Problemas de Matemáticas II Aplicadas a las Ciencias Sociales

Todas las comunidades autónomas

(Selectividad 2023-Ordinaria y Extraordinaria)

Prof: **Isaac Musat Hervás**

última actualización:

5 de noviembre de 2023

Cuando las leyes de la matemática
se refieren a la realidad,
no son ciertas;
cuando son ciertas,
no se refieren a la realidad.
Albert Einstein

Índice general

Capítulo 1

Andalucía

1.1. Ordinaria

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.

c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.

d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Bloque A

Problema 1.1.1 (2,5 puntos) Sean la función $F(x,y) = 5x - 3y$ y la región del plano R definida mediante las inecuaciones

$$2x - 3y \leq 1; \quad 4x + y \leq 9; \quad x + y \leq 5; \quad 9x - y \geq 0; \quad y \geq 0$$

a) (1,3 puntos) Dibuje la región R y calcule sus vértices.

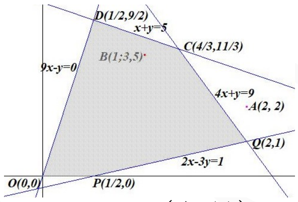
b) (0,5 puntos) Indique razonadamente si los puntos $A(2,2)$ y $B(1;3,5)$ pertenecen a la región R.

c) (0,7 puntos) Obtenga los puntos de la región R donde F alcanza el máximo y el mínimo y calcule sus correspondientes valores.

Solución:

a) El recinto R (región factible):

$$\begin{cases} 2x-3y\leq 1 \\ 4x+y\leq 9 \\ x+y\leq 5 \\ 9x-y\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$



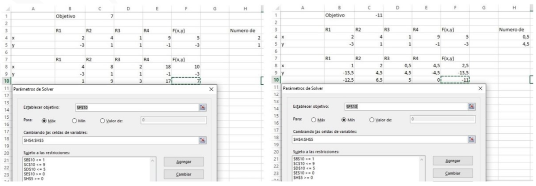
Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $P\left(\frac{1}{2},0\right)$, $Q\,(2,1)$, $C\left(\frac{4}{3},\frac{11}{3}\right)$ y $D\left(\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right)$.

El punto $A(2,2)\notin R$ y el $B(1;3,5)\in R$, el punto A no cumple las condiciones para ser una solución, en cambio el punto B si las cumple aunque no sea la solución óptima.

b) La función objetivo: $F(x,y)=5x-3y$

$$\begin{cases} F\,(0,0)=0 \\ F\left(\frac{1}{2},0\right)=2,5 \\ F(2,1)=7 \text{ Máximo} \\ F\left(\frac{4}{3},\frac{11}{3}\right)=-4,33 \\ F\left(\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right)=-11 \text{ Mínimo} \end{cases}$$

Solución por solver :



El máximo se encuentra en el punto $Q\,(2,1)$ y vale 7.

El mínimo se encuentra en el punto $D\left(\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right)$ y vale -11.

Problema 1.1.2 (2,5 puntos) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule los valores del parámetro a para los que tanto A como B admitan inversa.

b) (1,5 puntos) Para $a=1$, halle una matriz X que satisfaga $A\cdot X\cdot B=C$

Solución:

a) $|A|=a(a-2)=0\Longrightarrow\ a=0$ y $a=2\Longrightarrow\exists\,A^{-1}\ \ \forall\,a\in\mathbb{R}-\{0,2\}$
$|B|=-2+a=0\Longrightarrow\ a=2\Longrightarrow\exists\,B^{-1}\ \ \forall\,a\in\mathbb{R}-\{2\}$
Para que tengan inversa las dos matrices $\forall\,a\in\mathbb{R}-\{0,2\}$.

b) Si $a=1$ las matrices A y B tienen inversa:

$$A\cdot X\cdot B=C\Longrightarrow\ X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Bloque B

Problema 1.1.3 (2,5 puntos) Se considera la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

a) (1 punto) Halle los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos de f y su curvatura.

b) (0,5 puntos) Represente gráficamente la función f.

c) (1 punto) Calcule el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Solución:

a)
- ☛ Punto de corte con OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0,0)$
  Puntos de corte con OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Longrightarrow (0,0)$, $(1,0)$ y $(2,0)$
- ☛ $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 0 \Longrightarrow x = 1,58$ y $x = 0,42$

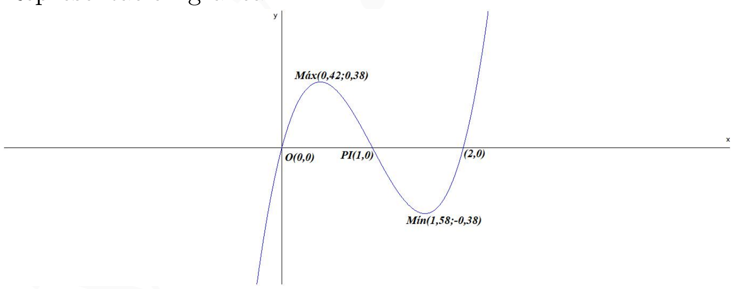
	$(-\infty; 0,42)$	$(0,42; 1,58)$	$(1,58; \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

