + 3y + z = 2a \end{array}\right.$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & a & 1 \\ a & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 2a \end{array}\right), \ |A| = 3a^2 - 7a + 2 = 0 \Longrightarrow a = 2 \text{ y } a = \frac{1}{3}.$$

- Si $a \neq 2$ y $a \neq \dfrac{1}{3} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 3F_2 - 2F_1 \\ 3F_3 - 5F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & 4 \\ 0 & -1 & -7 & 13 \end{array}\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $a = \dfrac{1}{3}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1/3 & 1 \\ 1/3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 2/3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 9F_2 - F_1 \\ 3F_3 - 5F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1/3 & 1 \\ 0 & 7 & -28/3 & 17 \\ 0 & -1 & 4/3 & -3 \end{array}\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 7F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1/3 & 1 \\ 0 & 7 & -28/3 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

Problema 1.42 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \end{pmatrix}$.

a) Halle los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para que la matriz A tenga inversa.

b) Halle, si existe, la inversa de la matriz para $\lambda = 1$.

Solución:

a) $|A| = 2\lambda^2 - \lambda - 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$ y $\lambda = \dfrac{3}{2} \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall \lambda \in \mathbb{R} - \left\{-1, \dfrac{3}{2}\right\}$

b) Si $\lambda = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \\ 1/2 & -3/2 & -2 \end{pmatrix}$$

.

1.11.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.43 Dadas las siguientes matrices A e I, pruebe que la inversa de A es $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A^{-1} = A^2 - 3A + 3I == \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 1.44 Discute en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x + y = a + 1 \\ (a+1)x + y - z = 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -a & 2 \\ 1 & 1 & 0 & a+1 \\ a+1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right), \ |A| = a^2 - 1 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1.$$

- Si $a \neq \pm 1\dfrac{1}{3} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -1 & 2\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ 2F_2-F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)=$$

$$\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ 2F_2-F_1\\ F_3\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

1.12. Madrid

1.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.45 Dadas la matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1\\ 1 & a & 2 & 2-a\\ -1 & 2 & a & a-2\end{pmatrix}$ y $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; se pide:

a) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.

b) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso $a=0$.

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4\\ 1 & a & 2\\ -1 & 2 & a\end{vmatrix}=a^2+a-2=0\Longrightarrow a=1$ y $a=-2$. Luego si $a\neq 1$ y $a\neq -2\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3$.

Si $a=-2\Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1\\ 1 & -2 & 2 & 4\\ -1 & 2 & -2 & -4\end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-5\neq 0$ y $F_3=-F_2\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$.

Si $a=1\Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$ y $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}=0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$.

En consecuencia $\text{Rango}(A)=3$ si $a\in\mathbb{R}-\{1,-2\}$ y $\text{Rango}(A)=2$ si $a=1$ o $a=-2$.

b) Si $a=0$: $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 2\\ -1 & 2 & 0 & -2\end{pmatrix}$ y

$$AM=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 2\\ -1 & 2 & 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

$|AM| = -2 \neq 0 \Longrightarrow \exists (AM)^{-1}$:

$$(AM)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Problema 1.46 Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros. Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40 % respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

Solución:

Sea x el precio de un bocadillo, y el de un refresco y z el de una bolsa de patatas.

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y + 3z = 19 \\ x + z = 4 \\ x + y = 5 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 19 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

1.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.47 Dado el sistema de ecuaciones $A = \left\{ \begin{array}{rrrr} kx+ & (k+1)y+ & z = & 0 \\ -x+ & ky- & z = & 0 \\ (k-1)x- & y & = & -(k+1) \end{array} \right.$; se pide:

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k.

b) Resolver el sistema para $k = -1$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} k & k+1 & 1 & 0 \\ -1 & k & -1 & 0 \\ k-1 & -1 & 0 & -(k+1) \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = -2k^2 + 2 = 0 \Longrightarrow k = \pm 1$. Luego

- Si $k \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$\overline{A}$ =nº de incógnitas$\Longrightarrow SCD$.
- Si $k = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 + F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Luego se trata de un sistema incompatible. } (SI)$$

- Si $k=-1$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0\\ -2 & -1 & 0 & 0\end{array}\right) \Longrightarrow$ Luego se trata de un sistema homogéneo y $|A|=0 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado. (SCI)

b) Si $k=-1$: $\left\{\begin{array}{l} -x+z=0\\ -x-y-z=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\lambda\\ \\ y=-2\lambda\\ \\ z=\lambda\end{array}\right.$

Problema 1.48 Dadas la matrices $A=\left(\begin{array}{cc} 1-a & 1\\ 1 & 1+a\end{array}\right)$ e $I=\left(\begin{array}{cc} 1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right)$; se pide:

a) Calcular para qué valores $a\in\mathbb{R}$ se verifica $A^2-I=2A$.

b) Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a.

c) Calcular, en función de a, el determinante de la matriz $(AA^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Solución:

a) $A^2-I=2A$:

$$\left(\begin{array}{cc} a^2-2a+2 & 2\\ 2 & a^2+2a+2\end{array}\right)-\left(\begin{array}{cc} 1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 2-2a & 2\\ 2 & 2+2a\end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} a^2-2a+1=2-2a \Longrightarrow a=\pm 1\\ a^2+2a+1=2+2a \Longrightarrow a=\pm 1\end{array}\right.$$

b) $|A|=-a^2=0 \Longrightarrow a=0 \Longrightarrow \exists A^{-1}\forall a\in\mathbb{R}-\{0\}$

$$A^{-1}=\frac{1}{a^2}\left(\begin{array}{cc} -(a+1) & 1\\ 1 & a-1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} -\frac{a+1}{a^2} & \frac{1}{a^2}\\ \\ \frac{1}{a^2} & \frac{a-1}{a^2}\end{array}\right)$$

c) $|(AA^t)^2|=|(AA^t)|^2=|(AA^t)||(AA^t)|=|A||A^t||A||A^t|=|A||A||A||A|=|A|^4=(-a^2)^4=a^8$

1.13. Valencia

1.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.49 Se dan la matriz $A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & a\\ -2 & a+1 & 2\\ -3 & a-1 & a\end{array}\right)$ y que depende del parámetro real a, y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2=\frac{1}{3}I-2B$,siendo I la matriz identidad de orden 3.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a=1$.

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a = -1$.

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1} = mB + nI$.

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{vmatrix} = 2(a^2 + 2a + 1) = 0 \Longrightarrow a = -1$. Luego si $a \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3$.

Si $a = -1 \Longrightarrow |A| = 0$ y $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$.

Si $a = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $|A| = 8 \Longrightarrow |2A^{-1}| = 2^3\dfrac{1}{|A|} = \dfrac{8}{8} = 1$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) =$

$= \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 + 3F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \dfrac{3}{2} - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

c) $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B \Longrightarrow 3(B^2 + 2B) = I \Longrightarrow B(3B + 6I) = I \Longrightarrow$

$B^{-1} = 3B + 6I$, luego B es inversible con $m = 3$ y $n = 6$.

Problema 1.50 Se da el sistema $\begin{cases} x + & y + & z = & 4 \\ 3x + & 4y + & 5z = & 5 \\ 7x + & 9y + & 11z = & \alpha \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y los valores de α para los que el sistema es incompatible.

b) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible.

c) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente.

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & \alpha \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 7F_1 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & \alpha - 28 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 14 \end{array}\right)$$

Si $\alpha = 14$ el sistema es compatible indeterminado y si $\alpha \neq 14$ el sistema sería incompatible. Como $|A| = 0$ para cualquier valor de α el sistema nunca sería compatible determinado.

Si $\alpha = 14 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 4 \\ 3x+ & 4y+ & 5z = & 5 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 11 + \lambda \\ y = -7 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$

Si cambiamos 11 por a: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & a \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = a - 11 = 0 \Longrightarrow$ el único valor que anula el determinate es $a = 11$ luego para cualquier otro valor, como es el caso, $|A| \neq 0$ el sistema sería compatible determinado.

1.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.51 Se da el sistema de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3z = \alpha \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = \alpha + 1 \end{array} \right.$,, donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado.

b) La solución del sistema cuando $\alpha = -1$.

c) El valor de α para que el sistema tenga una solución (x, y, z) que verifique $x + y + z = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|c} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & \alpha + 1 \end{array} \right); \quad |A| = -1 \neq 0, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Siempre se cumple que $|A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

b) Si $\alpha = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3z = -1 \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 7 \\ y = -4 \\ z = -5 \end{array} \right.$$

c)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|c} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & \alpha + 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - 3F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{rrr|c} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 0 & -4 & 1 & 10 - \alpha \\ 0 & -2 & 1 & 2 - \alpha \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{rr} 2 & 0 \\ 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{array} \right.$$

Como $x + y + z = 0 \Longrightarrow 9 + 2\alpha - 4 - 6 - \alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 1$

Problema 1.52 Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de α para los que la ecuación matricial $AX = \alpha X$ sólo admite una solución.

b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $AX = 2X$.

c) Comprobar que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $AX = 2X$ y, sin calcular la matriz A^{100} obtener el valor β tal que $A^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) $AX = \alpha X \Longrightarrow AX - \alpha X = 0 \Longrightarrow (A - \alpha I)X = O$:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1-\alpha & 4 \\ -1 & 6-\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se trata de un sistema homogéneo cuya matriz asociada es $M = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 4 \\ -1 & 6-\alpha \end{pmatrix} \Longrightarrow$ $|M| = \alpha^2 - 7\alpha + 10 = 0 \Longrightarrow \alpha = 2$ y $\alpha = 5$.
Si $\alpha \neq 5$ y $\alpha \neq 2 \Longrightarrow |M| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(M) = 2 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado cuya única solución será la trivial $x = y = z = 0$.

b) Si $\alpha = 5$ el sistema es compatible indeterminado:

$$\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$$

c) Comprobamos que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es solución de la ecuación $AX = 2X$;

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

luego es solución de la ecuación. Se cumpliría: $A^2X = 2AX = 2 \cdot 2X$, $A^3X = AA^2X = 2^3X$, $A^4X = 2^4X \Longrightarrow A^nX = 2^nX$:

$$A^{100}X = 2^{100}X \Longrightarrow \beta = 2^{100}$$

1.14. La Rioja

1.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.53 Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A.

b) Sea el sistema de ecuaciones

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Discute el sistema de ecuaciones para los distintos valores del parámetro a.

b) Resuelve el sistema de ecuaciones cuando sea compatible.

Solución:

a) $|A| = -a^3 + 3a - 2 = 0 \Longrightarrow a = 1$ y $a = -2 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$; $|A| = -a^3 + 3a - 2 = 0 \Longrightarrow a = 1$ y $a = -2$.

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\ F_1 = F_2 = F_3\ \right] \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) Si $a = 1$:

$$x + y + z = 1 \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 - \mu - \lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda \end{cases}$$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$: Por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a^2 + 2a - 1}{-a^3 + 3a - 2} = \frac{1}{a+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a^2 + 2a - 1}{-a^3 + 3a - 2} = \frac{1}{a+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a^2 + 2a - 1}{-a^3 + 3a - 2} = \frac{1}{a+2}$$

1.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.54 Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}$$

a) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A.

b) Halla la inversa de la matriz A, cuando exista.

c) Para $a = 1$ y las matrices $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ resuelve el sistema

$$\begin{cases} BXA = Y \\ \dfrac{1}{3}Y + C = D \end{cases}$$

Solución:

a) $|A| = a(2a-1) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 1/2 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{0, 1/2\}$.

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 2a-1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2a-1} & \dfrac{1}{2a-1} \end{pmatrix}$$

c) $\dfrac{1}{3}Y + C = D \Longrightarrow Y = 3(D-C) = 3\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$

$BXA = Y \Longrightarrow X = B^{-1}YA^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -15 & -15 \\ -21 & 39 & 42 \end{pmatrix}$$

1.15. Murcia

1.15.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.55 Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = a + 3 \end{cases}$$

a) Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a = 0$.

b) Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a+3 \end{array}\right); \quad |A| = -a^3 + 3a - 2 = 0 \Longrightarrow a = 1, \ a = -2$$

Si $a \neq -2$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + z = 0 \\ y + z = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

b) Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

c) Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

Problema 1.56 Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3 y A^4.

b) Calcule la expresión general de A^n para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$

c) Determine si existe la inversa de A . En caso afirmativo, calcúlela.

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}$

c) $|A| = 1 \Longrightarrow \exists A^{-1} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.15.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.57 Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} ax + y - 2z = 0 \\ x + y - az = -1 \\ x + y + z = a \end{cases}$$

a) Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a = 2$.

b) Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{array}\right); \quad |A| = a^2 - 1 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

Si $a \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

Si $a = 2$:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ x + y - 2z = -1 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

b) Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left[\ F_2 = F_3\ \right] \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\begin{cases} -x + y - 2z = 0 \\ x + y + z = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -2 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

c) Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

Problema 1.58 Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determine para qué valores de a la matriz A tiene inversa.

b) Para $a = 1$, calcule la inversa de A.

c) Para $a = 1$, resuelva la ecuacion matricial $XA + 2I = 2A$, donde I es la matriz identidad 3×3.

Solución:

a) $|A| = a^2 - a - 1 = 0 \Longrightarrow a = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Longrightarrow \exists A^{-1},\ \forall a \in \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$

b) Si $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $XA + 2I = 2A \Longrightarrow X = (2A - 2I)A^{-1}$

$$X = \left[2\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.16. Navarra

1.16.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.59 Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+2)x - y - az = -a \\ (-a-2)x + 2y + (a^2 - a)z = 3a - 1 \\ (a+2)x - 2y + (2 - 2a)z = -2a \end{cases}$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a+2 & -1 & -a & -a \\ -a-2 & 2 & a^2 - a & 3a - 1 \\ a+2 & -2 & 2 - 2a & -2a \end{array} \right); \quad |A| = (a+2)(a-2)(a-1) = 0 \Longrightarrow a = 1,\ \ a = -2\ \ a = 2$$

- Si $a \neq -2$ y $a \neq 2$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única) Por Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a & -1 & -a \\ 3a - 1 & 2 & a^2 - a \\ -2a & -2 & 2 - 2a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a^2 + 2a - 1}{(a+2)(a-2)(a-1)} = \frac{2}{a^2 - 4}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a+2 & -a & -a\\ -a-2 & 3a-1 & a^2-a\\ a+2 & -2a & 2-2a\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{(a^2-4)(a-1)^2}{(a+2)(a-2)(a-1)}=a-1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a+2 & -1 & -a\\ -a-2 & 2 & 3a-1\\ a+2 & -2 & -2a\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{(a-1)(a-2)}{(a+2)(a-2)(a-1)}=\frac{1}{a-2}$$

- Si $a=-2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 6 & -7\\ 0 & -2 & 6 & 4\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2+2F_1\\ F_3-2F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 10 & -3\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema incompatible

- Si $a=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & -1 & -2 & -2\\ -4 & 2 & 2 & 5\\ 4 & -2 & -2 & -4\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2+F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & -1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 0 & 2\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema incompatible

- Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & -1 & -1\\ -3 & 2 & 0 & 2\\ 3 & -2 & 0 & -2\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2+F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -1\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3x-y-z=-1\\ -3x+2y=2\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{3}\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

Problema 1.60 Resuelve la ecuación matricial $XA^{35}=A^{25}$, teniendo en cuenta que A es la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ A^2=\begin{pmatrix} 0 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\ A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

$$XA^{35}=A^{25}\Longrightarrow XA^{10}A^{25}=A^{25}\Longrightarrow XA^{10}=A^{25}(A^{25})^{-1}=I\Longrightarrow X=(A^{10})^{-1}$$

$$A^{10}=A^3\cdot A^3\cdot A^3\cdot A=I\cdot I\cdot I\cdot A=A$$

$$X=A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

1.16.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.61 Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\left\{\begin{array}{l}(a+1)x-y+(1-a)z=a+1\\(-a-1)x+(a+1)y+(a^2+a-2)z=-1\\(a+1)x-(a+1)y+(1-a^2)z=0\end{array}\right.$$

Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}a+1&-1&1-a&a+1\\-a-1&a+1&a^2+a-2&-1\\a+1&-(a+1)&1-a^2&0\end{array}\right);\quad |A|=a(a+1)(a-1)=0\Longrightarrow a=0,\ \ a=-1\ \ a=1$$

- Si $a\neq -1$ y $a\neq 0$ y $a\neq 1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$ Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única) Por Cramer

$$x=\frac{\left|\begin{array}{ccc}a+1&-1&1-a\\-1&a+1&a^2+a-2\\0&-(a+1)&1-a^2\end{array}\right|}{|A|}=\frac{(a+1)^2(a-1)}{a(a+1)(a-1)}=\frac{a+1}{a}$$

$$y=\frac{\left|\begin{array}{ccc}a+1&a+1&1-a\\-a-1&-1&a^2+a-2\\a+1&0&1-a^2\end{array}\right|}{|A|}=\frac{(a+1)(a-1)(2a+1)}{a(a+1)(a-1)}=\frac{2a+1}{a}$$

$$z=\frac{\left|\begin{array}{ccc}a+1&-1&a+1\\-a-1&a+1&-1\\a+1&-(a+1)&0\end{array}\right|}{|A|}=\frac{-a(a+1)}{a(a+1)(a-1)}=-\frac{1}{a-1}$$

- Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&2&0\\0&0&-2&-1\\0&0&&0\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{\begin{array}{l}-y+2z=0\\-2z=-1\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\y=1\\z=1/2\end{array}\right.$$

- Si $a=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\-1&1&-2&-1\\1&-1&1&0\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c}F_1\\F_2+F_1\\F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema incompatible

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

Problema 1.62 Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A \cdot B| = |A + B|$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } B = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix}$$

.

Solución:

$$|A| = t(t+1)(t-1); \ \ |B| = t(t+1) \Longrightarrow |A \cdot B| = |A||B| = t^2(t+1)^2(t-1)$$

$$|A + B| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix} \right| \Longrightarrow$$

$$|A + B| = \begin{vmatrix} t & 0 & t-1 \\ t+1 & 0 & 2t+1 \\ t+2 & 0 & t+2 \end{vmatrix} = 0$$

$|A \cdot B| = |A + B| \Longrightarrow t^2(t+1)^2(t-1) = 0 \Longrightarrow t = 0$, $t = -1$ y $t = 1$.

1.17. Galicia

1.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.63 Da respuesta a los siguientes apartados:

a) Suponiendo que A y X son matrices cuadradas y que $A + I$ es invertible despeja X en la ecuación $A - X = AX$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ calcula X tal que $A - X = AX$.

Solución:

a) $A - X = AX \Longrightarrow AX + X = A \Longrightarrow (A + I)X = A \Longrightarrow X = (A + I)^{-1}A$.

b) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 1/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$

Problema 1.64 Da respuesta a los siguientes apartados:

a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ my + (3-m)z = -6 \\ 2x - y + mz = 6 \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, en los casos $m=0$ y $m=4$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & m & 3-m & -6 \\ 2 & -1 & m & 6 \end{array}\right); \quad |A|=2m(m-3)=0 \Longrightarrow m=0, \;\; m=3$$

- Si $m\neq 0$ y $m\neq 3 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$ Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $m=3$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema incompatible

b) Si $m=0$: (sistema compatible indeterminado)

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-y+3z=0 \\ 3z=-6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=-6+2\lambda \\ z=-2 \end{array}\right.$$

Si $m=4$: (sistema compatible determinado)

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-y+3z=0 \\ 4y-z=-6 \\ 2x-y+4z=6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-9 \\ y=0 \\ z=6 \end{array}\right.$$

1.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.65 Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Despeja X en la ecuación $XA+B=C$, sabiendo que A es una matriz invertible.

b) Calcula X tal que $XA+B=C$ si

$$A=\left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{array}\right), \; B=\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right), \; C=\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{array}\right)$$

Solución:

a) $XA + B = C \Longrightarrow XA = C - B \Longrightarrow X = (C - B)A^{-1}$.

b)

$$X = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/5 & -1/5 \\ -3/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/5 & 3/5 \\ 7/5 & -3/5 \\ 7/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

Problema 1.66 Da respuesta a los siguientes apartados:

a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - y + 3z = m \\ my - 2z = -2 \\ x + (m-1)y + (m+3)z = m \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, en los casos $m = 0$ y $m = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 & m \end{array} \right); \quad |A| = m(m+2) = 0 \Longrightarrow m = 0, \ \ m = -2$$

- Si $m \neq 0$ y $m \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) =$$

$$\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $m = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) Si $m = 0$: (sistema compatible indeterminado)

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ -2z = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

Si $m = 2$: (sistema compatible determinado)

$$\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2y - 2z = -2 \\ x + y + 5z = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1/2 \\ z = 1/2 \end{cases}$$

2. Geometría

Teoría

Vectores

Sean $\overrightarrow{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\overrightarrow{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\overrightarrow{w}=(w_1,w_2,w_3)$

- $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente independientes si $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$. En caso contrario uno de los vectores es combinación lineal de los otros.
- Producto escalar: $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3 \\ \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{u}|\cos\alpha \end{array} \right.$
- Producto vectorial: $\overrightarrow{t}=\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$; el vector $\overrightarrow{t}$ es perpendicular a los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$. Se cumple $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|=|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\sin\alpha$.
  $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|=S$ donde S es el área del paralelogramo que describen los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ por paralelelismo. (El área de un triángulo será $\dfrac{1}{2}S$)
- Producto mixto: $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}=V$, donde V es el volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores por paralelismo. El volumen de un paralelepípedo es también $V=S_{\text{base}}\cdot$Altura. Para calcular el volumen de un tetraedro tenemos dos fórmulas: $V_{\text{tetraedro}}=\frac{1}{6}V_{\text{paralelepípedo}}$ y $V_{\text{tetraedro}}=\frac{1}{3}S_{\text{base}}\cdot\text{Altura}$

Ecuaciones

Sea la recta $r:\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(u_1,u_2,u_3) \\ P_r(a,b,c) \end{array} \right.$

Vectorial	Paramétrica	Continua	General
$\overrightarrow{x}=P_r+\lambda\overrightarrow{u_r}$	$\left\{ \begin{array}{l} x=a+\lambda u_1 \\ y=b+\lambda u_2 \\ z=c+\lambda u_3 \end{array} \right.$	$\dfrac{x-a}{u_1}=\dfrac{y-b}{u_2}=\dfrac{z-c}{u_3}$	No hay

Sea el plano $\pi:\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u}=(u_1,u_2,u_3) \\ \overrightarrow{v}=(v_1,v_2,v_3) \\ P(a,b,c) \end{array} \right.$

Vectorial	Paramétrica	Continua	General
$\overrightarrow{x}=P+\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}$	$\left\{ \begin{array}{l} x=a+\lambda u_1+\mu v_1 \\ y=b+\lambda u_2+\mu v_2 \\ z=c+\lambda u_3+\mu v_3 \end{array} \right.$	No hay	$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x-a \\ u_2 & v_2 & y-b \\ u_3 & v_3 & z-c \end{vmatrix}=0$ $Ax+By+Cz+D=0$

Ideas:

- Tres puntos $P_1(a_1,b_1,c_1)$, $P_2(a_2,b_2,c_2)$ y $P_3(a_3,b_3,c_3)$ no están alineados si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$

- El vector $\overrightarrow{u_r}$ y la recta r tienen la misma dirección.
- El vector $\overrightarrow{u_\pi} = (A, B, C)$ y el plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ son perpendiculares.

Posiciones de rectas y planos:

- Dos rectas: $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{array} \right.$, $s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} \\ P_s \end{array} \right.$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$. Construimos la matriz $A = \left(\begin{array}{c} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \\ \overrightarrow{P_rP_s} \end{array} \right)$.

  Si Rango$(A) = 3 \Longrightarrow$ Se cruzan.

  Si Rango$(A) = 2$: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}\left(\begin{array}{c} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{array} \right) = 2 \Longrightarrow \text{Se cortan} \\ \text{Rango}\left(\begin{array}{c} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{array} \right) = 1 \Longrightarrow \text{Son paralelas} \end{array} \right.$.

  Si Rango$(A) = 1 \Longrightarrow$ Coinciden.

- De una recta $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{array} \right.$ y un plano $\pi : Ax+By+Cz+D = 0$: Se pasa la recta a paramétricas y se sustituye en el plano: $A(a + \lambda u_1) + B(b + \lambda u_2) + C(c + \lambda u_3) + D = 0$ Al resolver esta ecuación pueden ocurrir tres casos:

  a) Encuentro un valor de $\lambda = k \Longrightarrow$ se cortan. El punto de corte se encuentra sustituyendo el valor de λ en la ecuación paramétrica de la recta.

  b) Encuentro infinitos valores de $\lambda \Longrightarrow$ la recta se encuentra contenida en el plano. (La solución de la ecuación queda de la forma $0 = 0$)

  c) No existen valores de $\lambda \Longrightarrow$ la recta es paralela al plano. (La solución de la ecuación queda de la forma $7 = 0$)

- De dos planos $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1$ y $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2$. Puede ocurrir:

  a) $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ o $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ o $\dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ en cualquiera de ellos los dos planos se cortan en una recta.

  b) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$ en este caso son paralelos.

  c) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$ en este caso coinciden.

- De tres planos $\pi_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1$, $\pi_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2$ y $\pi_3 : A_3x+B_3y+C_3z+D_3$. Se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y se discute por el teorema de Roché. Si el sistema tiene solución única los tres planos se cortan en un punto. En el caso de que tenga infinitas soluciones se analizan los planos dos a dos. En el caso de que no tenga soluciones se analizan los planos dos a dos.

Fórmulas:

- Distancia entre dos puntos: $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$
- Distancia de un punto a una recta: $d(P, r) = \dfrac{|\overrightarrow{PP_r} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}$
- Distancia de un punto a un plano: $d(P, \pi) = \dfrac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

- Distancia entre dos rectas que se cruzan: $d(r,s) = \dfrac{|[\overrightarrow{PP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|}$

- Ángulo entre dos vectores: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|}$

- Ángulo entre dos rectas: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_r}|}$

- Ángulo entre dos planos: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}}}{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}||\overrightarrow{u_{\pi_2}}|}$

- Ángulo entre una recta y un plano: $\sin\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_\pi}|}$

- Punto medio de P y Q es $A = \dfrac{P+Q}{2}$

- Punto simétrico de P respecto de Q es $A = 2Q - P$

- Esfera: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ es una esfera de centro $C(a,b,c)$ y radio$= r$.

Ideas métricas:

- Punto simétrico de P respecto al plano π:
  - Calculo r que pasa por P perpendicular a π, $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi}$.
  - Calculo el punto de corte P' de r con π.
  - $P'' = 2P' - P$

- Punto simétrico de P respecto a la recta r:
  - Calculo π perpendicular a r que contenga a P, $\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r}$.
  - Calculo el punto de corte P' de r con π.
  - $P'' = 2P' - P$

- Recta perpendicular a otras dos que se cruzan (y las corta): Se calcula como intersección de los dos planos $\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} \\ \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{array} \right. , \quad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} \\ \overrightarrow{u_s} \\ P_s \end{array} \right.$
  donde $\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$

- Recta que pasa por un punto P y corta a dos rectas que se cruzan: Se calcula como intersección de los dos planos
$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_rP} \\ \overrightarrow{u_r} \\ P_r \text{ o } P \end{array} \right. , \quad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_sP} \\ \overrightarrow{u_s} \\ P_s \text{ o } P \end{array} \right.$$

- Recta paralela a un plano π y que corta a otra recta t que a su vez corta a π y que pasa por el punto P:
  - Calculo un plano π' paralelo a π que contenga a P.
  - Calculo P' punto de corte de π' y t.

    - La recta buscada es la que une los puntos P y P'.

- Ecuación de la circunferencia resultante de cortar una esfera con un plano (vertical u horizontal). Si el plano es $z = k$, se sustituye en la ecuación y resulta una circunferencia. Tened cuidado, el centro de esta circunferencia es (a, b, k).

- Plano tangente a una esfera de centro C en el punto de tangencia P: $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{CP} \\ \text{Contiene a } P \end{cases}$

- Encontrar los puntos de una recta r que están a una distancia λ de un punto P: Se calcula la ecuación de una esfera de centro P y radio λ. Se buscan los puntos de corte de esta esfera y la recta r.

- Plano Mediador π entre dos puntos P_1 y P_2: Es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que cumplen $d(P, P_1) = d(P, P_2)$.

- Plano Bisector π entre dos planos π_1 y π_2:Es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que cumplen $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$.

Problemas

2.1. Aragón

2.1.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.1 Se pide:

a) Determine el valor de las constantes a y b para que los puntos siguientes estén alineados $A(1,1,2)$, $B(2,2,2)$ y $C(-1,a,b)$ y determine la recta que los contiene.

b) Dados dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, calcule el vector:

$$(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})\times(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})$$

Donde el símbolo " $\times$ " representa el producto vectorial.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}\Longrightarrow(1,1,0)=k(-2,a-1,b-2)\Longrightarrow 1=-2k\Longrightarrow k=-\dfrac{1}{2}$ luego:

$$(1,1,0)=-\frac{1}{2}(-2,a-1,b-2)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}1=-\frac{1}{2}(a-1)\Longrightarrow a=-1\\ \\ 0=-\frac{1}{2}(b-2)\Longrightarrow b=2\end{array}\right.$$

b) Sea $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=(w_1,w_2,w_3)$:

$$(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})\times(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})=\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{w}=\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ w_1&w_2&w_3\\ w_1&w_2&w_3\end{array}\right|=(0,0,0)$$

Tiene dos filas iguales.

Problema 2.2 Se pide:

a) Determine la ecuación del plano determinado por el punto $P(2,1,2)$ y la recta $r:(1,0,0)+t(-1,1,1)$.

b) Dados los vectores $\overrightarrow{u}=(1,2,0)$ y $\overrightarrow{v}=(2,1,-3)$, determine el área del triángulo que tiene por lados esos dos vectores.

Solución:

a)

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-1,1,1)\\ \overrightarrow{P_rP}=(1,1,2)\\ P_r(1,0,0)\end{array}\right.\Longrightarrow\pi_1:\left|\begin{array}{ccc}x-1&y&z\\ -1&1&1\\ 1&1&2\end{array}\right|=0\Longrightarrow\pi:x+3y-2z-1=0$$

b)

$$S_T=\frac{1}{2}|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|=\frac{1}{2}|\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ 1&2&0\\ 2&1&-3\end{array}\right||=\frac{1}{2}|(-6,3,-3)|=\frac{3}{2}|(-2,1,-1)|=\frac{3\sqrt{6}}{2}\ u^2$$

2.1.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.3 Se pide:

a) Determine el volumen del paralelepípedo determinado por los siguientes vectores: $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{v} = (2,1,0)$ y $\overrightarrow{w}$, siendo $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$, y donde el símbolo " $\times$ " representa el producto vectorial.

b) Determine la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,3,2)$ y es perpendicular a la recta.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x- & 2y & = & -1 \\ & 2y+ & 3z = & 3 \end{array}\right.$$

Solución:

a) $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,2,-1)$

$$V = |[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]| = |\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}| = 6\ u^3$$

b)

$$r : \left\{\begin{array}{rrrr} 3x- & 2y & = & -1 \\ & 2y+ & 3z = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3(2,3,-2) \\ \\ P_r(1,3,2) \end{array}\right.$$

$\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} = (2,3,-2) \Longrightarrow \pi : 2x + 3y - 2z + \lambda = 0$, sustituyendo el punto $P(1,3,2)$ tenemos:

$$\pi : 2 + 9 - 4 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -7 \Longrightarrow \pi : 2x + 3y - 2z - 7 = 0$$

Problema 2.4 Determine la ecuación del plano que contiene a la recta:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x+ & y & = & -1 \\ & 4y+ & 3z = & 5 \end{array}\right.$$

y pasa por el punto $A(1,3,-1)$.
Solución:

$$r : \left\{\begin{array}{rrrr} 3x+ & y & = & -1 \\ & 4y+ & 3z = & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3(1,-3,4) \\ \\ P_r(0,-1,3) \end{array}\right.$$

$$\pi : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,-3,4) \\ \overrightarrow{AP_r} = (-1,-4,4) \\ P_r(0,-1,3) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} x & y+1 & z-3 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : 4x - 8y - 7z + 13 = 0$$

2.2. Asturias

2.2.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.5 Sean los planos $\pi_1 : x+y+z = 0$ y π_2. Su intersección es la recta $r : \left\{ \begin{array}{r} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{array} \right.$

a) La ecuación del plano π_2 sabiendo que $A(1,1,1) \in \pi_2$.

b) La ecuación de un plano π_1' paralelo a π_1 y que esté a una distancia de $\sqrt{3}$ unidades de la recta r.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1,0,1) \\ P_r(0,0,0) \end{array} \right.$$

a)

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1,0,1) \\ \overrightarrow{P_rA} = (1,1,1) \\ P_r(0,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : x - 2y + z = 0$$

b) $\pi_1' : x + y + z + \lambda = 0$:

$$d(P_r, \pi_1') = \frac{|0+0+0+\lambda|}{\sqrt{3}} = \frac{|\lambda|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Longrightarrow \lambda = \pm 3 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi_1' : x+y+z+3=0 \\ \pi_1' : x+y+z-3=0 \end{array} \right.$$

Problema 2.6 Sean los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,-1,-1)$. Calcula:

a) La ecuación del plano π que hace que los puntos A y B sean simétricos respecto a él.

b) Los puntos C y D que dividen el segmento AB en tres partes iguales.

Solución:

a) Se trata de un plano mediador: $d(A,\pi) = d(B,\pi)$
$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2} \Longrightarrow \pi : y + z = 0$

b) $\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(0,-2,-2) = \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

$$C = A + \overrightarrow{u} = (1,1,1) + \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$D = C + \overrightarrow{u} = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \left(1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

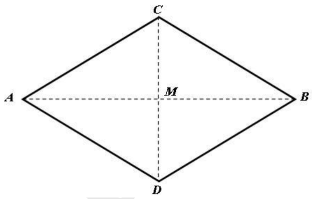
$$B = D + \overrightarrow{u} = \left(1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) + \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = (1,-1,-1)$$

2.2.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.7 Sean $A(3,1,0)$ y $B(1,3,0)$ los vértices opuestos de un rombo situado en el plano $\pi: z=0$.

a) Calcula un vector director $\overrightarrow{v_r}$ y la ecuación de la recta r a la que pertenecen los otros dos vértices del rombo C y D.

b) Determina dichos vértices C y D sabiendo que están a una distancia de $\sqrt{2}$ unidades del punto medio M.



Características de un rombo: Lados iguales paralelos dos a dos. Diagonales perpendiculares que se cortan en el centro de ambas.

Solución:

a) $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB} = (-2,2,0)$ y $r \subset \pi: z=0$.

$$M\left(\frac{3+1}{2}, \frac{1+3}{2}, 0\right) = (2,2,0)$$

Tenemos $\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, como $r \subset \pi: z=0 \Longrightarrow v_r = (a,b,0)$:

$$(a,b,0)\cdot(-2,2,0) = -2a+2b = 0 \Longrightarrow a=b \Longrightarrow v_r = (a,a,0) = a(1,1,0)$$

Luego $v_r = (1,1,0)$ y la recta buscada: $r: \left\{\begin{array}{l} x = 2+\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 0 \end{array}\right.$

b) $P_r(2+\lambda, 2+\lambda, 0)$, $M(2,2,0)$ y $|\overrightarrow{MP_r}| = \sqrt{2}$

$$|\overrightarrow{MP_r}| = |(\lambda,\lambda,0)| = \sqrt{2\lambda^2} = \sqrt{2} \Longrightarrow \lambda = \pm 1$$

Para $\lambda = 1 \Longrightarrow C = (3,3,0)$ y para $\lambda = -1 \Longrightarrow D(1,1,0)$

Problema 2.8 Dados el plano $\pi: x+y=1$ y la recta r que pasa por el punto $A(1,1,1)$ con vector director $v_r = (0,1,1)$. Calcula:

a) El punto P intersección del plano π y de la recta r.

b) El punto A' simétrico de A respecto al plano π.

Solución:

a) $r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (0,1,1) \\ P_r = A(1,1,1) \end{array}\right. \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{array}\right.$

$$1 + (1+\lambda) = 1 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow P(1,0,0)$$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calcular la recta $t \perp \pi / A \in t$. Tenemos $\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,1,0)$: $t: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (1,1,0) \\ P_t = A(1,1,1) \end{array}\right. \Longrightarrow$ $t: \left\{\begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1 \end{array}\right.$

- Calcular el punto de corte A'' de t con π:

$$(1+\lambda)+(1+\lambda)=1 \Longrightarrow \lambda=-\frac{1}{2} \Longrightarrow A''\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$$

- $\dfrac{A+A'}{2}=A'' \Longrightarrow A'=2A''-A=(1,1,2)-(1,1,1)=(0,0,1)$

2.3. Islas Baleares

2.3.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.9 Determinar la posición relativa del plano $x+y+z=1$ y la recta con ecuación $x-1=y-1=\dfrac{z-1}{-2}$. Calcular la proyección ortogonal de esta recta sobre el plano.

Solución:

$r: x-1=y-1=\dfrac{z-1}{-2} \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,1,-2) \\ P_r=A(1,1,1) \end{array}\right. \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1-2\lambda \end{array}\right.$

$(1+\lambda)+(1+\lambda)+(1-2\lambda)=1 \Longrightarrow 3=1$ lo que es falso y, por tanto, la recta r es paralela al plano π.

Para la segunda parte del problema calculamos un plano π' perpendicular a π que contenga a r:

$$\pi': \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi}=(1,1,1) \\ \overrightarrow{u_r}=(1,1,-2) \\ P_r(1,1,1) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi': \left|\begin{array}{ccc} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}\right|=0 \Longrightarrow \pi': x-y=0$$

La recta h proyección de r sobre π sería la interccción de los planos π y π':

$$h: \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x-y=0 \end{array}\right. \Longrightarrow h: \left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=1-2\lambda \end{array}\right.$$

Problema 2.10 Consideremos la recta $\frac{x-1}{2}=y+1=-z+1$ y el plano $x-y=0$. Calcular el área del triángulo formado por el punto de corte entre la recta y el plano, el punto $(1,-1,1)$ de la recta y la proyección ortogonal de este punto sobre el plano.

Solución:

$r: \frac{x-1}{2}=y+1=-z+1 \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,1,-1) \\ P_r(1,-1,1) \end{array}\right. \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} x=1+2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=1-\lambda \end{array}\right.$

$(1+2\lambda)-(-1+\lambda)=0 \Longrightarrow \lambda=-2 \Longrightarrow A(-3,-3,3)$ y llamamos $B=P_r(1,-1,1)$.
Calculamos la proyección de P_r sobre π:

- Calcular la recta $t \perp \pi / B \in t$. Tenemos $\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_\pi}=(1,-1,0)$: $t: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=(1,-1,0) \\ P_t=B(1,-1,1) \end{array}\right. \Longrightarrow t:$ $\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=-1-\lambda \\ z=1 \end{array}\right.$

- Calcular el punto de corte C de t con π:

$$(1+\lambda)-(-1-\lambda)=0 \Longrightarrow \lambda=-1 \Longrightarrow C\,(0,0,1)$$

$\overrightarrow{AB} = (1,-1,1) - (-3,-3,3) = (4,2,-2)$ y $\overrightarrow{AC} = (0,0,1) - (-3,-3,3) = (3,3,-2)$

$$S_T = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|2(1,1,3)| = \sqrt{11}\ u^2$$

2.3.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.11 Determinar un plano que, pasando por el origen de coordenadas, sea paralelo a la recta de ecuación $\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ y+z=2 \end{array}\right.$ y también es paralelo a la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(1,1,0)$ y $(0,1,1)$.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ y+z=2 \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=2-\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-1,1,-1) \\ P_r(1,0,2) \end{array}\right.$$ LLamamos $A(1,1,0)$, $B(0,1,1)$ y $s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{AB}=(-1,0,1) \\ P_s=A(1,1,0) \end{array}\right.$

$$\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,2,1) \Longrightarrow \pi : x+2y+z+\lambda = 0$$

Como $O(0,0,0) \in \pi \Longrightarrow 0+0+0+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \pi : x+2y+z=0$.

Problema 2.12 Consideremos los puntos $A(0,0,0)$, $B(1,1,0)$ y $C(0,1,1)$. Calcular el área del triángule que forman los puntos A, B y C, y determinar el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Solución:
$\overrightarrow{AB} = (1,1,0) - (0,0,0) = (1,1,0)$; $\overrightarrow{AC} = (0,1,1) - (0,0,0) = (0,1,1)$

$$S_T = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(1,-1,1)| = \frac{\sqrt{3}}{2}\ u^2$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \alpha = 60^\circ$$

2.4. Islas Canarias

2.4.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.13 Dados los planos $\pi_1 : x-y+3=0$ y $\pi_2 : 2x+y-z=0$, calcular:

a) La ecuación de la recta r paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto $B(2,2,3)$.

b) El ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

Solución:

a)

$$\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1,1,3)$$

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,3) \\ P_r = B(2,2,3) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{array} \right.$$

b)

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}}}{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}||\overrightarrow{u_{\pi_2}}|} = \frac{2-1}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Longrightarrow \alpha = 73^\circ 13' 17''$$

Problema 2.14 Se consideran los puntos $A(2,-1,1)$ y $B(-2,3,1)$ que determinan la recta r.

a) Calcular la recta perpendicular a r que pasa por el punto $P(-4,17,0)$.

b) Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (-4,4,0) = 4(-1,1,0) \\ P_r = A(2,-1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 \end{array} \right.$$

a) Calculamos un plano $\pi \perp r / P \in \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = \pi(-1,1,0) \Longrightarrow -x + y + \lambda = 0$, sustituyendo $P(-4,17,0) \Longrightarrow 4 + 17 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -21 \Longrightarrow \pi : -x + y - 21 = 0 \Longrightarrow \pi : x - y + 21 = 0$.
Ahora calculamos el punto de corte C de r con π: $(2-\lambda) - (-1+\lambda) + 21 = 0 \Longrightarrow \lambda = 12 \Longrightarrow C(-10,11,1)$

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{PC} = (-10,11,1) - (-4,17,0) = (-6,-6,1) \\ P_s = P(-4,17,0) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = -4 - 6\lambda \\ y = 17 - 6\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

b) Se trata de un plano mediador: $d(A,\pi') = d(B,\pi')$
$\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2} \Longrightarrow \pi' : x - y + 1 = 0$

2.4.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.15 Hallar la ecuación de la recta que verifica simultáneamente las siguientes condiciones:

- es paralela a los planos de ecuaciones: $\pi_1 : x - 3y + z = 0$ y $\pi_2 : 2x - y + 3z = 5$,
- pasa por el punto $P(2,-1,5)$.