  La función es creciente en el intervalo $(-\infty; 0,42) \cup (1,58; \infty)$
  La función es decreciente en el intervalo $(0,42; 1,58)$.
  Tiene un máximo relativo en $(0,42; 0,38)$.
  Tiene un mínimo relativo en $(1,58; -0,38)$.
- ☛ $f''(x) = 6x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 1$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

  La función es convexa $\frown$ en el intervalo $(-\infty, 1)$
  La función es cóncava $\smile$ en el $(1, \infty)$.
  La función tiene un punto de inflexión en $(1, 0)$

b) Representación gráfica:



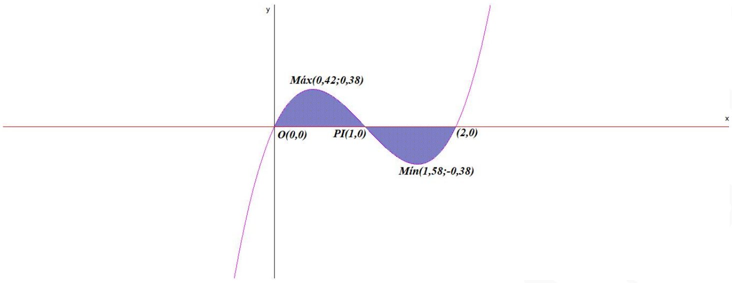
c) Tenemos dos áreas $S_1 : [0,1]$ y $S_2 : [1,2]$

$$F(x) = \int (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

$$S_1 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{4}$$

$$S_2 = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx = F(2) - F(1) = -\frac{1}{4}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{1}{2} = 0,5\ u^2$$



Problema 1.1.4 (2,5 puntos) Se desea analizar el valor de las acciones de una empresa en un día, La función $\nu(t)$ nos indica el valor, en euros, de cada acción de la empresa en función del tiempo t, medido en horas, a partir de la hora de apertura del mercado. De la función $\nu(t)$ se conoce que su variación instantánea es

$$\nu'(t) = t^2 - 5t + 6, \quad t \in [0, 6]$$

a) (0,75 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función ν.

b) (0,75 puntos) Si en el momento de la apertura del mercado se conoce que $\nu(0) = 10$, halle la función v.

c) (0,5 puntos) Si un inversor compró 3000 de estas acciones en el instante $t = 2$ y posteriormente las vendió en el instante $t = 4$, indique a cuánto ascendió la ganancia o la pérdida que obtuvo el inversor con esta gestión.

d) (0,5 puntos) ¿En qué momentos debería haber realizado este inversor las gestiones de compra y de venta para que la ganancia hubiese sido máxima? Justifique su respuesta.

Solución:

a) $\nu'(t) = t^2 - 5t + 6 = 0 \Longrightarrow t = 2$ y $t = 3$

	$(0,2)$	$(2,3)$	$(3,6)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(0,2) \cup (3,6)$
La función es decreciente en el intervalo $(2,3)$.
Tiene un máximo relativo en $x = 2$.
Tiene un mínimo relativo en $x = 3$.

b) $\nu(t) = \int (t^2 - 5t + 6)\,dt = \frac{t^3}{3} - 5\frac{t^2}{2} + 6t + C$, como $\nu(0) = 10 \Longrightarrow C = 10$, luego

$$\nu(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} + 6t + 10$$

c) $3000\nu(2) = 3000 \cdot \dfrac{44}{3} = 44000$€
$3000\nu(4) = 3000 \cdot \dfrac{46}{3} = 46000$€
Hay una ganancia de $46000 - 44000 = 2000$€

d) Hemos calculado los máximos y mínimos relativos, hay que analizar si son absolutos. $\nu(0) = 10$, $\nu(6) = 28$, $\nu(2) = \dfrac{44}{3}$ y $\nu(3) = \dfrac{29}{2}$. El máximo absoluto se encuentra en $t = 6$, $\nu(6) = 28$€ es el mayor valor que ha tenido cada acción en este periodo. El mínimo absoluto es en $t = 0$ con $\nu(0) = 10$€. Luego el inversor debía comprar en $t = 0$ y vender en $t = 6$ con un beneficio por acción de 18€.

Bloque C

Problema 1.1.5 (2,5 puntos) Disponemos de una moneda trucada en la que la probabilidad de obtener cara, al lanzarla, es el doble de la de obtener cruz.

a) (0,5 puntos) Halle la probabilidad de que, al lanzar la moneda, se obtenga cara.

b) (0,75 puntos) Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga una cara y una cruz sin importar el orden.

c) (0,5 puntos) Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga al menos una cara.

d) (0,75 puntos) Si al lanzar la moneda dos veces observamos que ha salido al menos una cara, halle la probabilidad de que se obtengan dos caras.

Solución:
Sean C cara y X cruz.

a) Cada tres casos posibles dos son favorables: $P(C) = \dfrac{2}{3}$

b) $P(C \cap X) + P(X \cap C) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$

c) $P(\text{al menos una cara}) = 1 - P(X \cap X) = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{9}$

d) Sea A :"al menos una cara" y $B : C \cap C$:
$P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \dfrac{1}{2}$

Problema 1.1.6 (2,5 puntos) En una base de datos de correos electrónicos se ha observado que el 20 % de los correos recibidos son spam. Además, se ha observado que la palabra "lottery" ha aparecido en el 40 % de los correos que son spam y en el 0,6 % de los correos que no lo son.

a) (1,25 puntos) Halle la probabilidad de que en un correo elegido al azar en el que aparezca la palabra "lottery" sea spam.

b) (0,5 puntos) Halle la probabilidad de que un correo elegido al azar en el que no aparezca la palabra "lottery" no sea spam.

c) (0,75 puntos) Si un correo se etiqueta como spam si aparece la palabra “lottery” y como no spam si esta palabra no aparece, calcule la probabilidad de que un correo se etiquete incorrectamente.

Solución:

Sean L “lottery” y S spam.
$P(S) = 0,2$, $P(L|S) = 0,4$ y $P(L|\overline{S}) = 0,006$.
$P(\overline{S}) = 0,8$, $P(L \cap S) = P(L|S)P(S) = 0,4 \cdot 0,2 = 0,08$ y $P(L \cap \overline{S}) = P(L|\overline{S})P(\overline{S}) = 0,006 \cdot 0,8 = 0,0048$

	L	$\overline{L}$	Total
S	$0,08$		$0,2$
$\overline{S}$	$0,0048$		$0,8$
Total	$0,0848$		1

$\Longrightarrow$

	L	$\overline{L}$	Total
S	$0,08$	$0,12$	$0,2$
$\overline{S}$	$0,0048$	$0,7952$	$0,8$
Total	$0,0848$	$0,9152$	1

a) $P(S|L) = \dfrac{P(S \cap L)}{P(L)} = \dfrac{0,08}{0,0848} = 0,9434$

b) $P(\overline{S}|\overline{L}) = \dfrac{P(\overline{S} \cap \overline{L})}{P(\overline{L})} = \dfrac{0,7952}{0,9152} = 0,8689$

c) $P(\overline{S} \cap L) + P(S \cap \overline{L}) = 0,0048 + 0,12 = 0,1248$

Bloque D

Problema 1.1.7 (2,5 puntos) Se pide:

a) (1,25 puntos) Una población está dividida en cuatro estratos de 250, 300, 400 y 350 individuos. Realizado un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional se han seleccionado 20 individuos del primer estrato. Determine el tamaño de la población, el tamaño de la muestra y el número de individuos seleccionados de los tres restantes estratos.

b) (1,25 puntos) En un centro de enseñanza la calificación media de los estudiantes fue de 6,4 puntos con una desviación típica de 0,7 puntos. Se seleccionó aleatoriamente una muestra de 49 estudiantes.
b1) (0,25 puntos) Indique la distribución que sigue la media de las muestras de tamaño 49.
b2) (1 punto) Calcula la probabilidad de que la media de las calificaciones de los estudiantes de una de esas muestras esté comprendida entre 6,3 y 6,8 puntos.

Solución:

a) $n = 250 + 300 + 400 + 350 = 1300$
$\dfrac{20 \cdot 1300}{250} = 104$ de toda la población.
$\dfrac{20 \cdot 300}{250} = 24$ del segundo estrato.
$\dfrac{20 \cdot 400}{250} = 32$ del tercer estrato.
$\dfrac{20 \cdot 350}{250} = 28$ del cuarto estrato.
$24 + 32 + 28 = 104$

b) $N(6,4;0,7)$

b1) $\overline{X} \approx \left(6,4;\dfrac{0,7}{\sqrt{49}}\right) = N(6,4;0,1)$

b2) $P(6,3 \le \overline{X} \le 6,8) = P\left(\dfrac{6,3-6,4}{0,1} \le Z \le \dfrac{6,8-6,4}{0,1}\right) = P(-1 \le Z \le 4) =$
$P(Z \le 4) - P(Z \le -1) = P(Z \le 4) - (1 - P(Z \le 1)) = 0,99997 - (1 - 0,8413) = 0,84127$

Problema 1.1.8 Se desea estimar la proporción de donantes de sangre en una universidad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 400 personas de esa universidad, resultando que 64 son donantes de sangre.

a) (1.25 puntos) Calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 98 %, para estimar la proporción poblacional de donantes de sangre.

b) (1.25 puntos) Si el nivel de confianza es del 95 %, calcule el error máximo cometido. Razone si este error será mayor o menor al disminuir el nivel de confianza.