Solución:

$r \parallel \pi_1$ y $r \parallel \pi_2 \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \parallel \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}}$

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}} = \left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right| = (-8,-1,5) \\ \\ P_r = P(2,-1,5) \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x = 2-8\lambda \\ y = -1-\lambda \\ z = 5+5\lambda \end{array}\right.$$

Problema 2.16 Hallar el ángulo que forman el plano $\pi : 2x - y + z = 0$ y el plano que contiene a las rectas

$$r:\left\{\begin{array}{l} x = 1-t \\ y = t \\ z = t \end{array}\right. \quad \text{y} \quad s: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = z-1$$

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x = 1-t \\ y = t \\ z = t \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1,1,1) \\ P_r(1,0,0) \end{array}\right. \quad \text{y} \quad s:\left\{\begin{array}{l} x = -1-2\lambda \\ y = 0 \\ z = 1+\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-2,0,1) \\ P_s(-1,0,1) \end{array}\right.$$

Vamos a comprobar que se cortan y calculamos el punto de corte: $\left\{\begin{array}{l} 1-t = -1-2\lambda \\ t = 0 \\ t = 1+\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ t = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow A(1,0,0)$ es el único punto en común que tienen las dos rectas, y por tanto, de corte.

El plano π' que buscamos: $\pi' : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1,1,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-2,0,1) \\ P_r(1,0,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi' : \left|\begin{array}{ccc} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow \pi' :$ $x - y + 2z - 1 = 0$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u_\pi} \cdot \overrightarrow{u_{\pi'}}}{|\overrightarrow{u_\pi}||\overrightarrow{u_{\pi'}}|} = \frac{5}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{5}{6} \Longrightarrow \alpha = 33^\circ 33' 26''$$

2.5. Cantabria

2.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.17 Tomemos el plano $\pi : 2x + ay + z = 2$ y la recta $r(t) = (0,0,0) + t\overrightarrow{(2,1,1)}$.

a) Determine a para que r y π sean ortogonales.

b) Determine a para que r y π sean paralelos. Calcule la distancia entre r y π en este caso.

Solución:

a) $\overrightarrow{u_\pi} = \lambda\overrightarrow{u_r} \Longrightarrow (2,a,1) = \lambda(2,1,1) \Longrightarrow \lambda = 1$ y $a = 1$.

b) $\overrightarrow{u_\pi} \cdot \overrightarrow{u_r} = 5 + a = 0 \Longrightarrow a = -5 \Longrightarrow \pi : 2x - 5y + z = 2$

$$d(r,\pi) = d(O,\pi) = \frac{|-2|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{15}\ u$$

Problema 2.18 Sean las rectas $r_1 : \begin{cases} y = 2 \\ 2x + z = 13 \end{cases}$ y $r_2 : \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - z = 3 \end{cases}$ y el punto $A(0, 0, 3)$. Calcule la ecuación general (implícita) del plano que pasa por A y es paralelo a r_1 y a r_2.

Solución:

$$\overrightarrow{u_{r_1}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 0, -2) \text{ y } \overrightarrow{u_{r_2}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 1, -2)$$

$$\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (2, 6, 1) \Longrightarrow \pi : 2x + 6y + z + \lambda = 0$$

Sustituyendo el punto $A(0, 0, 3) \Longrightarrow 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -3 \Longrightarrow \pi : 2x + 6y + z - 3 = 0$

2.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.19 Sea el plano $\pi : (2, 1, 0) + t\overrightarrow{(2, 1, 0)} + s\overrightarrow{(0, 1, -1)}$ y el punto $A(2, 1, 3)$.

a) Calcule la distancia entre A y π.

b) Calcule la recta ortogonal (perpendicular) a π que contiene al punto A.

Solución:

a) $\overrightarrow{u_\pi} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 2, 2) \Longrightarrow \pi : -x + 2y + 2z + \lambda = 0$ Sustituyendo el punto $(2, 1, 0) \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \pi : x - 2y - 2z = 0$

$$d(A, \pi) = \frac{|2 - 2 - 6|}{\sqrt{1^2 + (2)^2 + (-2)^2}} = \frac{6}{\sqrt{9}} = 2\ u$$

b) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (-1, 2, 2) \\ P_r = A(2, 1, 3) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$

Problema 2.20 Sean los puntos $P(0, 1, 0)$, $Q(-1, 1, 2)$, $R(2, 0, -1)$ y el plano $\pi : \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -5t + s \\ z = -1 + 4s \end{cases}$

a) Calcule el ángulo formado por el plano que contiene a P, Q y R y el plano π.

b) Calcule la distancia entre P y Q.

Solución:

a) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u} = (4, -5, 0) \\ \overrightarrow{v} = (0, 1, 4) \\ A(2, 0, -1) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x - 2 & y & z + 1 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : 5x + 4y - z - 11 = 0$

$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (-1, 0, 2) \\ \overrightarrow{PR} = (2, -1, -1) \\ P(0, 1, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x & y - 1 & z \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi' : 2x + 3y + z - 3 = 0$

Tenemos $\overrightarrow{u_\pi} = (5, 4, -1)$ y $\overrightarrow{u_{\pi'}} = (2, 3, 1)$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u_\pi} \cdot \overrightarrow{u_{\pi'}}}{|\overrightarrow{u_\pi}||\overrightarrow{u_{\pi'}}|} = \frac{10 + 12 - 1}{\sqrt{42}\sqrt{14}} = \frac{21}{14\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \alpha = 30^\circ$$

b) $d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-1, 0, 2)| = \sqrt{5}\ u$.

2.6. Castilla León

2.6.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.21 Se pide:

a) Calcular la ecuacion del plano π que contiene a la recta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$ y pasa por el punto $A(1, 2, 1)$.

b) Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $B(2, 1, 2)$ y es perpendicular a las rectas $s_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$ y $s_2 : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 3, 2) \\ P_r(1, 1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{array} \right.$$

a) $$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 3, 2) \\ \overrightarrow{P_rA} = (0, 1, 0) \\ P_r(1, 1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : x - z = 0.$$

b) $$s_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{s_1}} = (2, 2, 2) \\ P_{s_1}(1, 1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow s_1 : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{array} \right. \text{ y}$$

$$s_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{s_2}} = (-1, 3, 2) \\ P_{s_2}(2, 1, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow s_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right.$$

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{s_1}} \times \overrightarrow{u_{s_2}} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{array} \right| = -2(1, 3, -4) \\ \\ P_r = B(2, 1, 2) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 2 - 4\lambda \end{array} \right.$$

Problema 2.22 Sean la recta $r : \frac{x-1}{m} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}$ y el plano $\pi : x + y + kz = 0$.
Encontrar m y k para que:

a) La recta r sea perpendicular al plano π.

b) La recta r esté contenida en el plano π.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (m, 2, 4) \\ P_r(1, 1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + m\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{array} \right. \text{ y } \overrightarrow{u_\pi} = (1, 1, k)$$

a) $\overrightarrow{u_r} = t\overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow (m, 2, 4) = t(1, 1, k) \Longrightarrow t = 2$ y $(m, 2, 4) = 2(1, 1, k) \Longrightarrow m = 2$ y $k = 2$.

b) $\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = 0 \Longrightarrow m + 2 + 4k = 0$
Por otro lado $P_r(1, 1, 1) \in \pi \Longrightarrow 1 + 1 + k = 0 \Longrightarrow k = -2$ y, por tanto, $m + 2 - 8 = 0 \Longrightarrow m = 6$.

Comprobamos que la recta con estos valores está contenida en π.

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 6\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{array} \right. \text{ y } \pi : x + y - 2z = 0 \Longrightarrow (1 + 6\lambda) + (1 + 2\lambda) - 2(1 + 4\lambda) = 0 \Longrightarrow 0 = 0,$$

luego $r \in \pi$.

2.6.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.23 Se pide:

a) Consideremos los vectores $\overrightarrow{u}=(1,1,a)$ y $\overrightarrow{v}=(1,-1,a)$. Calcular a para que sean perpendiculares.

b) Calcular un vector unitario perpendicular a los vectores $\overrightarrow{p}=(1,2,3)$ y $\overrightarrow{q}=(1,-2,-3)$.

Solución:

a) $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}\Longrightarrow \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0\Longrightarrow 1-1+a^2=0\Longrightarrow a=0$

b) $\overrightarrow{t}=\overrightarrow{p}\times\overrightarrow{q}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & -3\end{vmatrix}=(0,6,-4)=2(0,3,-2)\Longrightarrow \overrightarrow{t}\perp\overrightarrow{p}$ y $\overrightarrow{q}$.

$\overrightarrow{w}=\dfrac{\overrightarrow{t}}{|\overrightarrow{t}|}=\dfrac{(0,3,-2)}{\sqrt{13}}=\left(0,\dfrac{3\sqrt{13}}{13},-\dfrac{2\sqrt{13}}{13}\right)$ además tiene módulo uno.

Problema 2.24 Hallar a y b para que los vectores $(a,-1,2)$ y $(1,b,-2)$ sean perpendiculares y las dos primeras coordenadas de su producto vectorial sean iguales.

Solución:

$(a,-1,2)\cdot(1,b,-2)=0\Longrightarrow a-b-4=0$

$\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ a & -1 & 2\\ 1 & b & -2\end{vmatrix}=(2-2b,2+2a,ab+1)\Longrightarrow 2-2b=2+2a\Longrightarrow a=-b$

$$\begin{cases} a=-b\\ a-b-4=0\end{cases}\Longrightarrow \begin{cases} a=2\\ b=-2\end{cases}$$

2.7. Castilla La Mancha

2.7.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.25 Dados los puntos $A(1,2,0)$; $B(0,-1,2)$; $C(2,-1,3)$ y $D(1,0,1)$.

a) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que contiene a la recta que pasa por A y B y es paralelo a la recta que pasa por C y D.

b) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y D.

Solución:

a) $r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{AB}=(-1,-3,2)\\ P_r=A(1,2,0)\end{cases}\Longrightarrow r:\begin{cases}x=1-\lambda\\ y=2-3\lambda\\ z=2\lambda\end{cases}$ y $s:\begin{cases}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{CD}=(-1,1,-2)\\ P_s=D(1,0,1)\end{cases}\Longrightarrow$

$s:\begin{cases}x=1-\lambda\\ y=\lambda\\ z=1-2\lambda\end{cases}$

$\pi:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(-1,-3,2)\\ \overrightarrow{u_s}=(-1,1,-2)\\ P_r(1,2,0)\end{cases}\Longrightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-1 & y-2 & z\\ -1 & -3 & 2\\ -1 & 1 & -2\end{vmatrix}=0\Longrightarrow \pi: x-y-z+1=0$

b) $\overrightarrow{AB} = (-1, -3, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (1, -3, 3)$ y $\overrightarrow{AD} = (0, -2, 1)$.

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]| = |\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}| = \frac{|-4|}{6} = \frac{2}{3}\ u^3$$

Problema 2.26 Sean la recta $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$ el punto $P(3, 1, -1)$ y el plano $\pi : 2x + y - z = 0$

a) Calcula la distancia del punto P a la recta r.

b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P y por el punto Q, siendo Q el punto de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P.

Solución:

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3, 1, 2) \\ P_r(1, 0, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{array} \right.$, $\overrightarrow{P_rP} = (2, 1, 0)$

$$|\overrightarrow{P_rP} \times \overrightarrow{u_r}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = |(2, -4, -1)| = \sqrt{21}$$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{P_rP} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\ u$$

b)
- Calculamos $\pi' \parallel \pi / P \in \pi'$:

$$\pi' : 2x + y - z + \lambda = 0 \Longrightarrow 6 + 1 + 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -8 \Longrightarrow \pi' : 2x + y - z - 8 = 0$$

- Calculamos Q punto de corte de π' con r:

$$2(1 + 3\lambda) + (\lambda) - (-1 + 2\lambda) - 8 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow Q(4, 1, 1)$$

- Calculamos la recta t que pasa por P y Q:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{PQ} = (1, 0, 2) \\ P_t = P(3, 1, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 + 2\lambda \end{array} \right.$$

2.7.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.27 Sean la recta $r : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = -1 + 2\lambda \end{array} \right. \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

a) Determina razonadamente la posición relativa de r y π

b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano perpendicular al plano π y que contiene a la recta r.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-1,1,2)\\ P_r(1,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1-\lambda\\ y=\lambda\\ z=2\lambda\end{array}\right.$$

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u}=(1,1,2)\\ \overrightarrow{v}=(1,-1,0)\\ A(1,0,-1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}x-1 & y & z+1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{array}\right|=0\Longrightarrow \pi: x+y-z-2=0$$

a) $(1-\lambda)+(\lambda)-(2\lambda)-2=0\Longrightarrow \lambda=-\frac{1}{2}\Longrightarrow \pi$ y r se cortan en el punto $B\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-1\right)$

b) $$\pi':\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_\pi}=(1,1,-1)\\ \overrightarrow{u_r}=(-1,1,2)\\ P_r(1,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi':\left|\begin{array}{ccc}x-1 & y & z\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 2\end{array}\right|=0\Longrightarrow \pi: 3x-y+2z-3=0$$

Problema 2.28 Sea pide:

a) Dados los vectores $\overrightarrow{u}=(-1,0,-2)$, $\overrightarrow{v}=(a,b,1)$ y $\overrightarrow{w}=(2,5,c)$, halla razonadamente el valor de a, b y c para que los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ sean ortogonales y para que el vector $\overrightarrow{w}$ sea igual al producto vectorial de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

b) Determina razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(-1,3,1)$ y es perpendicular al plano $\pi: x+y+2z-3=0$. Comprueba si los puntos $Q(1,5,5)$ y $R(0,4,2)$ pertenecen o no a la recta.

Solución:

a) $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}\Longrightarrow \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0\Longrightarrow -a-2=0\Longrightarrow a=-2$
Si $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\Longrightarrow \overrightarrow{w}\perp\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{w}\perp\overrightarrow{v}$
$\overrightarrow{w}\perp\overrightarrow{u}\Longrightarrow \overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}=-2-2c=0\Longrightarrow c=-1$
$\overrightarrow{w}\perp\overrightarrow{v}\Longrightarrow \overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v}=2a+5b+c=0\Longrightarrow -4+5b-1=0\Longrightarrow b=1$

b) $$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{u_\pi}=(1,1,2)\\ P_r=P(-1,3,1)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=-1+\lambda\\ y=3+\lambda\\ z=1+2\lambda\end{array}\right.$$

El punto $Q(1,5,5)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}1=-1+\lambda\\ 5=3+\lambda\\ 5=1+2\lambda\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda=2\\ \lambda=2\\ \lambda=2\end{array}\right.\Longrightarrow Q\in r$

El punto $R(0,4,2)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}0=-1+\lambda\\ 4=3+\lambda\\ 2=1+2\lambda\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda=1\\ \lambda=1\\ \lambda=1/2\end{array}\right.\Longrightarrow R\notin r$

2.8. País Vasco

2.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.29 Sean la recta
$r:\left\{\begin{array}{l}4x-3y+4z=1\\ 3x-2y+z=0\end{array}\right.$ y el plano $\pi: x-y+Az=0$

a) ¿Existe algún valor de A para que el plano sea paralelo a r?

b) Encontrar el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto $(0,0,0)$.

Solución:

a) $\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (5,8,1)$, $\overrightarrow{u_\pi} = (1,-1,A)$ y $\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = 0 \Longrightarrow$
$5 - 8 + A = 0 \Longrightarrow A = 3$

b) $\overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} = (5,8,1) \Longrightarrow \pi' : 5x + 8y + z + \lambda = 0$ como $O(0,0,0) \in \pi' \Longrightarrow 0 + 0 + 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \pi' : 5x + 8y + z = 0$

Problema 2.30 Se consideran los tres puntos $A(0,0,1)$, $B(1,1,1)$ y $C(-1,-1,2)$. ¿Están alineados?
En caso afirmativo hallar la ecuación de la recta que los contiene.
En caso negativo calcular el plano que los contiene.
Solución:
$\overrightarrow{AB} = (1,1,0)$ y $\overrightarrow{AC}(-1,-1,1)$
$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Longrightarrow (1,1,0) = (-k,-k,k) \Longrightarrow k = 0$ y $k = -1$ lo cual es imposible y, por tanto no estan alineados.
$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \Longrightarrow$ Rango$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2 \Longrightarrow$ Los puntos no están alineados.

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1,1,0) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,-1,1) \\ A(0,0,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : x - y = 0$$

2.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.31 Hallar la ecuación de una recta paralela al plano $\pi : x + 2y + 3z = 6$ y que contenga al punto $P(1,0,0)$. ¿Es única dicha recta? Razonar la respuesta.
Solución:
$r \parallel \pi / P \in r$, $\overrightarrow{u_r} = (a,b,c)$, $\overrightarrow{u_\pi} = (1,2,3)$ y $\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = 0 \Longrightarrow a + 2b + 3c = 0$.
Un vector que cumpla esta condición puede ser $\overrightarrow{u_r} = (1,1,-1)$ ($a = 1$,$b = 1$ y $c = -1$)
Un recta paralela a π y que contenga al punto P:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,1,-1) \\ P(1,0,0) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

La recta r no sería única, el vector director será cualquier $\overrightarrow{u_r}$ del conjunto $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / a+2b+3c = 0\}$ y, por tanto, hay infinitos cumpliendo esta propiedad.

Problema 2.32 Se considera la recta $r : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ y el punto $P(1,2,5)$ exterior a la misma. Hallar la ecuación del plano que contiene a r y a P.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,2,3) \\ P_r(1,2,3) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases}$$

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,2,3) \\ \overrightarrow{P_rP} = (0,0,2) \\ P(1,2,5) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : 2x - y = 0$$

2.9. Extremadura

2.9.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.33 Sean los puntos $A = (0, 0, 2)$, $B = (2, 0, 1)$, $C = (0, 2, 1)$ y $D = (-2, 2, -1)$.

a) Halle la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.

b) Demuestre que los cuatro puntos no son coplanarios.

c) Calcule el área del triángulo formado por los puntos B, C y D.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (2, 0, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 2, -1)$

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 0, -1) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 2, -1) \\ A(0, 0, 2) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x & y & z-2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : x + y + 2z - 4 = 0$$

b) Sustituimos el punto D en el plano π: $-2 + 2 - 2 - 4 = -6 \neq 0 \Longrightarrow D \notin \pi \Longrightarrow$ los cuatro puntos no son coplanarios.

c) $\overrightarrow{BC} = (-2, 2, 0)$, $\overrightarrow{BD} = (-4, 2, -2)$

$$S_t = \frac{1}{2} | \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & -2 \end{array} \right| | = \frac{1}{2} | -4(1, 1, -1) | = 2\sqrt{3}\ u^2$$

Problema 2.34 Dados los puntos $A = (1, 0, 2)$ y $B = (3, -2, -2)$. Calcule la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio.
Solución:
Se trata del plano mediador, si $P(x, y, z) \in \pi \Longrightarrow d(P, A) = d(P, B) \Longrightarrow |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \Longrightarrow$
$\sqrt{x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2} = \sqrt{x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2} \Longrightarrow \pi : x - y - 2z - 3 = 0$

2.9.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.35 Sean las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + y \\ z = 1 \end{array} \right.$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array} \right.$

a) Estudie si las trayectorias de las rectas se cortan, se cruzan o coinciden.

b) Halle dos vectores directores de r y s. Calcule el área del triángulo que forman.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 0) \\ P_r(1, 0, 1) \end{array} \right. \text{ y } s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, 0, 1) \\ P_s(1, 0, 0) \end{array} \right.$$

a) $\overrightarrow{P_rP_s} = (0, 0, -1)$ y $[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}] = \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow r$ y s se cruzan.

b) Los vectores pedidos ha sido calculados anteriormente.

$$S_t = \frac{1}{2}|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(1,-1,-1)| = \frac{\sqrt{3}}{2}\ u^2,$$

Problema 2.36 Sean r la recta que pasa por los puntos $A = (0,0,-1)$ y $B = (0,-2,-1)$ y s la recta que pasa por los puntos $C = (-1,2,0)$ y $D = (1,0,-1)$.

a) Calcule el plano π que contiene a s y es paralelo a r.

b) Calcule la distancia entre las rectas r y s.

Solución: $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = -2(0,1,0) \\ P_r = A(0,0,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{array} \right.$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{CD} = (2,-2,-1) \\ P_s = D(1,0,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow$ $s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{array} \right.$

a) $\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (0,1,0) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,-2,-1) \\ P_s(1,0,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : x + 2z + 1 = 0$

b) $\overrightarrow{P_rP_s} = (1,0,0)$ y $|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]| = |\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}| = |-1| = 1$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}| = |(-1,0,-2)| = \sqrt{5}$$

$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\ u$$

2.10. Madrid

2.10.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.37 Dadas la recta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = z$ y y la recta s que pasa por el punto $(2,-5,1)$ y tiene dirección $(-1,0,-1)$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.

b) Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s.

c) Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

Solución:
Tenemos: $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,-2,1) \\ P_r(1,3,0) \end{array} \right.$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1,0,-1) \\ P_s(2,-5,1) \end{array} \right.$

a) $\overrightarrow{P_rP_s} = (2,-5,1)-(1,3,0) = (1,-8,1)$.

$$[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_s}] = \begin{vmatrix} 1 & -8 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

b) $\pi \parallel r$ y $s \subset \pi$:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,-2,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1,0,-1) \\ P_s(2,-5,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z-1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : 2x + y - 2z + 3 = 0$$

c) $\pi' \perp r$ y $O \in \pi'$:
$\pi' : 2x - 2y + z\lambda = 0 \Longrightarrow 0 + 0 - 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$, luego: $\pi' : 2x - 2y + z = 0$

Problema 2.38 *(2,5 puntos)* Dados el punto $A(2,1,0)$ y el plano $\pi : 2x + 3y + 4z = 36$, se pide:

a) (0,75 puntos) Determinar la distancia del punto A al plano π.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A.

c) (0,75 puntos) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.

Solución:

a) $d(A,\pi) = \dfrac{|4+3+0-36|}{\sqrt{4+9+16}} = \dfrac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}\ u$

b) Calculamos la recta $t \perp \pi$ tal que $A \in t$:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (2,3,4) \\ P_t = A(2,1,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 4\lambda \end{array} \right.$$

Calculamos el punto de corte A' de t con π: $2(2+2\lambda) + 3(1+3\lambda) + 4(4\lambda) = 36 \Longrightarrow 29\lambda = 29 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow A'(4,4,4)$

c) $\dfrac{A + A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A' - A = (8,8,8) - (2,1,0) = (6,7,8)$

2.10.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.39 Dados los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,3,-3)$ y $C(-3,-1,1)$, se pide:

a) Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.

b) Obtener un punto D (distinto de A, B y C) tal que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes.

c) Encontrar un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P sea igual a 1.

Solución:

a) $\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0,2,-4) \\ \overrightarrow{AC} = (-4,-2,0) \\ A(1,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$

$$\pi : x - 2y - z + 2 = 0$$

b) Cualquier punto del plano π nos valdría, por ejemplo: $D(-2,0,0)$.

c) Un punto cualquiera del eje OX puede ser $P(a,0,0)$:
$\overrightarrow{AB} = (0,2,-4)$, $\overrightarrow{AC} = (-4,-2,0)$ y $\overrightarrow{AP} = (a-1,-1,-1)$

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}]| = \frac{1}{6}\left| \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \\ a-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6}|-8(a+2)| = 1 \Longrightarrow$$

$$|-8a-16| = 6 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -8a-16 = 6 \Longrightarrow a = -\dfrac{11}{4} \Longrightarrow P_1\left(-\dfrac{11}{4}, 0, 0\right) \\ \\ 8a+16 = 6 \Longrightarrow a = -\dfrac{5}{4} \Longrightarrow P_2\left(-\dfrac{5}{4}, 0, 0\right) \end{array} \right.$$

Problema 2.40 Dados el plano, $\pi : 2x + 3y - z = 4$, y las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right.$ y $s : (x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(1,0,1)$, con $\lambda \in \overline{R}$, se pide

a) Calcular el punto simétrico de $P(1,2,3)$ respecto de π.

b) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π, que pasa por el punto intersección de las rectas r y s.

c) Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s.

Solución:

a) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos la recta $t \perp \pi$ que contiene a $P(1,2,3)$:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (2,3,-1) \\ P_t = P(1,2,3) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{array} \right.$$

- Calculo P' punto de corte de t con π:

$$2(1+2\lambda) + 3(2+3\lambda) - (3-\lambda) = 4 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{11} \Longrightarrow P'\left(\frac{6}{7}, \frac{25}{14}, \frac{43}{14}\right)$$

- Calculo P'':

$$\frac{P + P''}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P = \left(\frac{6}{7}, \frac{25}{14}, \frac{43}{14}\right) - (1,2,3)$$

$$\Longrightarrow P''\left(\frac{5}{7}, \frac{11}{7}, \frac{22}{7}\right)$$

b) $s:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2 \\ z=3+\lambda \end{cases}$ sustituimos en r y nos queda:

$$r:\begin{cases} 1+\lambda+2-(3+\lambda)=0 \Longrightarrow 0=0 \\ 1+\lambda+2+3+\lambda=2 \Longrightarrow \lambda=-2 \end{cases} \Longrightarrow Q(-1,2,1) \text{ punto de corte}$$

$$l:\begin{cases} \overrightarrow{u_l}=\overrightarrow{u_\pi}=(2,3,-1) \\ P_l=Q(-1,2,1) \end{cases} \Longrightarrow l:\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=2+3\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases}$$

c) $\overrightarrow{u_r}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2(1,-1,0)$ y $\overrightarrow{u_s}=(1,0,1)$:

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_s}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\Longrightarrow \alpha=60^\circ$$

2.11. Valencia

2.11.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.41 Consideramos en el espacio las rectas $r:\begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases}$ y $s: x=y+1=\dfrac{z-2}{2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación del plano que contiene las rectas r y s.

b) La recta que pasa por $P(0,-1,2)$ y corta perpendicularmente a la recta r.

c) El valor que deben tener los parámetros reales a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi: x-2y+az=b$.

Solución:

$$r:\begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases} \Longrightarrow r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=3+2\lambda \end{cases}$$

Tenemos: $r:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(1,1,2) \\ P_r(0,3,3) \end{cases}$ y $s:\begin{cases} \overrightarrow{u_s}=(1,1,2) \\ P_s(0,-1,2) \end{cases}$

a) $\overrightarrow{P_sP_r}=(0,3,3)-(0,-1,2)=(0,4,1)$.

$[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_s}]=\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow r$ y s no se cruzan. Tenemos $\text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{P_sP_r} \\ \overrightarrow{u_r} \end{pmatrix}=2$ y $\text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix}=1$ por lo que r y s son paralelas.

El plano π que contiene a ambas rectas vendrá determinado por:

$$\pi:\begin{cases} \overrightarrow{P_sP_r}=(0,4,1) \\ \overrightarrow{u_r}=(1,1,2) \\ P_r(0,3,3) \end{cases} \Longrightarrow \pi:\begin{vmatrix} x & y-3 & z-3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow$$

$$\pi: 7x+y-4z+9=0$$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos un plano $\pi' \perp r$ tal que $P(0,-1,2) \in \pi'$:

$$\pi' : x + y + 2z + \lambda = 0 \Longrightarrow 0 - 1 + 4 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -3 \Longrightarrow$$
$$\pi' : x + y + 2z - 3 = 0$$

- Calculamos el punto de corte P' de π' y r:

$$(\lambda) + (3 + \lambda) + 2(3 + 2\lambda) - 3 = 0 \Longrightarrow 6\lambda + 6 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow$$
$$P'(-1, 2, 1)$$

- La recta t buscada vendrá definida por:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{PP'} = (-1,2,1) - (0,-1,2) = (-1,3,-1) \\ P_t = P(0,-1,2) \end{array} \right. \Longrightarrow$$
$$t : \left\{ \begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{array} \right.$$

c) $s \subset \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_s} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_s} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = (1,1,2) \cdot (1,-2,a) = 1 - 2 + 2a = 0 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

$P_s \in \pi \Longrightarrow 0 + 2 + 2 \cdot \dfrac{1}{2} = b \Longrightarrow b = 3$

Problema 2.42 Sea π el plano de ecuación $9x + 12y + 20z = 180$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π.

b) Los puntos A, B y C intersección del plano π con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen O de coordenadas y los puntos A, B y C.

Solución:

a) Sea un plano $\pi_1 : 9x + 12y + 20z + a = 0$ paralelo a π, elegimos un punto cualquiera del plano π, por ejemplo $P(0,0,9)$, y calculamos $d(P, \pi_1) = \dfrac{|0 + 0 + 180 + a|}{\sqrt{81 + 144 + 400}} = \dfrac{|180 + a|}{\sqrt{625}} = 4 \Longrightarrow$ $|180 + a| = 100$, tendremos dos soluciones:

- $180 + a = 100 \Longrightarrow a = -80 \Longrightarrow \pi_1' : 9x + 12y + 20z - 80 = 0$
- $180 + a = -100 \Longrightarrow a = -280 \Longrightarrow \pi_1'' : 9x + 12y + 20z - 280 = 0$

b)

c) Puntos de corte con los ejes del plano $\pi : 9x + 12y + 20z = 180$:

- Con OX: hacemos $y = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow 9x = 180 \Longrightarrow x = 20 \Longrightarrow A(20,0,0)$
- Con OY: hacemos $x = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow 12y = 180 \Longrightarrow y = 15 \Longrightarrow B(0,15,0)$
- Con OZ: hacemos $x = 0$ e $y = 0 \Longrightarrow 20z = 180 \Longrightarrow z = 9 \Longrightarrow C(0,0,9)$

$\overrightarrow{AB} = (0,15,0) - (20,0,0) = (-20,15,0)$ y $\overrightarrow{AC} = (0,0,9) - (20,0,0) = (-20,0,9)$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{400}{\sqrt{625}\sqrt{481}} = \frac{16}{\sqrt{481}} \Longrightarrow \alpha = 43^\circ 9' 8''$$

d) $\overrightarrow{OA} = (20,0,0)$, $\overrightarrow{OB} = (0,15,0)$ y $\overrightarrow{OC} = (0,0,9)$:

$$V = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}| = \frac{1}{6}|2700| = 450\ u^3$$

2.11.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.43 Se da el plano $\pi : 2x + y + 2z = 8$ y el punto $P = (10,0,10)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La distancia del punto P al plano π.

b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas.

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C.

Solución:

a) $d(P,\pi) = \dfrac{|20+0+20-8|}{\sqrt{9}} = \dfrac{32}{3}\ u$

b) Corte con OX : hacemos $y = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow x = 4 \Longrightarrow A(4,0,0)$.
Corte con OY : hacemos $x = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow y = 8 \Longrightarrow B(0,8,0)$.
Corte con OZ : hacemos $x = 0$ e $y = 0 \Longrightarrow z = 4 \Longrightarrow C(0,0,4)$.
$\overrightarrow{AB} = (-4,8,0)$ y $\overrightarrow{AC} = (-4,0,4)$
$S_t = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \dfrac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix}| = \dfrac{1}{2}|16(2,1,2)| = 24\ u^2$

c) $\overrightarrow{AB} = (-4,8,0)$, $\overrightarrow{AC} = (-4,0,4)$ y $\overrightarrow{AP} = (6,0,10)$

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AP}]| = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 10 \end{vmatrix}| = \frac{256}{3}\ u^3$$

Problema 2.44 Se dan en el espacio la recta $r : \frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$ y el plano $\pi : x + 2y + 3z = 6$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β.

b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $\alpha = 6$ y $\beta = 3$.

c) La ecuación del plano que pasa por $(0,0,0)$ y que no corta al plano π.

Solución:

Tenemos: $r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-1,-4,\beta)\\ P_r(\alpha,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=\alpha-\lambda\\ y=-4\lambda\\ z=\beta\lambda\end{array}\right.$

a) $(\alpha-\lambda)+2(-4\lambda)+3(\beta\lambda)=6\Longrightarrow(9-3\beta)\lambda=\alpha-6$.
Si $\beta=3$ y $\alpha=6$ la recta r estaría contenida en el plano π.
Si $\beta=3$ y $\alpha\neq 6$ la recta r sería paralela al plano π.
Si $\beta\neq 3$ la recta r cortaría al plano π.

b) Si $\alpha=6$ y $\beta=3$ la recta r estaría contenida en el plano π y, por tanto, $d(r,\pi)=0$.

c) Si no corta al plano π el plano π' es paralelo a $\pi\Longrightarrow\pi':x+2y+3z+\lambda=0$ como $O\in\pi'\Longrightarrow 0+0+0+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=0\Longrightarrow\pi':x+2y+3z=0$

2.12. La Rioja

2.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.45 Dados la rectar r y el plano π de ecuaciones:

$$r:\left\{\begin{array}{l}2x+2y+2z=2\\ -x-2y+z=0\end{array}\right. \quad \pi:ax+y+z-b=0$$

a) Determina a y b para que el plano π contenga a la recta r.

b) Determina a y b para que r sea paralela al plano π.

Solución:

Tenemos: $r:\left\{\begin{array}{l}2x+2y+2z=2\\ -x-2y+z=0\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=2-3\lambda\\ y=-1+2\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-3,2,1)\\ P_r(2,-1,0)\end{array}\right.$

a) $a(2-3\lambda)+(-1+2\lambda)+(\lambda)-b=0\Longrightarrow(3a-3)\lambda=2a-b-1$.
Si $a=1$ y $b=1$ la recta r estaría contenida en el plano π.

b) Si $a=1$ y $b\neq 1$ la recta r sería paralela al plano π.
Si $a\neq 1$ la recta r cortaría al plano π.

Problema 2.46 Sean el plano $\pi:2x+y-z-3=0$ y la recta $r:\left\{\begin{array}{l}x=3-\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=1-3\lambda\end{array}\right.$.

a) Determina la ecuación de la recta s que contiene al punto $P=(1,2,-1)$, es perpendicular a la recta r y paralela al plano π.

b) Halla la distancia de la recta s al plano π.

Solución:

Tenemos: $r:\left\{\begin{array}{l}x=3-\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=1-3\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-1,1,-3)\\ P_r(3,2,1)\end{array}\right.$

a) Calculamos un plano $\pi'' \perp r / P \in r \Longrightarrow s \subset \pi''$
$u_{\pi''} = \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, -3) \Longrightarrow \pi'' : -x + y - 3z + \lambda = 0 \Longrightarrow -1 + 2 + 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -4 \Longrightarrow \pi'' : -x + y - 3z - 4 = 0 \Longrightarrow \pi'' : x - y + 3z + 4 = 0.$
Por otro lado $s \subset \pi' \parallel \pi$, calculamos el plano $\pi' : 2x + y - z + \lambda = 0 \Longrightarrow 2 + 2 + 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -5 \Longrightarrow \pi' : 2x + y - z - 5 = 0.$
Es decir, $s \subset \pi'$ y $s \subset \pi'' \Longrightarrow s \equiv (\pi' \cap \pi'') \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - z - 5 = 0 \\ x - y + 3z + 4 = 0 \end{array} \right.$

b) $d(s, \pi) = d(P, \pi) = \dfrac{|2 + 2 + 1 - 3|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}\ u$

2.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.47 Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, de modo que los vectores son unitarios y forman entre sí ángulos de 45°. Dados los vectores $u = e_1 + e_2$ y $v = e_1 - e_2 + e_3$.

a) Calcula el módulo de los vectores u y v.

b) Calcula el coseno del ángulo formado por los vectores u y v.

Solución:

a) $|\overrightarrow{u}|^2 = \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2})(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_2} = |\overrightarrow{e_1}|^2 + 2\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} + |\overrightarrow{e_2}|^2 = 1 + 2|\overrightarrow{e_1}||\overrightarrow{e_2}|\cos 45° + 1 = 2 + 2\frac{\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} \Longrightarrow |\overrightarrow{u}| = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$

$|\overrightarrow{v}|^2 = \overrightarrow{v}\,\overrightarrow{v} = (\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3})(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_3} = |\overrightarrow{e_1}|^2 + |\overrightarrow{e_2}|^2 + |\overrightarrow{e_3}|^2 - 2\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_3} - 2\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3} = 3 - 2|\overrightarrow{e_1}||\overrightarrow{e_2}|\cos 45° + 2|\overrightarrow{e_1}||\overrightarrow{e_3}|\cos 45° - 2|\overrightarrow{e_2}||\overrightarrow{e_3}|\cos 45° = 3 - 2\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\frac{\sqrt{2}}{2} = 3 - \sqrt{2} \Longrightarrow |\overrightarrow{v}| = \sqrt{3 - \sqrt{2}}$

$\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = (\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2})(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3} = |\overrightarrow{e_1}|^2 - |\overrightarrow{e_2}|^2 + \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3} = |\overrightarrow{e_1}||\overrightarrow{e_3}|\cos 45° + |\overrightarrow{e_2}||\overrightarrow{e_3}|\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}\sqrt{3 - \sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{28 - 7\sqrt{2}}}{7}$

Problema 2.48 Dos vértices consecutivos de un rectángulo son $P = (2, 2, 1)$ y $Q = (0, 0, -1)$ y los otros dos pertenecen a una recta r que pasa por el punto $A = (5, 4, 3)$.

a) Determina la ecuación de la recta r.

b) Determina la ecuación del plano que contiene al rectángulo.

Solución:

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{QP} = (2, 2, 2) = 2(1, 1, 1) \\ P_r = A(5, 4, 3) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 5 + \lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{array} \right.$

b) $\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{QA} = (5, 4, 4) \\ Q(0, 0, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x & y & z+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : y - z - 1 = 0$

2.13. Murcia

2.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.49 Los puntos $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$ y $C = (0, 0, 3)$ son tres de los vértices de un tetraedro. El cuarto vértice D está contenido en la recta r que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y es perpendicular al plano π que contiene a los puntos A, B y C.

a) Calcule la ecuación del plano que contiene a los puntos A, B y C.

b) Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y es perpendicular al plano π.

c) Calcule las coordenadas del vértice D sabiendo que el volumen del tetraedro es 18.

Solución:

a) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-3, 3, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (-3, 0, 3) \\ A(3, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : x + y + z - 3 = 0$

b) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi}(1, 1, 1) \\ P_r = P(1, 1, 1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

c) $D(1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \lambda) \Longrightarrow \overrightarrow{AD} = (-2 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \lambda)$
$V = \dfrac{1}{6}|\begin{vmatrix} -2+\lambda & 1+\lambda & 1+\lambda \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}| = \dfrac{1}{6}|27\lambda| = 18 \Longrightarrow |\lambda| = 4 \Longrightarrow \lambda = \pm 4$
Si $\lambda = 4 \Longrightarrow D(5, 5, 5)$.
Si $\lambda = -4 \Longrightarrow D(-3, -3, -3)$

Problema 2.50 Considere las siguientes rectas:

$$r : \frac{x-5}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+1}{1}, \quad s : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

a) Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) En caso de que las rectas se corten, calcule el plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

Solución:

Tenemos: $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 1) \\ P_r(5, 6, -1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 6 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$ y $s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, 1, -1) \\ P_s(1, 0, -1) \end{cases} \Longrightarrow s :$
$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$

a) $\overrightarrow{P_sP_r} = (4, 6, 0)$
$[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow r$ y s se cruzan.

b) Calculamos la recta t como intersección de dos planos:
Primero calculamos su vector director:

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1,1,0)$$

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (-1,1,0) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P_r(5,6,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-5 & y-6 & z+1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : x + y - 2z - 13 = 0$$

$$\pi' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (-1,1,0) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,1,-1) \\ P_s(1,0,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi' : x + y + 2z + 1 = 0$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} x + y - 2z - 13 = 0 \\ x + y + 2z + 1 = 0 \end{array} \right.$$

2.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.51 Considere la recta $r : \frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ y el plano $\pi : x - 2y - z = -1$.

a) Estudie la posición relativa de la recta r y el plano π.

b) En caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que la recta no corte al plano, calcule la distancia entre ambos.

Solución:

Tenemos: $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1,2,1) \\ P_r(-1,-3,0) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 - \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$ y $\overrightarrow{u_\pi} = (1,-2,-1)$

a) $(-1-\lambda) - 2(-3+2\lambda) - (\lambda) + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow r$ corta al plano π en el punto $A(-2,-1,1)$.

b) El punto de corte es $A(-2,-1,1)$.

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi}|}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_\pi}|} = \frac{|-1-4-1|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = 1 \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

Problema 2.52 Los puntos $A = (0,-1,1)$ y $B = (1,1,1)$ son dos de los vértices de un triángulo. El tercer vértice C está contenido en la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano $\pi : 2x - y + z = 1$.

a) Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano π.

b) Calcule las coordenadas del vértice C sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

Solución:

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (2,-1,1) \\ P_r = B(1,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right.$

b) $C(1+2\lambda, 1-\lambda, 1+\lambda) \Longrightarrow \overrightarrow{AC} = (1+2\lambda, 2-\lambda, \lambda)$ y $\overrightarrow{AB} = (1,2,0)$

$S_t = \dfrac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1+2\lambda & 2-\lambda & \lambda \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}| = \dfrac{1}{2}|\lambda(-2,1,-5)| = \dfrac{|\lambda|\sqrt{30}}{2} = 3\sqrt{30} \Longrightarrow |\lambda| = 6 \Longrightarrow$
$\lambda = \pm 6$

Si $\lambda = 6 \Longrightarrow C(13,-5,7)$.
Si $\lambda = -6 \Longrightarrow C(-11,7,-5)$

2.14. Navarra

2.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.53 Dadas las siguientes rectas:

$r : \begin{cases} 2x+y-2z-1=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$ y $s : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$ y el plano $\pi : x-2y-z=-1$. calcula la ecuación de un plano π paralelo a la recta r y que diste de s 3 unidades.

Solución:

Tenemos: $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3,-2,2) \\ P_r(1,-1,0) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = -1-2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ y

$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1,2,2) \\ P_s(-2,1,1) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = -2+\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases}$

$\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-8,-4,8) = -4(2,1,-2) \Longrightarrow \pi : 2x+y-2z+\lambda = 0$

$d(s,\pi) = d(P_s,\pi) = \dfrac{|-4+1-2+\lambda|}{\sqrt{4+1+4}} = \dfrac{|-5+\lambda|}{3} = 3 \Longrightarrow |-5+\lambda| = 9 \Longrightarrow$

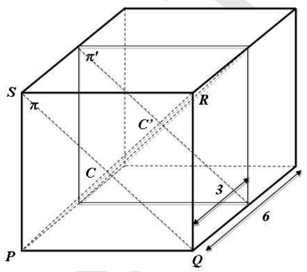
$$\begin{cases} -5+\lambda = 9 \Longrightarrow \lambda = 14 \Longrightarrow \pi_1 : 2x+y-2z+14=0 \\ -5+\lambda = -9 \Longrightarrow \lambda = -4 \Longrightarrow \pi_2 : 2x+y-2z-4=0 \end{cases}$$

Problema 2.54 $P \equiv (1,-1,1)$, $Q \equiv (5,-3,5)$ y $R \equiv (7,-7,1)$ son tres vértices de una cara de un cubo. Calcula las coordenadas del centro de dicho cubo.