Solución:

$$n = 400 \;\; \hat{p} = \frac{64}{400} = 0,16, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,84$$

a) $NC = 98\,\% = 0,98 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,02 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,01$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,99 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,325$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,325\sqrt{\frac{0,16 \cdot 0,84}{400}} = 0,0426$$

$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,16-0,0426; 0,16+0,0426) = (0,1174; 0,2026) = (11,74\,\%, 20,26\,\%)$

b) $NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,16 \cdot 0,84}{400}} = 0,0360$$

El error ha disminuido al disminuir el nivel de confianza.

1.2. Extraordinaria

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.

c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.

d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Bloque A

Problema 1.2.1 (1,5 puntos) Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1,5 puntos) Pruebe que se verifica que $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\left(A^2 - 4A + 5I_3\right)$.

b) (1 punto) Dada la ecuación matricial $X^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, determine la dimensión de X y resuelva la ecuación.

Solución:

a) $|A| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{2}\left(A^2 - 4A + 5I_3\right) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

b) $\underset{n\times m}{X^t} \cdot \underset{3\times 3}{A} = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}} \Longrightarrow n = 2 \text{ y } m = 3 \Longrightarrow \underset{2\times 3}{X^t} \Longrightarrow \underset{3\times 2}{X}$

$$X^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow X^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 1.2.2 (2,5 puntos) Un artesano decide montar dos tipos de anillos utilizando dos tipos de piedras semipreciosas, una de mayor calidad que otra. Para montar uno de los anillos tarda 20 minutos y utiliza 1 de las piedras de mayor calidad y 2 de las de menor calidad. Para el otro tarda 50 minutos y utiliza 3 piedras de mayor calidad y 1 de menor calidad.
Semanalmente, el artesano dispone de 200 piedras de mayor calidad y 150 de menor calidad. Además, quiere trabajar al menos 1900 minutos a la semana.

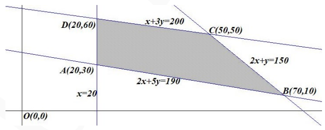
Sabiendo que el primer tipo de anillo se vende a 21€, el segundo a 50€ y que deben fabricarse al menos 20 anillos del primer tipo a la semana, determine cuántos anillos de cada tipo deben montarse para maximizar el valor de la venta. ¿A cuánto asciende dicho valor?

Solución:

Sea x anillos A e y anillos B.

	tiempo	mayor calidad	menor calidad	precio de venta
A	20	1	2	21
B	50	3	1	50
	≥ 1900	≤ 200	≤ 150	

$$S: \begin{cases} 20x + 50y \geq 1900 \\ x + 3y \leq 200 \\ 2x + y \leq 150 \\ x \geq 20 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 5y \geq 190 \\ x + 3y \leq 200 \\ 2x + y \leq 150 \\ x \geq 20 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

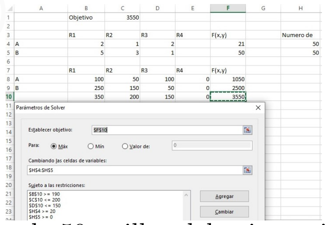


Los vértices a estudiar serán: $A(20, 30)$, $B(70, 10)$, $C(50, 50)$ y $D(20, 60)$.

$f(x, y) = 21x + 50y$

$$\begin{cases} f(20, 30) = 1920 \\ f(70, 10) = 1970 \\ f(50, 50) = 3550 \Longleftarrow \text{Máximo} \\ f(20, 60) = 3420 \end{cases} \Longrightarrow$$

Solución por solver :



El mayor valor de venta es de 3550€ y corresponde a la fabricación de 50 anillos del primer tipo (A) y a 50 del segundo (B).

Bloque B

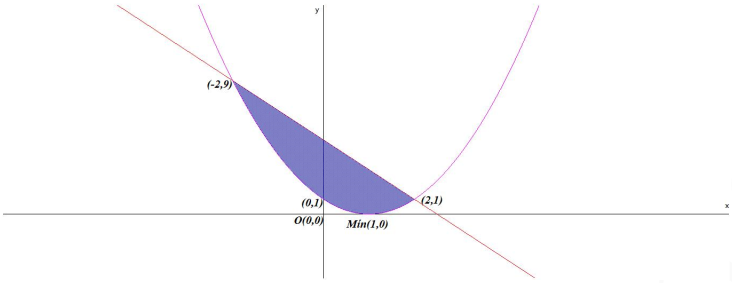
Problema 1.2.3 (2,5 puntos) El área quemada de la región plana de la cubierta de plástico de un invernadero, coincide con el área de la región acotada delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = (x-1)^2$ y $g(x) = 5 - 2x$ donde x está expresado en metros.

a) (1 punto) Represente gráficamente la zona deteriorada.

b) (1,5 puntos) Para reparar la región quemada, se ha de utilizar plástico cuyo coste es de 15 euros por metro cuadrado. Si en el trabajo de reparación se desperdicia la tercera parte del plástico adquirido, ¿Cuánto costará el plástico comprado?

Solución:

a) $f(x) = (x-1)^2 \Longrightarrow f'(x) = 2(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 1$
$f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(1) = 2 > 0 \Longrightarrow (1, 0)$ es un mínimo relativo. La función corta al eje de ordenadas en $(0, 1)$.
$g(x)$ es una recta que corta a $f(x)$ en $f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 - 2x + 1 = 5 - 2x \Longrightarrow x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$
Los puntos de corte entre las dos curvas son $(-2, 9)$ y $(2, 1)$.



b) $S=\displaystyle\int_{-2}^{2}(g(x)-f(x))\,dx=\int_{-2}^{2}(-x^2+4)\,dx=-\frac{x^3}{3}+4x\Big]_{-2}^{2}=\frac{32}{3}\ \text{m}^2$

Si A es el área del plástico comprado $A-\dfrac{A}{3}=\dfrac{32}{3}\Longrightarrow A=16\ \text{m}^2$ lo que supone un coste de $16\cdot 15€=240€$

Problema 1.2.4 (2,5 puntos) Sea la función $f(t)=\dfrac{12t-24}{t+3},\quad t\geq 0$

a) (1,5 puntos) Represente gráficamente la función f, determinando los puntos de corte con los ejes coordenados y las ecuaciones de las asíntotas, y estudiando la monotonía y la curvatura de f.

b) Si la función f representa los beneficios de una empresa, en millones de euros, donde t indica los años de vida de la empresa

b1) (0,5 puntos) ¿A partir de qué año la empresa deja de tener pérdidas? Justifique la respuesta.

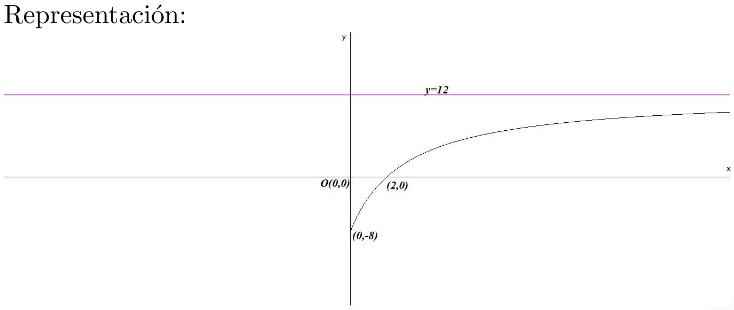
b2) (0,5 puntos) A medida que pasan los años, ¿están limitados los beneficios? En caso afirmativo, ¿cuál es su límite y por qué?

Solución:

a) $f(t)=\dfrac{12t-24}{t+3}\Longrightarrow f'(t)=\dfrac{60}{(t+3)^2}\Longrightarrow f''(t)=-\dfrac{120}{(t+3)^3}$

- ☛ $\text{Dom}(f)=[0,\infty)$
- ☛ Puntos de Corte:
  - Con OY hacemos $t=0\Longrightarrow f(0)=-8\Longrightarrow(0,-8)$
  - Con OX hacemos $f(t)=0\Longrightarrow \dfrac{12t-24}{t+3})=0\Longrightarrow t=2\Longrightarrow(2,0)$
- ☛ Monotonía: $f'(t)>0$, la función no tiene extremos relativos y es creciente en todo el dominio de la función.
- ☛ Curvatura: $f''(t)<0\Longrightarrow f$ no tiene puntos de inflexión y es convexa $(\frown)$ en todo el dominio de la función.
- ☛ Asíntotas:
  - Verticales: No tiene, $t=-3$ no pertenece al dominio de la función.
  - Horizontales: $y=12$
$$\lim_{t\to\infty}\frac{12t-24}{t+3}=12$$
  - Oblicuas: No hay por haber horizontales.

☛ Representación:



b) b1) Como puede verse en la gráfica la empresa deja de tener pérdidas a partir del segundo año. (Punto de corte con el eje de abscisas y la función es siempre creciente)

b2) Los beneficios están limitados a medida que pasan los años por 12 millones de euros. (Hay una asíntota horizontal en $y = 12$)

Bloque C

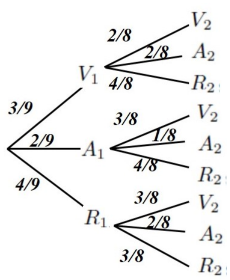
Problema 1.2.5 (2,5 puntos) Una caja contiene 3 fichas verdes, 2 fichas azules y 4 fichas rojas. Un juego consiste en realizar dos extracciones, sin reemplazamiento, de tal manera que el jugador que saque dos fichas azules gana el primer premio, el jugador que saque dos fichas verdes gana el segundo premio y el jugador que, de las dos fichas, una sea azul y otra de color diferente gana el tercer premio.

a) (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que un jugador consiga el primer o segundo premio.

b) (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que un jugador gane el tercer premio.

c) (1 punto) Sabiendo que un jugador ha obtenido premio, ¿Cuál es la probabilidad de que haya ganado el tercer premio?