Solución:
Seguimos los siguientes pasos:

- Calculamos el plano π que contiene a los tres puntos:

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (4,-2,4) \\ \overrightarrow{PR} = (6,-6,0) \\ P(1,-1,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 6 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0$$



$$\Longrightarrow \pi : 2x + 2y - z + 1 = 0$$

- Calculamos la longitud de los lados del cubo:

$$d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(4,-2,4)| = |2(2,-1,2)| = 2\sqrt{9} = 6\ u$$

- Calculamos el centro de cuadrilátero que determinan los puntos:

$$C = \frac{P+R}{2} = \left(\frac{1+7}{2}, \frac{-1-7}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = (4,-4,1)$$

- Calculamos un plano $\pi' \parallel \pi / d(\pi,\pi') = d(P,\pi') = 3 \Longrightarrow \dfrac{|2-2-1+\lambda|}{\sqrt{4+4+1}} = 3 \Longrightarrow$

$$|\lambda - 1| = 9 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda - 1 = 9 \Longrightarrow \lambda = 10 \Longrightarrow \pi_1' : 2x+2y-z+10 = 0 \\ \lambda - 1 = -9 \Longrightarrow \lambda = -8 \Longrightarrow \pi_2' : 2x+2y-z-8 = 0 \end{cases}$$

  Luego tendremos dos soluciones.

- Calculamos una recta $r \perp \pi / c \in r \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (2,2,-1) \\ P_r = C(4,-4,1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = -4 + 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$.

- El punto buscado es el de corte entre r y π' y, por tanto, serán dos:
  - Punto de corte de r con π_1':
    $2(4+2\lambda) + 2(-4+2\lambda) - (1-\lambda) + 10 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow C'(2,-6,2)$
  - Punto de corte de r con π_2':
    $2(4+2\lambda) + 2(-4+2\lambda) - (1-\lambda) - 8 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow C'(6,-2,0)$

2.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.55 Los puntos $A \equiv (2,-3,2)$ y $B \equiv (0,1,-2)$ determinan el lado desigual de un triángulo isósceles que tiene su tercer vértice en la recta de ecuacón $r : \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-4}{-2}$. Calcula este vértice sabiendo que el área del triángulo vale 18 u^2.

Solución:

Tenemos: $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,-1,-2) \\ P_r(3,4,4) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = 4 - 2\lambda \end{cases} \Longrightarrow C(3+2\lambda, 4-\lambda, 4-2\lambda)$

$\overrightarrow{AC} = (3+2\lambda, 4-\lambda, 4-2\lambda) - (2,-3,2) = (1+2\lambda, 7-\lambda, 2-2\lambda)$
$\overrightarrow{AB} = (0,1,-2) - (2,-3,2) = (-2,4,-4)$

$$S_t = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1+2\lambda & 7-\lambda & 2-2\lambda \\ -2 & 4 & -4 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|6(2\lambda - 6, 2\lambda, 3+\lambda)| =$$

$$3\sqrt{(2\lambda-6)^2+(2\lambda)^2+(3+\lambda)^2}=18 \Longrightarrow (2\lambda-6)^2+(2\lambda)^2+(3+\lambda)^2=36 \Longrightarrow$$

$$9(\lambda^2-2\lambda+1)=0 \Longrightarrow \lambda=1 \Longrightarrow C(5,3,2)$$

Problema 2.56 Calcula la ecuación continua de la recta t sabiendo que pasa por el punto $P \equiv (1,-2,-1)$ y que corta a las siguientes rectas: $r : \left\{ \begin{array}{l} -x+y-z-1=0 \\ 3y-2z+3=0 \end{array} \right.$ y $s : \frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$

Solución:

Tenemos: $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{array} \right| = (1,-2,-3) \\ P_r(-2,-1,0) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x=-2+\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=-3\lambda \end{array} \right.$

$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (0,1,-1) \\ P_s(3,1,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x=3 \\ y=1+\lambda \\ z=-1-\lambda \end{array} \right.$

Calculamos la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{PP_r} = (-3,1,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,-2,-3) \\ P_r(-2,-1,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \left| \begin{array}{ccc} x+2 & y+1 & z \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi_1 : x+8y-5z+10=0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{PP_s} = (2,3,0) \\ \overrightarrow{u_s} = (0,1,-1) \\ P_s(3,1,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_2 : \left| \begin{array}{ccc} x-3 & y-1 & z+1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi_2 : 3x-2y-2z-9=0$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} x+8y-5z+10=0 \\ 3x-2y-2z-9=0 \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x=5+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=3+2\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (2,1,2) \\ P_t(5,0,3) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$t : \frac{x-5}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2}$$

2.15. Cataluña

2.15.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.57 Un dron se encuentra en el punto $P=(2,-3,1)$ y queremos dirigirlo en línea recta hasta el punto más próximo del plano de ecuación $\pi : 3x+4z+15=0$.

a) Calcule la ecuación de la recta, en forma paramétrica, que debe seguir el dron. ¿Qué distancia tiene que recorrer hasta llegar al plano?

b) Encuentre las coordenadas del punto del plano donde llegará el dron.

Nota: Puede calcular la distancia que hay de un punto de coordenadas (x_0,y_0,z_0) al plano de ecuación $Ax+By+Cz+D=0$ con la expresión $\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Solución:

a) $r:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{u_\pi}=(3,0,4) \\ P_r=P(2,-3,1) \end{cases} \Longrightarrow r:\begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=-3 \\ z=1+4\lambda \end{cases}$

$$d(P,\pi)=\frac{|6+0+4+15|}{\sqrt{9+0+16}}=\frac{25}{5}=5\ u$$

b) $3(2+3\lambda)+4(1+4\lambda)+15=0 \Longrightarrow \lambda=-1 \Longrightarrow A(-1,-3,-3)$

2.15.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.58 Discuta la posición relativa de los planos $\pi_1: x+(a-1)z=0$, $\pi_2: x+ay+z=1$ y $\pi_3: 4x+3ay+z=3$ en función de los valores del parámetro a.
Solución:

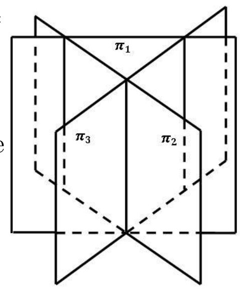
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a-1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 4 & 3a & 1 & 3 \end{array}\right) \quad |A|=-a(a+1)=0 \Longrightarrow$$

$$a=0,\quad a=-1$$

Si $a\neq 0$ y $a\neq -1 \Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado. Los tres planos se cortan en un punto.
Si $a=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-4F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{array}\right)=$$

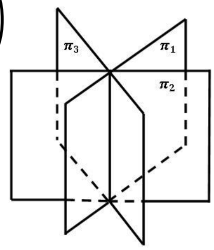
$$=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3-5F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$



π_1 con $\pi_2 \Longrightarrow \frac{1}{1}\neq\frac{-1}{1} \Longrightarrow \pi_1$ y π_2 se cortan.
π_1 con $\pi_3 \Longrightarrow \frac{1}{4}\neq\frac{-1}{1} \Longrightarrow \pi_1$ y π_3 se cortan.
π_2 con $\pi_3 \Longrightarrow \frac{1}{4}\neq\frac{1}{1} \Longrightarrow \pi_2$ y π_3 se cortan.
Los tres planos se cortan dos a dos y no hay puntos que pertenezcan a los tres planos a la vez.
Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-4F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-3F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} \text{Sistema} \\ \text{Compatible} \\ \text{Indeterminado} \end{cases}$$



π_1 con $\pi_2 \Longrightarrow \frac{1}{1}=\neq\frac{-1}{1} \Longrightarrow \pi_1$ y π_2 se cortan.
π_1 con $\pi_3 \Longrightarrow \frac{1}{4}=\neq\frac{-1}{1} \Longrightarrow \pi_1$ y π_3 se cortan.
π_2 con $\pi_3 \Longrightarrow \frac{1}{4}=\neq\frac{1}{1} \Longrightarrow \pi_2$ y π_3 se cortan.
Los tres planos se cortan dos a dos y se cortan los tres en una recta

Problema 2.59 Sean P, Q y R los puntos de intersección del plano de ecuación $x+4y+2z=4$ con los tres ejes de coordenadas OX, OY y OZ, respectivamente.

a) Calcule los puntos P, Q y R, y el perímetro del triángulo de vértices P, Q y R.

b) Calcule el área del triángulo de vértices P, Q y R.

Nota: Para calcular el área del triángulo definido por los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ puede usar la expresión $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}|$, donde $\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}$ es el producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$.

Solución:

a) Con OX hacemos $y=0$ y $z=0\Longrightarrow x=4\Longrightarrow P(4,0,0)$
Con OY hacemos $x=0$ y $z=0\Longrightarrow y=1\Longrightarrow Q(0,1,0)$
Con OZ hacemos $x=0$ y $y=0\Longrightarrow z=2\Longrightarrow R(0,0,2)$
$\overrightarrow{PQ}=(0,1,0)-(4,0,0)=(-4,1,0)\Longrightarrow|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{17}$
$\overrightarrow{PR}=(0,0,2)-(4,0,0)=(-4,0,2)\Longrightarrow|\overrightarrow{PR}|=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$
$\overrightarrow{RQ}=(0,1,0)-(0,0,2)=(0,1,-2)\Longrightarrow|\overrightarrow{RQ}|=\sqrt{5}$
Perímetro$=\sqrt{17}+2\sqrt{5}+\sqrt{5}=\sqrt{17}+3\sqrt{5}\simeq 10,83130955\ u$

b) $S_t=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PQ}|=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\-4&1&0\\-4&0&2\end{vmatrix}|=\frac{1}{2}|2(1,4,2)|=\sqrt{21}\ u^2$

2.16. Galicia

2.16.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.60 Se pide:

a) Calcular el ángulo del intervalo $[0^\circ,90^\circ]$ que forman los vectores $\overrightarrow{u}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ y $\overrightarrow{v}=\left(-\frac{1}{2},\frac{-1+\sqrt{2}}{2},\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

b) Obtener la ecuación implícita del plano que pasa por el punto $P(1,-3,0)$ y es perpendicular a la recta $\left\{\begin{array}{l}x-y+2z=1\\y-z=0\end{array}\right.$

c) Calcula la distancia del punto $Q(1,1,1)$ al plano $\pi:-x+y+z+4=0$ y el punto simetrico de Q respecto de π.

Solución:

a) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{-1+\sqrt{2}}{2}+0\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{2}}=\frac{1}{2}$
$|\overrightarrow{u}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0\right)}=1$ y $|\overrightarrow{u}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^2}=1$

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|}=\frac{\frac{1}{2}}{1\cdot 1}=\frac{1}{2}\Longrightarrow\alpha=\frac{\pi}{3}=60^\circ$$

b) $d(Q,\pi)=\frac{|-1+1+1+4|}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}\ u$

Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi / Q \in t \Longrightarrow t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (-1,1,1) \\ P_t = Q(1,1,1) \end{cases} \Longrightarrow$

  $t : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

- Calculamos el punto de corte de t con π:

$$-(1-\lambda) + (1+\lambda) + (1+\lambda) + 4 = 0 \Longrightarrow \alpha = -\frac{5}{3} \Longrightarrow Q'\left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

- $\dfrac{Q+Q''}{2} = Q' \Longrightarrow Q'' = 2Q' - Q = \left(\dfrac{16}{3}, -\dfrac{4}{3}, -\dfrac{4}{3}\right) - (1,1,1) = \left(\dfrac{13}{3}, -\dfrac{7}{3}, -\dfrac{7}{3}\right)$

Problema 2.61 Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1 : mx - y + 2 = 0$ y $\pi_2 : 2x + 3y = 0$ en función del parámetro m.

b) Obtén la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos $A(0,0,0)$, $B(1,0,1)$ y $C(0,1,0)$.

c) Calcula el punto simétrico del punto $P(1,2,3)$ con respecto al plano $\pi : -x + z = 0$

Solución:

a) π_1 con $\pi_2 \Longrightarrow \frac{m}{2} = \frac{-1}{3} \Longrightarrow m = \frac{-2}{3}$.
Si $m = \frac{-2}{3} \Longrightarrow \pi_1$ y π_2 son paralelos. En caso contrario se cortan.

b) $\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1,0,1) \\ \overrightarrow{AC} = (0,1,0) \\ A(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow$

$\pi' : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi' : x - z = 0$

c) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi / P \in t \Longrightarrow t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (-1,0,1) \\ P_t = P(1,2,3) \end{cases} \Longrightarrow$

  $t : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$

- Calculamos el punto de corte de t con π:

$$(1-\lambda) - (3+\lambda) = 0 \Longrightarrow \alpha = -1 = 0 \Longrightarrow Q'(2,2,2)$$

- $\dfrac{Q+Q''}{2} = Q' \Longrightarrow Q'' = 2Q' - Q = (4,4,4) - (1,2,3) = (3,2,1)$

2.16.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.62 Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1 : x + my + z + 2 = 0$ y $\pi_2 : mx + y + z + m = 0$ en función del parámetro m.

b) Calcular el valor que deben tomar k y m para que los puntos $A(0, k, 1)$, $B(-1, 2, 1)$ y $C(8, 1, m)$ estén alineados.

c) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(-1, 2, 1)$ y $Q(8, 1, 1)$ y la ecuación implícita del plano perpendicular a r que pasa por el punto $R(1, 1, 1)$.

Solución:

a) π_1 con $\pi_2 \Longrightarrow \dfrac{1}{m} = \dfrac{m}{1} = \dfrac{1}{1} = \dfrac{2}{m}$ Si $m = 1$ se cumplen las dos primeras igualdades pero no la tercera $\Longrightarrow \pi_{\|}\pi_2$. Si $m \neq 1$ ya no se cumpliría la primera igualdad y los dos planos se cortarían en una recta.

b) $\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{AC} \Longrightarrow (-1, 2-k, 0) = a(8, 1-k, m-1) \Longrightarrow a = -\dfrac{1}{8} \Longrightarrow$

$$(-1, 2-k, 0) = \left(-1, -\frac{1-k}{8}, -\frac{m-1}{8}\right)$$

.

$$\left\{\begin{array}{l} 2 - k = -\dfrac{1-k}{8} \Longrightarrow k = \dfrac{17}{9} \\ \\ 0 = -\dfrac{m-1}{8} \Longrightarrow m = 1 \end{array}\right.$$

c) $r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{PQ} = (9, -1, 0) \\ P_r = P(-1, 2, 1) \end{array}\right. \Longrightarrow r : \left\{\begin{array}{l} x = -1 + 9\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 \end{array}\right.$

$\pi : 9x - y + \lambda = 0 \Longrightarrow 9 - 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -8 \Longrightarrow \pi : 9x - y - 8 = 0$

Problema 2.63 Se pide:

a) Para el plano $\pi : 3x + 2y - z = 0$ y la recta $r : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{3}$, calcular el punto de corte de r con π y obtener la ecuacion implicita del plano π' que es perpendicular a π y contiene a r.

b) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1 : 2x - 5y - 4z - 9 = 0$ y $\pi_2 : x = 0$ y calcular el ángulo $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$ que forman.

Solución:

a) $r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, -2, 3) \\ P_r(2, -1, 0) \end{array}\right. \Longrightarrow r : \left\{\begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{array}\right.$, sustituyendo en π:

$$3(2 + \lambda) + 2(-1 - 2\lambda) - 3\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow P(3, -3, 3).$$

$\pi' : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, -2, 3) \\ \overrightarrow{u_\pi} = (3, 2, -1) \\ P_r(2, -1, 0) \end{array}\right. \Longrightarrow$

$\pi' : \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi' : 2x - 5y - 4z - 9 = 0$

b) π_1 con $\pi_2 \Longrightarrow \dfrac{2}{1} \neq \dfrac{-5}{0} \Longrightarrow$ los dos planos se cortan en una recta.

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}}}{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}||\overrightarrow{u_{\pi_2}}|} = \frac{2}{1 \cdot \sqrt{45}} = \frac{2}{3\sqrt{5}} \Longrightarrow \alpha = 72^\circ 39' 14''$$

2.17. Andalucía

2.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.64 Considera la recta $r : \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1 : x = 0$ y $\pi_2 : y = 0$.

a) Halla los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2.

b) Determina la posicion relativa de la recta r y la recta interseccion de los planos π_1 y π_2.

Solución:

a) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 3, 1) \\ P_r(2, 2, 1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Longrightarrow P(2 - \lambda, 2 + 3\lambda, 1 + \lambda)$

$$d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \Longrightarrow |2 - \lambda| = |2 + 3\lambda| \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 2 - \lambda = 2 + 3\lambda \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow P_1(2, 2, 1) \\ 2 - \lambda = -2 - 3\lambda \Longrightarrow \lambda = -2 \Longrightarrow P(4, -4, -1) \end{cases}$$

b) $t : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (0, 0, 1) \\ P_t(0, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{P_tP_r} = (2, 2, 1)$

$[\overrightarrow{P_tP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_t}] = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \Longrightarrow r$ y t se cruzan.

Problema 2.65 Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 2)$ y $C(0, 2, 1)$.

a) Halla el área de dicho triángulo.

b) Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (0, -1, 2)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 1)$

$$S_T = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(-3, -2, -1)| = \frac{\sqrt{14}}{2}\ u^2$$

b)

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{-1 + 2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{15} \Longrightarrow \alpha = 75^\circ 02' 13''$$

2.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.66 Se consideran los vectores $\overrightarrow{u} = (1, 2, 3)$, $\overrightarrow{v} = (1, -2, -1)$ y $\overrightarrow{w} = (2, \alpha, \beta)$ donde α y β son números reales.

a) Determina los valores de α y β para los que $\overrightarrow{w}$ es ortogonal a los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

b) Determina los valores de α y β para los que $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ tengan la misma dirección.

c) Para $\alpha = 8$ determina el valor de β para el que $\overrightarrow{w}$ es combinacion lineal de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

Solución:

a) $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u} = (2, \alpha, \beta) \cdot (1, 2, 3) = 2 + 2\alpha + 3\beta = 0$
$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v} = (2, \alpha, \beta) \cdot (1, -2, -1) = 2 - 2\alpha - \beta = 0$
$\begin{cases} 2 + 2\alpha + 3\beta = 0 \\ 2 - 2\alpha - \beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -2 \end{cases}$

b) $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{v} \Longrightarrow (2, \alpha, \beta) = a(1, -2, -1) \Longrightarrow a = 2$ y $(2, \alpha, \beta) = (2, -4, -2) \Longrightarrow \alpha = -4$ y $\beta = -2$.

c) Si $\alpha = 8$ y $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \Longrightarrow (2, 8, \beta) = a(1, 2, 3) + b(1, -2, -1)$:

$$\begin{cases} 2 = a + b \\ 8 = 2a - 2b \\ \beta = 3a - b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ \beta = 10 \end{cases}$$

Problema 2.67 Considera las rectas $r : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-k}{2} = \dfrac{z}{2}$ y $s : \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-3}{1}$

a) Halla k sabiendo que ambas rectas se cortan en un punto.

b) Para $k = 1$, halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 2) \\ P_r(2, k, 0) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = k + 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases},$$

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (-1, 1, 1) \\ P_s(-1, 1, 3) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}, \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (-3, 1-k, 3)$$

a) $[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \begin{vmatrix} -3 & 1-k & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(k+2) = 0 \Longrightarrow k = -2 \Longrightarrow$ si $k \neq -2 \Longrightarrow r$ y s se cruzan si $k = -2 \Longrightarrow$ Rango$\begin{pmatrix} \overrightarrow{P_rP_s} \\ \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 2$ y Rango$\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow r$ y s se cortan para $k = -2$

b) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 2) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1, 1, 1) \\ P_r(2, 1, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : y - z - 1 = 0$

3. Análisis

Teoría

Tabla de Derivadas

función	derivada	función	derivada
$y = k$	$y' = 0$	$y = x$	$y' = 1$
$y = ax^n$	$y' = nax^{n-1}$	$y = au^n$	$y' = nau^{n-1}u'$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	$y = uv$	$y' = u'v + uv'$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y = \dfrac{u}{v}$	$y = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$	$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
$y = u^v$	$y' = u^v(v' \ln u) + vu^{v-1}u'$	$y = a^u$	$y' = u'a^u \ln a$
$y = e^u$	$y' = u'e^u$	$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$	$y = \tan u$	$y' = u' \sec^2 u$
$y = \cot u$	$y' = -u' \csc^2 u$	$y = \csc u$	$y' = -u' \csc u \cot u$
$y = \sec u$	$y' = u' \sec u \tan u$	$y = \arcsin u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \arccos u$	$y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \arctan u$	$y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
	Regla de la Cadena	$y = f(g(x))$	$y' = g'(x)f'(g(x))$

Representación gráfica de funciones
Hay que seguir los siguientes pasos:

1° Dominio	Buscar Puntos Singulares	2° Signo	$f(x) > 0$ *o* $f(x) < 0$
3° Ptos. Corte	Corte con OX : $f(x) = 0$ Corte con OY : $x = 0$	4° Simetría :	Par : $f(-x) = f(x)$ con OY Impar : $f(-x) = -f(x)$ con O
5° Asíntotas :	Verticales : $x = p$ $\lim\limits_{x\longrightarrow p} f(x) = \pm\infty$ Horizontales : $y = p$ $\lim\limits_{x\longrightarrow \pm\infty} f(x) = p$ Si $\exists\, y = p \Longrightarrow$ No Oblicuas Oblicuas : $y = mx + n$ $m = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $n = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx)$	6° Monotonía :	Creciente : $f'(x) > 0$ $\nearrow$ Decreciente : $f'(x) < 0$ $\searrow$ Si $f'(p) = 0$ Punto Crítico : Máximo si $f''(p) < 0$ Mínimo si $f''(p) > 0$ Pto. Inflexión si $f''(p) = 0$ y $f'''(p) \neq 0$
7° Máximos y Mínimos	Máximo : $\nearrow\searrow$ de creciente a decreciente Mínimo : $\searrow\nearrow$ de decreciente a creciente	8° Curvatura :	Cóncava : $f''(x) > 0$ $\cup$ Convexa : $f''(x) < 0$ $\cap$ Si $f''(p) = 0$ Punto Crítico : Pto. Inflexión si de Cóncava a Convexa de Convexa a Cóncava
9° Periodo :	$f(x + T) = f(x)$		

Tabla de Integrales Inmediatas

Tipo	Simple	Compuesta
Potencial $a \neq -1$	$\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int f^a \cdot f' \, dx = \frac{f^{a+1}}{a+1}$
Logarítmica	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln \lvert x \rvert$	$\int \frac{f'}{f} \, dx = \ln \lvert f \rvert$
Exponencial	$\int e^x \, dx = e^x$	$\int e^f \cdot f' \, dx = e^f$
Exponencial	$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int a^f \cdot f' \, dx = \frac{a^f}{\ln a}$
Seno	$\int \cos x \, dx = \sin x$	$\int f' \cdot \cos f \, dx = \sin f$
Coseno	$\int \sin x \, dx = -\cos x$	$\int f' \cdot \sin f \, dx = -\cos f$
Tangente	$\int \sec^2 \, dx = \tan x$	$\int f' \cdot \sec^2 f \, dx = \tan f$
	$\int (1 + \tan^2 x) \, dx = \tan x$	$\int f' \cdot (1 + \tan^2 f) \, dx = \tan f$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x$	$\int \frac{f'}{\cos^2 f} \, dx = \tan f$
Cotangente	$\int \csc^2 \, dx = -\cot x$	$\int f' \cdot \csc^2 f \, dx = -\cot f$
	$\int (1 + \cot^2 x) \, dx = -\cot x$	$\int f' \cdot (1 + \cot^2 f) \, dx = -\cot f$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x$	$\int \frac{f'}{\sin^2 f} \, dx = -\cot f$
Arco seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} \, dx = \arcsin f$
	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{\sqrt{a^2-f^2}} \, dx = \arcsin \frac{f}{a}$
Arco coseno	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arccos x$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}} \, dx = \arccos f$
	$\int \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \arccos \frac{x}{a}$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{a^2-f^2}} \, dx = \arccos \frac{f}{a}$
Arco tangente	$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x$	$\int \frac{f'}{1+f^2} \, dx = \arctan f$
	$\int \frac{1}{a^2+x^2} \, dx = \arctan \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{a^2+f^2} \, dx = \arctan \frac{f}{a}$
Neperiano − Arcotangente	$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} \, dx = \ln \pm \arctan x$	Si $M \neq 0$ ax^2+bx+c irreducible

Definición de Derivada

$$f'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad f'(a) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Continuidad: Una función f es continua en un punto a si

$$\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

- Si $\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) \Longrightarrow$ Discontinua no evitable. (La función pega un salto en ese punto)

- Si $\lim\limits_{x\longrightarrow a^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x) \neq f(a) \Longrightarrow$ Discontinua evitable. (La función tiene un agujero en ese punto)

Derivabilidad
Una función f es derivable en un punto a si $f'(a^-) = f'(a^+)$.

$$f'(a^-) = \lim_{h\longrightarrow 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \quad f'(a^+) = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Si f es una función derivable en un punto a, entonces f tiene que ser continua en a.
Teorema de Weierstrass
Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces f alcanza un máximo y un mínimo en este intervalo.
Teorema de Darboux
Si f es una función continua en $[a,b]$, entonces f toma en dicho intervalo todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo.
Teorema de Bolzano
Si f es una función continua en el intervalo cerrado y no nulo $[a,b]$ $(a < b)$ y la función toma valores de distinto signo en los extremos de este intervalo (Si signo de $f(a)$ es positivo entonces signo de $f(b)$ es negativo o viceversa). Entonces la función pasa necesariamente por un punto que corta al eje de abcisas, es decir, $\exists c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$.
Teorema de Rolle
Sea f continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en el intervalo (a,b). Si además cumple que $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.
Teorema del Valor Medio de Lagrange
Sea f continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en el intervalo (a,b). entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Primer Teorema Fundamental del Cálculo
Sea f una función integrable en el intervalo $[a,b]$. Definimos en este intervalo la función

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \text{ donde } c \in [a,b]$$

En estas condiciones, si f es continua en c se cumple que F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.
Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (Regla de Barrow)
Dada una función f continua en el intervalo $[a,b]$ y sea F cualquier función primitiva de f, es decir $F'(x) = f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema de integración por partes
Sean f y g dos funciones reales derivables en el intervalo $[a,b]$. En estas condiciones se cumple

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

$\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (sentado un día vi un valiente soldado vestido de uniforme)

Teorema del cambio de variable
Sea g una función con derivada g' continua en $[a,b]$, y sea f una función real y continua en el mismo intervalo. SI hacemos el cambio de variable $t = g(x)$ se cumple que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

Límites cuando $x \longrightarrow \pm\infty$
Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que Grado$(P(x)) = n$ y Grado$(Q(x)) = m$. Sea A el coeficiente del monomio de mayor grado de $P(x)$ y sea B el coeficiente del monomio de mayor grado de $Q(x)$

$$L = \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} P(x) = \pm\infty$ el signo depende del signo del coeficiente de mayor grado de este polinomio.
- Si $n > m \Longrightarrow L =$Signo$\left(\dfrac{A}{B}\right) \cdot \infty$
- Si $n < m \Longrightarrow L = 0$
- Si $n = m \Longrightarrow L = \dfrac{A}{B}$

Si $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} P(x)^{Q(x)} = [1^\infty] = e^\lambda$, donde

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} Q(x)(P(x)-1)$$

Regla de L'Hôpital Sean f y g dos funciones reales y derivables, entonces si

$$\lim_{x\longrightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \; o \; \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right] \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\longrightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aproximaciones cuando $x \longrightarrow 0$

$\sin x \approx x$	$\tan x \approx x$	$e^x \approx 1 + x$	$\log(1+x) \approx x$
$a^x \approx 1 + x\ln a$	$\arcsin x \approx x$	$\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$	$\arccos \approx \dfrac{\pi}{2} - x$

Problemas

3.1. Aragón

3.1.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.1 Se pide:

a) Un rectangulo tiene sus vertices en los puntos $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,b)$ y (a,b), donde $a>0$ y $b>0$ y ademas el punto (a,b), esta situado en la curva de ecuacion:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}+9$$

De entre todos los rectángulos que cumplen esas condiciones determine el rectángulo de área mínima y calcule dicha área mínima.

b) Determine: $\displaystyle\int \frac{1}{9-x^2}\,dx$

c) Determine el valor de la constante k para que se verifique que:

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1}=2$$

Solución:

a) $b=f(a)=\dfrac{1}{a^2}+9$ y $S(a,b)=a\cdot b\Longrightarrow S(a)=a\left(\dfrac{1}{a^2}+9\right)=\frac{1}{a}+9a=\frac{1+9a^2}{a}$

$$S'(a)=\frac{9a^2-1}{a^2}=0\Longrightarrow a=\pm\frac{1}{3}$$

	$[0,1/3)$	$(1/3,\infty)$
$S'(a)$	$-$	$+$
$S(a)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

Luego si $a=\dfrac{1}{3}$ es un mínimo y $b=f(a)=18$ El área mínima sería: $S\left(\dfrac{1}{3}\right)=6\ u^2$

Los vértices del rectángulo serían: $(0,0)$, $\left(\dfrac{1}{3},0\right)$, $(0,18)$ y $\left(\dfrac{1}{3},18\right)$

b) $I(x)=\displaystyle\int\frac{1}{9-x^2}\,dx=-\int\frac{1}{x^2-9}\,dx$

$$x^2-9=0\Longrightarrow x=\pm3\Longrightarrow x^2-9=(x+3)(x-3)$$

$$\frac{1}{x^2-9}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x+3)}{x^2-9}$$

$$1=A(x-3)+B(x+3)\Longrightarrow\begin{cases}x=3\Longrightarrow 1=6B\Longrightarrow B=1/6\\ x=-3\Longrightarrow 1=-6A\Longrightarrow A=-1/6\\ \frac{1}{x^2-9}=\frac{-1/6}{x+3}+\frac{1/6}{x-3}\end{cases}$$

$$I(x)=-\int\left(\frac{-1/6}{x+3}+\frac{1/6}{x-3}\right)dx=\frac{1}{6}\int\frac{1}{x+3}\,dx-\frac{1}{6}\int\frac{1}{x-3}\,dx=$$

$$\frac{1}{6}\ln|x+3|-\frac{1}{6}\ln|x-3|+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|+C$$

c) $g(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$ luego $f(x) = x^3 + x^2 + kx + 3$ tiene que ser divisible por $(x-1)^2$, es decir $f(1) = 0 \Longrightarrow f(1) = 5 + k = 0 \Longrightarrow k = -5$ sólo falta comprobar que el límite es 2.

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{3x^2 + 2x - 5}{3x^2 - 2x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{6x + 2}{6x - 2} = \frac{8}{4} = 2$$

Problema 3.2 Considere la función:

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

a) Determine las asíntotas de la función, si existen.

b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función, si existen.

c) Determine la integral $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: en $x = -1$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \left[\ \frac{-2}{0^+}\ \right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \left[\ \frac{-2}{0^+}\ \right] = -\infty$$

- Horizontales: $y = 0$

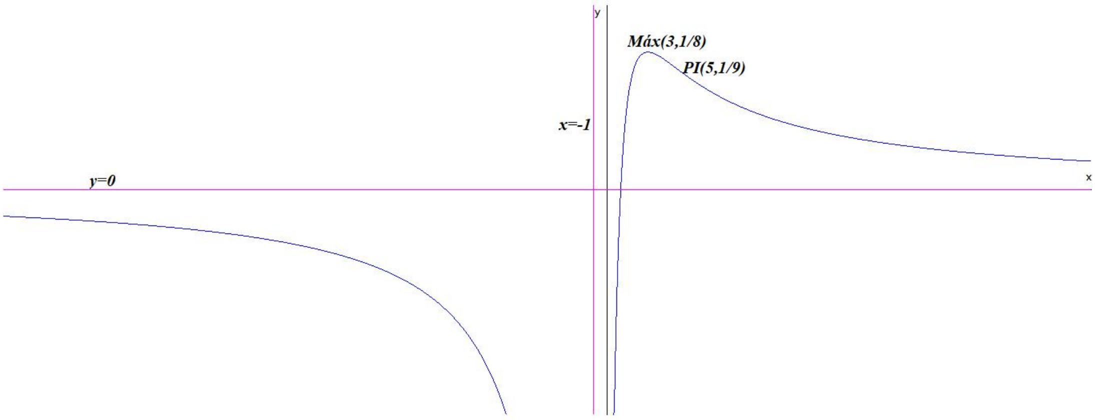
$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} = 0$$

- No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\dfrac{x-3}{(x+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 3.$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

La función f decrece en el intervalo $(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$.
La función f crece en el intervalo $(-1,3)$.
La función f tiene un máximo en el punto $\left(3, \dfrac{1}{8}\right)$.



c) $F(x) = \displaystyle\int \frac{x-1}{(x+1)^2}\,dx$

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2}$$

$$x-1 = A(x+1)+B \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=0 \Longrightarrow -1 = A+B \Longrightarrow A=1 \\ x=-1 \Longrightarrow -2 = B \Longrightarrow B=-2 \\ \frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{-2}{(x+1)^2} \end{array} \right.$$

$$F(x) = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-2}{(x+1)^2}\right) dx =$$

$$\ln|x+1| - 2\int (x+1)^{-2}\,dx = \ln|x+1| - 2\frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \ln|x+1| + \frac{2}{x+1}$$

$$\int_1^3 f(x)\,dx = F(3)-F(1) = \frac{1}{2} + 2\ln 2 - (1+\ln 2) = -\frac{1}{2} + \ln 2 \simeq 0,193$$

3.1.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.3 Se pide:

a) Determine el límite:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{2}{\ln((1+x)^2)} - \frac{1}{x}\right)$$

b) Determine el valor de la constante k para que la funcion:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{x^4-1}{x-1} & \text{si} & x \neq 1 \\ k-x & \text{si} & x = 1 \end{array} \right.$$

sea continua en $x=1$.

c) La curva $y = x^2+1$ divide al rectangulo limitado por los vertices $A(0,1)$, $B(2,1)$, $C(0,5)$ y $D(2,5)$ en dos partes. Determine el area de cada una de esas dos partes.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{2}{\ln((1+x)^2)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2x-\ln((1+x)^2)}{x\ln((1+x)^2)}=\left[\ \frac{0}{0}\ \right]=$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2-\frac{2(1+x)}{(1+x)^2}}{\ln((1+x)^2)+x\frac{2(1+x)}{(1+x)^2}}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{2x}{1+x}}{\ln((1+x)^2)+\frac{2x}{1+x}}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2x}{(1+x)\ln((1+x)^2)+2x}=\left[\ \frac{0}{0}\ \right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2}{\ln((1+x)^2)+(1+x)\frac{2(1+x)}{(1+x)^2}+2}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2}{\ln((1+x)^2)+4}=\frac{1}{2}$$

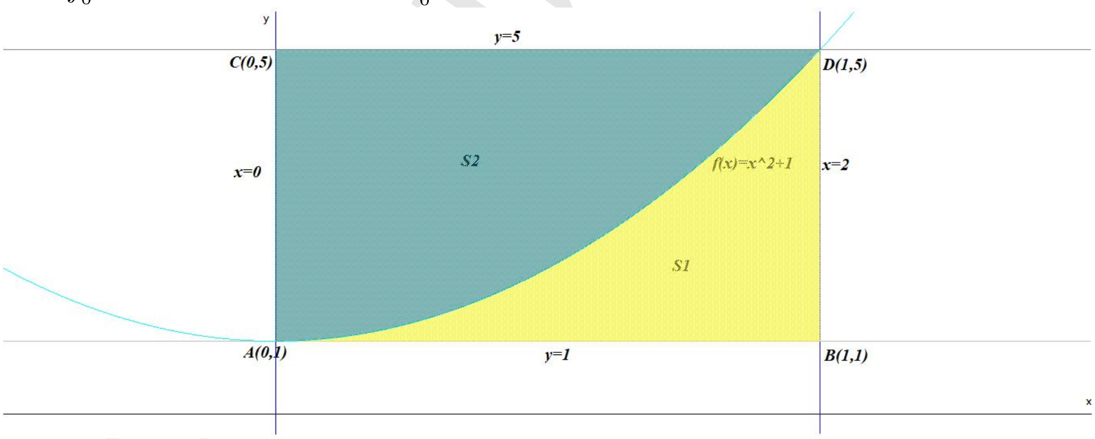
b)

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^4-1}{x-1}=\left[\ \frac{0}{0}\ \right]=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{4x^3}{x}=4$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^4-1}{x-1}=f(1)\Longrightarrow 4=k-1\Longrightarrow k=5$$

c) $S_1=\displaystyle\int_0^2(x^2+1-1)dx=\left.\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}\ u^2$

$S_2=\displaystyle\int_0^2(5-x^2-1)dx=4x-\left.\frac{x^3}{3}\right]_0^2=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}\ u^2$



Problema 3.4 Se pide:

a) Considere la función:

$$f(x)=\frac{2x^3+kx^2+x+3}{x^2+2}$$

Determine el valor de k para que la funcion $f(x)$ tenga como asintota oblicua, cuando $x\longrightarrow+\infty$, la recta $y=2x-1$.

b) Determine: $\displaystyle\int(x(\ln x)^2)\,dx$.

c) Determine, si existen, los máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función:

$$f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$$

Solución:

a) $m = 2 = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{2x^3+kx^2+x+3}{x^3+2x} = 2$

$$n = -1 = \lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{2x^3+kx^2+x+3}{x^2+2} - 2x\right) =$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{kx^2-3x+3}{x^2+2} = k \Longrightarrow k = -1.$$

b)

$$\int (x(\ln x)^2)\,dx = \left[\begin{array}{l} u = (\ln x)^2 \Longrightarrow du = \frac{2\ln x}{x}dx \\ dv = xdx \Longrightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right] = \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \int (x\ln x)dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx \Longrightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right] = \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \left[\frac{x^2\ln x}{2} - \int \frac{x}{2}dx\right] = \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \frac{x^2\ln x}{2} + \frac{x^2}{4} + C$$

c)

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) \Longrightarrow f'(x) = \frac{x-1}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 1$$

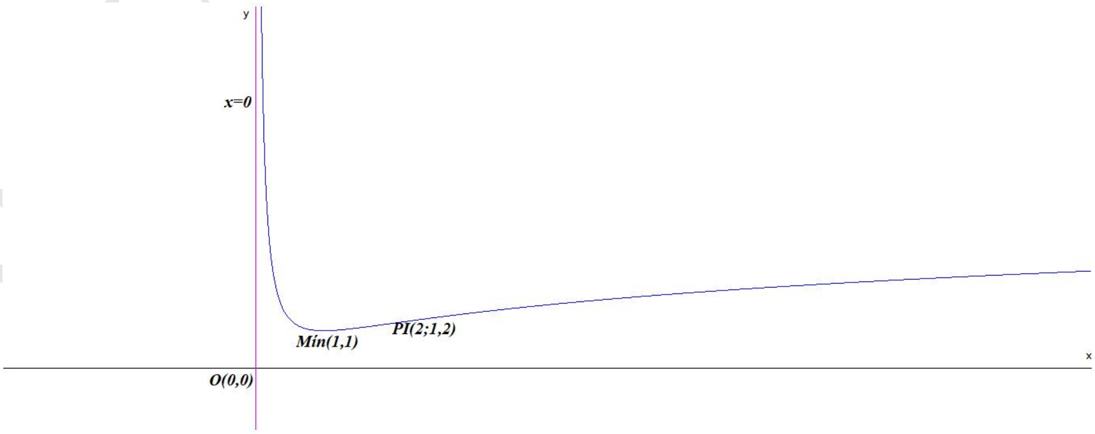
	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función f decrece en el intervalo $(0,1)$.
La función f crece en el intervalo $(1,\infty)$.
La función f tiene un mínimo en el punto $(1,1)$.

$$f''(x) = \frac{2-x}{x^3} = 0 \Longrightarrow x = 2$$

	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	cóncava $\cup$	convexa $\cap$

La función f convexa en el intervalo $(2,\infty)$.
La función f cóncava en el intervalo $(0,2)$.
La función f tiene un punto de inflexión en el punto $\left(2, \frac{1}{2}+\ln 2\right) = (2;1,2)$.



3.2. Asturias

3.2.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.5 Dada la función $f(x) = \dfrac{2}{2+e^x}$

a) Calcula su dominio de definición y sus asíntotas.

b) Mediante el cambio de variable $t = e^x$, calcula $\displaystyle\int \frac{2}{2+e^x}\,dx$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Asíntotas:

- Verticales: No hay, el denominador no se anula nunca.
- Horizontales: $y = 0$ e $y = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2}{2+e^x} = 0, \quad \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{2}{2+e^x} = 1$$

- No hay por haber horizontales.

b) $$\int \frac{2}{2+e^x}\,dx = \begin{bmatrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \\ dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \end{bmatrix} = \int \frac{2}{t(2+t)}\,dt = \begin{bmatrix} \frac{2}{t(2+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{2+t} = \frac{A(2+t)+Bt}{t(2+t)} \\ 2 = A(2+t) + Bt \\ t = 0 \Longrightarrow A = 1 \\ t = -2 \Longrightarrow B = -1 \\ \frac{2}{t(2+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2+t} \end{bmatrix} =$$

$$\int \frac{1}{t}\,dt - \int \frac{1}{2+t}\,dt = \ln|t| - \ln|2+t| + C = \ln|e^x| - \ln|2+e^x| + C = x - \ln|2+e^x| + C$$

Problema 3.6 Dada la curva $y = \dfrac{1}{3+x^2}$

a) Expresa la función $m(x)$ que da la pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto x.

b) Calcula el valor x donde se alcanza la máxima pendiente.

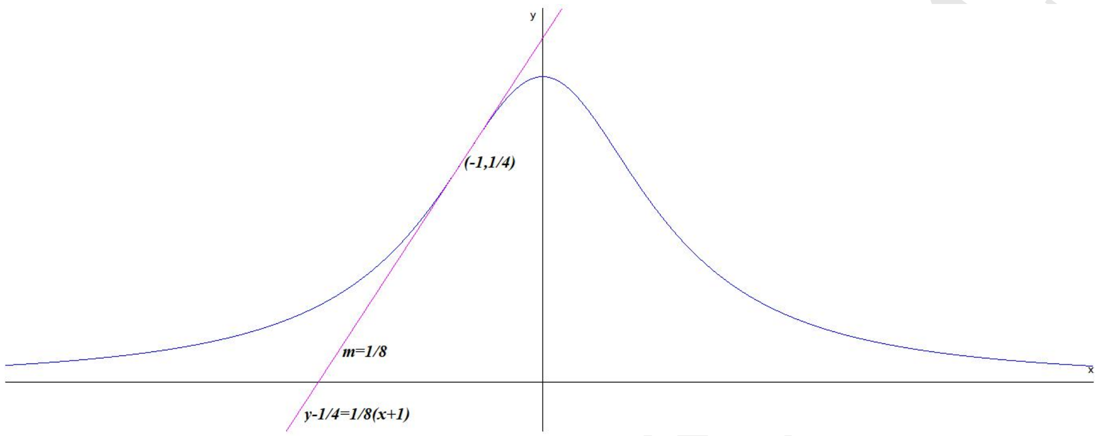
Solución:

a) $m(x) = y' = -\dfrac{2x}{(x^2+3)^2}$

b) $m'(x) = \dfrac{6(x^2-1)}{(x^2+3)^3} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$m'(x)$	$+$	$-$	$+$
$m(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

la función m tiene un máximo en el punto $x = -1$ con una pendiente $m(-1) = \dfrac{1}{8}$



3.2.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.7 Dada la función $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x+1}$

a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas.

b) Halla, si existen: máximos y mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Haz un esbozo de su gráfica.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Asíntotas:

- Verticales: $x = -1$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{e^{-x}}{x+1} = \left[\ \frac{e}{0^-}\ \right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{e^{-x}}{x+1} = \left[\ \frac{e}{0^+}\ \right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{1}{(x+1)e^x} = 0$$

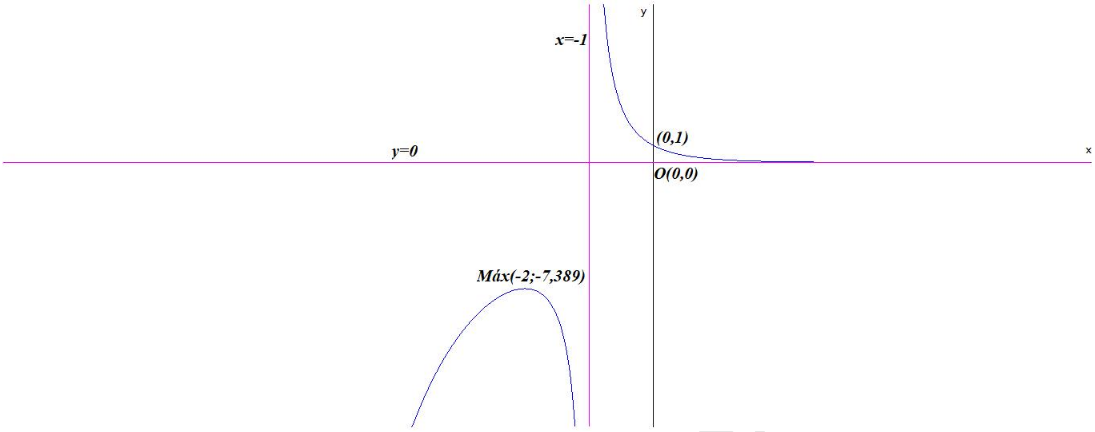
- No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\dfrac{e^{-x}(x+2)}{(x+1)^2} \Longrightarrow x = -2$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

La función crece en el intervalo $(-\infty, -2)$ y decrece en el intervalo $(-2, \infty)$ con un máximo en el punto $(-2, -e^2) = (-2; -7,389)$

c) Grafica:



Problema 3.8 Dadas las curvas $y = x^2/2$, $y = 4/x$.

a) Calcula sus puntos de corte.

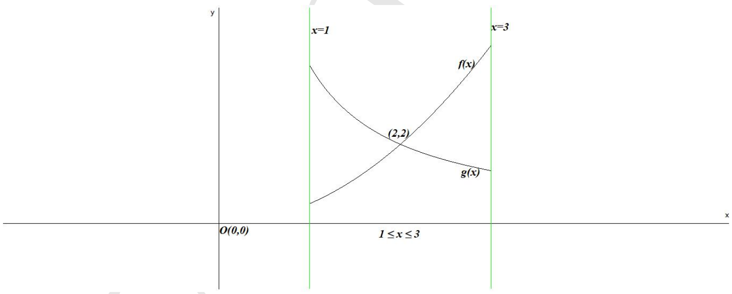
b) Esboza una gráfica de las curvas en el intervalo $[1, 3]$.

c) Calcula el área que delimitan entre ellas en el intervalo $[1, 3]$.

Solución:

a) $x^2/2 = 4/x \Longrightarrow \frac{x^3-8}{x} = 0 \Longrightarrow x = 2$

b) Gráfica:

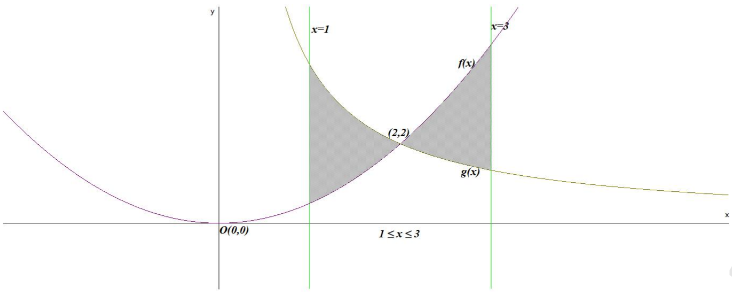


c) Hay dos áreas:

$$S_1 = \int_2^3 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4}{x} \right) dx = \frac{x^3}{6} - 4\ln x \Big]_2^3 = \frac{19}{6} - 4\ln\frac{3}{2} \simeq 1,545$$

$$S_2 = \int_1^2 \left(\frac{4}{x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 4\ln x - \frac{x^3}{6} \Big]_1^3 = -\frac{7}{6} + 4\ln 2 \simeq 1,606$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{19}{6} - 4\ln\frac{3}{2} - \frac{7}{6} + 4\ln 2 = 2 - 4\ln\frac{3}{4} \simeq 3,151\ u^2$$



3.3. Islas Baleares

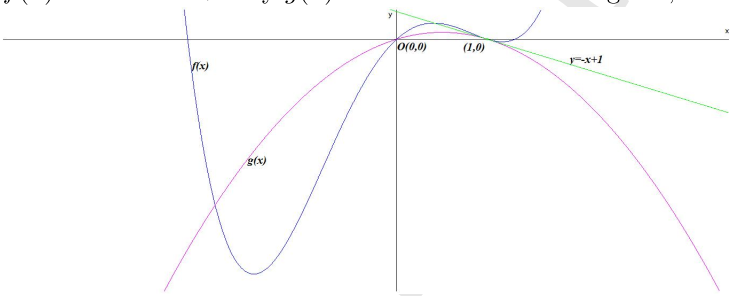
3.3.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.9 Las funciones $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$ y $g(x) = x - cx^2$ pasan por el punto $(1, 0)$. Determinar los coeficientes a, b y c, para que las dos funciones tengan la misma recta tangente en ese punto.
Solución:

$$f'(x) = 4x^3 + 2ax + b \quad g'(x) = 1 - 2cx$$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \Longrightarrow a + b + 1 = 0 \\ g(1) = 0 \Longrightarrow 1 - c = 0 \\ f'(1) = g'(1) \Longrightarrow 2a + b + 4 = 1 - 2c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ c = 1 \\ 2a + b + 2c = -3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3x$ y $g(x) = x - x^2$. La recta tangente, común a ambas curvas, es $y = -x + 1$.



Problema 3.10 Consideremos la región delimitada por la función $f(x) = x^2 - x^4$ y el eje de abcisas OX. Esbozar esta región y calcular su área.

Solución:
Se trata de una función PAR $f(-x) = f(x)$, con $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y tiene como puntos de corte con OY el $(0, 0)$ y con OX a parte de ese punto $x^2 - x^4 = 0 \Longrightarrow (\pm 1, 0)$. La función no tiene asíntotas.
Monotonía: $f'(x) = 2x - 4x^3 = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $x = 0$

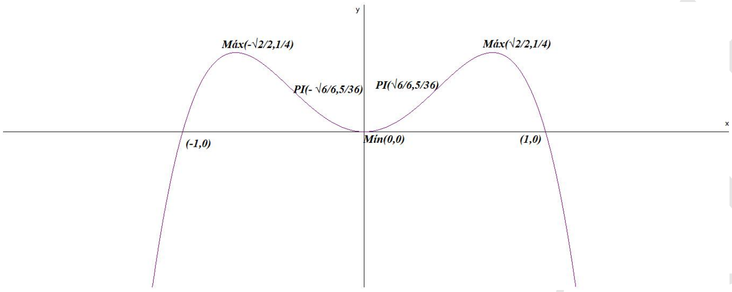
	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$	$\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

La función crece en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y decrece en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ Tiene un mínimo en el punto $(0, 0)$ tiene dos máximos en los puntos $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right)$

Curvatura: $f''(x) = 2 - 12x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$

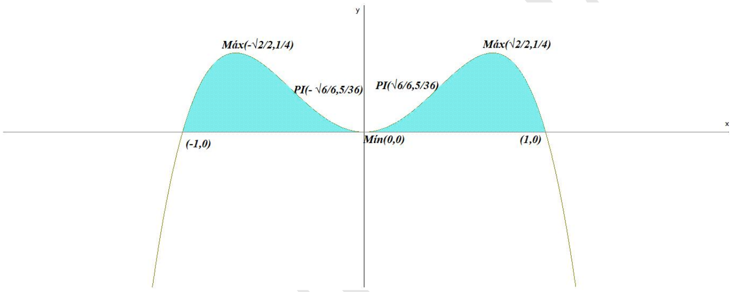
	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \infty\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$	convexa $\cup$

La función es convexa en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \infty\right)$ y cóncava en $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$. Tiene puntos de inflexión en $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{5}{36}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{5}{36}\right)$
Representación:



El área encerrada:

$$S = 2\int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\ u^2$$



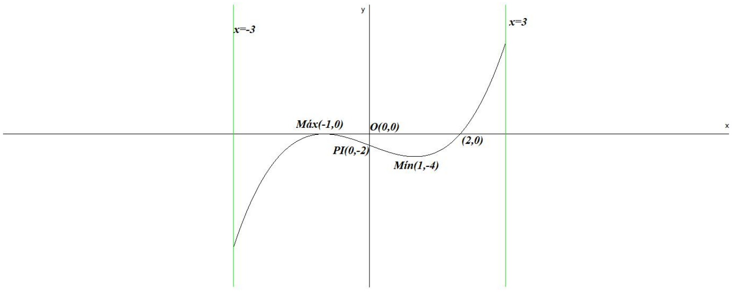
3.3.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.11 Calcular los máximos y mínimos de la función $f(x) = x^3 - 3x - 2$, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y esboce una gráfica de la función para valores de x entre -3 y 3.

Solución:
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

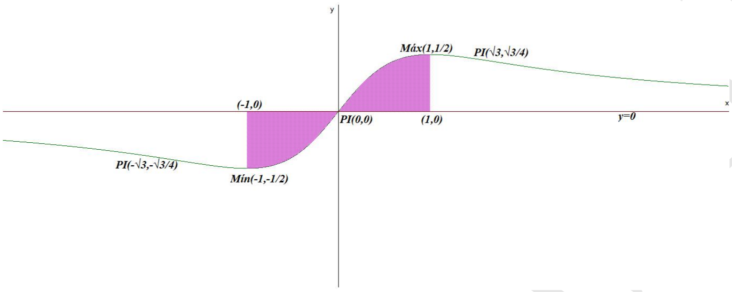
	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función crece en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y decrece en $(-1, 1)$) Tiene un mínimo en el punto $(1, -4)$ tiene un máximo en el punto $(-1, 0)$



Problema 3.12 Consideremos la región delimitada por función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, el eje de abcisas OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$. Esbozar esta región y calcular su área.

Solución:

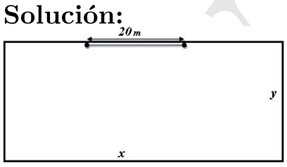


$$S = 2\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = 2\cdot\frac{1}{2}\ln|1+x^2|\Big]_0^1 = \ln 2 \simeq 0,693\ u^2$$

3.4. Islas Canarias

3.4.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.13 Se desea vallar un terreno rectangular usando 100 metros de una tela metálica. Se ha decidido dejar una abertura de 20 metros sin vallar en uno de los lados de la parcela para colocar una puerta. Calcular las dimensiones de todos los lados de la parcela rectangular de área máxima que puede vallarse de esa manera. Calcular el valor de dicha área máxima.
Solución:



Tenemos $2x + 2y = 120 \Longrightarrow y = 60 - x$
Hay que optimizar la función $s(x, y) = x \cdot y \Longrightarrow s(x) = x(60 - x) = 60x - x^2$
$s'(x) = 60 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 30$
$s''(x) = -2 \Longrightarrow s''(30) = -2 < 0 \Longrightarrow x = 30$ m es un máximo $\Longrightarrow y = 30$ m y $S(30) = 900$ m^2

Problema 3.14 Dada la siguiente expresión de la función f, de la que se desconocen algunos valores:

$$f(x) = \begin{cases} a - x & \text{si} \quad x \le 1 \\ \frac{b}{x} - \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Calcular los valores de a y b para que f sea derivable en todo su dominio.
Escribir la función resultante.
Solución:
Para que sea derivable tiene que ser continua en $x = 1$:

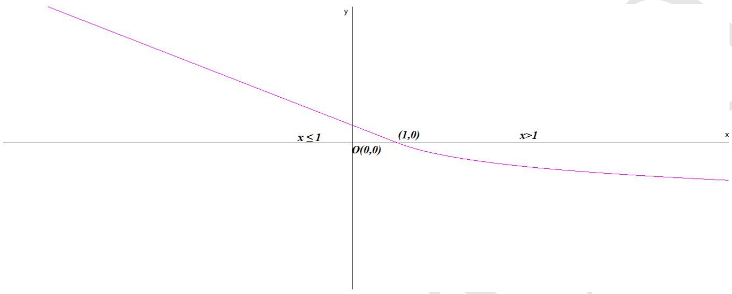
$$\lim_{x\longrightarrow 1^-}(a-x) = a-1;\quad \lim_{x\longrightarrow 1^+}\left(\frac{b}{x}-\ln x\right) = b \Longrightarrow a-1=b \Longrightarrow a-b=1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} -1 & \text{si} & x\le 1\\ -\frac{b}{x^2}-\frac{1}{x} & \text{si} & x>1\end{array}\right. \Longrightarrow f'(1^-) = f'(1^+) \Longrightarrow -1=-b-1 \Longrightarrow b=0$$

Luego $\left\{\begin{array}{l} a-b=1\\ b=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1\\ b=0\end{array}\right.$ y la función quedaría:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} 1-x & \text{si} & x\le 1\\ -\ln x & \text{si} & x>1\end{array}\right.$$



3.4.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.15 Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$
Calcular los valores de a, b y c sabiendo que se cumplen las condiciones siguientes:

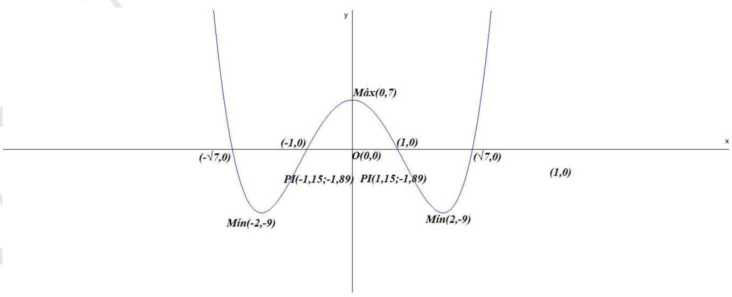
- Dos de sus extremos relativos se encuentran en los puntos de abcisa $x = 0$ y $x = -2$
- La función corta el eje OX en el punto $x = 1$

Dar la expresión de la función resultante. **Solución:**

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7 \Longrightarrow f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\left\{\begin{array}{l} f'(0)=0 \Longrightarrow c=0\\ f'(-2)=0 \Longrightarrow 12a-4b+c-32=0\\ f(1)=0 \Longrightarrow a+b+c+8=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=0\\ b=-8\\ c=0\end{array}\right.$$

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$$



Problema 3.16 Dada la parábola de ecuación $y = 4 - x^2$ y la recta de ecuación $y = x + 2$

a) Hallar los puntos intersección entre las curvas anteriores.

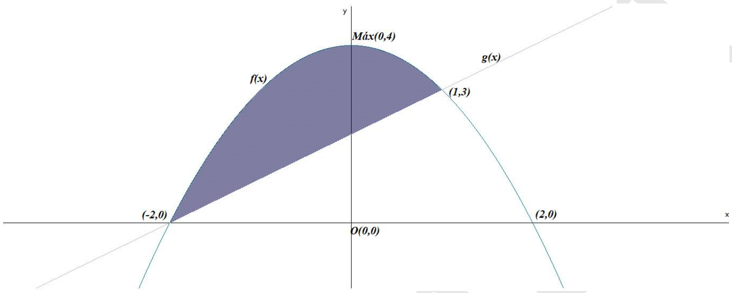
b) Esbozar el gráfico señalando el recinto limitado por ambas curvas.

c) Calcular el área del recinto limitado por ambas curvas.

Solución:

a) Tenemoa $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = x + 2$. Hacemos $f(x) = g(x) \Longrightarrow 4 - x^2 = x + 2 \Longrightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -2$ y $x = 1$.

b) Gráfica:



c)

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int \left(-x^2 - x + 2\right)\, dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x$$

$$S_1 = \int_{-2}^{1} (f(x) - g(x))\, dx = F(1) - F(-2) = \frac{9}{2}$$

$$S = |S_1| = \frac{9}{2}\ \mathrm{m}^2$$

3.5. Cantabria

3.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.17 Considere la función $f(x) = (x + 10)e^{2x}$

a) Calcule un primitiva $F(x)$ tal que $F(0) = 0$. Use la derivada para comprobar su solución.

b) Calcule $\displaystyle\int_0^5 f(x)\, dx$

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int (x + 10)e^{2x}\, dx = \left[\begin{array}{l} u = x + 10 \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{2x}dx \Longrightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right] = \frac{(x + 10)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\, dx = \frac{(x + 10)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C = \frac{(2x + 19)e^{2x}}{4} + C$

$F(0) = 0 \Longrightarrow C = -\dfrac{19}{4} \Longrightarrow F(x) = \dfrac{(2x + 19)e^{2x}}{4} - \dfrac{19}{4}$

b) $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,dx = F(5) - F(0) = \frac{29e^{10} - 19}{4} \simeq 1,596871270 \cdot 10^5$

Problema 3.18 Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{a - x^2}{2+x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

a) Determine, si existe, el valor de a que haga a la función continua en $x = 0$.

b) Calcule el valor de a para que f tenga un extremo relativo en $x = 2$. ¿Es este extremo un máximo o mínimo local?

c) Sea $g(x)$ una función integrable, si $\displaystyle\int_0^3 g(x)\,dx = 4$ y $\displaystyle\int_2^3 g(x)\,dx = 6$, ¿Cuánto vale $\displaystyle\int_0^2 g(x)\,dx$?

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{a - x^2}{2 + x} = \frac{a}{2} \Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{2} \Longrightarrow a = 1$$

b) Como $x = 2 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{a - x^2}{2 + x} \Longrightarrow f'(x) = -\dfrac{x^2 + 4x + a}{(x + 2)^2}$ como $f'(2) = 0 \Longrightarrow a = -12$.

c) Sea $G(x) = \displaystyle\int g(x)\,dx$:
$\displaystyle\int_0^3 g(x)\,dx = G(3) - G(0) = 4$ y $\displaystyle\int_2^3 g(x)\,dx = G(3) - G(2) = 6$
Luego: $G(2) - G(0) = \displaystyle\int_0^2 g(x)\,dx = -2$

3.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.19 Considere la función $f(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 - 7x - 8}$

a) Estudie el dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos de la función f.

b) Si g es una función derivable con un máximo relativo en $x = 2$, ¿Cuánto vale $g'(2)$?

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 8\}$

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x + 4 = 0 \Longrightarrow (-4, 0)$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -1/2 \Longrightarrow (0, -1/2)$.

Asíntotas:

- Verticales:
En $x = -1$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{x + 4}{x^2 - 7x - 8} = \left[\ \frac{3}{0^+}\ \right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{x + 4}{x^2 - 7x - 8} = \left[\ \frac{3}{0^-}\ \right] = -\infty$$

En $x=8$

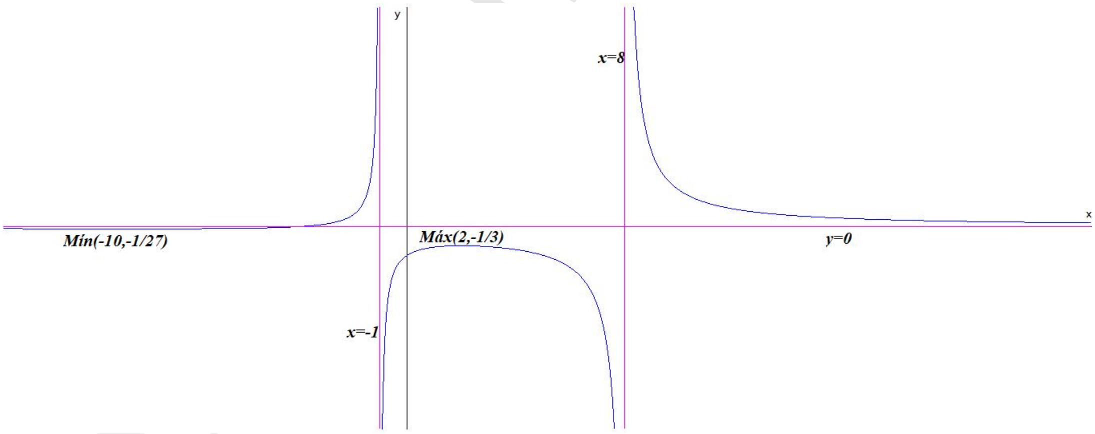
$$\lim_{x\longrightarrow 8^-}\frac{x+4}{x^2-7x-8}=\left[\ \frac{12}{0^-}\ \right]=-\infty$$
$$\lim_{x\longrightarrow 8^+}\frac{x+4}{x^2-7x-8}=\left[\ \frac{12}{0^+}\ \right]=+\infty$$

- Horizontales: $y=0$
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x+4}{x^2-7x-8}=0$$
- No hay por haber horizontales.

$f'(x)=-\dfrac{x^2+8x-20}{(x^2-7x-8)^2}=0\Longrightarrow x=2$ y $x=-10$.

	$(-\infty,-10)$	$(-10,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

La función f decrece en el intervalo $(-\infty,-10)\cup(2,8)\cup(8,\infty)$.
La función f crece en el intervalo $(-10,-1)\cup(-1,2)$.
La función f tiene un máximo en el punto $\left(2,-\dfrac{1}{3}\right)$.
La función f tiene un mínimo en el punto $\left(-10,-\dfrac{1}{27}\right)$.



b) $g'(2)=0$

Problema 3.20 Sea $f(x)$ la función definida en $(0,\infty)$ dada por $f(x)=x\ln(x)$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

a) Calcule $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)$.

b) Calcule $\displaystyle\int_2^e f(x)\,dx$.

Solución:

a) $$\lim_{x\longrightarrow 0^+} x\ln(x)=[0\cdot(-\infty)]=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{-\infty}{+\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\longrightarrow 0^+}(-x)=0$$

b) $F(x) = \int f(x)\,dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx \Longrightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right] = \dfrac{x^2 \ln x}{2} - \dfrac{1}{2}\int x\,dx = \dfrac{x^2 \ln x}{2} - \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{x^2(2\ln x - 1)}{4}$

$$\int_2^e f(x)\,dx = F(e) - F(2) = \frac{e^2}{4} + 1 - 2\ln 2 \simeq 1,461$$

3.6. Castilla León

3.6.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.21 Dada la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$, para $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcule sus máximos y mínimos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

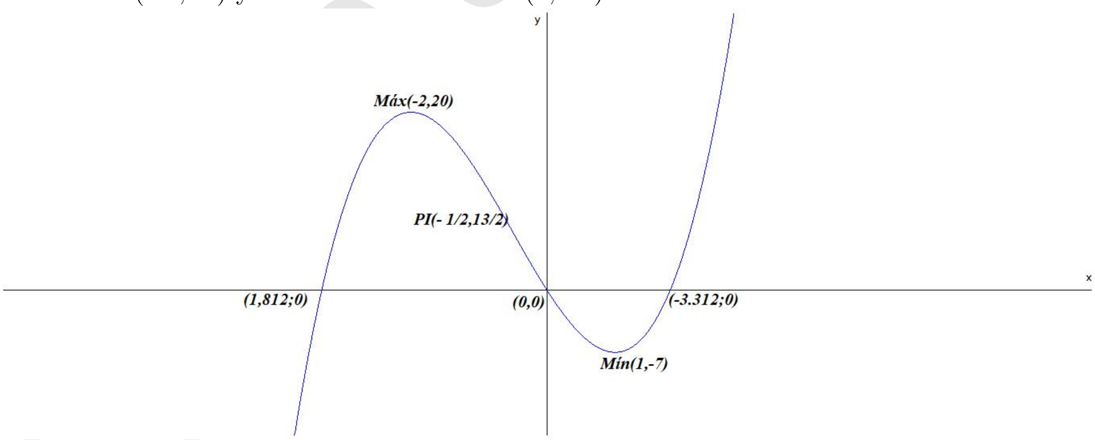
b) Calcule el máximo y mínimo absolutos en el intervalo $[-2, 2]$.

Solución:

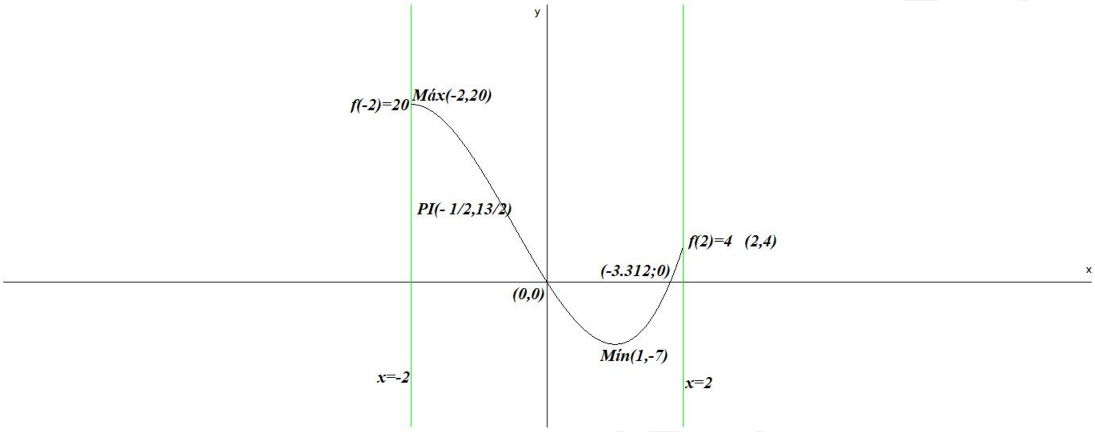
a) $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Longrightarrow x = -2$ y $x = 1$.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función crece en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-2, 1)$. Tiene un máximo relativo en $(-2, 20)$ y un mínimo relativo en $(1, -7)$.



b) Calculamos $f(-2) = 20$ y $f(2) = 4$. En el intervalo $[-2, 2]$ el máximo absoluto sería $(-2, 20)$ y el mínimo absoluto sería el $(1, -7)$.



Problema 3.22 Se pide:

a) Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\cos x - 1}{x\sin x}$

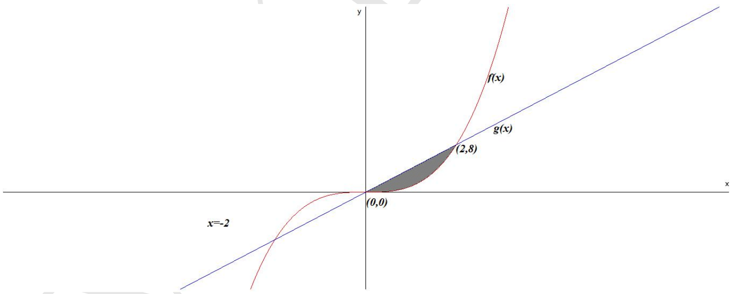
b) Calcular el área encerrada por las gráficas de $f(x) = 4x$ y de $g(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 2]$, probando anteriormente que en dicho intervalo $f \geq g$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\cos x - 1}{x\sin x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{-\sin x}{\sin x + x\cos x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{-\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = -\dfrac{1}{2}$

b) $f(x) = g(x) \Longrightarrow 4x = x^3 \Longrightarrow x^3 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pm 2$. No hay intersecciones entre las funciones en el intervalo $[0, 2]$, cogemos un valor intermedio en $x = 1 \Longrightarrow f(1) = 1$ y $g(1) = 4 \Longrightarrow g(x) \geq f(x)$ en $[0, 2]$,ya que las dos funciones son continuas en el intervalo.

$S = \displaystyle\int_0^2 (4x - x^3)\, dx = 2x^2 - \frac{x^3}{3}\Big]_0^2 = 4\ u^2$



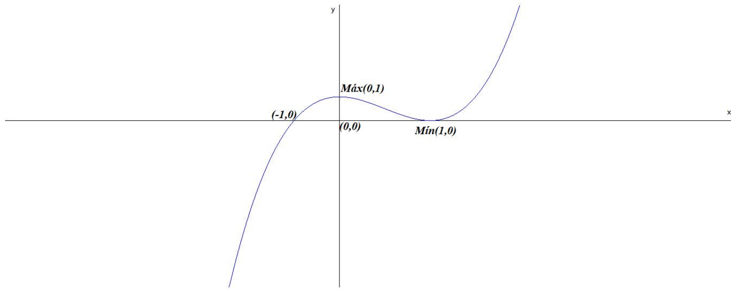
3.6.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.23 Sea el polinomio $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ del cual sabemos que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ y que tiene extremos relativos en $x = 0$ y $x = 1$. Calcular a, b, c y d.
Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Longrightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 1 \Longrightarrow d = 1 \\ f(1) = 0 \Longrightarrow a + b + c + d = 0 \\ f'(0) = 0 \Longrightarrow c = 0 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 3a + 2b + c = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{array}\right.$$

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$



Problema 3.24 Se pide:

a) Sea $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+1}$. Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

b) Calcular $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x \sin x}{3\cos x - 3}$

Solución:

a) $\dfrac{2x+3}{x^2+3x+1} = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$, que está fuera del intervalo de integración $[0, 2]$.

$$S = \int_0^2 \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\, dx = \ln|x^2+3x+1|\Big]_0^2 = \ln 11\ u^2$$

b) $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x\sin x}{3\cos x - 3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\sin x + x\cos x}{-3\sin x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\cos x + \cos x - x\sin x}{-3\cos x} = -\dfrac{2}{3}$

3.7. Castilla La Mancha

3.7.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2018

Problema 3.25 Se pide:

a) Determina el valor de a y de b para que la siguiente función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ a\sqrt{x} - \frac{b}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

b) Comprueba si la función $f(x) = x^2 - 4$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-3, 3]$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (ax^2+bx+2) = a+b+2 \\ \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} (a\sqrt{x} - \dfrac{b}{x^2}) = a-b \end{cases} \Longrightarrow a+b+2 = a-b \Longrightarrow b = -1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si} \quad x \le 1 \\ \frac{a}{2\sqrt{x}} + \frac{2b}{x^3} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(1^-) = 2a + b \\ f'(1^+) = \frac{a}{2} + 2b \end{cases} \Longrightarrow 2a + b = \frac{a}{2} + 2b \Longrightarrow 3a - 2b = 0$$

$$\begin{cases} b = -1 \\ 3a - 2b = 0 \end{cases} \Longrightarrow a = -2/3$$

b) La función $f(x) = x^2 - 4$ es continua en el intervalo $[-3, 3]$, derivable en el intervalo $(-3, 3)$ y $f(3) = f(-3) = 5$. Luego verifica las condiciones del teorema de Rolle y podemos concluir que $\exists c \in [-3, 3]/f'(c) = 0$.

Se puede calcular este punto:
$f'(x) = 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y como $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(0) = 2 > 0 \Longrightarrow x = 0$ es un mínimo. El punto $c = 0$.

Problema 3.26 Se pide:

a) Calcula razonadamente el área de los recintos limitados por la función $g(x) = -x^2 + 2x + 3$, la recta $x = -2$ y el eje de abscisas.

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$.

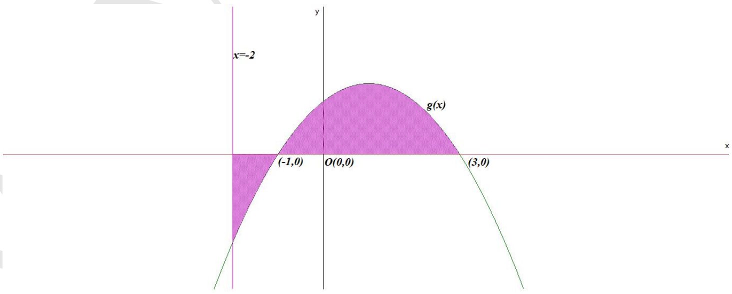
Solución:

a) $g(x) = -x^2 + 2x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 3$. Luego tenemos dos recintos: S_1 en el intervalo $[-2, -1]$ y otro S_2 en el intervalo $[-1, 3]$.

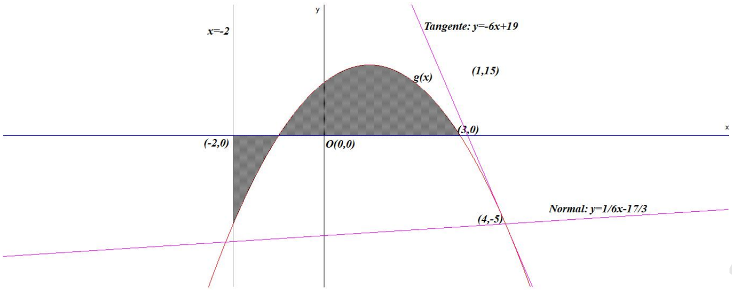
$$S_1 = \int_{-2}^{-1} (-x^2 + 2x + 3)\,dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\Big]_{-2}^{-1} = -\frac{7}{3}$$

$$S_2 = \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)\,dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\Big]_{-1}^{3} = \frac{32}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{7}{3} + \frac{32}{3} = 13\ u^2$$



b) $b = g(4) = -5$, $g'(x) = -2x + 2 \Longrightarrow m = g'(4) = -6$. Luego la ecuación de la recta tangente es $y + 5 = -6(x - 4) \Longrightarrow y = -6x + 19$



La recta normal tiene de ecuación $y+5=\frac{1}{6}(x-4) \Longrightarrow y=\frac{1}{6}x-\frac{17}{3}$

Problema 3.27 Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\left(\dfrac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}$

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow -1}\dfrac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}$

Solución:

a) $L=\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\left(\dfrac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}=[1^{\infty}]=e^{\lambda}$

$\lambda=\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x}{x-1}\left(\dfrac{2e^{x-1}}{x+1}-1\right)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{2xe^{x-1}-x^2-x}{x^2-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$
$\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{2e^{x-1}+2xe^{x-1}-2x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}\Longrightarrow L=e^{1/2}$

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow -1}\dfrac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\longrightarrow -1}\dfrac{-2xe^{x^2-1}-1}{2x+4}=\dfrac{1}{2}$

Problema 3.28 Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ y $g(x)=\dfrac{x^2}{2}$ con $x\in\mathbb{R}$.

a) Encuentra razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

b) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Solución:

a) Estudio de $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}\Longrightarrow f'(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)}=0\Longrightarrow x=0$

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente	decreciente

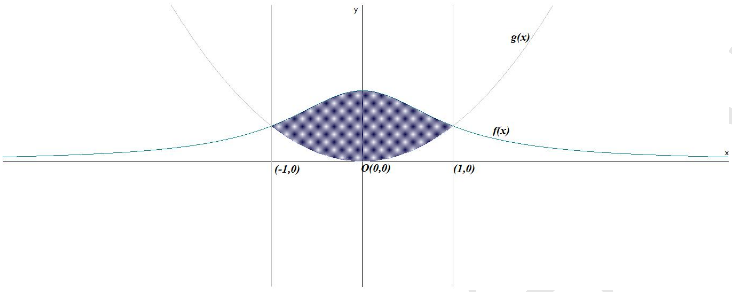
Hay un máximo en el punto $(0,1)$.
Estudio de $g(x)=\dfrac{x^2}{2}\Longrightarrow f'(x)=x=0\Longrightarrow x=0$

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente

Hay un mínimo en el punto $(0,0)$.

b) $f(x) = g(x) \Longrightarrow \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{2} \Longrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

$$S = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \int_{-1}^{1} \frac{-x^4 - x^2 + 2}{2(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(-x^2 + \frac{2}{1+x^2} \right) dx =$$
$$\left(-\frac{x^3}{6} + \arctan x \right) \Big]_{-1}^{1} = \frac{3\pi - 2}{6} \simeq 1,237 \ u^2$$



3.7.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.29 Se pide:

a) Estudia la continuidad en todo $\mathbb{R}$ de la función $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1}$ indicando los tipos de discontinuidad que aparecen.

b) Calcula las coordenadas de los extremos relativos de la función $g(x) = xe^{-x}$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$, la función es continua en todo el dominio de f. Estudiamos la continuidad en $x = 1$ y en $x = -1$.
Continuidad en $x = 1$:
$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{6x^2 - 2x - 1}{2x} = \frac{3}{2}$$
En este caso la función es discontinua evitable. Tiene un agujero en el punto $\left(1, \frac{3}{2}\right)$.
Continuidad en $x = -1$:
$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1} = \left[\frac{-2}{0^+} \right] = -\infty$$
$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1} = \left[\frac{-2}{0^-} \right] = +\infty$$
En este caso la función es discontinua no evitable. Tiene un salto en $x = -1$ que sería una asíntota vertical.

b) $g(x) = xe^{-x} \Longrightarrow g'(x) = (1-x)e^{-x} = 0 \Longrightarrow x = 1$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente	decreciente

Hay un máximo en el punto $(1, 1/e)$.

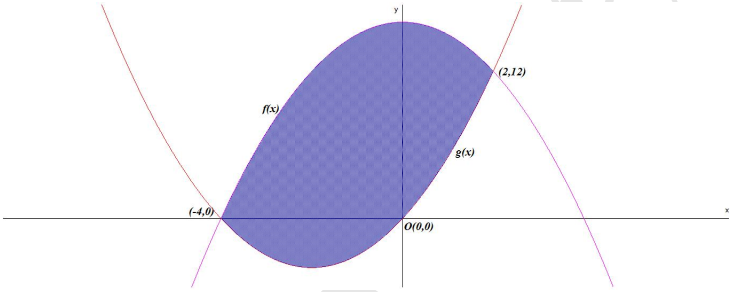
Problema 3.30 Se pide:

a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = 16 - x^2$ y $g(x) = (x+2)^2 - 4$.

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 16 - x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$.

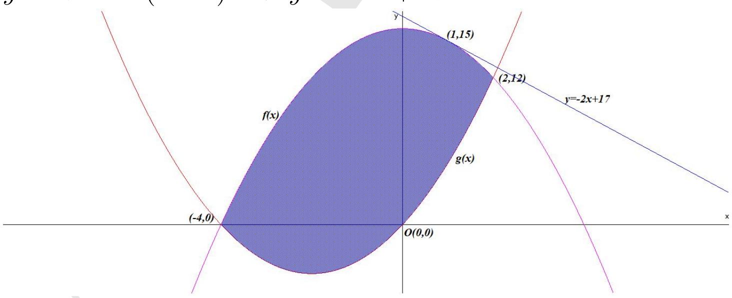
Solución:

a) $16 - x^2 = (x+2)^2 - 4 \Longrightarrow -2x^2 - 4x + 16 = 0 \Longrightarrow x = -4$ y $x = 2$.



$$S = \int_{-4}^{2} (-2x^2 - 4x + 16)\, dx = -\frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 16x\Big]_{-4}^{2} = 72\ u^2$$

b) $b = f(1) = 15$, $f'(x) = -2x \Longrightarrow m = f'(1) = -2$. Luego la ecuación de la recta tangente es $y - 15 = -2(x-1) \Longrightarrow y = -2x + 17$.



Problema 3.31 Se pide:

a) Demuestra que la ecuación $\sin x - 2x + 1 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $[0, \pi]$.

b) Calcula razonadamente el número exacto de soluciones de la ecuación anterior cuando $x \in [-200, 200]$.

Solución:

a) La función $f(x) = \sin x - 2x + 1$ es continua en el intervalo $[0, \pi]$, $f(\pi) = -2\pi + 1 < 0$ y $f(0) = 1 > 0$. Por el teorema de Bolzano $\exists c \in [0, \pi]/f(c) = 0$, por tanto la ecuación dada tiene al menos una solución.

b) La función $f(x) = \sin x - 2x + 1$ es continua en el intervalo $[-200, 200]$ y derivable en el intervalo $(-200, 200)$.
$f'(x) = \cos x - 2 < 0\, \forall x \in (-200, 200) \Longrightarrow f$ es decreciente en todo el intervalo y además cambia de signo en los extremos $f(-200) = 401,34$ y $f(200) = -399,34$, luego sólo existe un punto c que cumpla que $f(c) = 0$.

Problema 3.32 Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)e^{-x}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$

Nota: En la integral *b*) puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int (x+1)e^{-x}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x+1 \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right] = -(x+1)e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -(x+1)e^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(x+2)$

$$\int_0^1 (x+1)e^{-x}\,dx = F(1) - F(0) = 2 - \frac{3}{e} \simeq 0,896$$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \Longrightarrow x = t^2 \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Longrightarrow dx = 2tdt \end{array}\right] = \int \frac{2t}{t(1+t^2)}\,dt = 2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\arctan t + C = 2\arctan\sqrt{x} + C$

3.8. Cataluña

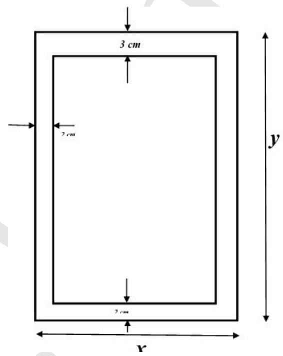
3.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.33 Las páginas de un libro deben tener cada una 600 cm^2 de superficie, con márgenes alrededor del texto de 2 cm en la parte inferior, 3 cm en la parte superior y 2 cm en cada lado. Calcule las dimensiones de la página que permiten la mayor superficie impresa posible.

Solución:

$xy = 600 \Longrightarrow y = \dfrac{600}{x}$
$S(x, y) = (x - 4)(y - 5) \Longrightarrow S(x) = \dfrac{-5x^2 + 620x - 2400}{x}$

$S'(x) = \dfrac{5(480 - x^2}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 21,91, \quad x = -21,91$ no vale



	$(0; 21,91)$	$(21,91; \infty)$
$S'(x)$	$+$	$-$
$S(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

Hay un máximo en el punto $x = 21,91$ cm $\Longrightarrow y = 27,39$ cm.