Solución:
Sean V_1 verde en la primera extracción, A_1 azul en la primera extracción, R_1 rojo en la primera extracción, V_2 verde en la segunda extracción, A_2 azul en la segunda extracción y R_2 rojo en la segunda extracción.



a) $P(\text{primero o segundo premio}) = P(A_1 \cap A_2) + P(V_1 \cap V_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) + P(V_2|V_1)P(V_1) = \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{8} \cdot \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{9} \simeq 0,1111$

b) $P(\text{tercer premio}) = P(A_1 \cap V_2) + P(A_1 \cap R_2) + P(V_1 \cap A_2) + P(R_1 \cap A_2) = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{2}{9} + \dfrac{4}{8} \cdot \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{8} \cdot \dfrac{3}{9} + \dfrac{2}{8} \cdot \dfrac{4}{9} = \dfrac{7}{18} \simeq 0,3889$

c) Sean A ha obtenido el primer premio, B ha obtenido el segundo y C ha obtenido el tercero.
$P(C|A \cup B \cup C) = \dfrac{P(C \cap (A \cup B \cup C))}{P(A \cup B \cup C)} = \dfrac{P(C)}{P(C \cup (A \cup B))} = \dfrac{\frac{7}{18}}{P(C) + P(A \cup B) - P(C \cap (A \cup B))} = \dfrac{\frac{7}{18}}{\frac{7}{18} + \frac{1}{9} - 0} = \dfrac{7}{9} \simeq 0,7778$

Problema 1.2.6 (2,5 puntos) Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,3$ y $P(A|B) = 0,6$. Se pide:

a) (0,5 puntos) $P(A \cup B)$

b) (0,75 puntos) $P(A - B) + P(B - A)$

c) (0,75 puntos) $P(B|A^c)$

d) (0,5 puntos) Razone si los sucesos A y B son independientes, ¿Son incompatibles?

Solución:

Por comodidad y costumbre utilizo $A^c = \overline{A}$

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0,6 \cdot 0,3 = 0,18$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,3 - 0,18 = 0,72$

b) $P(A - B) + P(B - A) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0,6 + 0,3 - 2 \cdot 0,18 = 0,54$

c) $P(B|\overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \dfrac{0,3 - 0,18}{1 - 0,6} = 0,3$

d) $P(A \cap B) = 0,18$ y $P(A) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,3 = 0,18 \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Longrightarrow A$ y B son independientes.
Para que sean incompatibles tienen que ser $A \cap B = \varnothing \Longrightarrow P(A \cap B) = 0$, luego no son incompatibles.

Bloque D

Problema 1.2.7 (2,5 puntos)

a) (1 punto) Un gimnasio establece sus tarifas por grupos de edad: juvenil, adulto y senior. Tiene matriculados 25 juveniles, 75 adultos y 50 seniors. Se quiere seleccionar una muestra de 30 personas del gimnasio utilizando un muestreo con afijación proporcional. ¿Cuál será la composición que debe tener dicha muestra?

b) (1,5 puntos) Dada la población $\{9,\ 11,\ 13,\ 18,\ 20\}$, calcule la varianza de la distribución de las medias muestrales de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple.

Solución:

a) $n = 25 + 75 + 50 = 150$
Juveniles= $\dfrac{25}{150} \cdot 30 = 5$ plazas.
Adultos= $\dfrac{75}{150} \cdot 30 = 15$ plazas.
Seniors= $\dfrac{50}{150} \cdot 30 = 10$ plazas.

b) Muestras de tamaño 2:
$M_1 = \{9, 11\}$, $M_2 = \{9, 13\}$, $M_3 = \{9, 18\}$, $M_4 = \{9, 20\}$, $M_5 = \{11, 13\}$, $M_6 = \{11, 18\}$, $M_7 = \{11, 20\}$, $M_8 = \{13, 18\}$, $M_9 = \{13, 20\}$ y $M_{10} = \{18, 20\}$.
Sus medias:

$\overline{X_1} = 10$, $\overline{X_2} = 11$, $\overline{X_3} = 13,5$, $\overline{X_4} = 14,5$, $\overline{X_5} = 12$, $\overline{X_6} = 14,5$, $\overline{X_7} = 15,5$, $\overline{X_8} = 15,5$, $\overline{X_9} = 16,5$ y $\overline{X_{10}} = 19$.

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{10} \overline{X_i}}{n} = \frac{142}{10} = 14,2; \quad \text{Varianza} = \frac{\sum_{i=1}^{10} \left(\overline{X_i} - \overline{X}\right)^2}{n} = \frac{65,1}{10} = 6,51$$

Problema 1.2.8 (2,5 puntos) En el otoño de 2021, el municipio de El Paso en la Isla de La Palma sufrió la erupción del volcán Cumbre Vieja. Al finalizar la erupción, se escogió una muestra de 500 casas resultando que 325 de ellas estaban afectadas por la erupción.

a) (1,25 puntos) Calcule un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 97 %, para estimar la proporción de casas afectadas por la erupción del volcán. Según el resultado obtenido, ¿se puede admitir que el porcentaje de casas afectadas por el volcán es del 64 %?

b) (1,25 puntos) Para un nivel de confianza del 92 % y manteniendo la proporción muestral, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error máximo de estimación sea del 2 %?