Problema 3.34 Considere la función $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x + 4}{1 - x}$.

a) Calcule su dominio y estudie su continuidad. ¿Tiene alguna asíntota vertical?

b) Observe que $f(-2) = -\frac{2}{3}$, $f(0) = 4$ y $f(2) = -10$. Razone si, a partir de esta información, puede deducirse que el intervalo $(-2, 0)$ contiene un cero de la función. ¿Puede deducirse para el intervalo $(0, 2)$? Encuentre un intervalo determinado por dos enteros consecutivos que contenga, como mínimo, un cero de esta función.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{2x^3 - 5x + 4}{1 - x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$
$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{2x^3 - 5x + 4}{1 - x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

En este caso la función es discontinua no evitable. Tiene un salto en $x = 1$ que sería una asíntota vertical. La función f es continua en $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

b) La función f es continua en el intervalo $(-2, 0)$, $f(-2) = -\frac{2}{3}$ y $f(0) = 4$, la función cambia de signo en los extremos del intervalo. Luego f cumple las condiciones del teorema de Balzano en el intervalo $(-2, 0) \Longrightarrow \exists c \in (-2, 0)/f(c) = 0$.
En el intervalo $(-2, -1)$ la función es continua y sus extremos son dos enteros consecutivos, además los valores de la función el los extremos del intervalo tienen distinto signo, $f(-2) = -\frac{2}{3}$ y $f(-1) = \frac{7}{2}$. Luego f cumple las condiciones del teorema de Balzano en el intervalo $(-2, -1) \Longrightarrow \exists c \in (-2, -1)/f(c) = 0$.

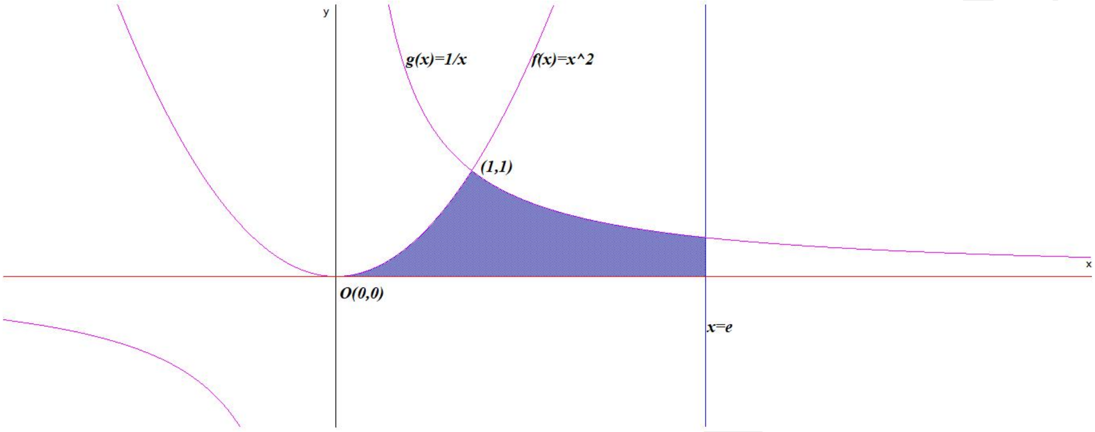
Problema 3.35 Considere las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, y la recta $x = e$.

a) Haga un esbozo de la región delimitada por sus gráficas y el eje de abscisas. Calcule las coordenadas del punto de intersección de $y = f(x)$ con $y = g(x)$.

b) Calcule el área de la región descrita en el apartado anterior.

Solución:

a) $x^2 = \frac{1}{x} \Longrightarrow \frac{x^3-1}{x} = 0 \Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow (1,1)$



b) $S = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \ln x]_1^e = \frac{4}{3}\,u^2.$

Problema 3.36 Quiere construirse un marco rectangular de madera que delimite un área de 2 m^2. Se sabe que el precio de la madera es de 7,5 euros/m para los lados horizontales y de 12,5 euros/m para los lados verticales. Determine las dimensiones que debe tener el rectángulo para que el coste total del marco sea el mínimo posible. ¿Cuál es este coste mínimo?

Solución:

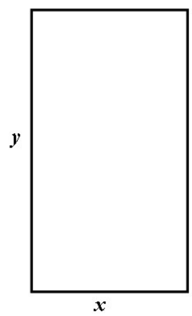
$xy = 2 \Longrightarrow y = \dfrac{2}{x}$

$P(x,y) = 2x\cdot 7,5 + 2y\cdot 12,5 \Longrightarrow$

$P(x) = 15x + \dfrac{50}{x} = \dfrac{15x^2+50}{x}$

$P'(x) = \dfrac{5(3x^2-10)}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 1,826, \quad x = -1,826$ no vale

	$(0;1,826)$	$(1,826;\infty)$
$P'(x)$	$-$	$+$
$P(x)$	decreciente	creciente



Hay un mínimo en el punto $x = 1,826$ m $\Longrightarrow y = 1,095$ m. Con un precio de $P(1,826) = 54,77$ euros.

Problema 3.37 Considere la función $f(x)$, que depende de los parámetros reales n y m y está definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x \le 0 \\ \frac{x^2}{4} + n & \text{si} \quad 0 < x \le 2 \\ \frac{3x}{2} + m & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

a) Calcule los valores de n y m para que la función sea continua en todo el conjunto de los números reales.

b) Para el caso $n = -4$ y $m = -6$, calcule el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \left(\dfrac{x^2}{4} + n\right) = n \end{array}\right. \Longrightarrow n = 1$$

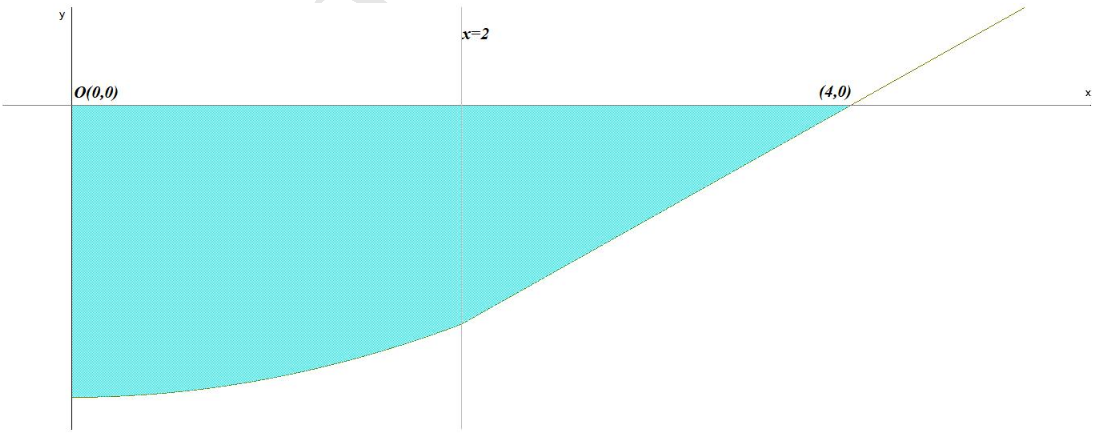
Continuidad en $x = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} \left(\dfrac{x^2}{4} + n\right) = 1 + n \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} \left(\dfrac{3x}{2} + m\right) = 3 + m \end{array}\right. \Longrightarrow 1+n = 3+m \Longrightarrow m = n-2 \Longrightarrow m = -1$$

b) Comprobamos la continuidad de la función en $x = 2$

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} \frac{x^2}{4} - 4 & \text{si} & 0 < x \leq 2 \\ \frac{3x}{2} - 6 & \text{si} & x \geq 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} \left(\dfrac{x^2}{4} - 4\right) = -3 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} \left(\dfrac{3x}{2} - 6\right) = -3 \\ f(2) = -3 \end{array}\right. \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 2$$



$$S_1 = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{4} - 4\right) dx = \left.\frac{x^3}{12} - 4x\right]_0^2 = -\frac{22}{3}$$

$$S_2 = \int_2^4 \left(\frac{3x}{2} - 6\right) dx = \left.\frac{3x^2}{4} - 6x\right]_2^4 = -3$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{22}{3} + 3 = \frac{31}{3}\ u^2$$

Problema 3.38 Se sabe que una función $f(x)$ es continua y derivable en todos los números reales, que tiene como segunda derivada $f''(x) = 6x$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ es horizontal.

a) Determine la abscisa de los puntos de inflexión de la función f y los intervalos de concavidad y convexidad. Justifique que la función f tiene un mínimo relativo en $x = 1$.

b) Sabiendo, además, que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = 5$, calcule la expresión de la función f.

Solución:

a) $f''(x) = 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

Hay un punto de inflexión en $x = 0$.
Como hay una tangente en $x = 1$ que es horizontal $f'(1) = 0 \Longrightarrow x = 1$ es un extremo y como $f''(1) = 6 > 0$ este extremo es un mínimo.

b) $f'(x) = \displaystyle\int 6x\,dx = 3x^2 + C$ y como $f'(1) = 0 \Longrightarrow 3 + C = 0 \Longrightarrow C = -3$. Luego $f'(x) = 3x^2 - 3$.

$$f(x) = \int (3x^2 - 3)\,dx = x^3 - 3x + C \text{ y } f(1) = 5 \Longrightarrow -2 + C = 5 \Longrightarrow C = 7$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 7$$

3.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.39 Considere las rectas $y = x$ e $y = 2x$, y la parábola $y = x^2$.

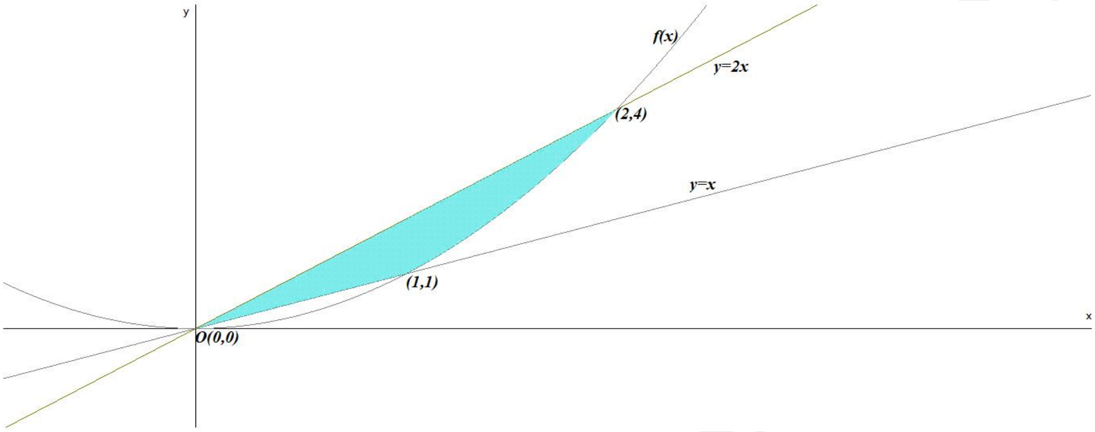
a) Calcule los puntos de intersección entre las gráficas de las diferentes funciones y haga un esbozo de la región delimitada por las gráficas.

b) Calcule el área de la región del apartado anterior.

Solución:

a) El punto común de corte de las dos recta y la parábola es el $(0, 0)$.
El punto de corte de la recta $y = x$ con la parábola $y = x^2$ sería $x = x^2 \Longrightarrow x^2 - x = x(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 1$, correspone a los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$.
El punto de corte de la recta $y = 2x$ con la parábola $y = x^2$ sería $2x = x^2 \Longrightarrow x^2 - 2x =$

$x(x-2)=0 \Longrightarrow x=0$ y $x=2$, correspone a los puntos $(0,0)$ y $(2,4)$.



b) $S=\displaystyle\int_0^1 (2x-x)\,dx+\int_1^2 (2x-x^2)\,dx=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2 (2x-x^2)\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left.x^2-\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{7}{6}\ u^2$

Problema 3.40 Considere la función $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica en aquellos puntos en los que la recta tangente es horizontal.

b) Calcule las coordenadas del punto de la gráfica de la función $f(x)$ en que la pendiente de la recta tangente es máxima.

Solución:

a) $f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}=0 \Longrightarrow 2x=0 \Longrightarrow x=0$

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

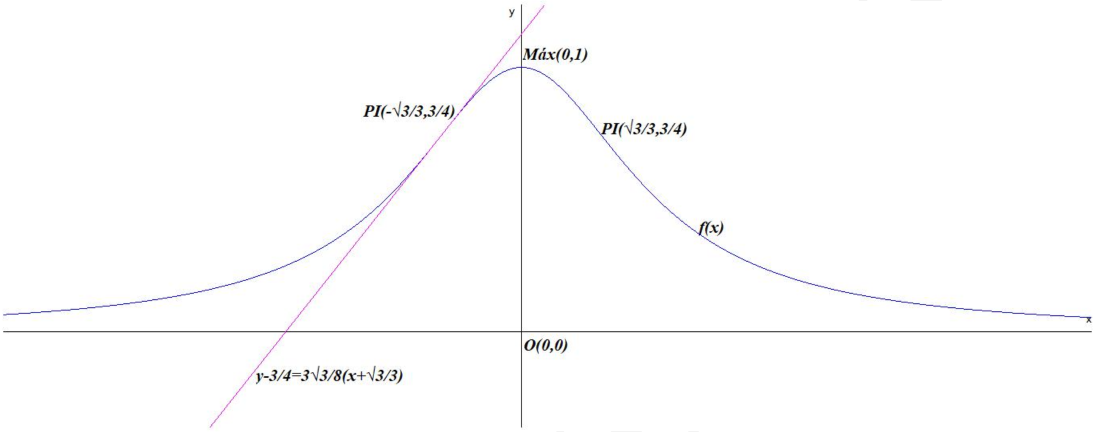
Hay un máximo en $x=0$, que corresponde al punto $(0,1)$ y la tangente a esta gráfica en este punto será horizontal de ecuación $y=1$.

b) $m(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+1)} \Longrightarrow m'(x)=\dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}=0 \Longrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

	$(-\infty,-\sqrt{3}/3)$	$(-\sqrt{3}/3,\sqrt{3}/3)$	$(\sqrt{3}/3,\infty)$
$m'(x)$	$+$	$-$	$+$
$m(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función m es creciente en el intervalo $(-\infty,-\sqrt{3}/3)\cup(\sqrt{3}/3,\infty)$ y decreciente en $(-\sqrt{3}/3,\sqrt{3}/3)$, por lo que tiene un máximo en $x=-\sqrt{3}/3$ y un mínimo en $x=\sqrt{3}/3$.

La pendiente máxima será de $m\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ y corresponde al punto $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{3}{4}\right)$



Problema 3.41 Considere la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

a) Calcule el dominio de la función f, los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

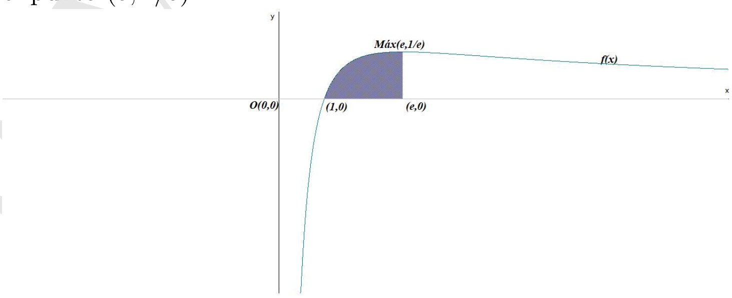
b) Calcule el área de la región del plano determinada por la gráfica de la función f, las rectas $x=1$ y $x=e$, y el eje de abscisas.

Solución:

a) $\text{Dom}(f)=(0,\infty)$, no tiene punto de corte con el eje de ordenanadas y con el eje de abcisas: $\dfrac{\ln x}{x}=0\Longrightarrow x=1\Longrightarrow (1,0)$.
$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0\Longrightarrow 1-\ln x=0\Longrightarrow x=e$

	$(0,e)$	(e,∞)
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(0,e)$ y decreciente en (e,∞), con un máximo local en el punto $(e,1/e)$.



b) $F(x) = \int \frac{\ln x}{x}\, dx = \left[\begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\ln x)^2}{2}$

$$S = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx = F(1) - F(e) = \frac{1}{2}\ u^2$$

3.9. País Vasco

3.9.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

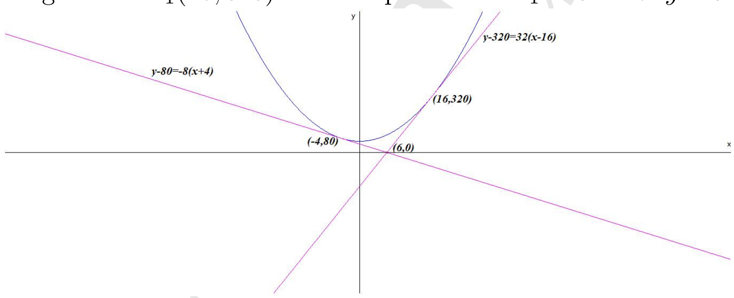
Problema 3.42 Dada la función $f(x) = x^2 + 64$ y el punto exterior a su gráfica $P(6, 0)$, encontrar la recta o rectas tangentes a f que pasen por P.

Solución:
Lo primero que tenemos que encontrar son los puntos de la función en los que su tangente pasa por el punto exterior $P(6, 0)$. Sea $(a, f(a)) = (a, a^2 + 64)$ el punto de tangencia que buscamos, si la recta tangente tiene que pasar por $P(6, 0)$ la pendiente de esta recta será: $m = \frac{a^2 + 64}{a - 6}$. Por otra parte calculamos la pediente con la derivada de la función $f'(x) = 2x \Longrightarrow m = f'(a) = 2a$. Luego

$$\frac{a^2 + 64}{a - 6} = 2a \Longrightarrow a^2 - 12a - 64 = 0 \Longrightarrow a = -4,\ \ a = 16$$

$$P_1(-4, 80),\ \ P_2(16, 320)$$

La tangente en $P_1(-4, 80)$ tiene de pendiente $m_1 = -8 \Longrightarrow y - 80 = -8(x + 4)$.
La tangente en $P_1(16, 320)$ tiene de pendiente $m_1 = 32 \Longrightarrow y - 320 = 32(x - 16)$.



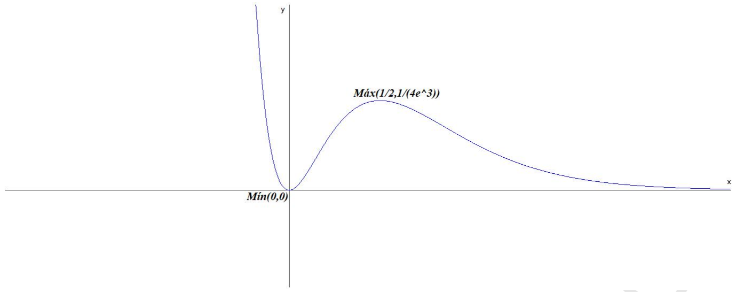
Problema 3.43 Calcula $\int xe^{-4x}\, dx$, explicando el proceso utilizado para dicho cálculo.

Solución:
$\int xe^{-4x}\, dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{-4x}dx \Longrightarrow v = -\frac{1}{4}e^{-4x} \end{array} \right] = -\frac{xe^{-4x}}{4} + \frac{1}{4}\int e^{-4x}\, dx = -\frac{xe^{-4x}}{4} - \frac{e^{-4x}}{16} +$
$C = -e^{-4x}\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{16}\right) + C = -e^{-4x}\left(\frac{4x + 1}{16}\right) + C$

Problema 3.44 Sea f la función $f(x) = x^2 e^{-4x}$. Calcular la primera y la segunda derivada de f. Hallar los máximos y mínimos de f.

Solución:
$f'(x) = 2xe^{-4x} - 4x^2 e^{-4x} = e^{-4x}(2x - 4x^2) = 2xe^{-4x}(1 - 2x)$
$f''(x) = -4e^{-4x}(2x - 4x^2) + e^{-4x}(2 - 8x) = 2e^{-4x}(8x^2 - 8x + 1)$
$f'(x) = 2xe^{-4x}(1 - 2x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \frac{1}{2}$

$f''(0) = 2 > 0 \Longrightarrow$ en $(0,0)$ hay un mínimo local.
$f''(1/2) = -\frac{2}{e^2} < 0 \Longrightarrow$ en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4e^3}\right)$ hay un máximo local.

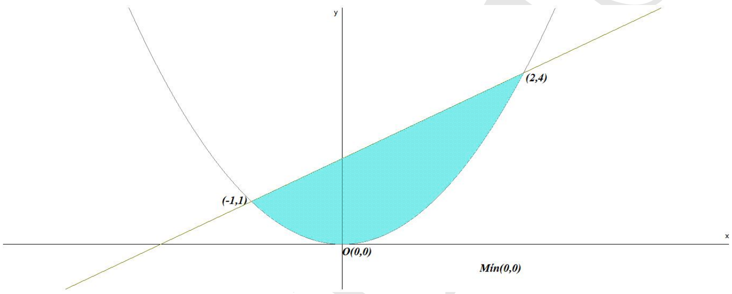


Problema 3.45 Representar el recinto finito del plano limitado por la recta $y = x + 2$ y por la parábola $y = x^2$. Calcular su área.

Solución:

$$x + 2 = x^2 \Longrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -1, \ \ x = 2$$

$$S = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\, dx = 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\bigg]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}\ u^2$$



3.9.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.46 Sea f la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$.

a) Obtener los valores de A, B y C para que su gráfica contenga al punto $P(0,1)$ y para que f tenga un mínimo local en el punto $Q(2,0)$.

b) ¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos locales?.

Solución:

a) $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$

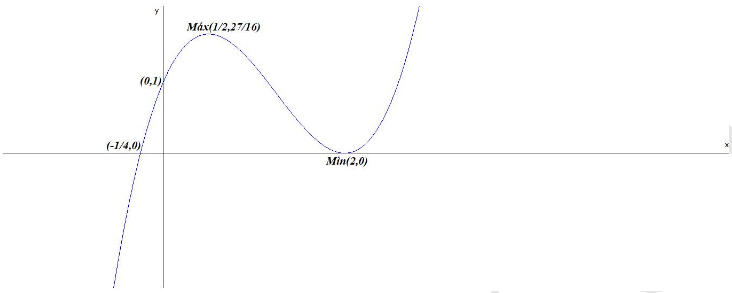
$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 1 \Longrightarrow C = 1 \\ f(2) = 0 \Longrightarrow 8 + 4A + 2B + C = 0 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12 + 4A + B = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = -15/4 \\ B = 3 \\ C = 1 \end{array}\right.$$

$$f(x) = x^3 - \frac{15}{4}x^2 + 3x + 1$$

b) $f'(x) = \dfrac{6x^2 - 15x + 6}{2} = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $x = 1/2$

	$(-\infty, 1/2)$	$(1/2, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

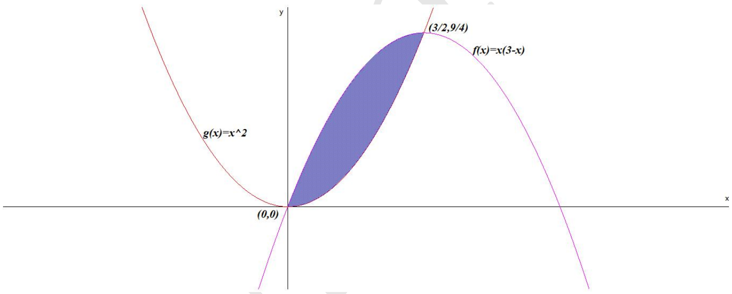
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 1/2) \cup (2, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(1/2, 2)$. Con un máximo en el punto $(1/2, 27/16)$ y un mínimo en el punto $(2, 0)$.



Problema 3.47 Sea R el recinto del plano limitado por las curvas $y = x(3 - x)$ y por $y = x^2$. Dibujar R y calcular su área.

Solución:

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow x(3 - x) = x^2 \Longrightarrow 3x - 2x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0,\ \ x = \frac{3}{2}$$

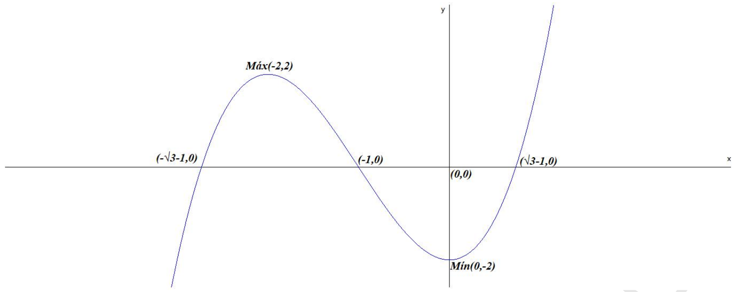


$$S = \int_0^{3/2} (3x - x^2 - x^2)\, dx = \int_0^{3/2} (3x - 2x^2)\, dx = \left.\frac{3x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^{3/2} = \frac{9}{8}\ u^2$$

Problema 3.48 Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$. Representar f.
Solución:
Puntos de corte: $(0, -2)$, $(-1, 0)$, $(-1 + \sqrt{3}, 0)$ y $(-1 + \sqrt{3}, 0)$.
$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -2$.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-2, 0)$. Con un máximo en el punto $(-2, 2)$ y un mínimo en el punto $(0, -2)$.



Problema 3.49 Calcular $\displaystyle\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)}\, dx$ explicando el método seguido para dicho cálculo.

Solución:

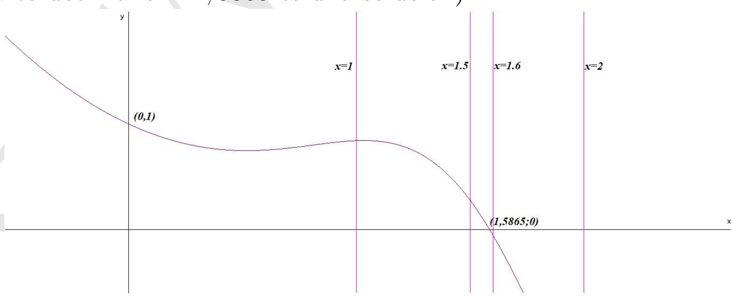
$$\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)}\, dx = \left[\begin{array}{c} \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)} \\ 8x+7 = A(x+3) + B(x+1) \\ x = -3 \Longrightarrow -17 = -2B \Longrightarrow B = 17/2 \\ x = -1 \Longrightarrow -1 = 2A \Longrightarrow A = -1/2 \\ \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} = \frac{-1/2}{x+1} + \frac{17/2}{x+3} \end{array} \right] =$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\, dx + \frac{17}{2}\int \frac{1}{x+3}\, dx = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{17}{2}\ln|x+3| + C$$

3.10. Extremadura

3.10.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.50 Demuestre que la ecuación $\sin(x^2) = x - 1$ tiene una solución positiva. Razone la respuesta, exponiendo el teorema justifique la solución.
Solución:
Sea la función $f(x) = \sin(x^2) - x + 1$ función continua en $\mathbb{R}$, y $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ por lo que la función cumple las condiciones del teorema de Bolzano y $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$. Si cogemos un intervalo más pequeño $(1, 2)$ tendríamos $f(1) = 0,8415$ y $f(2) = -1,7568$ y por el mismo teorema podemos concluir que hay una solución positiva en este intervalo. (Ajustando a un cuarto decimal $c = 1,5865$ es una solución)



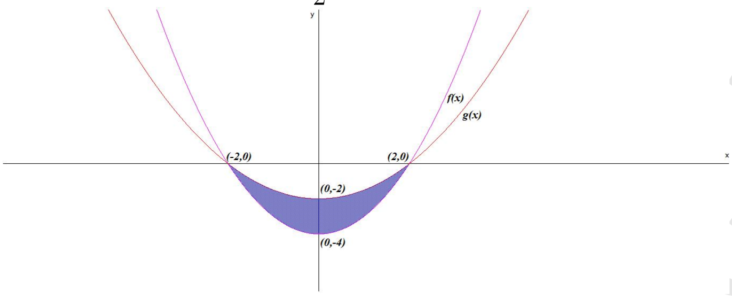
Problema 3.51 Sean las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2$

a) Represente la región plana encerrada por las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

b) Calcule el área de la región anterior.

Solución:

a) $f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 - 4 = \dfrac{1}{2}x^2 - 2 \Longrightarrow x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$

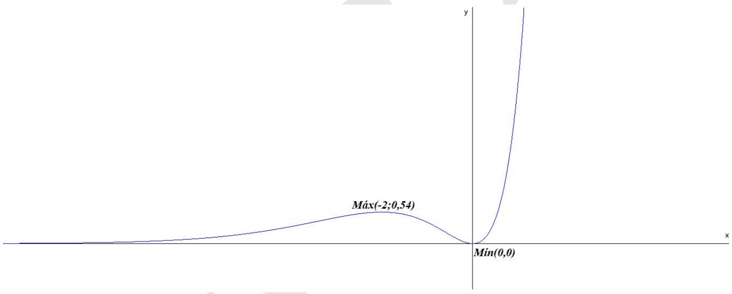


b) $S = \displaystyle\int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{2}x^2 - 2 - x^2 + 4\right) dx = \int_{-2}^{2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2\right) dx = -\frac{x^3}{6} + 2x\Big]_{-2}^{2} = \frac{16}{3}\ u^2$

Problema 3.52 Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) de la función $f(x) = x^2e^x$.
Solución:
$f(x) = x^2e^x \Longrightarrow f'(x) = (x^2 + 2x)e^x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -2$.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-2, 0)$. Con un máximo en el punto $\left(-2, \dfrac{4}{e^2}\right)$ y un mínimo en el punto $(0, 0)$.



Problema 3.53 Resuelve la integral

$$\int \frac{5x + 3}{x^2 + 2x - 3}\, dx$$

Solución:

$$\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}\, dx = \left[\begin{array}{c} x^2 + 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 1,\ \ x = -3 \\ \frac{5x+3}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)} \\ 5x + 3 = A(x+3) + B(x-1) \\ x = -3 \Longrightarrow -12 = -4B \Longrightarrow B = 3 \\ x = 1 \Longrightarrow 8 = 4A \Longrightarrow A = 2 \\ \frac{5x+3}{x^2+2x-3} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+3} \end{array}\right] =$$

$$2\int \frac{1}{x-1}\,dx + 3\int \frac{1}{x+3}\,dx = 2\ln|x-1| + 3\ln|x+3| + C$$

3.10.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.54 Sea la función $f(x) = \left\{\begin{array}{lll} e^{-x} & \text{si} & x < 0 \\ e^{x} & \text{si} & x \geq 0 \end{array}\right.$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.

b) Estudie si existe un extremo relativo de $f(x)$ en $x = 0$.

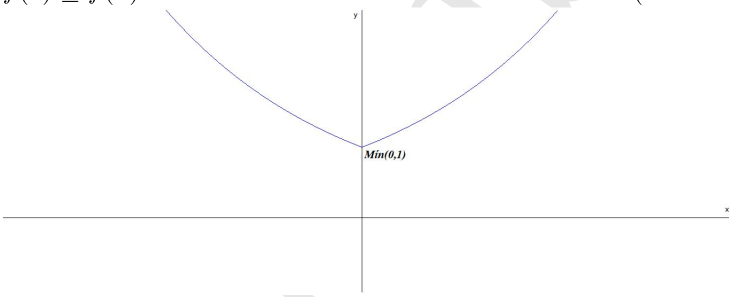
Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} e^{-x} = 1 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} e^{x} = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 0$$

$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} -e^{-x} & \text{si} & x < 0 \\ e^{x} & \text{si} & x \geq 0 \end{array}\right.$, $f'(0^-) = -1$ y $f'(0^+) = 1$, luego f no es derivable en $x = 0$.

b) $f(0) \leq f(x)\ \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow x = 0$ es un extremo relativo (un mínimo).



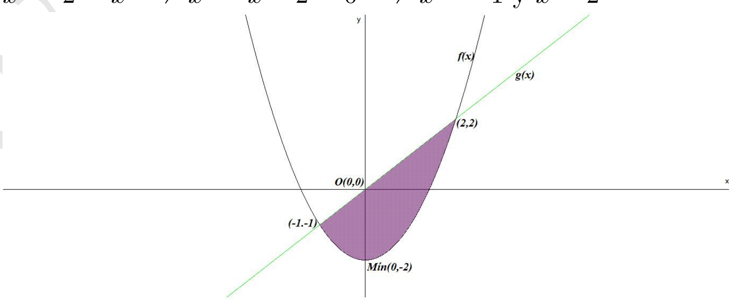
Problema 3.55 Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = x$.

a) Represente la región plana encerrada por $f(x)$ y $g(x)$.

b) Calcule el área de la región anterior.

Solución:

a) $x^2 - 2 = x \Longrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 2$



b) $S = \int_{-1}^{2} (x - x^2 + 2)\, dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\Big]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}\; u^2$

Problema 3.56 Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

a) Estudie las asíntotas, la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de $f(x)$.

b) Represente la gráfica de $f(x)$ utilizando el apartado anterior.

Solución:

a) Es una función par, con $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ y punto de corte en $(0, 0)$.
Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$x = -1$

$$\lim_{x \longrightarrow -1} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:** $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1$$

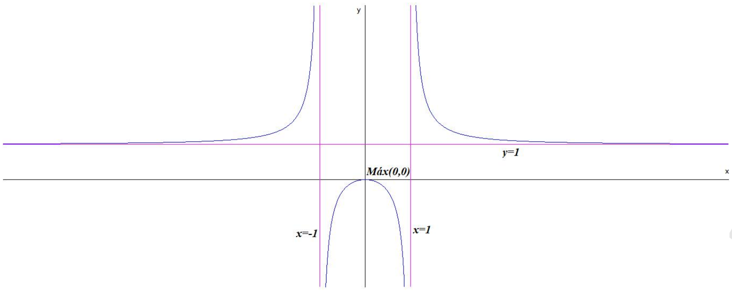
- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

Monotonía: $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.
La función es decreciente en el intervalo $(0, 1) \cup (1, \infty)$.
La función tiene un máximo en el punto $(0, 0)$.

b) Representación gráfica:



Problema 3.57 Calcule una primitiva $F(x)$ de la función
$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-1}$$

Solución:

$$\int \frac{x-3}{x^2-1}\,dx = \left[\begin{array}{c} x^2-1=0 \Longrightarrow x=1,\ \ x=-1 \\ \frac{x-3}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ x-3 = A(x+1)+B(x-1) \\ x=-1 \Longrightarrow -4=-2B \Longrightarrow B=2 \\ x=1 \Longrightarrow -2=2A \Longrightarrow A=-1 \\ \frac{x-3}{x^2-1} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x+1} \end{array}\right] =$$

$$-\int \frac{1}{x-1}\,dx + 2\int \frac{1}{x+1}\,dx = -\ln|x-1| + 2\ln|x+1| + C$$

3.11. Madrid

3.11.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.58 Dada $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$, donde ln denota el logaritmo neperiano, definida para $x > 0$, se pide:

a) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$.

b) Encontrar un punto de la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.

c) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$ y $x = e$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$

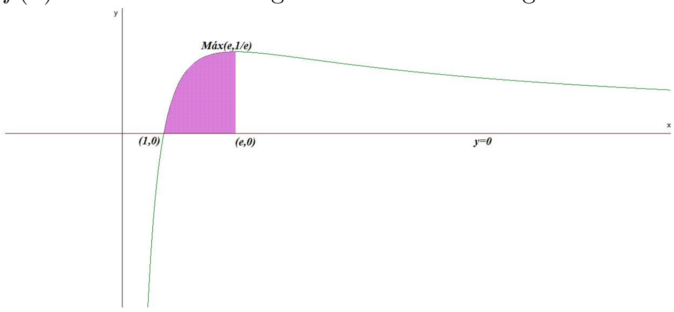
$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \Longrightarrow y = 0 \text{ por la derecha.}$$

b) $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} = 0 \Longrightarrow 1 - \ln x = 0 \Longrightarrow x = e$

	$(0, e)$	(e, ∞)
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función crece en el intervalo $(0, e)$ y decrece en el intervalo $(e, +\infty)$. Luego presenta un máximo relativo en el punto $(e, 1/e)$.

c) $f(x) = 0 \Longrightarrow x = 1$ luego el intervalo de integración sería el $[1, e]$.



Aunque se trata de una integral inmediata dejo la solución por partes por las características de su resolución.

$$F(x) = \int \frac{\ln x}{x}\, dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{1}{x} dx \Longrightarrow v = \ln x \end{array} \right] = (\ln x)^2 - \int \frac{1}{x}\, dx \Longrightarrow$$

$$2\int \frac{\ln x}{x}\, dx = (\ln x)^2 \Longrightarrow F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

$$S = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx = F(e) - F(1) = \frac{1}{2}\ u^2$$

Problema 3.59 Dada la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$, se pide:

a) Determinar su dominio.

b) Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) Calcular los límites laterales. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{f(x)}{x}$ y $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$

Solución:

a) $4x^2 - x^4 = x^2(2 - x)(2 + x) = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 2$ y $x = -2$.

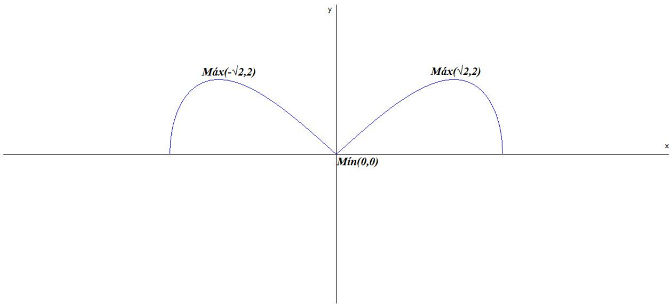
$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$-$	$+$	$+$	$-$

$\text{Dom}(f) = [-2, 2]$

b) $f'(x) = \dfrac{2x(2 - x^2)}{\sqrt{4x^2 - x^4}} = 0 \Longrightarrow x(2 - x^2) = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ y $x = 0$

	$(-2, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, 0)$	$(0, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, 2)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

Luego f decrece en el intevalo $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, 2)$ y crece en el intervalo $(-2, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$. Tendría un mínimo en el punto $(0, 0)$ y dos máximos en los puntos $(-\sqrt{2}, 2)$ y $(\sqrt{2}, 2)$.



c) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{\sqrt{4x^2-x^4}}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = [t=-x] =$

$\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} \dfrac{t\sqrt{4-t^2}}{-t} = \lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} \dfrac{\sqrt{4-t^2}}{-1} = -2$

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{\sqrt{4x^2-x^4}}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{x} =$

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \sqrt{4-x^2} = 2$

3.11.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.60 Se pide:

a) Sean f y g dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos:

$$f(1)=1,\quad f'(1)=2,\quad g(1)=3,\quad g'(1)=4$$

Dada $h(x)=f((x+1)^2)$, use la regla de la cadena para calcular $h'(0)$. Dada $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, calcule $k'(1)$.

b) Calcule la integral $\displaystyle\int (\sin x)^4(\cos x)^3\,dx$. (Se puede usar el cambio de variables $t=\sin x$.)

Solución:

a) $h(x)=f((x+1)^2) \Longrightarrow h'(x)=2(x+1)f'((x+1)^2) \Longrightarrow$

$$h'(0)=2f'(1)=4$$

$$k(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow k'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \Longrightarrow$$

$$k'(1)=\frac{f'(1)g(1)-f(1)g'(1)}{(g(1))^2}=\frac{2\cdot 3-1\cdot 4}{3^2}=\frac{2}{9}$$

b)

$$\int (\sin x)^4(\cos x)^3\,dx = \left[\begin{array}{c} t=\sin x \\ dt=\cos x\,dx \\ dx=\frac{dt}{\cos x}\end{array}\right] = \int t^4\cos^3 x\,\frac{dt}{\cos x} =$$

$$\int t^4 \cos^2 x\, dt = \int t^4(1-\sin^2 x)\, dt = \int t^4(1-t^2)\, dt =$$

$$\int (t^4 - t^6)\, dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C$$

Problema 3.61 Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ tal que $F'(t) = t^2(10-t)$

a) Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función $F(t)$.

b) Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.

c) Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.

Solución:

a) $F(t) = \displaystyle\int (10t^2 - t^3)\, dt = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + C$

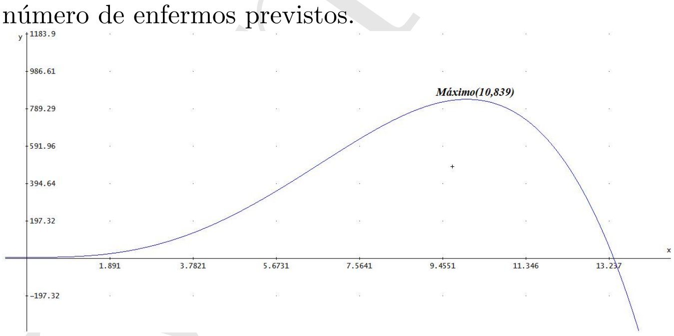
$F(0) = 6 \Longrightarrow C = 6 \Longrightarrow F(x) = \dfrac{10t^3}{3} - \dfrac{t^4}{4} + 6$

b) $F'(t) = t^2(10-t) = 0 \Longrightarrow t = 0$ y $t = 10$

.

	$(0,10)$	$(10,\infty)$
$F'(t)$	$+$	$-$
$F(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

Luego f crece en el intevalo $(0,10)$ y crece en el intervalo $(10,+\infty)$. Tendría un máximo en el punto $(10; 839,33)$. El máximo de enfermos se encuentra en el dia 10 y serán sobre 839 el número de enfermos previstos.



c) la función F es continua y ademá cumple: $F(13) = \frac{2269}{12}$ y $F(14) = -\frac{1354}{3}$ por el teorema de Bolzano $\exists\, c \in (13,14)/F(c) = 0$, Es decir, entre 13 y 14 días.

3.12. Valencia

3.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.62 Se considera la función $f(x) = xe^{-x^2}$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

b) La representación gráfica de la curva $y = f(x)$.

c) El valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo [0,1] a la función $g(x) = f(x) + ax$.

d) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)\,dx$ e $\int xe^{-x}\,dx$

Solución:

a) $f(x) = \dfrac{x}{e^{x^2}}$, $f(0) = 0$ y $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

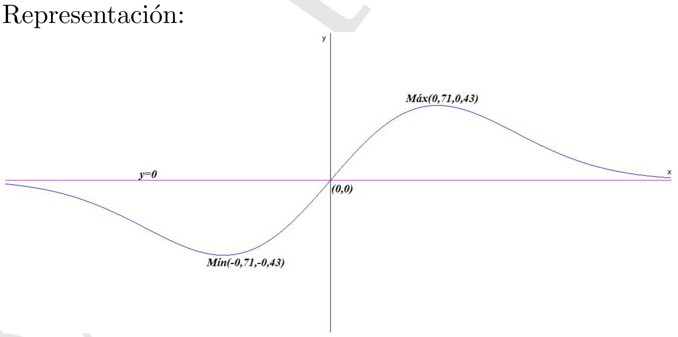
- Asíntotas verticales no hay, el denominador nunca se anula, horizontales en $y = 0$ ya que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x}{e^{x^2}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{1}{2xe^{x^2}} = 0$ y oblicuas no hay al haber horizontales.
- $f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ y creciente en el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $(-0,71, -0,43)$ y un máximo relativo en $(0,71, 0,43)$.

b) La función $g(x) = f(x) + ax$ es suma de funciones continuas y derivables y, por tanto, es continua y derivable. Por otra parte $g(0) = f(0) = 0$ y $g(1) = f(1) + a = e^{-1} + a$. Para que se cumplan las condiciones del teorema de Rolle sólo falta que $g(0) = g(1) \Longrightarrow e^{-1} + a = 0 \Longrightarrow a = -\dfrac{1}{e}$

c) Representación:



d)

$$\int f(x)\,dx = \int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

$$\int xe^{-x}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}\,dx \Longrightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right] = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx =$$

$$-xe^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C$$

Problema 3.63 Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son $(0,0)$ y $(250,0)$, respectivamente, siendo 1 km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1, 0) y (0, 1). El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.