Solución:

$$n = 500 \;\; \hat{p} = \frac{325}{500} = 0,65, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,35$$

a) $NC = 97\,\% = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,015$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,17\sqrt{\frac{0,65 \cdot 0,35}{500}} = 0,0463$$

$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,65-0,0463; 0,65+0,0463) = (0,6037; 0,6963) = (60,37\,\%, 69,63\,\%)$

como $64\,\% \in (60,37\,\%, 69,63\,\%) \Longrightarrow$ podemos aceptar que el porcentaje de casas afectadas es del 64 %.

b) $E = 0,02$, $NC = 0,92 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,08 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,04$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,04 = 0,96 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,75$

$$0,02 = 1,75\sqrt{\frac{0,65 \cdot 0,35}{n}} \Longrightarrow n > \left(\frac{1,75}{0,02}\right)^2 (0,65 \cdot 0,35) = 1741,796875 \Longrightarrow$$

$$n = 1742$$

Capítulo 2

Aragón

2.1. Ordinaria

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma por tres.

Problema 2.1.1 (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a) (5 puntos) Determine el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial $ABX = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ esté bien planteada, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. Calcule X.

b) (5 puntos) Determine el valor(es) del parámetro m para que el sistema sea compatible y calcule la solución del mismo para $m = 3$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + my + z = 0 \end{array} \right. \quad (S)$$

Solución:

a) $\underset{2\times 3}{A} \cdot \underset{3\times 2}{B} \cdot \underset{m\times n}{X} = \underset{2\times 1}{C} \Longrightarrow m = 2$ y $n = 1 \Longrightarrow \underset{2\times 1}{X}$

Sea $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Longrightarrow ABX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\begin{pmatrix} 3a + 5b \\ a + 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 24 \\ b = -14 \end{array} \right. \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 24 \\ -14 \end{pmatrix}$

b) Se trata de un sistema homogéneo y, por tanto, siempre tiene solución $\forall m \in \mathbb{R}$.
Si $m = 3$:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-5y+3z=0 \\ x-y+z=0 \\ 3x+3y+z=0 \end{array}\right. \quad (S) \Longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-5y+3z=0 \\ x-y+z=0 \\ 3x+3y+z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-y+z=0 \\ 3x+3y+z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=3\lambda \end{array}\right.$$

Problema 2.1.2 (10 puntos) Un comerciante dispone de 120 jamones, 390 botellas de vino y 240 botellas de cava para elaborar dos tipos de lotes navideños. El lote (A) consta de un jamón y dos botellas de vino y el lote (B) consta de un jamón, cinco botellas de vino y cuatro botellas de cava. Si el ingreso por la venta de cada lote (A) es de 90€ y por cada lote (B) es de 180€, se pide:

a) (8 puntos) Plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada tipo que maximiza el ingreso obtenido. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

b) (2 puntos) En la solución óptima, ¿se agotan todas las existencias de jamones, botellas de vino y botellas de cava? Razone la respuesta.

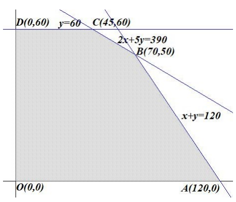
Solución:
Sea x el nº de lotes A e y el nº de lotes B.

	jamones	vino	cava	ingreso
A	1	2	0	90
B	1	5	4	180
	≤ 120	≤ 390	≤ 240	

a) $f(x,y) = 90x + 180y$ en el recinto S:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y \leq 120 \\ 2x+5y \leq 390 \\ 4y \leq 240 \\ x,y \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y \leq 120 \\ 2x+5y \leq 390 \\ y \leq 60 \\ x,y \geq 0 \end{array}\right.$$

Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(120,0)$, $B(70,50)$, $C(45,60)$ y $D(0,60)$.

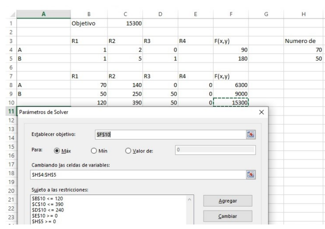


b) $f(x,y) = 90x + 180y$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0,0)=0 \\ f(120,0)=10800 \\ f(70,50)=15300 \\ f(45,60)=14850 \\ f(0,60)=10800 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

El valor máximo será de 15300€ y se alcanza con 70 lotes A y 50 lotes B.

Solución por solver :



c)

	jamones	vino	cava
A	$1 \cdot 70 = 70$	$2 \cdot 70 = 140$	$0 \cdot 70 = 0$
B	$1 \cdot 50 = 50$	$5 \cdot 50 = 250$	$4 \cdot 50 = 200$
suma	120	390	200
Existencias	120	390	240
Sobran	0	0	40

Queda un sobrante de 40 botellas de cava.