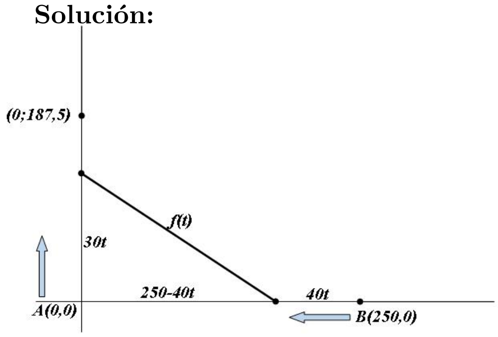
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La distancia $f(t)$ entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse.

b) El tiempo T que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f a lo largo del trayecto.

c) Los valores de t para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima.

Solución:



a) $f(t) = \sqrt{(250-40t)^2 + (30t)^2} = 50\sqrt{t^2 - 8t + 25}$

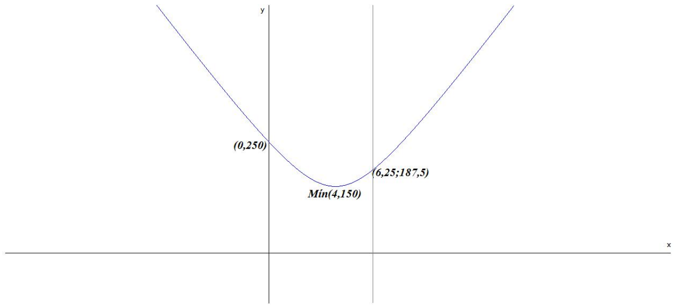
b) $T = \dfrac{e}{v} = \dfrac{250}{40} = 6,25$ horas. O bien $T = \dfrac{e}{v} = \dfrac{187,5}{30} = 6,25$ horas.

c) La función f estaría definida en el intevalo $[0, 25/4]$, tendríamos $f(0) = 250$ y $f(25/4) = 187,5$.

$$f'(t) = 50\frac{2t-8}{2\sqrt{t^2-8t+25}} = 0 \Longrightarrow 2t - 8 = 0 \Longrightarrow t = 4$$

	$(0,4)$	$(4,25/4)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(0,4)$ y creciente en el intervalo $\left(4, \frac{25}{4}\right)$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $(4, 150)$ y tendría el máximo en $(0, 250)$ que serían las posiciones iniciales de los móviles.



3.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.64 Se da la función real h definida por $h(x) = \dfrac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio de la función h Los límites $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} h(x)$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} h(x)$.

b) La asíntota de la curva $y = h(x)$.

c) La primitiva de la función h (es decir, $\int h(x)\,dx$) y el área de la superficie encerrada entre las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$ y la curva $y = h(x)$.

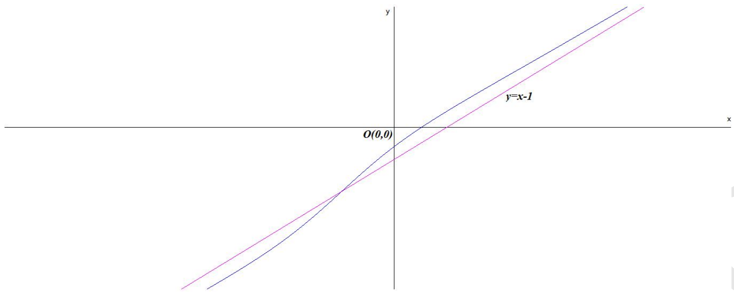
Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, el denominador no se anula nunca.
$\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} x = +\infty$
$\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} = -\dfrac{3}{5}$

b) Asíntotas:

- **Verticales:** No hay
- **Horizontales:** No hay
- **Oblicuas:** $y = mx + n$
  $m = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{x^3+x^2+5x-3}{x^3+2x^2+5x} = 1$
  $n = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} - x\right) =$
  $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{x^3+x^2+5x-3-x^3-2x^2-5x}{x^2+2x+5}\right) = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{-x^2-3}{x^2+2x+5} = -1$

$$y = x - 1$$



c) $h(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} = x - 1 + \dfrac{2x+2}{x^2+2x+5}$. Luego:

$$S = \int_1^5 h(x)\,dx = \int_1^5 \left(x - 1 + \frac{2x+2}{x^2+2x+5} \right) dx = \left. \frac{x^2}{2} - x + \ln|x^2+2x+5| \right]_1^5 =$$

$$8 + \ln 5\ u^2 \simeq 9{,}61\ u^2$$

Problema 3.65 Un proyectil está unido al punto $(0,2)$ por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2,0)$ y $(2,0)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La función de la variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x, 4-x^2)$ de la curva $y = 4 - x^2$ y el punto $(0,2)$.

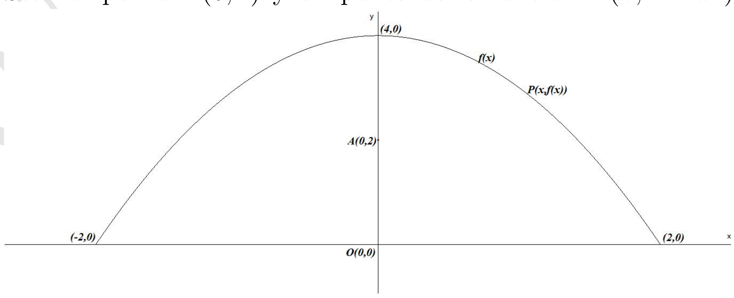
b) Los puntos de la curva $y = 4-x^2$ a mayor distancia absoluta del punto $(0,2)$ para $-2 \le x \le 2$.

c) Los puntos de la curva $y = 4-x^2$ a menor distancia absoluta del punto $(0,2)$ para $-2 \le x \le 2$.

d) El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elastica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - |x|$ cuando $-2 \le x \le 2$.

Solución:

a) Sean el punto $A(0,2)$ y un punto de la función $P(x, 4-x^2)$. LLamamos $d(x) = d(AP)$:



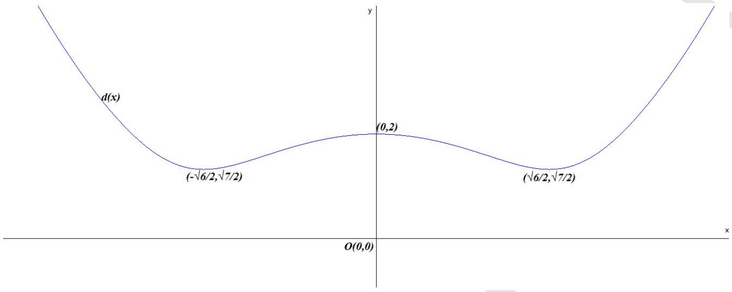
$$d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (4-x^2-2)^2} = \sqrt{x^4-3x^2+4}$$

b)

$$d'(x) = \frac{x(2x^2-3)}{\sqrt{x^4-3x^2+4}} = 0 \Longrightarrow x=0,\ \ x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$$

	$(-\infty, -\sqrt{6}/2)$	$(-\sqrt{6}/2, 0)$	$(0, \sqrt{6}/2)$	$(\sqrt{6}/2, \infty)$
$d'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$d(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{6}/2) \cup (0, \sqrt{6}/2)$ y creciente en el intervalo $(-\sqrt{6}/2, 0) \cup (\sqrt{6}/2, \infty)$. La función presenta dos mínimos relativo en los puntos $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ y tendría el máximo en $(0, 2)$.

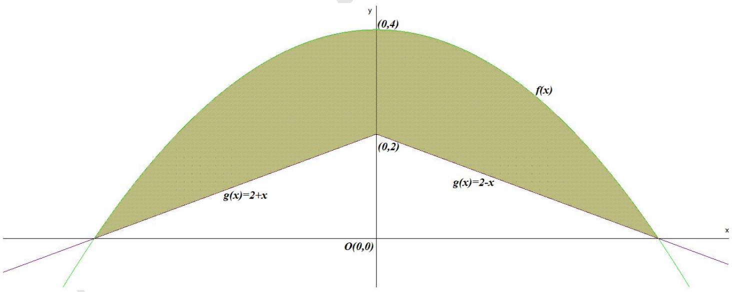


c) Contestado en el apartado anterior.

d)

$$S = \int_{-2}^{0} (4-x^2-2-x)\,dx + \int_{0}^{2} (4-x^2-2+x)\,dx = \int_{-2}^{0} (-x^2-x+2)\,dx + \int_{0}^{2} (-x^2+x+2)\,dx =$$

$$-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\Big]_{-2}^{0} + -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\Big]_{-2}^{0} = \frac{10}{3} + \frac{10}{3} = \frac{20}{3}\ u^2$$



3.13. La Rioja

3.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.66 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si} \quad x \le 0 \\ -x^2+ax+b & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

con a y b números reales.

a) Halla a y b para que f sea contínua y derivable en $x = 0$.

b) Para los valores anteriores de a y b analiza si f tiene un extremo relativo en $x = 0$.

c) Halla el área encerrada por la función y el eje OX en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 1\right]$.

Solución:

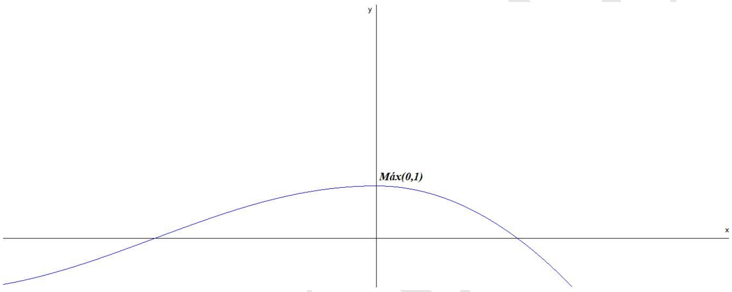
a) Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \cos x = 1 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} (-x^2 + ax + b) = b \end{array}\right. \Longrightarrow b = 1$$

Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} -\sin x & \text{si} & x \le 0 \\ -2x^2 + a & \text{si} & x \ge 0 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = a \end{array}\right. \Longrightarrow a = 0$$

b) $f(x) = \left\{\begin{array}{lll} \cos x & \text{si} & x \le 0 \\ -x^2 + 1 & \text{si} & x \ge 0 \end{array}\right.$ Tenemos $f(0) = 1 \ge f(x)\ \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ en $(0, 1)$ hay un máximo.



c) Hay que calcular dos áreas:
S_1 en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$:

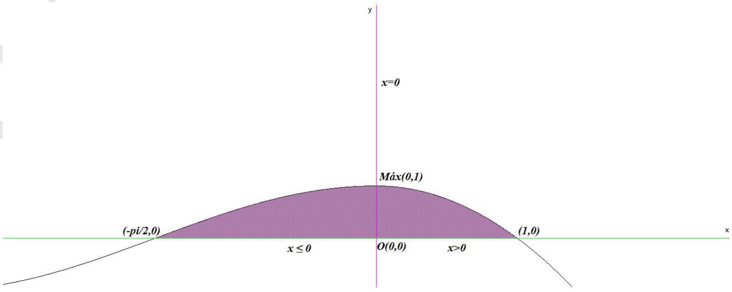
$$S_1 = \int_{-\pi/2}^{0} \cos x\, dx = -\sin x\big]_{-\pi/2}^{0} = 1$$

S_2 en el intervalo $[0, 1]$:

$$S_2 = \int_0^1 (-x^2 + 1)\, dx = -\frac{x^3}{3} + x\bigg]_0^1 = \frac{2}{3}\ u^2$$

Luego:

$$S = S_1 + S_2 = 1 + \frac{2}{3} + 4 = \frac{5}{3}\ u^2$$



3.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.67 Sea la función

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1}$$

a) Analiza la continuidad y derivabilidad de la función f.

b) Razona si se puede aplicar, o no, el teorema de Rolle en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. En caso afirmativo, calcula el valor de $c \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a que se refiere el teorema de Rolle.

c) Halla el área encerrada por f y el eje de abcisas en el intervalo $\left[\frac{3}{2}, 4\right]$.

Solución:

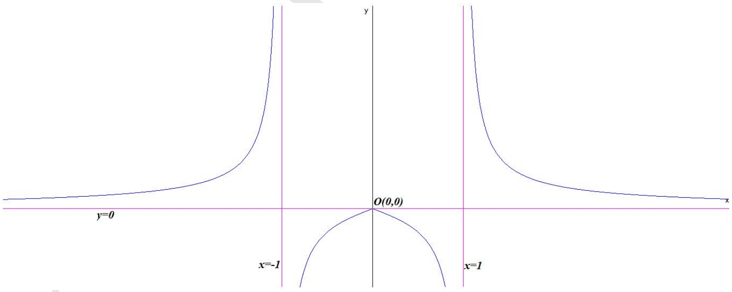
a) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 - 1} = \begin{cases} \dfrac{-x}{x^2 - 1} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{x}{x^2 - 1} & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$

Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{-x}{x^2 - 1} = 0 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0 \\ f(0) = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 0$$

Derivabilidad en $x = 0$:

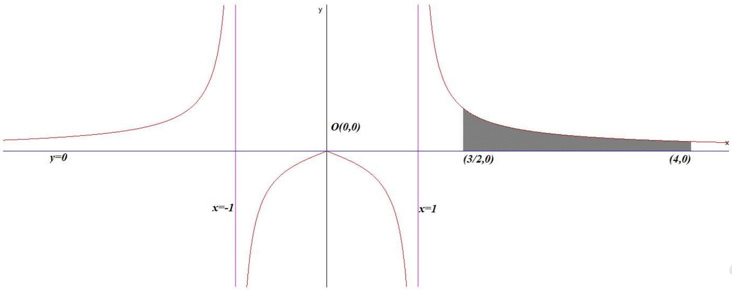
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} & \text{si} \quad x \le 0 \\ -\dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(0^-) = 1 \\ f'(0^+) = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow f \text{ no es derivable en } x = 0$$



b) Para poder aplicar el teorema de Rolle la función debe ser continua y derivable, es continua pero no derivable en $x = 0$ que pertenece al intervalo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, luego no se puede aplicar el teorema de Rolle.

c)

$$S = \int_{3/2}^{4} \frac{x}{x^2 - 1}\, dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| \Big]_{3/2}^{4} = \frac{\ln 12}{2} \simeq 1,24\ u^2$$



3.14. Murcia

3.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.68 Se pide:

a) Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int x^2 \cos x \, dx$

b) Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi$, y la gráfica de la función $f(x) = x^2 \cos x$.

Solución:

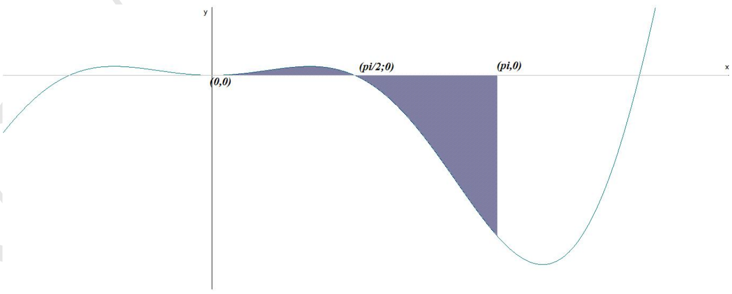
a) $\displaystyle\int x^2 \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \Longrightarrow du = 2xdx \\ dv = \cos x dx \Longrightarrow v = \sin x \end{array} \right] = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx =$ $\left[\begin{array}{l} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = \sin x dx \Longrightarrow v = -\cos x \end{array} \right] = x^2 \sin x - 2\left(-x\cos x + \int \cos x \, dx\right) = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C = (x^2 - 2)\sin x + 2x\cos x + C$

b) La función $f(x) = x^2 \cos x = 0 \Longrightarrow x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$. Uno de los puntos de corte de la función f con el eje OX se encuentra dentro del intervalo de integración, luego habrá dos áreas a calcular, una S_1 en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y otra S_2 en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Sea $F(x) = \displaystyle\int x^2 \cos x \, dx = (x^2 - 2)\sin x + 2x\cos x$ y tenemos:

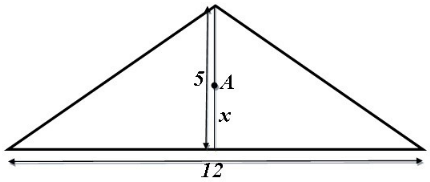
$$S_1 = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos x \, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$S_2 = \int_{\pi/2}^{\pi} x^2 \cos x \, dx = F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4} - 2\pi + 2$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{\pi^2}{4} - 2 + \frac{\pi^2}{4} + 2\pi - 2 = \frac{\pi^2 + 4\pi - 8}{2} \simeq 7,22 \ u^2$$



Problema 3.69 Considere un triángulo isósceles cuya base de 12 cm es el lado desigual y cuya altura es de 5 cm. Se quiere determinar un punto A situado sobre la altura a una distancia x de la base de manera que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo sea mínima. Observe la figura:



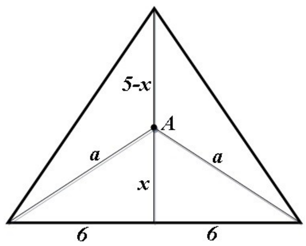
a) Demuestre que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo viene dada por la expresión $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2+36}$.

b) Calcule el valor de x para que la suma de las distancias sea mínima.

c) Calcule dicha cantidad mínima.

Solución:

a) La función suma de distancia de A a los vértices es: $f(x) = 2a+5-x = 5-x+2\sqrt{x^2+36}$ según se deduce del dibujo.



b) $f'(x) = \dfrac{2x - \sqrt{x^2+36}}{\sqrt{x^2+36}} = 0 \Longrightarrow x = 2\sqrt{3}$

	$(0, 2\sqrt{3})$	$(2\sqrt{3}, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(0, 2\sqrt{3})$ y creciente en el intervalo $(2\sqrt{3}, \infty)$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $(2\sqrt{3}, 5+6\sqrt{3}) = (3,46; 15,39)$.

c) $f(2\sqrt{3}) = 5 + 6\sqrt{3} \simeq 15,39$ cm

3.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.70 Se pide:

a) Calcule los extremos relativos (máximos y mínimos) de $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{e^x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$. Determine también los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

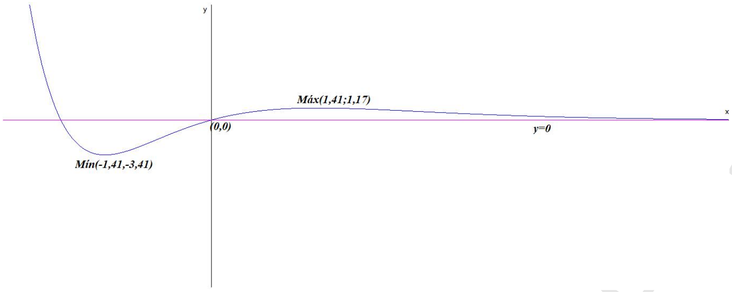
b) Calcule $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} \right)$

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{2-x^2}{e^x} = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$ y creciente en el intervalo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $(-1,41, -3,41)$ y un máximo en $(1,41; 1,17)$.



b) $\displaystyle \lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$
$\displaystyle \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x} = \frac{1}{2}$

Problema 3.71 Se pide:

a) Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$

b) Determine la primitiva de $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$ que pasa por el punto $(1,2)$.

c) Calcule el límite $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x}$

Solución:

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx = \begin{bmatrix} t=\sqrt{x} \Longrightarrow x=t^2 \\ dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ dx=2tdt \end{bmatrix} = \int \frac{t}{1+t^2}\,2tdt = 2\int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt =$
$\displaystyle 2\left(\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt\right) = 2(t-\arctan t)+C = 2(\sqrt{x}-\arctan\sqrt{x})+C$

b) $F(x) = 2(\sqrt{x}-\arctan\sqrt{x})+C \Longrightarrow F(1) = 2(1-\arctan 1)+C = 2\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)+C = \frac{4-\pi}{2}+C = 2 \Longrightarrow C = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow F(x) == 2(\sqrt{x}-\arctan\sqrt{x})+\frac{\pi}{2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = 0$

3.15. Navarra

3.15.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.72 Calcula la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado:

a) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}}$

b) $g(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{-x}$

Solución:

a) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}} = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}\right) = \dfrac{1}{2}\left[\ln(1-\cos 2x) - \ln\sin 2x\right]$

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2\sin 2x}{1-\cos 2x} - \dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x}\right] = \dfrac{\sin 2x}{1-\cos 2x} - \cot 2x = \dfrac{2\sin x\cos x}{1-\cos^2+\sin^2 x} - \cot 2x = \dfrac{2\sin x\cos x}{2\sin^2 x} - \cot 2x = \cot x - \cot 2x = \operatorname{cosec} 2x$

b) $\ln g(x) = -x\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = x\ln x$

$\dfrac{g'(x)}{g(x)} = 1 + \ln x \Longrightarrow g'(x) = g(x)(1+\ln x) \Longrightarrow g'(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{-x}(1+\ln x) = x^x(1+\ln x)$

Problema 3.73 Demuestra que existe $\alpha \in (-1,3)$ tal que $f'(\alpha) = -\dfrac{1}{4}$, siendo

$$f(x) = \left[x^2 + \log(x^2-2x+7)\right]^{\sqrt[3]{\frac{3-x}{4}}}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Solución:
La función es continua en $[-1,3]$ y derivable en $(-1,3)$, por lo que cumple con las condiciones del teorema del valor medio por lo que $\exists \alpha \in (-1,3)$ tal que

$$f'(\alpha) = \frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = \frac{1-2}{4} = -\frac{1}{4}$$

Para comprobar que es continua observamos que $\log(x^2-2x+7) \geq \log 6 > 0$, el $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y que $\lim\limits_{x\longrightarrow a^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x) = f(a)\ \ \forall a \in \mathbb{R}$.

Problema 3.74 Demuestra que existe $\alpha \in (1,3)$ tal que $f'(\alpha) = 0$, siendo

$$f(x) = \frac{\ln\left[x-1+\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]}{4x-x^2}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

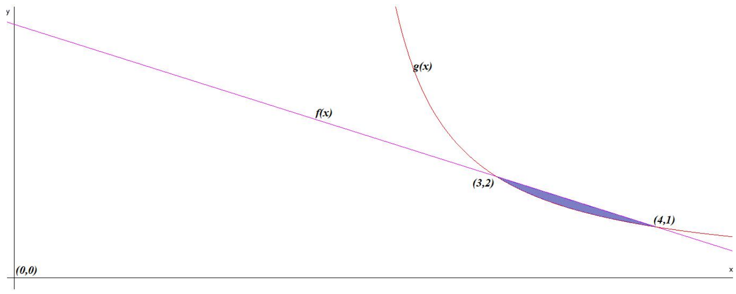
Solución: La función es continua en $(1,3)$ y además $f(1) = -\dfrac{\ln 2}{3} < 0$ y $f(3) = \dfrac{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}{3} > 0$, por lo que se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano y, por tanto, $\exists \alpha \in (1,3)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

Para comprobar la continuidad se observa que el intervalo está contenido en el dominio de la función y $x = 4$ (asíntota) no pertenece al intervalo. (El $x = 0$ no pertenece al dominio de la función)

Problema 3.75 Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = 5-x$ y $g(x) = \frac{2}{x-2}$ y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

Solución:

$$5 - x = \frac{2}{x-2} \Longrightarrow -x^2 + 7x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 3,\ \ x = 4$$



$$F(x)=\int(f(x)-g(x))dx=\int\left(5-x-\frac{2}{x-2}\right)dx=5x-\frac{x^2}{2}-2\ln|x-2|$$

$$S_1=\int_3^4(f(x)-g(x))dx=F(4)-F(3)=\frac{3}{2}-2\ln 2\simeq 0,114$$

$$S=|S_1|=\frac{3}{2}-2\ln 2\simeq 0,114\ u^2$$

3.15.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.76 Demuestra que existe $\alpha\in(1,e)$ tal que $f'(\alpha)=e+1$, siendo

$$f(x)=(x+ex-e)^{\frac{e}{x}}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Solución:
La función es continua y derivable en el intervalo $(1,e)$. Calculamos su derivada:

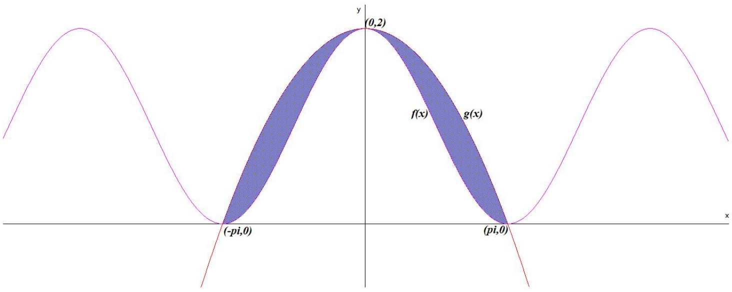
$$\ln f(x)=\frac{e}{x}\ln(x+ex-e)\Longrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{e}{x^2}\ln(x+ex-e)+\frac{e}{x}\frac{1+e}{x+ex-e}\Longrightarrow$$

$$f'(x)=(x+ex-e)^{\frac{e}{x}}\left(-\frac{e}{x^2}\ln(x+ex-e)+\frac{e}{x}\frac{1+e}{x+ex-e}\right)$$

Tenemos: $f(1)=1$ y $f(e)=e^2$. Por el teorema del valor medio $\exists\alpha\in(1,e)/\,f'(\alpha)=\dfrac{f(e)-f(1)}{e-1}=\dfrac{e^2-1}{e-1}=e+1$

Problema 3.77 Encuentra los tres puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x)=1+\cos x$ y $g(x)=\dfrac{-2x^2}{\pi^2}+2$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

Solución:
Dibujamos las dos gráficas y nos damos cuenta que los puntos de corte de ambas gráficas van a coincidir en dos puntos de corte con el eje de abcisas y otro en el eje de ordenadas. omprobamos que esto es cierto: $f(x)=0\Longrightarrow 1+\cos x=0\Longrightarrow x=\pm\pi$ y $g(x)=0\Longrightarrow\dfrac{-2x^2}{\pi^2}+2=0\Longrightarrow x=\pm\pi$ luego los puntos $(-\pi,0)$ y $(\pi,0)$ son comunes a ambas funciones. Por otra parte $f(0)=2$ y $g(0)=2$, luego el punto $(0,2)$ es el tercer punto común a ambas gráficas.



Como la gráfica de la función de g siempre está por encima de la de f hacemos $g - f$ para evitar los valores absolutos y por la simetría podemos calcuar el área entre 0 y π y multiplicarlo por 2:

$$S = 2\int_0^{\pi} \left(\frac{-2x^2}{\pi^2} + 1 - \cos x \right) dx = 2\left[\frac{-2x^3}{3\pi^2} + x - \sin x \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi}{3}\ u^2$$

Problema 3.78 Calcula el valor del parámetro real a para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \log(x^2+9) & \text{si} \quad x \le 1 \\ \\ \dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{a(1-x)} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (\log(x^2+9)) = \log 10 = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{a(1-x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}}{-a} = \frac{\pi}{2a}$$

Luego: $\dfrac{\pi}{2a} = 1 \Longrightarrow a = \dfrac{\pi}{2}$

Problema 3.79 Demuestra que la siguiente función tiene un máximo relativo en el intervalo $(-1, 0)$:

$$f(x) = \cos(\pi x)\ln(x^2 - 3x + 2)$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Solución:

$$f'(x) = -\pi\sin(\pi x)\ln(x^2 - 3x + 2) + \cos(\pi x)\frac{2x-3}{x^2-3x+2} = 0$$

Es bastante complicado obtener soluciones a esta igualdad por lo que llamamos $g(x) = f(x)$ y esta función es continua en el intervalo $(-1, 0)$. Empleamos el teorema de Bolzano a $g(x)$:

$$g(-1) = \frac{5}{6} > 0 \ \text{ y } \ g(0) = -\frac{2}{3} > 0$$

Por este teorema $\exists \alpha \in (-1, 0)/g(\alpha) = 0 \Longrightarrow f'(\alpha) = 0 \Longrightarrow \alpha$ es un extremo. En el intervalo $(-1, \alpha)$ tenemos $f'(x) > 0$ y f es creciente, mientras que en el intervalo $(\alpha, 0)$ $f'(x) < 0$ y f es decreciente, luego en $x = \alpha$ la función f pasa de crecer a decrecer y tiene un máximo relativo.

3.16. Galicia

3.16.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.80 Da respuesta a los siguientes apartados:

a) Mediante integración por partes demuestra que $\int \ln x\, dx = x(\ln x - 1) + C$. Luego, demuestra la misma igualdad mediante derivación.

b) Si $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si} \quad x \in (0, e] \\ ax + b & \text{si} \quad x \in (e, \infty) \end{cases}$, di que relación debe existir entre a y b para que f sea continua y que valores deben tener para que f sea derivable.

c) Calcular el área encerrada entre el eje X, la recta $x = 4$ y la gráfica de $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si} \quad x \in (0, e] \\ \frac{x}{e} & \text{si} \quad x \in (e, \infty) \end{cases}$

Solución:

a) $\int \ln x\, dx = \left[\ u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{1}{x} dx \ dv = dx \Longrightarrow v = x\ \right] = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$

$$F(x) = x(\ln x - 1) + C \Longrightarrow F'(x) = \ln x - 1 + x\frac{1}{x} = \ln x$$

b) Continuidad en $x = e$

$$\lim_{x \longrightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow e^-} \ln x = 1$$
$$\lim_{x \longrightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow e^+} (ax + b) = ae + b$$
$$ae + b = 1$$

Derivabilidad en $x = e$ $f'(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si} \quad x \in (0, e] \\ a & \text{si} \quad x \in (e, \infty) \end{cases}$ $f'(e^-) = \frac{1}{e}$ y $f'(e^+) = a \Longrightarrow \frac{1}{e} = a \Longrightarrow ae = 1$

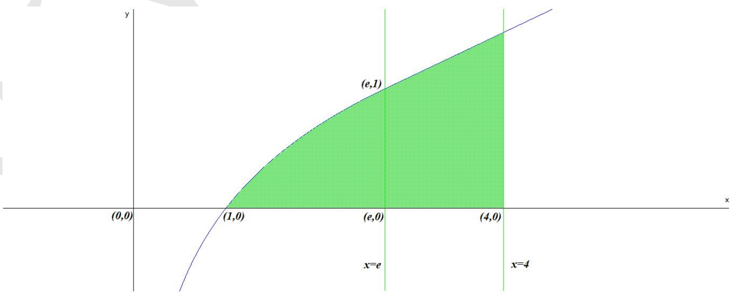
$$\begin{cases} ae + b = 1 \\ ae = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{e} \\ b = 0 \end{cases}$$

c) $f(x) = 0 \Longrightarrow \ln x = 0 \Longrightarrow x = 1$:

$$S_1 = \int_1^e \ln x\, dx = x(\ln x - 1)]_1^e = 1$$

$$S_2 = \int_e^4 \frac{x}{e}\, dx = \left.\frac{x^2}{2e}\right]_e^4 = \frac{16 - e^2}{2e}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 1 + \frac{16 - e^2}{2e} = \frac{-e^2 + 2e + 16}{2} \simeq 2,584\ u^2$$



Problema 3.81 Considérese la función $f(x) = x^2e^{-x}$, se pide:

a) Calcular los límites $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$

b) Determinar intervalos de crecimiento y de decrecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión.

c) Calcular $\int f(x)\,dx$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{2x}{e^x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} (x^2e^{-x}) = \infty$

b) $f(x) = x^2e^{-x} \Longrightarrow f'(x) = xe^{-x}(2-x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$

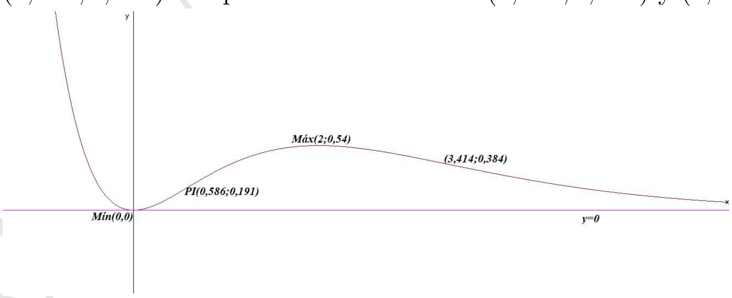
	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(0, 2)$ y decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)\cup(2, \infty)$. La función presenta un máximo relativo en el punto $(2, 4/e^2) = (2; 0, 54)$ y un mínimo relativo en el punto $(0, 0)$

$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2) = 0 \Longrightarrow x = 3, 41$ y $x = 0, 586$

	$(-\infty; 0, 586)$	$(0, 586; 3, 41)$	$(3, 41; \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava$\cup$	convexa$\cap$	cóncava$\cup$

La función es cóncava en el intervalo $(-\infty; 0, 586) \cup (3, 41; \infty)$ y convexa en el intervalo $(0, 586; 3, 414)$ con puntos de inflexión en $(0, 586; 0, 191)$ y $(3, 414; 0, 384)$.



c)

$$\int x^2e^{-x}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \Longrightarrow du = 2xdx \\ dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right] = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right] = -x^2e^{-x} + 2\left[-xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx\right] =$$
$$-x^2e^{-x} + 2\left[-xe^{-x} - e^{-x}\right] + C = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$$

3.16.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.82 Da respuesta a los siguientes apartados:

a) Estudia los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de la función $f(x) = x^2 \ln x$.

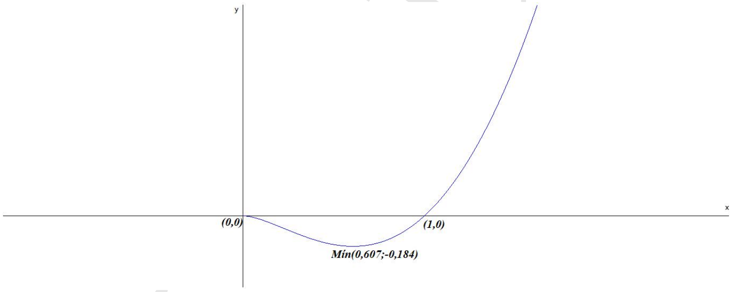
b) Consideremos un triángulo tal que: dos de sus vértices son el origen $O(0,0)$ y el punto $P(1,3)$, uno de sus lados esta sobre el eje X y otro sobre la tangente en $P(1,3)$ a la gráfica de la parábola $y = 4 - x^2$. Se pide calcular las coordenadas del tercer vértice, dibujar el triángulo y calcular, el área de las dos regiones en las que el triángulo queda dividido por la parábola $y = 4 - x^2$.

Solución:

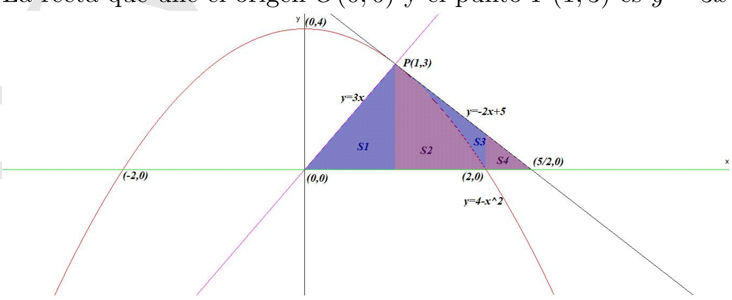
a) $f(x) = x^2 \ln x \Longrightarrow f'(x) = x(2\ln(x) + 1) = 0 \Longrightarrow x = e^{-1/2}$ y $x = 0$.

	$(0, e^{-1/2})$	$(e^{-1/2}, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(e^{-1/2}, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(0, e^{-1/2})$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $(0,607; -0,184)$. El punto $(0,0)$ no pertenece al dominio de la función.



b) Calculamos la recta tangente a la parábola en el punto $P(1,3)$: $y' = f'(x) = -2x \Longrightarrow m = f'(1) = -2$, la recta tangente es $y - 3 = -2(x - 1) \Longrightarrow y = -2x + 5$, es recta corta el eje de abcisas en el punto $(5/2, 0)$.
La recta que une el origen $O(0,0)$ y el punto $P(1,3)$ es $y = 3x$



$$S_1 = \int_0^1 3x\,dx = \left.\frac{3x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

$$S_2 = \int_1^2 (4-x^2)\,dx = 4x - \left.\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{5}{3}$$

Uno de los áreas pedido sería:

$$|S_1| + |S_2| = \frac{3}{2} + \frac{5}{3} = \frac{19}{6}\ u^2$$

$$S_3 = \int_1^2 (-2x+1+x^2)\,dx = -x^2 + x + \left.\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3}$$

$$S_4 = \int_2^{5/2} (-2x+5)\,dx = -x^2+5x\Big]_2^{5/2} = \frac{1}{4}$$

El otro área pedido sería:

$$|S_3| + |S_4| = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}\ u^2$$

Se comprueba que el área del triángulo es $\dfrac{2/5\cdot 3}{2} = \dfrac{15}{4}$ y $\dfrac{19}{6} + \dfrac{7}{12} = \dfrac{15}{4}$ como era de suponer.

Problema 3.83 Da respuesta a los apartados siguientes:

a) De entre todos los triángulo rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen un vértice en el origen, otro sobre la parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre el eje X y el otro paralelo al eje Y, obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya área es máxima.

b) Enuncia el teorema de Bolzano y Rolle.

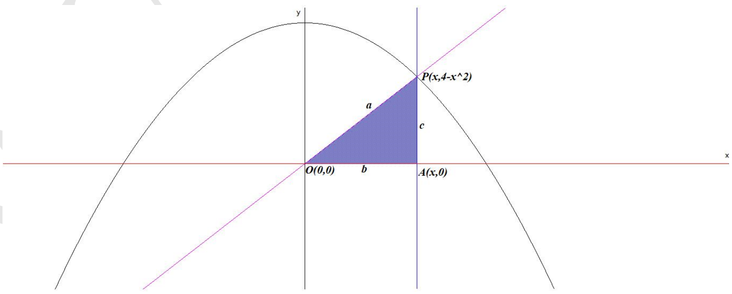
Solución:

a) El cateto $b = x$ el $c = f(x) = 4 - x^2$ y la hipotenusa $a = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{x^2+(4-x^2)^2} = \sqrt{x^4 - 7x^2 + 16}$.

$$S(x) = \frac{bc}{2} = \frac{x(4-x^2)}{2} = \frac{4x-x^3}{2} \Longrightarrow S'(x) = \frac{4-3x^2}{2} = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$S''(x) = -3x \Longrightarrow S''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -2\sqrt{3} < 0 \Longrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ u \text{ es un máximo.}$$

Luego los catetos miden $b = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1,155\ u$, $c = \frac{8}{3} = 2,667\ u$ y $a = \frac{2\sqrt{19}}{3} = 2,906\ u$



b) Ver teoría.

3.17. Andalucía

3.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.84 Considera la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2+3x+4}{2x+2} \text{ para } x \neq -1$$

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Solución:

a) Asíntotas:

- **Verticales:** $x=-1$

$$\lim_{x\longrightarrow -1} x^2+3x+42x+2 = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{x^2+3x+4}{2x+2} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{x^2+3x+4}{2x+2} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2+3x+4}{2x+2} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx+n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2+3x+4}{2x^2+2x} = \frac{1}{2}$$

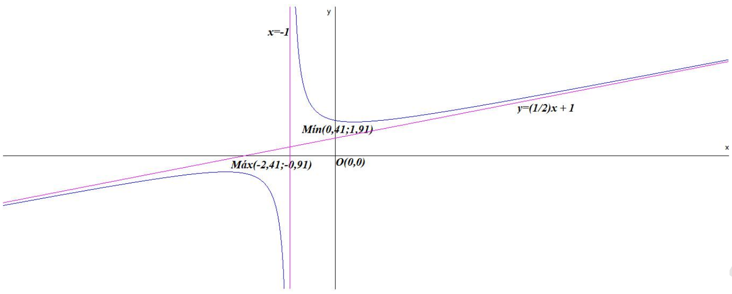
$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2+3x+4}{2x+2} - \frac{x}{2}\right) = 1$$

Luego la asíntota oblicua es $y = \frac{1}{2}x+1$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{2(x+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = -1\pm\sqrt{2}$

	$(-\infty,-1-\sqrt{2})$	$(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$	$(-1+\sqrt{2},\infty)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-1-\sqrt{2})\cup(-1+\sqrt{2},\infty)$ y decreciente en el intervalo $(-1-\sqrt{2},-1)\cup(-1,-1+\sqrt{2})$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $\left(-1+\sqrt{2};\frac{1-2\sqrt{2}}{2}\right) = (0,41;1,91)$ y un máximo relativo en el punto $\left(-1-\sqrt{2};\frac{1+2\sqrt{2}}{2}\right) = (-2,41;-0,91)$



Problema 3.85 Sea la función $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, 1)$. (Sugerencia: cambio de variable $t = e^x$)

Solución:

$$F(x) = \int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = e^x \Longrightarrow dt = e^x dx \\ dx = \frac{1}{e^x}dt \Longrightarrow dx = \frac{1}{t}dt \end{array}\right] = \int \frac{1+t}{t(1-t)}\,dt =$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1+t}{t(1-t)} = \frac{A}{t} - \frac{B}{t-1} = \frac{-A(t-1)+Bt}{t(1-t)} \\ 1+t = -A(t-1) + Bt \\ t = 0 \Longrightarrow 1 = A \\ t = 1 \Longrightarrow 2 = B \\ \frac{1+t}{t(1-t)} = \frac{1}{t} - \frac{2}{t-1} \end{array}\right] = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t-1}\right) dx =$$

$$\ln|t| - 2\ln|t-1| + C = \ln|e^x| - 2\ln|e^x - 1| + C = x - \ln(e^x-1)^2 + C$$

$$F(1) = 1 - 2\ln(e-1) + C = 1 \Longrightarrow C = 2\ln(e-1) \simeq 1{,}083$$

$$F(x) = x - \ln(e^x - 1)^2 + 2\ln(e-1)$$

Problema 3.86 Considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-a)e^x$.

a) Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x = 0$.

b) Para $a = 1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f.

Solución:

a) $f'(x) = e^x(x - a + 1)$ como $f'(0) = 0 \Longrightarrow -a + 1 = 0 \Longrightarrow a = 1$

b) Si $a = 1 \Longrightarrow f(x) = (x-1)e^x \Longrightarrow f'(x) = xe^x \Longrightarrow f'(x) = (x+1)e^x = 0 \Longrightarrow x = -1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa$\cap$	cóncava$\cup$

La función cambia de curvatura en $x = -1$ y en ese punto la función tiene continuidad y, por tanto, se trata de un punto de inflexión.

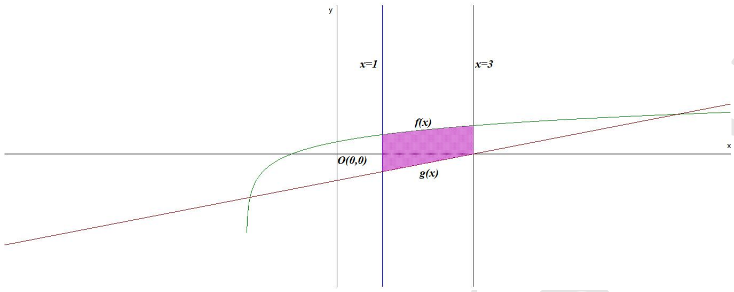
Problema 3.87 Considera las funciones $f : (-2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x+2)$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{1}{2}(x-3)$.

a) Esboza el recinto que determinan la gráfica de f, la gráfica de g, la recta $x = 1$ y la recta $x = 3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas)

b) Determina el área del recinto anterior.

Solución:

a) Dando valores se obtiene:



b)

$$S = \int_1^3 \left(\ln(x+2) - \frac{1}{2}(x-3)\right) dx = (x+2)\ln(x+2) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\Big]_1^3 =$$

$$\ln\left(\frac{3125}{27}\right) - 1 \simeq 3,751\ u^2$$

Inciso:

$$\int \ln(x+2)\, dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln(x+2) \Longrightarrow du = \frac{1}{x+2}dx \\ dv = dx \Longrightarrow v = x \end{array}\right] = x\ln(x+2) - \int \frac{x}{x+2}\, dx =$$

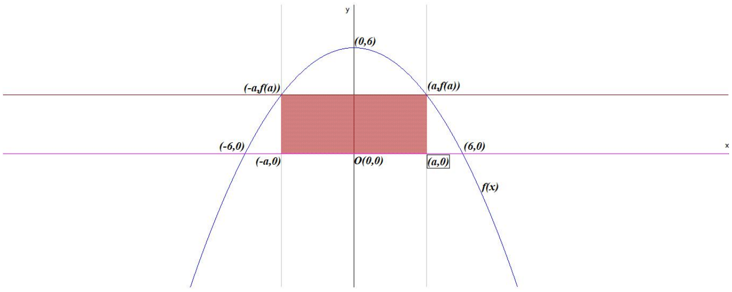
$$x\ln(x+2) - \int \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx = x\ln(x+2) - x + 2\ln(x+2) = (x+2)\ln(x+2) - x$$

3.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.88 Dada la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6 - \dfrac{1}{6}x^2$, calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes, inscrito en el recinto comprendido entre la gráfica de $f(x)$ y la recta $y = 0$.

Solución:

Dando valores se obtiene:



$$S(a) = 2af(a) = 2a\left(6 - \frac{1}{6}a^2\right) = \frac{36a - a^3}{3}$$

$$S'(a) = 12 - a^2 = 0 \Longrightarrow a = \pm 2\sqrt{3}$$

$$S''(a) = -2a \Longrightarrow S(2\sqrt{3}) = -4\sqrt{3} < 0 \Longrightarrow a = 2\sqrt{3} \text{ es un máximo}$$

Luego la base del rectángulo mide $2a = 4\sqrt{3}\ u$ y la altura $f(a) = 4\ u$.

Problema 3.89 Determina la función $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que es derivable, que su función derivada cumple $f'(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, (ln denota la función logaritmo neperiano) y que la gráfica de f pasa por $(1, 0)$

Solución:

$$F(x) = \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^{-1/2}dx \Longrightarrow v = 2x^{1/2} \end{array} \right] = 2x^{1/2}\ln x - 2\int x^{-1/2}\, dx =$$

$$2x^{1/2}\ln x - 4x^{1/2} + C = 2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C$$

$$F(1) = -4 + C = 0 \Longrightarrow C = 4 \Longrightarrow F(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2) + 4$$

Problema 3.90 Se sabe que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \begin{cases} \sin x + ax + b & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$. (ln denota la función logaritmo neperiano) es derivable. Calcula a y b.

Solución:

- f continua en $x = 0$:

  $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} (\sin x + ax + b) = b$

  $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1$

  Luego $b = 1$.

- f derivable en $x = 0$:

  $f'(x) = \begin{cases} \cos x + a & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^3 + x^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

  Tenemos $f'(0^-) = 1 + a$

$$f'(0^+) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^3+x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{-\ln(x+1)}{3x^2+2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x+1}}{6x+2} = -\frac{1}{2}$$

Luego $f'(0^-) = f'(0^+) \Longrightarrow 1 + a = -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow a = -\dfrac{3}{2}$

Problema 3.91 Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = xe^{-x^2}$.

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

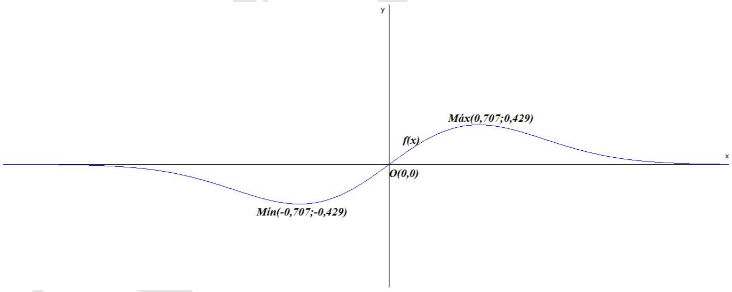
b) Determina $a > 0$ de manera que sea $\frac{1}{4}$ el área del recinto determinado por la gráfica de f en el intervalo $[0, a]$ y el eje de abscisas.

Solución:

a) El punto de corte con OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$.
Los puntos de corte con OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow xe^{-x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$.
Monotonía: $f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ y creciente en el intervalo $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2e}}{2e}\right) = (-0,707; -0,429)$ y un máximo relativo en el punto $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2e}}{2e}\right) = (0,707; 0,429)$



b) $F(x) = \displaystyle\int xe^{-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = -x^2 \Longrightarrow dt = -2xdx \\ dx = -\frac{1}{2x}dt \end{array}\right] = \int xe^t \cdot \frac{1}{-2x}dt = -\frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^t = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$

$$\int_0^a f(x)\,dx = F(a) - F(0) = -\frac{1}{2}e^{-a^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Longrightarrow \frac{1}{2}(-e^{-a^2} + 1) = \frac{1}{4} \Longrightarrow -e^{-a^2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow -e^{-a^2} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow -a^2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow -a^2 = \ln 1 - \ln 2 \Longrightarrow a^2 = \ln 2 \Longrightarrow a = \sqrt{\ln 2}$$

4. Probabilidad

Teoría

Frecuencia absoluta de un suceso A es el número de veces que se repite dicho suceso $\Longrightarrow f(A)$

Frecuencia relativa de un suceso A es la proporción de veces que ha sucedido A de N experiencias $\Longrightarrow f_r(A) = \dfrac{f(A)}{N}$

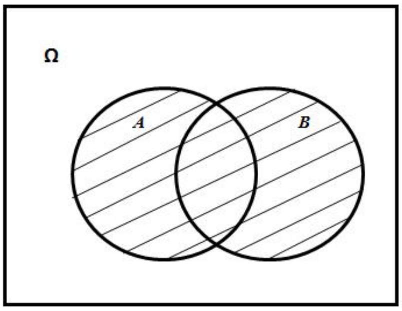
Ley de los grandes números: $\lim\limits_{N \longrightarrow \infty} f_r(A) = P(A)$

Ley de Laplace: $P(A) = \dfrac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$

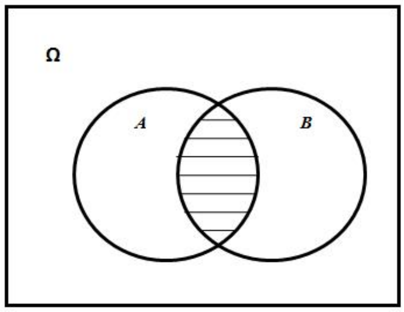
$\Omega \equiv$ **Espacio muestral** es el de todos los sucesos, sería el suceso seguro: $P(\Omega) = 1$.

$\emptyset \equiv$ **Espacio vacio** es el de ningún suceso, sería el suceso imposible: $P(\emptyset) = 0$.

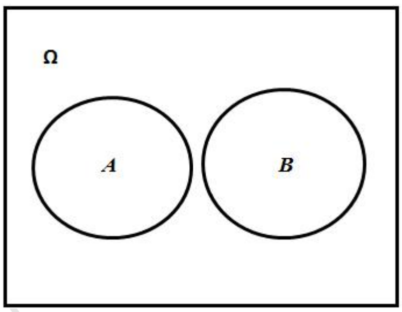
Diagramas de Venn: (esquemas usados en la teoría de conjuntos)



Unión de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos del conjunto A con todos los de B: $A \cup B$



Intersección de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos comunes entre los conjuntos A y B: $A \cap B$



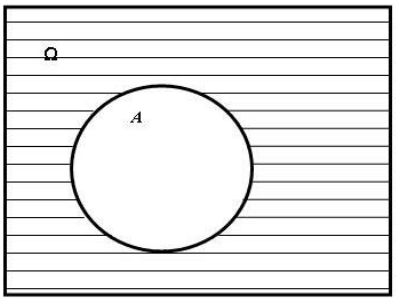
Sucesos Incompatibles: Dos sucesos son incompatibles si su intersección es vacía. $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cap B) = 0$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

En el caso de que los dos sucesos sean incompatibles la fórmula quedaría:

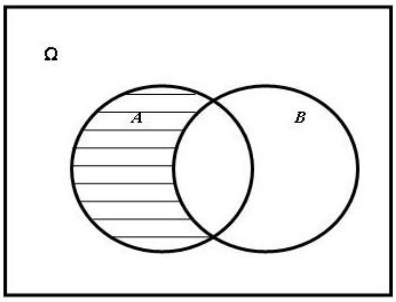
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Sucesos independientes: Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.



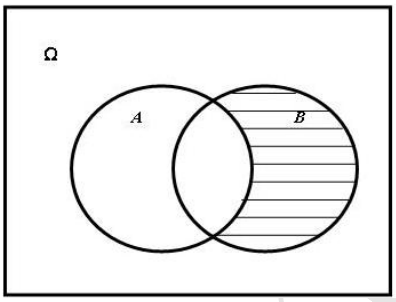
$\overline{A}$ es el suceso contrario o complementario de A:

$$\overline{A} = \Omega - A \Longrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$



$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$



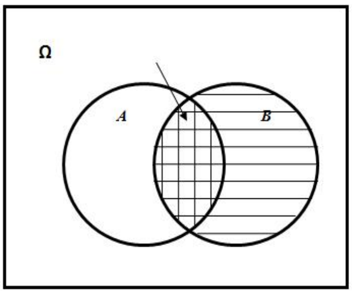
Leyes de Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Probabilidad condicionada: es la probabilidad de que ocurra un suceso A sabiendo que ha ocurrido el suceso B: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Teorema de Bayes: $P(A|B) = \dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

Teorema de la probabilidad total: Si $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \Omega$ y los sucesos A_i con $i = 1, ..., 5$ son incompatibles dos a dos (intersección vacía), entonces:

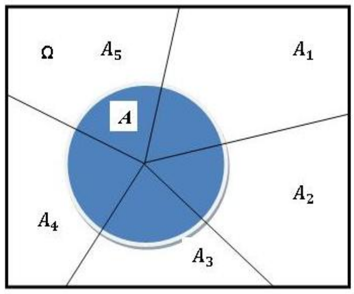
$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) + P(A_4)P(A|A_4) + P(A_5)P(A|A_5)$$



Probabilidad condicionada:

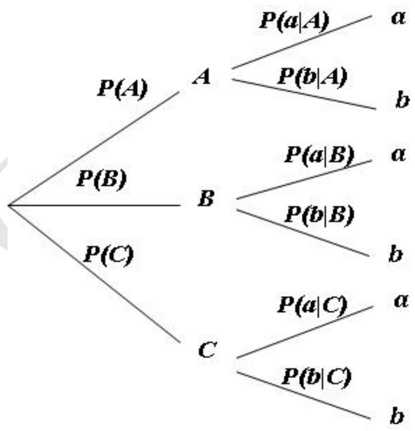
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

probabilidad total



$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) + P(A_4)P(A|A_4) + P(A_5)P(A|A_5)$$

Organización por árboles:



Organización por tablas de contingencia:

	Renault	Seat	Mercedes	Totales
Blanco	15	20	10	45
Negro	300	455	200	955
	315	475	210	1000

$$P(B|S) = \frac{20}{475}, \;\; P(N|M) = \frac{200}{210}, \;\; P(B) = \frac{45}{1000}, \;\; P(M) = \frac{210}{1000}$$

Problemas

4.1. Aragón

4.1.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.1 Se dispone de dos cajas, la caja A contiene 3 bolas moradas y 2 bolas rojas; mientras que la caja B contiene 4 bolas moradas y 4 rojas.

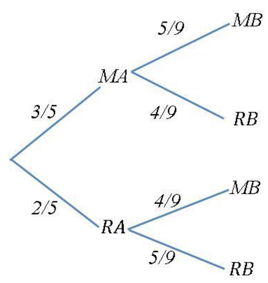
a) Se escoge una bola cualquiera de la caja A y se pasa a la caja B. Posteriormente se saca una bola de la caja B. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la caja B sea morada?

b) Ahora volvemos a la situación original de las cajas; la A contiene 3 moradas y 2 rojas y la B contiene 4 moradas y 4 rojas.
Seleccionamos una caja al azar y se saca una bola que resulta ser roja. ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea de la caja A?

Solución:

a) Se pasa la bola de la urna A a la B:

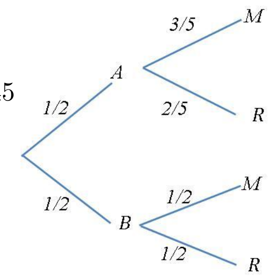
$$P(MB) = P(MB|MA)P(MA) + P(MB|RA)P(RA) =$$
$$\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{9}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{9}=\frac{23}{45}=0,51$$



b) Se elige una de las dos urnas al azar:

$$P(R) = P(R|A)P(A)+P(R|B)P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{20}=0,45$$

$$P(A|R)=\frac{P(R|A)P(A)}{P(R)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{9}{20}}=\frac{4}{9}=0,44$$



4.1.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.2 Una encuesta realizada sobre el mes preferido, entre julio, agosto o septiembre, para salir de vacaciones arrojó los siguientes datos: un 40 % prefiere julio, un 30 % agosto y el resto prefiere el mes de septiembre. Entre los que prefieren el mes de julio, un 60 % pasa sus vacaciones en un hotel; entre los que prefieren el mes de agosto un 40 % elige hotel para sus vacaciones y entre los encuestados que prefieren septiembre, un 65 % eligen hotel.

a) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que vaya a un hotel y le guste ir en agosto.

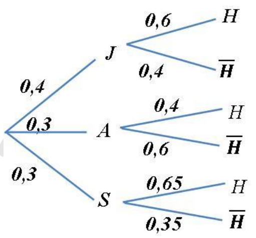
b) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que pase sus vacaciones en un hotel.

c) Se elige al azar un individuo y dice que no pasa sus vacaciones en un hotel, calcule la probabilidad de que prefiera irse en agosto de vacaciones.

Solución:

a) $P(A \cap H) = P(H|A)P(A) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$

b) $P(H) = P(H|J)P(J) + P(H|A)P(A) + P(H|S)P(S) = 0,4 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,65 = 0,555$



c)

$$P(A|\overline{H}) = \frac{P(\overline{H}|A)P(A)}{P(\overline{H})} = \frac{0,6 \cdot 0,3}{1 - 0,555} = 0,404$$

4.2. Asturias

4.2.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.3 Pedro y Luis son aficionados a los dardos. Pedro acierta en el centro el 10 % de las veces y cada vez que acierta gana 400 euros. Luis acierta en el centro el 20 % de las veces y cada vez que acierta gana 100 euros. Cuando fallan no ganan ni pierden nada. Tira cada uno dos dardos. Calcula las siguientes probabilidades:

a) Que Luis acierte en el centro las dos veces.

b) Que Pedro acierte en el centro una sola vez.

c) Que entre los dos hayan ganado 600 euros.

Solución:

AL: acierta Luis, FL: falla Luis, AP: acierta Pedro y FP: falla Pedro.
$P(AL) = 0,2$, $P(FL) = 0,8$, $P(AP) = 0,1$ y $P(FP) = 0,9$.

a) $P(AL, AL) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$

b) $P(AP, FP) + P(FP, AP) = 0,1 \cdot 0,9 + 0,9 \cdot 0,1 = 0,18$

c) Las únicas posibilidades se sumar 600 euros serían los sucesos:

$\{AP, FP, AL, AL\}$ y $\{FP, AP, AL, AL\}$.

$P = P(AP, FP, AL, AL) + P(FP, AP, AL, AL) = 0,1 \cdot 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,2 + 0,9 \cdot 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,0072$

4.2.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.4 Alicia tiene dos cajones. En uno tiene las camisetas y en el otro las faldas. La tabla muestra el número de todas las prendas que guarda en los dos cajones agrupadas en tres tipos: lisas, dibujos o rayas.

	Lisas	Dibujos	Rayas
Camisetas	10	5	10
Faldas	5	15	5

Se elige al azar una prenda de cada cajón. Calcula la probabilidad de que:

a) Las dos sean de rayas.

b) Las dos sean del mismo tipo.

c) Al menos una de ellas no sea de rayas.

Solución:

	Lisas	Dibujos	Rayas	Total
Camisetas	10	5	10	25
Faldas	5	15	5	25
Total	15	20	15	50

a) $P(RR) = \dfrac{10}{25} \cdot \dfrac{5}{25} = \dfrac{2}{25} = 0,08$

b) $P(LL) + P(DD) + P(RR) = \dfrac{10}{25} \cdot \dfrac{5}{25} + \dfrac{5}{25} \cdot \dfrac{15}{25} + \dfrac{10}{25} \cdot \dfrac{5}{25} = \dfrac{7}{25} = 0,28$

c)
$$P = 1 - P(RR) = 1 - 0,08 = \frac{13}{25} = 0,92$$

4.3. Islas Baleares

4.3.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.5 En una comunidad de 500 alumnos de segundo de Bachillerato, 200 estudiantes eligieron la opción científico tecnológica. Hay 150 alumnos que juegan al fútbol y 100 al baloncesto (se entiende que si juegan al futbol no lo hacen al baloncesto y viceversa) De los que practican baloncesto 70 estudian la opción científico tecnológica y hay 150 estudiantes que no practican ningún deporte y no eligieron la opción científico tecnológica. Se pide:

a) Probabilidad de que un estudiante sea de la opción científico tecnológica y no practique deporte.

b) Sabemos que un estudiante practica futbol, ¿cuál es la probabilidad de que estudie la opción científico tecnológica?

c) Sn independientes los sucesos "practicar futbol" y estudiar la "opción científico tecnológica". Razona la respuesta.

Solución:
$P(CN) = \frac{200}{500} = 0,4$, $P(F) = \frac{150}{500} = 0,3$, $P(B) = \frac{100}{500} = 0,2$, $P(CN|B) = \frac{70}{100} = 0,7$ y $P(N \cap \overline{CN}) = \frac{150}{500} = 0,3$
$P(CN|B) = \frac{P(CN\cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(CN \cap B) = P(CN|B)P(B) = 0,7 \cdot 0,2 = 0,14$

	F	B	N	Total
CN		0,14		0,4
$\overline{CN}$			0,3	
	0,3	0,2		

$\Longrightarrow$

	F	B	N	Total
CN	0,06	0,14	0,2	0,4
$\overline{CN}$	0,24	0,06	0,3	0,6
	0,3	0,2	0,5	

a) $P(CN \cap N) = 0,2$

b) $P(CN|F) = \dfrac{P(CN \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0,06}{0,3} = 0,2$

c) $P(F \cap CN) = 0,06$ y $P(F) \cdot P(CN) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$ luego F y CN no son independientes.

4.3.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.6 Se ha efectuado un estudio para valorar el nivel de estrés de cierta comunidad. Se ha detectado que el 60 % no tiene miedo a volar, el 50 % tiene un nivel bajo de estrés, el 25 % un nivel medio y el 5 % u nivel alto de estrés y miedo a volar. Sabemos, mes a mes, que el 5 % de los individuos tienen un nivel medio de estrés y no tienen miedo a volar. Se pide:

a) Probabilidad de que un individuo de la comunidad tenga un nivel medio de estrés y miedo a volar.

b) Sabemos que un individuo tiene miedo a volar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga un nivel bajo de estrés?

c) Sn independientes los sucesos "nivel bajo de estrés" y "miedo a volar". Razona la respuesta.

Solución:
A: miedo a volar, B: estres bajo, C: estres medio y D: estres alto.
$P(A) = 0,4$, $P(\overline{A}) = 0,6$, $P(B) = 0,5$, $P(C) = 0,25$, $P(D \cap A) = 0,05$ y $P(C \cap \overline{A}) = 0,05$

	B	C	D	Total
A			$0,05$	$0,4$
$\overline{A}$		$0,05$		$0,6$
	$0,5$	$0,25$		

$\Longrightarrow$

	B	C	D	Total
A	$0,15$	$0,20$	$0,05$	$0,4$
$\overline{A}$	$0,35$	$0,05$	$0,20$	$0,6$
	$0,5$	$0,25$	$0,25$	

a) $P(C \cap A) = 0,20$

b) $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,15}{0,4} = 0,375$

c) $P(B \cap A) = 0,15$ y $P(B) \cdot P(A) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$ luego B y A no son independientes.

4.4. Islas Canarias

4.4.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.7 Una planta ensambladora de circuitos recibe componentes procedentes de tres fabricantes A, B y C. El 50 % del total de los componentes se compra al fabricante A, mientras que a los fabricantes B y C se le compra un 25 % a cada uno. El porcentaje de componentes defectuosos es de un 5 % para el fabricante A, el 10 % para el fabricante B y el 12 % para el fabricante C.

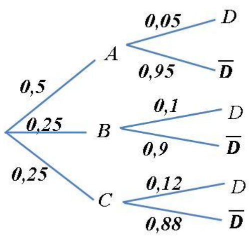
a) Construir el diagrama de árbol con las probabilidades asignadas.

b) El Departamento de Control de la Calidad escoge un circuito al azar en el almacén, hallar la probabilidad de que contenga componentes defectuosos.

c) Escogido al azar un circuito que no tiene componentes defectuosos, ¿qué porcentaje de dichos componentes han sido vendidos por el proveedor B?

Solución:

a) diagrama de árbol:



b) $P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) = 0,05 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,25 + 0,12 \cdot 0,25 = 0,08$

c)
$$P(B|\overline{D}) = \frac{P(\overline{D}|B)P(B)}{P(\overline{D})} = \frac{0,9 \cdot 0,25}{1 - 0,08} = 0,245$$

4.4.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.8 En un supermercado se sabe que el 55 % de los clientes traen su propia bolsa. El 30 % de los que traen su propia bolsa son hombres y el 40 % de los que no traen su propia bolsa son mujeres.

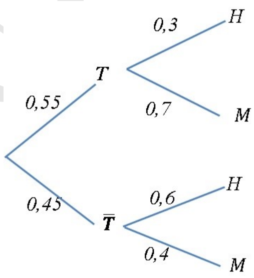
a) Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado.

b) ¿Qué proporción de clientes son mujeres?

c) Si un cliente elegido al azar es hombre, ¿qué probabilidad hay de que haya traído su propia bolsa?

Solución:

a) diagrama de árbol:



b) $P(M) = P(M|T)P(T)+P(M|\overline{T})P(\overline{T}) = 0,7\cdot 0,55+0,4\cdot 0,45 = 0,565$

c)

$$P(T|H) = \frac{P(H|T)P(T)}{P(H)} = \frac{0,3\cdot 0,55}{1-0,565} = 0,379$$

4.5. Cantabria

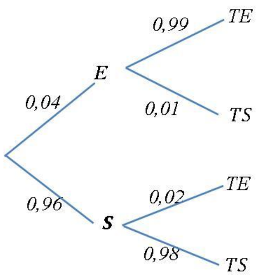
4.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.9 Una prueba rápida para detectar una enfermedad da un 2 % de falsos positivos (personas sanas en las que la prueba da positivo, clasificándolas como enfermas) y un 1 % de falsos negativos (personas enfermas en las que la prueba da negativo, clasificándolas como sanas). En una población hay un 4 % de enfermos.

a) Calcule la probabilidad de que el test dé un resultado negativo.

b) La prueba da un resultado positivo (clasificando a la persona como enferma). Calcule la probabilidad de que realmente esté sana.

Solución:



a) $P(TS) = P(TS|E)P(E) + P(TS|S)P(S) = 0,01\cdot 0,04 + 0,98\cdot 0,96 = 0,941$

b)

$$P(S|TE) = \frac{P(TE|S)P(S)}{P(TE)} = \frac{0,02\cdot 0,96}{1-0,941} = 0,327$$

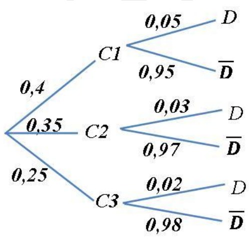
4.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.10 Una empresa de teléfonos tiene tres cadenas de producción para un modelo de teléfono. Cada cadena fabrica, respectivamente, un 40 %, 35 % y 25 % de la producción total. La probabilidad de que un teléfono sea defectuoso es del 5 %, 3 % y 2 % respectivamente. Se toma un teléfono al azar.

a) ¿Cual es la probabilidad de que el teléfono sea defectuoso?

b) Si el teléfono es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que se haya fabricado en la segunda cadena?

Solución:



a) $P(D) = P(D|C1)P(C1) + P(D|C2)P(C2) + P(D|C3)P(C3) = 0,05 \cdot 0,4 + 0,03 \cdot 0,35 + 0,02 \cdot 0,25 = 0,0355$

b)
$$P(C2|D) = \frac{P(D|C2)P(C2)}{P(D)} = \frac{0,03 \cdot 0,35}{0,0355} = 0,296$$

4.6. Castilla León

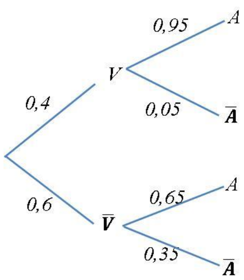
4.6.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.11 En una competición de tiro olímpico hay 10 rifles, 4 con visor telescópico y 6 sin él. La probabilidad de que un tirador haga blanco con un rifle con visor telescópico es 0,95 y sin él es de 0,65.

a) Halla la probabilidad de hacer blanco escogiendo un rifle al azar.

b) Si el tirador hace blanco. ¿Es más probable que haya disparado con un rifle con visor telescópico o sin él?

Solución:
LLamamos A al suceso "acertar" y V al suceso "con visor":



a) $P(A) = P(A|V)P(V) + P(A|\overline{V})P(\overline{V}) = 0,95 \cdot 0,4 + 0,65 \cdot 0,6 = 0,77$

b)
$$P(V|A) = \frac{P(A|V)P(V)}{P(A)} = \frac{0,95 \cdot 0,4}{0,77} = 0,494$$
$$P(\overline{V}|A) = \frac{P(A|\overline{V})P(\overline{V})}{P(A)} = \frac{0,65 \cdot 0,6}{0,77} = 0{,}506$$

Sin visor telescópico.

4.6.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.12 Se En una empresa de alquiler de vehículos con conductor:

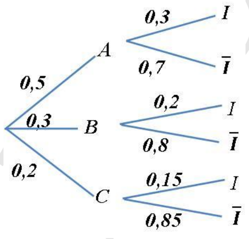
- Trabajan 50 conductores de menos de 45 años, de los cuales 15 hablan inglés.
- Trabajan 30 conductores de entre 45 y 55 años, de los cuales 6 hablan inglés.
- Trabajan 20 conductores de más de 55 años, de los cuales 3 hablan inglés.

Considerando los sucesos: A="tener menos de 45 años", B="tener entre 45 y 55 años", C="tener más de 55 años" e I="hablar inglés":

a) Calcular $P(I|A)$, $P(I|B)$ y $P(I|C)$.

b) Si se elige al azar un conductor, y éste habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 45 años?

Solución:



a) $P(I|A) = \frac{15}{50} = 0,3$, $P(I|B) = \frac{6}{30} = 0,2$ y $P(I|C) = \frac{3}{20} = 0,15$

b) $P(I) = P(I|A)P(A)+P(I|B)P(B)+P(I|C)P(C) = 0,5\cdot 0,3+ 0,3\cdot 0,2 + 0,2\cdot 0,15 = 0,24$

$$P(A|I) = \frac{P(I|A)P(A)}{P(I)} = \frac{0,3\cdot 0,5}{0,24} = 0,625$$

4.7. Castilla La Mancha

4.7.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.13 Una fábrica A produce el 30 % de los tractores que se demandan en una Comunidad Autónoma, una fábrica B produce el 20 % y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4 % de los tractores fabricados por A, el 10 % de los fabricados por B y el 2 % de los fabricados por C. Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:

a) No salga defectuoso.

b) Si resultó defectuoso, que no fuera fabricado por C.

Solución:
A: fábrica A, B: fábrica B, C: fábrica C y D: defectuoso.
$P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,2$, $P(C) = 0,5$, $P(D|A) = 0,04$, $P(D|B) = 0,1$ y $P(D|C) = 0,02$
$P(D\cap A) = P(D|A)P(A) = 0,04\cdot 0,3 = 0,012$; $P(D\cap B) = P(D|B)P(B) = 0,1\cdot 0,2$ y $P(D\cap C) = P(D|C)P(C) = 0,02\cdot 0,5$

	A	B	C	Total
D	0,012	0,02	0,01	
$\overline{D}$				
	0,3	0,2	0,5	

$\Longrightarrow$

	A	B	C	Total
D	0,012	0,02	0,01	0,042
$\overline{D}$	0,288	0,18	0,49	0,958
	0,3	0,2	0,5	

a) $P(\overline{D}) = 0,958$

b)

	$\overline{C}$	C	Total
D	0,032	0,01	0,042
$\overline{D}$	0,468	0,49	0,958
	0,5	0,5	

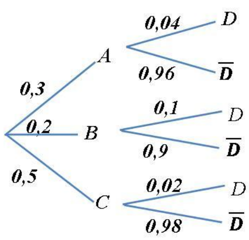
$\Longrightarrow P(\overline{C}|D) = \frac{P(\overline{C}\cap D}{P(D)} = \frac{0,032}{0,042} = 0,7619$

De otra manera:

a)

$$P(\overline{D}) = P(\overline{D}|A)P(A) + P(\overline{D}|B)P(B) + P(\overline{D}|C)P(C) =$$

$$0,96\cdot 0,3 + 0,9\cdot 0,2 + 0,98\cdot 0,5 = 0,958$$



b)

$$P(\overline{C}|D) = \frac{P(\overline{C}\cap D)}{P(D)} = \frac{0,3\cdot 0,04 + 0,2\cdot 0,1}{1 - 0,958} = 0,7619$$

Problema 4.14 Una alarma de seguridad tiene instalados dos sensores. Ante una emergencia los sensores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer sensor es de 0,98 y de que se active el segundo es de 0,96. Calcula razonadamente la probabilidad de que ante una emergencia:

a) Se active al menos uno de los dos sensores.

b) Se active sólo uno de los sensores.

Solución:
LLamamos A al suceso "se activa el primer sensor" y B al suceso "se activa el segundo sensor":
$P(A) = 0,98 \Longrightarrow P(\overline{A}) = 0,02$ y $P(B) = 0,96 \Longrightarrow P(\overline{B}) = 0,04$

a) $P(\text{Al menos uno}) = 1 - P(\text{ninguno}) = 1 - 0,02 \cdot 0,04 = 0,9992$

b) $P(\text{uno sólo}) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = 0,98 \cdot 0,04 + 0,02 \cdot 0,96 = 0,058$

4.7.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.15 Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio cuyas probabilidades son $P(A) = 0,75$ y $P(B) = 0,35$. Calcula razonadamente las probabilidades que deben asignarse a los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$ en cada uno de los siguientes casos:

a) Si A y B fuesen independientes.

b) Si $P(A|B) = 0,6$.

Nota: $P(A|B)$ denota la probabilidad condicionada.
Solución:

a) A y B independientes $\Longrightarrow P(A) \cdot P(B) = 0,75 \cdot 0,35 = 0,2625$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,75 + 0,35 - 0,2625 = 0,838$

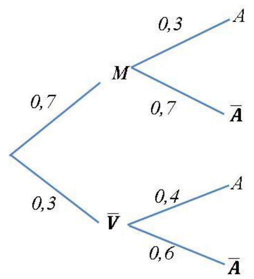
b) $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,35 = 0,21$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,75 + 0,35 - 0,21 = 0,89$

Problema 4.16 En la sala de pediatría de un hospital el 70 % de los pacientes son niñas. De los niños el 40 % son menores de 36 meses y de las niñas el 30 % tienen menos de 36 meses. Un pediatra entra en la sala y selecciona un paciente al azar. Calcula razonadamente la probabilidad de:

a) Que no tenga menos de 36 meses.

b) Si el paciente resulta ser menor de 36 meses, que sea niña.

Solución:
LLamamos V al suceso "niño", M al suceso "niña" y A al suceso "menor de 36 meses":



a)
$$P(\overline{A}) = P(\overline{A}|M)P(M) + P(\overline{A}|V)P(V) =$$
$$0,7 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,3 = 0,67$$

b)
$$P(M|A) = \frac{P(A|M)P(M)}{P(A)} = \frac{0,3 \cdot 0,7}{1 - 0,67} = 0,636$$

4.8. País Vasco

4.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.17 Sobre una mesa tengo tres cajas con botones; la primera caja tiene 3 botones, la segunda 5 y la tercera 4. Cada una de las cajas contiene un solo botón rojo. Si elijo al azar una caja y saco de ella un botón al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un botón rojo?

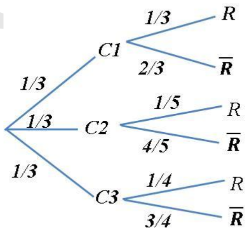
b) Si he sacado un botón rojo, ¿cuál es la probabilidad de pertenezca a la primera caja?

Solución:
LLamamos V al suceso "botón rojo", $C1$ al suceso "caja primera", $C2$ al suceso "caja segunda" y $C3$ al suceso "caja tercera":

a)

$$P(R) = P(R|C1)P(C1) + P(R|C2)P(C2) + P(R|C3)P(C3) =$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{47}{180}=0,261$$



b)

$$P(C1|R) = \frac{P(R|C1)P(C1)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{0,261} = 0,426$$

4.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.18 Una caja tiene 3 monedas R, L y M. La moneda R es normal, la L tiene cara por los dos lados y la M está trucada, de forma que la probabilidad de salir cara es $1/5$. Se tira una moneda elegida al azar.

a) Calcular la probabilidad que se obtenga cara.

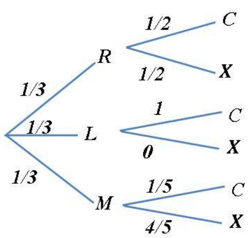
b) Si ha salido cruz, ¿cuál es la probabilidad que sea la moneda R?

Solución:
LLamamos C al suceso "cara" y X al suceso "cruz":

a)

$$P(C) = P(C|R)P(R) + P(C|L)P(L) + P(C|M)P(M) =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{17}{30}=0,567$$



b)

$$P(R|X) = \frac{P(X|R)P(R)}{P(X)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{1-0,567} = 0,385$$

4.9. Extremadura

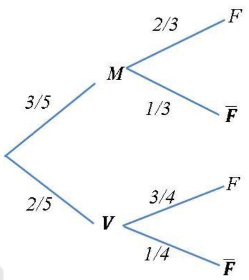
4.9.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.19 En una clase hay 12 chicas y 8 chicos. 8 de las 12 chicas y 6 de los 8 chicos utilizan Facebook. Se escoge un estudiante al azar, determine las siguientes probabilidades:

a) Sea chica y utilice Facebook.

b) Sea chico, sabiendo que utilica Facebook.

Solución:
LLamamos M al suceso "chica", V al suceso "chico" y F al suceso "Facebook":



a) $P(M \cap F) = P(F|M)P(M) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

b)
$$P(F) = P(F|M)P(M) + P(F|V)P(V) =$$
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{10} = 0,7$$
$$P(V|F) = \frac{P(F|V)P(V)}{P(F)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}}{0,7} = 0,429$$

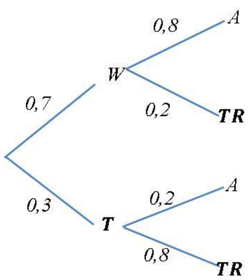
4.9.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.20 Un persona utiliza Whatsapp un 70 % y Telegram un 30 %. El 80 % de los Whatsapp son de amigos y el 20 % de trabajo, mientras que de Telegram, el 80 % son de trabajo y 20 % de amigos.

a) Calcule la probabilidad de recibir un mensaje de trabajo.

b) Si el usuario recibe nn mensaje de trabajo, calcule la probabilidad ele que sea a través del Whatsapp.

Solución:
LLamamos W al suceso "Whatsapp", T al suceso "Telegram", A al suceso "amigos" y TR al suceso "trabajo":



a)
$$P(TR) = P(TR|W)P(W) + P(TR|T)P(T) =$$
$$0,2 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot\ 0,3 = 0,38$$

b)
$$P(W|TR) = \frac{P(TR|W)P(W)}{P(TR)} = \frac{0,2 \cdot 0,7}{0,38} = 0,368$$

4.10. Madrid

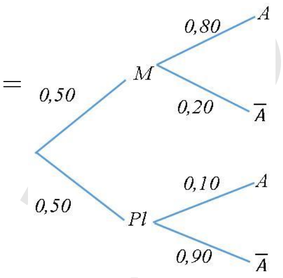
4.10.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.21 Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80 % de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10 %. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

a) (1 punto) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.

b) (1,5 puntos) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

Solución:
LLamamos M al suceso "Medicamento", Pl al suceso "Placebo" y A al suceso "mejora":



a) $P(A) = P(A|M)P(M) + P(A|Pl)P(Pl) = 0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,1 = 0,45$

b) $P(M|A) = \dfrac{P(A|M)P(M)}{P(A)} = \dfrac{0,8 \cdot 0,5}{0,45} = 0,889$

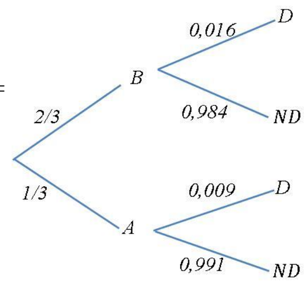
4.10.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.22 Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alta gama 1/3 de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es del 1,6 %, mientras que para los de alta gama es del 0,9 %. En un control de calidad preventa, se elige al azar un vehículo para examinarlo.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.

b) (1,5 puntos) Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.

Solución:
LLamamos B al suceso "vehículos de baja gama", A al suceso "vehículos de alta gama" y D al suceso "defecto":



a) $P(D) = P(D|B)P(B) + P(D|A)P(A) = 0,016 \cdot \frac{2}{3} + 0,009 \cdot \frac{1}{3} = 0,0137 \Longrightarrow 1,37\,\%$

b) $P(B|D) = \dfrac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \dfrac{0,016 \cdot \frac{2}{3}}{0,0137} = 0,78 \Longrightarrow 78\,\%$

4.11. La Rioja

4.11.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.23 Se tienen tres urnas: A, B y C. La urna A contiene dos bolas blancas y tres negras, la B tres bolas blancas y dos negras, la C cuatro bolas blancas y una negra. Se lanza un dado y se toman dos bolas de una urna: de la urna A si sale un 1, 2 ó 3, de la urna B si sale un 4 ó 5 y de la urna C si sale un 6.

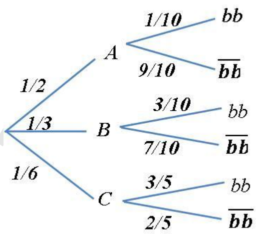
a) Calcula la probabilidad de obtener dos bolas blancas.

b) Suponiendo que las dos bolas extraídas son blancas, calcula la probabilidad de que se hayan extraído de la primera urna.

Solución:
$A = \{2b, 3n\}$, $B = \{3b, 2n\}$ y $C = \{4b, 1n\}$

$P(A)=\dfrac{1}{2}$, $P(B)=\dfrac{1}{3}$ y $P(C)=\dfrac{1}{6}$

$P(bb|A)=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{10}$, $P(bb|B)=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{10}$ y $P(bb|C)=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{5}$



a) $P(bb)=P(bb|A)P(A)+P(bb|B)P(B)+P(bb|C)P(C)=\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{4}=0,25$

b)
$$P(A|bb)=\frac{P(bb|A)P(A)}{P(bb)}=\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{5}=0,2$$

4.11.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.24 En un colegio se han ofertado para los niños de infantil tres actividades extraescolares Inglés (ING), Multideporte (MUL) y Robótica (ROB), con dos rangos de edad de 3 a 4 años (MP) y de 5 a 6 años(MG) . Se sabe que se han apuntado a alguna actividad un total de 300 niños. De ellos, hay 100 que tienen entre 3 y 4 años, de los cuales 82 hacen Inglés y 10 han elegido Multideporte. Se sabe que al grupo de Robótica se han apuntado 83 niños, y hay 105 niños de entre 5 y 6 años que se han apuntado a Inglés.

a) Toma un niño al azar, halla las siguientes probabilidades: $P(MG)$, $P(MUL)$, $P(MP\cap ROB)$, $P(ROB|MP)$ y $P(MG|ING)$.

b) Comprueba que el suceso MUL es independiente de la edad del niño.

Solución:

$P(MP)=\dfrac{100}{300}=\dfrac{1}{3}=0,333\Longrightarrow P(MG)=\dfrac{2}{3}=0,667$

$P(ING|MP)=\dfrac{82}{100}=0,82\Longrightarrow P(ING\cap MP)=P(ING|MP)P(MP)=0,82\cdot 0,333=0,273$

$P(MUL|MP)=\dfrac{10}{100}=0,1\Longrightarrow P(MUL\cap MP)=P(MUL|MP)P(MP)=0,1\cdot 0,333=0,033$

$P(ROB)=\dfrac{83}{300}=0,277$ y

$P(ING|MG)=\dfrac{105}{200}=0,525\Longrightarrow P(ING\cap MG)=P(ING|MG)P(MG)=0,525\cdot 0,667=0,350$

	ING	MUL	ROB	Total
MP	$0,273$	$0,033$		$0,333$
MG	$0,350$			$0,667$
			$0,277$	

$\Longrightarrow$

	ING	MUL	ROB	Total
MP	$0,273$	$0,033$	$0,027$	$0,333$
MG	$0,350$	$0,067$	$0,25$	$0,667$
	$0,623$	$0,1$	$0,277$	

a) $P(MG)=0,667$, $P(MUL)=0,1$, $P(MP\cap ROB)=0,027$

$$P(ROB|MP)=\frac{P(ROB\cap MP)}{P(MP)}=\frac{0,027}{0,333}=0,081$$

$$P(MG|ING)=\frac{P(MG\cap ING)}{P(ING)}=\frac{0,35}{0,623}=0,562$$

b) $P(MUL\cap(MG\cup MP))=0,1$, $P(MUL)=0,1$ y $P(MG\cup MP)=1$, luego $P(MUL\cap(MG\cup MP))=P(MUL)\cdot P(MG\cup MP)\Longrightarrow$ Los sucesos MUL y edad del niño son independientes.

4.12. Murcia

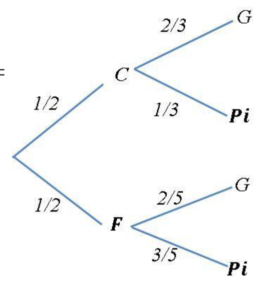
4.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.25 (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).
La probabilidad de que un determinado equipo de fútbol gane cuando juega en casa es $\frac{2}{3}$, y la probabilidad de que gane cuando juega fuera es $\frac{2}{5}$.

a) Sin saber dónde jugará el próximo partido, calcule la probabilidad de que gane.

b) Si ganó el último partido del campeonato, ¿cuál es la probabilidad de que jugara en casa?

Solución: LLamamos G al suceso "gana", Pi al suceso "pierde", C al suceso "en casa" y F al suceso "fuera de casa":



a) $P(G)=P(G|C)P(C)+P(G|F)P(F)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{8}{15}=0,533$

b)
$$P(C|G)=\frac{P(G|C)P(C)}{P(G)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{8}{15}}=\frac{5}{8}=0,625$$

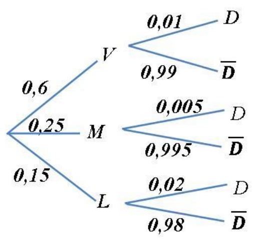
4.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.26 (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).
El 60 % de los coches de una marca se fabrican en su factoría de Valencia, el 25 % en Madrid, y el resto en Lisboa. El 1 % de los coches fabricados en Valencia tiene algún defecto de fabricación, mientras que para los coches fabricados en Madrid y en Lisboa estos porcentajes son del 0,5 % y del 2 %, respectivamente.

a) Elegido al azar un coche de esa marca, calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.

b) Si un coche de esa marca resulta ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en Madrid?

Solución:
LLamamos V al suceso "Valencia", M al suceso "Madrid", L al suceso "Lisboa" y D al suceso "defectuoso":



a) $P(\overline{D})=P(\overline{D}|V)P(V)+P(\overline{D}|M)P(M)+P(\overline{D}|L)P(L)=0,99\cdot 0,6+0,995\cdot 0,25+0,98\cdot 0,15=0,98975$

b)
$$P(M|D)=\frac{P(D|M)P(M)}{P(D)}=\frac{0,005\cdot 0,25}{1-0,98975}=0,122$$

4.13. Galicia

4.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.27 El 40 % de los habitantes de una cierta comarca tienen camelias, el 35 % tienen rosas y el 21 % tienen camelias y rosas. Si se elige al azar a un habitante de esa comarca, calcular las cinco probabilidades siguientes: de que tenga camelias o rosas; de que no tenga ni camelias ni rosas; de que tenga camelias, sabiendo que tiene rosas; de que tenga rosas, sabiendo que tiene camelias; y de que solamente tenga rosas o solamente tenga camelias.

Solución:
LLamamos C al suceso "tiene camelias", R al suceso "tiene rosas"
$P(C) = 0,4$, $P(R) = 0,35$ y $P(C \cap R) = 0,21$

- $P(C \cup R) = P(C) + P(R) - P(C \cap R) = 0,4 + 0,35 - 0,21 = 0,54$
- $P(\overline{C} \cap \overline{R}) = P(\overline{C \cup R}) = 1 - P(C \cup R) = 1 - 0,54 = 0,46$
- $P(C|R) = \dfrac{P(C \cap R)}{P(R)} = \dfrac{0,21}{0,35} = 0,6$
- $P(R|C) = \dfrac{P(R \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,21}{0,4} = 0,525$
- $P(R \cap \overline{C}) + P(C \cap \overline{R}) = P(C \cup R) - P(C \cap R) = 0,54 - 0,21 = 0,33$

Problema 4.28 Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcula $P(A)$ si $P(B) = 0,8$, $P(A \cap B) = 0,2$ y $P(A \cup B)$ es el triple de $P(A)$.

Solución:
$$P(A\cup B) = 3P(A) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Longrightarrow 2P(A) = 0,8-0,2 = 0,6 \Longrightarrow P(A) = \frac{0,6}{2} = 0,3$$

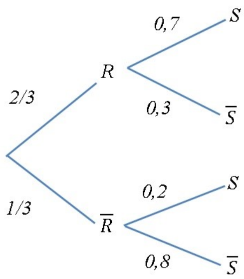
4.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.29 La probabilidad de que un chico recuerde regar su rosal durante una cierta semana es de 2/3. Si se riega al rosal sobrevive con probabilidad 0,7; si no, lo hace con probabilidad 0,2. Al finalizar la semana, el rosal ha sobrevivido. ¿Cuál es la probabilidad de que el chico no lo haya regado?

Solución:
LLamamos R al suceso "riega el rosal", S al suceso "sobrevive"

$$P(S) = P(S|R)P(R) + P(S|\overline{R})P(\overline{R}) = \frac{2}{3}\cdot 0,7 + \frac{1}{3}\cdot 0,2 = \frac{8}{15} = 0,533$$

$$P(\overline{R}|S) = \frac{P(S|\overline{R})P(\overline{R})}{P(S)} = \frac{0,2\cdot\frac{1}{3}}{\frac{8}{15}} = \frac{1}{8} = 0,125$$



Problema 4.30 Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tal que $P(A) = 0,2$ $P(B) = 0,4$ y $P(A \cup B) = 0,5$, Calcula $P(\overline{A})$, $P(\overline{B})$, $P(A \cap B)$, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. Razona si A y B son o

no sucesos independientes.

Solución:

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,2 = 0,8$
- $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,4 = 0,6$
- $P(A \cap P) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,2 + 0,4 - 0,5 = 0,1$
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,1 = 0,9$
- $P(A \cap B) = 0,1 \neq P(A) \cdot P(B) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08 \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

5. Estadística

Teoría

Gráficos:

- Varable discreta: con diagrama de barras.

$$x_i, \;\; p(x_i) = p_i, \;\; \sum p_i = 1$$

$$\text{Media} = \mu = \sum x_i p_i, \;\; \text{Varianza} = \sigma^2 = \sum p_i (x_i - \mu)^2 = \sum p_i x_i - \mu^2$$

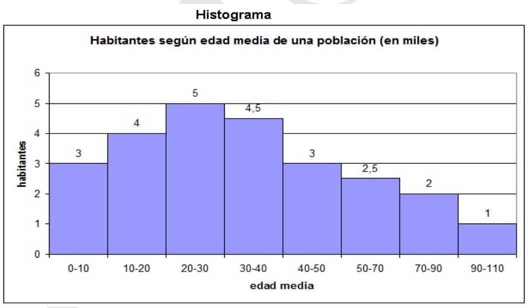
$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$

- Variable continua: histogramas (intervalos)

$$x_i, \;\; f_i,$$

$$\text{Media} = \overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum x_i}, \;\; \text{Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \overline{X})^2}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \overline{X}^2$$

$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$



Distribución Binomial B(n, p):

$$P(X = a) = \binom{n}{a} p^a q^{n-a}$$

p es la probabilidad de éxito y $q = 1 - p$ la probabilidad de fracaso. Por ejemplo, si B$(7, 0, 4) \Longrightarrow$ $n = 7$, $p = 0,4$ y $q = 0,6$:

$$P(X = 2) = \binom{7}{2} 0,4^2 0,6^5 = 0,261$$

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3), \text{ ó}$$

$$P(X \leq 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - (P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7))$$

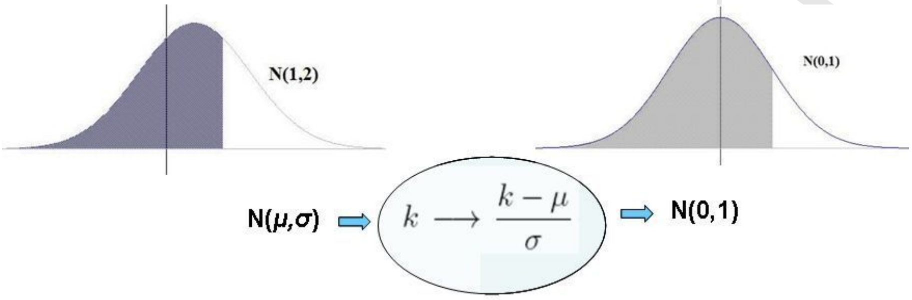
Su Media= $\mu = np$, su Varianza= $\sigma^2 = npq$ y su Desviación Típica= $\sqrt{\text{Varianza}}$.

Distribución Normal N(μ, σ):

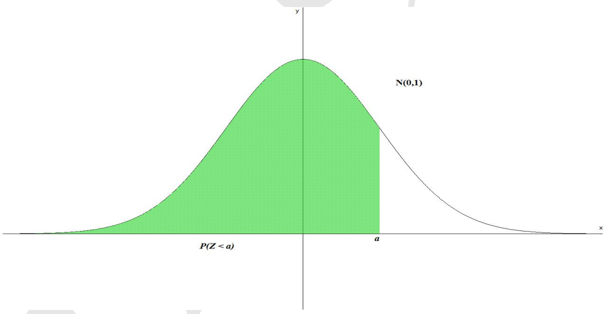
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Tipificación Paso de una normal N(μ, σ) a otra N$(0, 1)$: $k \longrightarrow \dfrac{k-\mu}{\sigma}$, si queremos calcular $P(a < X < b)$ y X es de una normal N(μ, σ) entonces Z seguirá una normal N$(0, 1)$

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$



Cuando una distribución binomial $B(n, p)$ cumple $np > 3$ y $nq > 3$, se aproxima a una normal $N(np, \sqrt{npq})$, si son mayores de 5 la aproximación es perfecta.



$$P(Z > a) = 1 - P(Z < a), \quad P(Z < -a) = 1 - P(Z < a)$$

$$P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$$

La corrección por continuidad de Yate seguirá las siguientes reglas:
$P(x = a) = P(a - 0,5 \leq X \leq a + 0,5)$
$P(X \leq a) = P(X \leq a + 0,5)$
$P(X < a) = P(X \leq a - 0,5)$
$P(X > a) = P(X \geq a + 0,5)$
$P(X \geq a) = P(X \geq a - 0,5)$
Cálculo de $z_{\alpha/2}$ con un **Nivel de confianza** del 95 %: $NC = 0,95 = 1 - \alpha$ ($\alpha =$**Nivel de significación**)$\Longrightarrow$ $\alpha = 0,05$. Para una distribución bilateral tendremos $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025 \Longrightarrow P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975$ se busca en la tabla $N(0, 1)$ y obtenemos $z_{\alpha/2} = 1,96$
Para muestras aleatorias de tamaño n con media $\overline{X}$ de una $N(\mu, \sigma)$ la media $\overline{X}$ se distribuye como una normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
Error: $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Intervalo de Confianza: $(\overline{X}-E,\overline{X}+E)=\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de medias.
Proporciones: Sea $\hat{p}$ proporción de la muestra de tamaño n, se distribuye como una $N\left(p,\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$
Error: $E=z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
Intervalo de Confianza: $(\hat{p}-E,\hat{p}+E)=\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},\hat{p}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de proporciones.

Problemas

5.1. Aragón

5.1.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.1 La probabilidad de que una persona escriba un mensaje de Twitter sin faltas de ortografía es 0,75. Se sabe además que una persona escribe a lo largo del día 20 mensajes de Twitter. A partir de esta información, responde a las siguientes cuestiones.
NO es necesario finalizar los cálculos en ninguna de ellas, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente la mitad de los mensajes escritos en un día, es decir 10, no tengan faltas de ortografía?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ningún mensaje de los 20 escritos en un día tenga faltas de ortografía?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que 18 o más mensajes de los 20 escritos en un día sí tengan faltas de ortografía?

Solución:
LLamamos S: al suceso "sin faltas de ortografía" luego $p = P(S) = 0,75$, $q = 1 - p = 0,25$ y $n = 20$. Se trata de una distribución binomial $B(20; 0,75)$
Tenemos $n = 20 > 10$, $np = 15 > 5$ y $nq = 5 \not> 5$ la aproximación a una normal no cumple la última condición, aunque sería bastante buena.

a) $P(X = 10) = \left(\begin{array}{c} 20 \\ 10 \end{array} \right) 0,75^{10} 0,25^{10} = 0,01$

b) $P(X = 20) = \left(\begin{array}{c} 20 \\ 20 \end{array} \right) 0,75^{20} 0,25^{0} \simeq 0,00317$

c) La probabilidad de que 18 mensajes o más tengan faltas de ortografía es lo mismo que la probabilidad de que dos menos de dos si tengan faltas de ortografía:

$$P(X \le 2) = P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0) = \left(\begin{array}{c} 20 \\ 2 \end{array} \right) 0,75^{2} 0,25^{18} +$$

$$\left(\begin{array}{c} 20 \\ 1 \end{array} \right) 0,75^{1} 0,25^{19} + \left(\begin{array}{c} 20 \\ 0 \end{array} \right) 0,75^{0} 0,25^{20} = 1,610715116 \cdot 10^{-9} \simeq 0$$

5.1.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.2 Un juego de ruleta tiene 25 casillas numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale 2 o múltiplo de 2.

a) Si juega 100 veces, calcule la probabilidad de que gane exactamente 10 veces. (En este apartado, NO es necesario finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen).

b) Si juega 200 veces, calcule la probabilidad de que gane entre 90 y 110 veces, ambos valores incluidos.

Solución:
LLamamos G: al suceso "gana". $p = P(G) = \frac{12}{25} = 0,48$, $q = 1 - p = 0,52$.

a) $n = 100$. Se trata de una distribución binomial $B(100; 0,48)$.Tenemos $n = 100 > 10$, $np = 48 > 5$ y $nq = 52 > 5$ la aproximación a una normal cumple todas las condiciones, luego esta distribución binomial se puede aproximar con una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(48, 5)$.

$$P(X = 10) = P\left(\frac{9,5 - 48}{5} < Z < \frac{10,5 - 48}{5}\right) = P(-7,7 < Z < -7,5) =$$

$$P(Z < -7,5) - P(Z < -7,7) = 1 - P(Z < 7,5) - (1 - P(Z < 7,7)) = 0$$

b) $n = 200$. Se trata de una distribución binomial $B(200; 0,48)$.Tenemos $n = 200 > 10$, $np = 96 > 5$ y $nq = 104 > 5$ la aproximación a una normal cumple todas las condiciones, luego esta distribución binomial se puede aproximar con una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(96; 7,07)$.

$$P(90 \leq X \leq 110) = P\left(\frac{89,5 - 96}{7,07} < Z < \frac{110,5 - 96}{7,07}\right) = P(-0,92 < Z < 2,05) =$$

$$P(Z < 2,05) - P(Z < -0,92) = P(Z < 2,05) - (1 - P(Z < 0,92)) =$$
$$0,9798 - (1 - 0,8212) = 0,801$$

5.2. Asturias

5.2.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.3 Un monitor de tenis compra un cañón para lanzar bolas. En las especificaciones del cañón se indica que falla el lanzamiento el 10 % de la veces.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 20 bolas lanzadas, se tengan exactamente 5 fallos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho falle 2 veces de los 20 lanzamientos?

Nota: Se pueden dejar indicadas las operaciones en potencias, sin necesidad de realizarlas.
Solución:
LLamamos F al suceso "fallo" y tenemos $p = P(F) = 0,1$, $q = 1-p = 0,9$ y $n = 20$. Se trata de una distribución binomial $B(20; 0,1)$ que no podemos aproximar por una normal, ya que $np = 2 < 5$.

a) $P(X = 5) = \binom{20}{5} 0,1^5 0,9^{15} = 0,032$

b) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{20}{0} 0,1^0 0,9^{20} + \binom{20}{1} 0,1^1 0,9^{19} + \binom{20}{2} 0,1^2 0,9^{18} = 0,677$

5.2.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.4 Las calificaciones de un examen en una clase siguen una distribución normal de media $\mu = 20$ y desviación típica $\sigma = 10$: Calcula:

a) La probabilidad de que un alumno obtenga una calificación entre 15 y 25.

b) La calificación que sólo superan o igualan el 20 % de los alumnos.

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(x) = P(Z \le x)$, $F(-0,8416) = 0,2$, $F(0,8416) = 0,8$, $F(0,4) = 0,6554$, $F(0,5) = 0,6915$, $F(0,6) = 0,7257$

Solución:

$$N(20,10)$$

a) $P(15 \le X \le 25) = \left(\frac{15-20}{10} < Z < \frac{25-20}{10}\right) = P(-0,5 < Z < 0,5) = P(Z < 0,5) - P(Z < -0,5) = P(Z < 0,5) - (1 - P(Z < 0,5) = 2P(Z < 0,5) - 1 = 2 \cdot 0,6915 - 1 = 0,383$

b) $P(z > a) = 0,2 \Longrightarrow P(z < a) = 1 - 0,2 = 0,8 \Longrightarrow a = 0,8416$
$a = \dfrac{X - 20}{10} = 0,8416 \Longrightarrow X = 28,416$

5.3. Islas Baleares

5.3.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.5 Las alturas X de los estudiantes de 18 años de un instituto de Palma se puede aproximar por una normal de media $\mu = 1,78$ m y desviación típica $\sigma = 0,65$ m. Se pide:

a) Porcentaje de estudiantes de 18 años del instituto de Palma que miden más de 1,90 m.

b) Tomamos una muestra de 100 estudiantes de 18 años del instituto de Palma y vamos a seleccionar los 30 más altos. ¿Cuál es la altura mínima que ha de tener un estudiante de 18 años del instituto de Palma para ser seleccionado?

Solución:

$$N(1,78; 0,65)$$

a) $P(X \ge 1,9) = \left(Z > \frac{1,9-1,78}{0,65}\right) = P(Z > 0,18) = 1 - P(Z < 0,18) = 1 - 0,5714 = 0,4286$

b) $P(X > a) = 0,3 \Longrightarrow P(X < a) = 1 - 0,3 = 0,7 \Longrightarrow P\left(Z < \dfrac{a - 1,78}{0,65}\right) = 0,7 \Longrightarrow$
$\dfrac{a - 1,78}{0,65} = 0,525 \Longrightarrow a = 2,12$ m.

5.3.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.6 El peso de los adultos de 40 años de una cierta comunidad se comporta como una distribución normal de media $\mu = 85$ kg y desviació típica $\sigma = 15$ kg. Se pide:

a) ¿Qué porcentataje de la población tiene sobrepeso? Entendemos que una persona adulta de 40 años tiene sobrepeso si pesa más de 100 kg.

b) Consideramos el colectivo de los individuos más delgados de la comunidad. Si este colectivo representa el 40 % del total de individuos de la comunidad, ¿cuánto pesa el individuo que representa el valor maximo de esta colección?

Solución:

$$N(85; 15)$$

a) $P(X \geq 100) = \left(Z > \frac{100-85}{15}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$

b) $P(X < a) = 0,4 \Longrightarrow P\left(Z \leq \frac{-(a-85)}{15}\right) = 1 - 0,4 = 0,6 \Longrightarrow \dfrac{-(a-85)}{15} = 0,255 \Longrightarrow a = 81,175$ kg.

5.4. Islas Canarias

5.4.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.7 En un banco se sabe que el tiempo de devolución de un préstamo de 18000 euros sigue una distribución normal de media 60 meses y desviación típica 8 meses. Se elige al azar un préstamo de 18000 euros realizado en dicho banco:

a) Calcular la probabilidad de que dicho préstamo se devuelva como mucho en 70 meses.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que fuera devuelto, al menos en 4 años?

c) ¿Qué porcentaje de préstamos de 18000 euros del mismo banco se formalizan para ser devueltos entre los 4 y los 6 años?

Solución:

$$N(60; 8)$$

a) $P(X \leq 70) = \left(Z < \frac{70-60}{8}\right) = P(Z < 1,25) = 0,8944$

b) $P(X \geq 48) = \left(Z > \frac{48-60}{8}\right) = P(Z > -1,5) = 1 - P(Z < -1,5) = 1 - (1 - P(Z < 1,5)) = P(Z < 1,5) = 0,9332$

c) $P(48 \leq X \leq 72) = P\left(\dfrac{48-60}{8} < Z < \dfrac{72-60}{8}\right) = P(-1,5 < Z < 1,5) = P(Z < 1,5) - P(Z < -1,5) = P(Z < 1,5) - (1 - P(Z < 1,5)) = 2P(Z < 1,5) - 1 = 2 \cdot 0,9332 - 1 = 0,8664$

5.4.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.8 Una compañía que fabrica ventiladores de CPU sabe que el tiempo de vida (en meses) de sus ventiladores se distribuye según una normal, de media igual a 18 meses y desviación típica 3,6 meses. Elegido un ventilador al azar:

a) Calcular la probabilidad de que funcione como mucho 16 meses.

b) Calcular la probabilidad de que funcione al menos 1 año.

c) Calcular la probabilidad de que funcione entre 1 y 2 años.

Solución:

$$N(18; 3,6)$$

a) $P(X \leq 16) = \left(Z < \frac{16-18}{3,6}\right) = P(Z < -0,56) = 1 - P(Z < 0,56) = 1 - 0,7123 = 0,2877$

b) $P(X \geq 12) = \left(Z > \frac{12-18}{3,6}\right) = P(Z > -1,67) = 1 - P(Z < -1,67) = 1 - (1 - P(Z < 1,67)) = P(Z < 1,67) = 0,9525$

c) $P(12 \leq X \leq 24) = P\left(\dfrac{12-18}{3,6} < Z < \dfrac{24-18}{3,6}\right) = P(-1,67 < Z < 1,67) = P(Z < 1,67) - P(Z < -1,67) = P(Z < 1,67) - (1 - P(Z < 1,67)) = 2P(Z < 1,67) - 1 = 2 \cdot 0,9525 - 1 = 0,905$

5.5. Cantabria

5.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.9 El peso de una población sigue una distribución normal de media 70 kg y desviación típica de 10 kg.

a) Calcule el porcentaje de población que pesa entre 65 y 75 kg.

b) Calcule el porcentaje de población que pesa al menos 85 kg.

Solución:

$$N(70; 10)$$

a) $P(65 \leq X \leq 75) = P\left(\frac{65-70}{10} < Z < \frac{75-70}{10}\right) = P(-0,5 < Z < 0,5) = P(Z < 0,5) - P(Z < -0,5) = P(Z < 0,5) - (1 - P(Z < 0,5)) = 2P(Z < 0,5) - 1 = 2 \cdot 0,6915 - 1 = 0,383 \Longrightarrow 38,3\,\%$

b) $P(X \leq 85) = \left(Z < \frac{85-70}{10}\right) = P(Z < 1,5) = 0,9332 \Longrightarrow 93,32\,\%$

5.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.10 Las temperaturas de una ciudad durante el verano han seguido una distribución normal de media 30º y desviación típica de 6º.

a) Calcule la probabilidad de que un día al azar se mida una temperatura de menos de 42º.

b) Calcule la probabilidad de que un día al azar haga entre 25º y 30º.

Solución:

$$N(30; 6)$$

a) $P(X \leq 42) = \left(Z < \frac{42-30}{6}\right) = P(Z < 2) = 0,9772$

b) $P(25 \leq X \leq 30) = P\left(\frac{25-30}{6} < Z < \frac{30-30}{6}\right) = P(-0,83 < Z < 0) = P(Z < 0) - P(Z < -0,83) = P(Z < 0) - (1 - P(Z < 0,83)) = 0,5 - (1 - 0,7967) = 0,2967$

5.6. Castilla León

5.6.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.11 Las notas de Matemáticas II de 500 alumnos presentados al examen de EBAU tienen una distribución normal con media 6,5 y desviación típica 2.

a) Calcule la probabilidad de que un alumno haya obtenido más de 8 puntos.

b) ¿Cuántos alumnos obtuvieron notas menores de 5 puntos?

Solución:

$$N(6,5; 2)$$

a) $P(X \geq 8) = \left(Z > \frac{8-6,5}{2}\right) = P(Z > 0,75) = 1 - P(Z < 0,75) = 1 - 0,7734 = 0,2266$

b) $P(X \leq 5) = P\left(Z < \frac{5-6,5}{2}\right) = P(Z < -0,75) = 1 - P(Z < 0,75) = 1 - 0,7734 = 0,2266$

$nP(X \leq 5) = 500 \cdot 0,2266 = 113,3 \Longrightarrow 113$ alumnos.

5.6.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.12 La temperatura del cuerpo humano sigue una distribución normal de media 37ºC y desviación típica 0,5ºC.

a) Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona esté comprendida entre 36ºC y 38ºC

b) Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona sea menor que 36,5ºC.

Solución:

$$N(37; 0,5)$$

a) $P(36 \leq X \leq 38) = P\left(\frac{36-37}{0,5} < Z < \frac{38-37}{0,5}\right) = P(-2 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -2) = P(Z < 2) - (1 - P(Z < 2)) = 2P(Z < 2) - 1 = 2 \cdot 0,9772 - 1 = 0,9544$

b) $P(X \leq 36,5) = \left(Z < \frac{36,5-37}{0,5}\right) = P(Z < -1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$

5.7. Castilla La Mancha

5.7.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.13 En una clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:

a) Tres chicas.

b) Al menos tres chicos.

Solución:
LLamamos A : chica.

$$p = P(A) = \frac{16}{20} = 0,8 \Longrightarrow B(20; 0,8)$$

a) $P(X = 3) = \binom{5}{3} 0,8^3 0,2^2 = 0,2048$

b) Que haya 3 chicos quiere decir que haya 2 chicas, y que haya 4 chicos quiere decir que haya 1 chica. Esta claro que 5 chicos no puede haber. $P = P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{5}{1} 0,8^1 0,2^3 + \binom{5}{2} 0,8^2 0,2^3 = 0,0576$

Problema 5.14 El tiempo, en horas, empleado en realizar cierta intervención quirúrgica sigue una distribución normal $N(10, 2)$. Calcular razonadamente el porcentaje de estas intervenciones que se pueden realizar:

a) Entre 6,5 y 13 horas.

b) En menos de siete horas.

Solución:

$$N(10;2)$$

a) $P(6,5 \leq X \leq 13) = P\left(\frac{6,5-10}{2} < Z < \frac{13-10}{2}\right) = P(-1,75 < Z < 1,5) = P(Z < 1,5) - P(Z < -1,75) = P(Z < 1,5) - (1 - P(Z < 1,75)) = 0,9332 - (1 - 0,9599) = 2 \cdot 0,9772 - 1 = 0,8931$

b) $P(X \leq 7) = \left(Z < \frac{7-10}{2}\right) = P(Z < -1,5) = 1 - P(Z < 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$

5.7.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.15 El 1 % de los cheques que recibe un banco no tienen fondos. Razona la respuesta de las siguientes preguntas:

a) Si en una hora recibe cinco cheques, ¿cuál es la probabilidad de que tenga algún cheque sin fondos? Redondea el resultado a la centésima.

b) El banco dispone de cinco sucursales en una ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres sucursales de esa ciudad reciban algún cheque sin fondos?

Solución:

$$B(5;0,01)$$

a) $P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} 0,01^0 0,99^5 = 0,049 \simeq 0,05$

b) $B(5;0,05)$ $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} 0,05^3 0,95^2 + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} 0,05^4 0,95^1 + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} 0,05^5 0,95^0 \simeq 0,001$

Problema 5.16 En una de las pruebas de acceso al cuerpo de ingenieros de la Administración Pública se realiza un test de 100 items a 450 opositores. Cada item vale un punto y se supera la prueba si se obtienen al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones obtenidas por los opositores siguen una distribución normal de media 60 puntos y desviación típica 10 puntos, calcula razonadamente:

a) La probabilidad de obtener 75 o más puntos.

b) El número de opositores que obtuvieron menos de 75 puntos.

Solución:

$$N(60;10)$$

a) $P(X \geq 75) = P\left(Z > \frac{75-60}{10}\right) = P(Z > 1,5) = 1 - P(Z < 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$

b) $P(X \leq 75) = \left(Z < \frac{75-60}{10}\right) = P(Z < 1,5) = 0,9332$

$450P(X \leq 75) = 450 \cdot 0,9332 = 419,94$ entre 419 y 420 opositores.

5.8. País Vasco

5.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.17 Lanzamos un dado de seis caras 6000 veces. Calcular la probabilidad de que el número de veces que salga el 5

a) sea superior a 1500.

b) esté comprendido entre 1000 y 1100.

Solución:

$B(6000; 0,167)$, $n = 6000 > 10$, $np = 6000 \cdot 0,167 = 1000 > 5$, $nq = 6000 \cdot 0,833 = 5000 > 5 \Longrightarrow B(6000; 0,167) \approx$

a) $P(X > 1500) = P\left(Z > \dfrac{1500,5 - 1000}{28,87}\right) = P(Z > 17,34) = 1 - P(Z < 17,34) = 1 - 1 = 0$

b) $P(1000 \leq X \leq 1100) = \left(\dfrac{999,5 - 1000}{28,87} < Z < \dfrac{1100,5 - 1000}{28,87}\right) = P(-0,02 < Z < 3,48) == P(Z < 3,48) - P(Z < -0,02) = P(Z < 3,48) - (1 - P(Z < 0,02)) = 1 - 1 + P(Z < 0,02) = 0,5080$

5.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.18 Los resultados obtenidos en una prueba realizada a 500 estudiantes se distribuyen normalmente con media 40 puntos y desviación típica 10 puntos.

a) ¿Qué porcentaje del alumnado tiene una puntuación entre 30 y 60 puntos?

b) ¿Cuántos estudiantes tienen una puntuación superior a 60 puntos?

Solución:

$$N(40; 10)$$

a) $P(30 \leq X \leq 60) = \left(\dfrac{30 - 40}{10} < Z < \dfrac{60 - 40}{10}\right) = P(-1 < Z < 2) == P(Z < 2) - P(Z < -1) = P(Z < 2) - (1 - P(Z < 1)) = 0,9772 - 1 + 0,8413 = 0,8185$

b) $P(X \geq 60) = P\left(Z > \dfrac{60 - 40}{10}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$
$500P(X \geq 60) = 500 \cdot 0,0228 = 11,4$ entre 11 y 12 alumnos.

5.9. Extremadura

5.9.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.19 Supongamos que en una población de Extremadura tienen una estatura que se distribuye según una normal de media 170 cm y desviación típica 10 cm.

a) ¿Qué porcentaje de habitantes miden entre 170 y 185 cm?

b) ¿A partir de qué altura están e 33 % de los habitantes más altos?

Solución:

$$N(170; 10)$$

a) $P(170 \leq X \leq 185) = \left(\frac{170-170}{10} < Z < \frac{185-170}{10}\right) = P(0 < Z < 1,5) = P(Z < 1,5) - P(Z < 0) = 0,9332 - 0,5 = 0,4332$

b) $P(X > a) = P\left(Z > \frac{a-170}{10}\right) = 0,33 \Longrightarrow P\left(Z < \frac{a-170}{10}\right) = 1 - 0,33 = 0,67 \Longrightarrow \frac{a-170}{10} = 0,44 \Longrightarrow a = 174,4$ cm

5.9.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.20 Se estima que el 40 % de los alumnos que comienzan un grado de ingeniería acaban obteniendo el grado. Si se elige al azar a 5 alumnos que comenzaron una ingeniería, calcule:

a) la probabilidad de que los 5 alumnos obtengan el grado de ingeniero.

b) la probabilidad de que como máximo 2 obtengan el grado de ingeniero.

c) la media y la desviación típica de la distribución.

Solución:

$$B(5; 0,4)$$

a) $P(X = 5) = \binom{5}{5} 0,4^5 0,6^0 = 0,01024$

b) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{5}{0} 0,4^0 0,6^5 + \binom{5}{1} 0,4^1 0,6^4 + \binom{5}{2} 0,4^2 0,6^3 = 0,68256$

c) media$= np = 5 \cdot 0,4 = 2$ y la desviación típica$= \sqrt{npq} = \sqrt{5 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = 1,095$.

5.10. Madrid

5.10.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.21 La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10 %. Se pide:

a) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.

b) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

Solución:

a) Se trata de una binomial $B(0,1; 10)$:

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$$

$$1 - \left(\binom{10}{0} 0,1^0 \cdot 0,9^{10} + \binom{10}{1} 0,1^1 \cdot 0,9^9\right) =$$

$$1 - (0,348678 + 0,387420) = 1 - 0,736098 = 0,263902$$

b) Se trata de una distribución binomial $B(200; 0,1)$ con $n = 200$, $p = 0,1$ y $q = 1 - p = 0,9$. Como $np = 200 \cdot 0,1 = 20 > 5$ y $nq = 200 \cdot 0,9 = 180 > 5$ podemos aproximar esta binomial por una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(20; 4,24)$.

$$P(X \geq 10) = P(X > 9,5) = P\left(Z > \frac{9,5 - 20}{4,24}\right) = P(Z > -2,48) =$$

$$1 - P(Z < -2,48) = 1 - (1 - P(Z < 2,48)) = P(z < 2,48) = 0,9934$$

5.10.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.22 Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal.

a) Se sabe que el 40 % del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.

b) Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X, de media 5,6 y desviación típica σ. Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \leq 8,2$ es 0,67, calcule σ.

Solución:

a) Se trata de una binomial $B(8; 0,4)$:

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$$

$$1 - \left(\binom{8}{0} 0,4^0 \cdot 0,6^8 + \binom{8}{1} 0,4^1 \cdot 0,6^7\right) =$$

$$1 - (0,6^8 + 8 \cdot 0,4 \cdot 0,6^7) = 0,8936$$

b) Se trata de una distribución normal $N(5,6; \sigma)$

$$P(X \leq 8,2) = P\left(Z \leq \frac{8,2 - 5,6}{\sigma}\right) = 0,67 \Longrightarrow$$

$$\frac{8,2 - 5,6}{\sigma} = 0,44 \Longrightarrow \sigma = 5,91$$

5.11. La Rioja

5.11.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.23 La distribución del número de rapes capturados por los barcos pesqueros que salen a faenar en una cierta zona se ajusta a una normal de media 220. Se sabe que, tomando un barco al azar la probabilidad de que capture más de 250 es 0,1587.

a) Calcula la desviación típica de la distribución.

b) Calcula el número de rapes que un barco debe capturar para estar en el percentil 95.

Solución:

$$N(220; \sigma)$$

a) $P(X \geq 250) = \left(Z > \dfrac{250-220}{\sigma}\right) = 1 - \left(Z < \dfrac{30}{\sigma}\right) = 0,1587 \Longrightarrow \left(Z < \dfrac{30}{\sigma}\right) = 1 - 0,1587 = 0,8413 \Longrightarrow \dfrac{30}{\sigma} = 1 \Longrightarrow \sigma = 30$

$$N(220;30)$$

b) $P(X \leq a) = P\left(Z < \dfrac{a-220}{30}\right) = 0,95 \Longrightarrow \dfrac{a-220}{30} = 1,645 \Longrightarrow a = 269,35$. El número de rapes debe de ser de 269.

5.11.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.24 El peso medio según la OMS de un niño de 5 años sigue una distribución normal de media 18,5 kg. y desviación típica 2,25 kg. Si se elige un niño al azar. Halla el porcentaje de niños

a) cuyo peso es superior a 23 kg.

b) cuyo peso está entre 15 y 23 kg.

$$N(18,5;2,25)$$

a) $P(X \geq 23) = \left(Z > \dfrac{23-18,5}{2,25}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

b) $P(15 \leq X \leq 23) = \left(\dfrac{15-18,5}{2,25} < Z < \dfrac{23-18,5}{2,25}\right) = P(-1,56 < Z < 2) =$
$= P(Z < 2) - P(Z < -1,56) = P(Z < 2) - (1 - P(Z < 1,56)) =$

$= 0,9772 - 1 + 0,9406 = 0,9178$

5.12. Murcia

5.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.25 (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).
El tiempo de duración de las bombillas de una cierta marca, medido en horas, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Se sabe que el 69,50 % de las bombillas duran menos de 5061,2 horas, y que el 16,60 % de de las bombillas duran más de 5116,4 horas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla de esta marca dure entre 5061,2 y 5116,4 horas?

b) Calcule la media y la desviación típica de esta distribución normal.

Solución:

$$N(\mu,\sigma)$$

a) $P(X \leq 5061,2) = 0,6950$ y $P(X \geq 5116,4) = 0,1660 \Longrightarrow P(X \leq 5116,4) = 1 - 0,1660 = 0,834$

$P(5061,2 \leq X \leq 5116,4) = P(X \leq 5116,4) - P(X \leq 5061,2) = 0,834 - 0,695 = 0,139$

b)

$$P(X \leq 5061,2) = \left(\frac{5061,2-\mu}{\sigma}\right) = 0,6950 \Longrightarrow \frac{5061,2-\mu}{\sigma} = 0,51 \Longrightarrow 0,51\sigma + \mu = 5061,2$$

$$P(X \leq 5116,4) = \left(\frac{5116,4-\mu}{\sigma}\right) = 0,834 \Longrightarrow \frac{5116,4-\mu}{\sigma} = 0,97 \Longrightarrow 0,97\sigma + \mu = 5116,4$$

$$\left\{\begin{array}{l} 0,51\sigma + \mu = 5061,2 \\ 0,97\sigma + \mu = 5116,4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu = 5000 \\ \sigma = 120 \end{array}\right.$$

5.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.26 (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).
La probabilidad de que una flecha dé en la diana es 0,40. Si se lanzan 9 flechas, determine:

a) Qué tipo de distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de flechas que dan en la diana.

b) Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución.

c) Cuál es la probabilidad de que al menos 5 flechas den en la diana.

Solución:

a) $B(9; 0,4)$

b) Media= $np = 9 \cdot 0,4 = 3,6$ y la desviación típica= $\sqrt{npq} = \sqrt{9 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = 1,47$. Esta distribución no se podría ajustar por una normal.

c) $P(X \geq 5) = P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)+P(X=9) = \left(\begin{array}{c} 9 \\ 5 \end{array}\right) 0,4^5 \cdot 0,6^4 + \left(\begin{array}{c} 9 \\ 6 \end{array}\right) 0,4^6 \cdot 0,6^3 + \left(\begin{array}{c} 9 \\ 7 \end{array}\right) 0,4^7 \cdot 0,6^2 + \left(\begin{array}{c} 9 \\ 8 \end{array}\right) 0,4^8 \cdot 0,6^1 + \left(\begin{array}{c} 9 \\ 9 \end{array}\right) 0,4^9 \cdot 0,6^0 = 0,26656768$

5.13. Galicia

5.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.27 Si en un auditorio hay 50 personas, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 hayan nacido en el mes de enero?

Solución:
Sea p la probabilidad de que una persona haya nacido en enero: $p = \dfrac{31}{365} = 0,085 \Longrightarrow q = 1 - 0,085 = 0,915$

$$B(50; 0,085)$$

Media= $np = 50 \cdot 0,085 = 4,24$. Esta distribución no se podría ajustar por una normal.
$P(X \geq 2) = 1-(P(X=0)+P(X=1)) = 1-\left(\left(\begin{array}{c} 50 \\ 0 \end{array}\right) 0,085^0 \cdot 0,915^{50} + \left(\begin{array}{c} 50 \\ 1 \end{array}\right) 0,085^1 \cdot 0,915^{49}\right) = 1 - 0,934$

Problema 5.28 En un determinado lugar, la temperatura máxima durante el mes de julio sigue una distribución normal de media 25º C y desviación típica 4º C. Calcula la probabilidad de que la temperatura máxima de un cierto día esté comprendida entre 21ºC y 27,2ºC. ¿En cuántos días del mes se espera que la temperatura máxima permanezca dentro de ese rango?

Solución:

$$N(25,4)$$

$$P(21 \leq X \leq 27,2) = P\left(\frac{21-25}{4} < Z < \frac{27,2-25}{4}\right) = P(-1 < Z < 0,55) =$$

$$P(Z < 0,55) - P(Z < -1) = P(Z < 0,55) - (1 - P(Z < 1)) = 0,7088 - (1 - 0,8413) = 0,5501$$

Como julio tiene 31 días: $31 \cdot P(21 \leq X \leq 27,2) = 31 \cdot 0,5501 = 17,0531 \simeq 17$ días aproximadamente.

5.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.29 Una fábrica produce piezas cuyo grosor sigue una distribución normal de media 8 cm. Y desviación típica 0,01 cm. Calcula la probabilidad de que una pieza tenga un grosor comprendido entre 7,98 y 8,021 cm.

Solución:

$$N(8;0,01)$$

$$P(7,98 \leq X \leq 8,021) = P\left(\frac{7,98-8}{0,01} < Z < \frac{8,021-8}{0,01}\right) = P(-2 < Z < 2,1) =$$

$$P(Z < 2,1) - P(Z < -2) = P(Z < 2,1) - (1 - P(Z < 2)) = 0,9821 - (1 - 0,9772) = 0,9593$$

Problema 5.30 La probabilidad de que un determinado jugador de futbol marque gol desde el punto de penalti es $p = 0,7$. Si lanza cinco penaltis calcula las siguientes probabilidades: de que no marque ningún gol; de que marque por lo menos dos goles; y de que marque 5 goles. Si lanza 2100 penaltis, calcula la probabilidad de que marque por lo menos 1450 goles. Se está asumiendo que los lanzamientos son sucesos independientes.

Solución:

$$B(5;0,7)$$

- $P(X=0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} 0,7^0 \cdot 0,3^5 = 0,00243$

- $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) =$

  $= 1 - \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} 0,7^0 \cdot 0,3^5 + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} 0,7^1 \cdot 0,3^4\right) = 0,96922$

- $P(X=5) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} 0,7^5 \cdot 0,3^0 = 0,16807$

- Si $n = 2100 > 10$, $np = 2100 \cdot 0,7 = 1470 > 5$ y $nq = 2100 \cdot 0,3 = 630 > 5 \Longrightarrow$

  $B(2100; 0,7) \approx N(np, \sqrt{npq}) = N(1470; 21)$

  $P(X \geq 1450) = P\left(Z > \dfrac{1449,5 - 1470}{21}\right) = P(Z > -0,98) = 1 - P(Z < -0,98) =$
  $= 1 - (1 - P(Z < 0,98)) = P(Z < 0,98) = 0,8365$