Problema 2.1.3 (10 puntos) Sea $P(t) = 1000\left(15 + \dfrac{t}{100+t^2}\right)$ una función que representa el número de habitantes de cierta población, siendo t el número de años transcurridos desde el año 2000. Se pide:

a) (2 puntos) Calcule el tamaño de la población en un horizonte infinito de tiempo.

b) (5 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la población. ¿En qué momento la población es máxima? y ¿cuántos habitantes tiene la población en ese momento?

c) (3 puntos) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener una población de 15040 individuos?

Solución:

a) $\lim\limits_{t\to\infty} 1000\left(15 + \dfrac{t}{100+t^2}\right) = 15000$ habitantes.

b) $P'(t) = \dfrac{1000(100-t^2)}{(t^2+100)^2} = 0 \Longrightarrow t = \pm 10$, la solución negativa no es relevante.

	$(0, 10)$	$(10, \infty)$
$P'(t)$	$+$	$-$
$P(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La población crece en el intervalo de tiempo $(0, 10)$ y decrece en el intervalo de tiempo $(10, \infty)$.
En $(10, 15050)$ hay un máximo relativo, que también sería absoluto. El año 2010 habría una población máxima de 15050 habitantes.

c) $P(t) = 1000\left(15 + \dfrac{t}{100+t^2}\right) = 15040 \Longrightarrow t = 5$ y $t = 20$.
Los años 2005 y 2020 habría una población de 15040 habitantes.

Problema 2.1.4 (10 puntos) Sean las funciones $g(x) = a\left(1 - \dfrac{1}{2}x\right)^3$, $h(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2-x}$

a) (3 puntos) Calcule $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$

b) (4 puntos) Determine el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x \le 1 \\ h(x) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ sea continua en $x = 3$.

c) (3 puntos) Calcule $\displaystyle\int_0^2 (1-2x)^3\, dx$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x+1}{2x-1} = 3$

b) Las ramas de las funciones son continuas, hay que estudiar la continuidad en $x = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} a\left(1-\dfrac{1}{2}x\right)^3 = \dfrac{a}{8} \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-x} = 3 \\ g(1) = \dfrac{a}{8} \end{array}\right. \Longrightarrow \dfrac{a}{8} = 3 \Longrightarrow a = 24$$

c) $F(x) = \displaystyle\int (1-2x)^3\,dx = \begin{bmatrix} t = 1-2x \\ dt = -2dx \\ dx = -\dfrac{1}{2}dt \end{bmatrix} = -\dfrac{1}{2}\int t^3\,dt = -\dfrac{t^4}{8} = -\dfrac{(1-2x)^4}{8}$

$$\int_0^2 (1-2x)^3\,dx = F(2) - F(0) = -\frac{81}{8} + \frac{1}{8} = -10$$

Problema 2.1.5 (10 puntos) En cierta Facultad de Economía se oferta una misma asignatura en tres grupos, que denotaremos por $G1$, $G2$, $G3$. Los grupos representan el 40 %, el 35 % y el 25 % de los estudiantes, respectivamente. Superan la asignatura el 80 % del grupo $G1$, el 60 % del grupo $G2$ y el 92 % del grupo $G3$. Calcule la probabilidad de que al escoger un estudiante al azar:

a) (2 puntos) Haya superado la asignatura y sea del grupo $G3$.

b) (2 puntos) No haya superado la asignatura.

c) (2 puntos) Haya superado la asignatura.

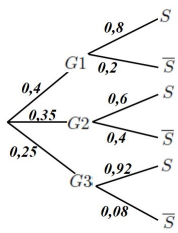
d) (2 puntos) Ni haya superado la asignatura ni sea del grupo $G1$.

e) (2 puntos) Si el estudiante elegido al azar ha superado la asignatura, calcule la probabilidad de ser del grupo $G3$.

Solución:
Sean los grupos $G1$, $G2$, $G3$, S supera la asignatura y $\overline{S}$ no supera la asignatura.

a) $P(G3 \cap S) = P(S|G3)P(G3) = 0,92 \cdot 0,25 = 0,23$.

b) $P(\overline{S}) = P(\overline{S}|G1)P(G1) + P(\overline{S}|G2)P(G2) + P(\overline{S}|G3)P(G3) =$
$0,2 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,35 + 0,08 \cdot 0,25 = 0,24$



c) $P(S) = 1 - P(\overline{S}) = 1 - 0,24 = 0,76$

d) $P(\overline{S} \cap \overline{G1}) = P(\overline{S \cup G1}) = 1 - P(S \cup G1) =$
$1 - (P(S) + P(G1) - P(S \cap G1)) = 1 - (0,76 + 0,4 - 0,8 \cdot 0,4) = 0,16$

e) $P(G3|S) = \dfrac{P(S|G3)P(G3)}{P(S)} = \dfrac{0,92 \cdot 0,25}{0,76} = 0,3026$

Problema 2.1.6 (10 puntos) Se sabe que el tiempo dedicado semanalmente a las tareas del hogar se distribuye según una normal con desviación típica 2 horas.

a) (4 puntos) Para una muestra aleatoria de 64 hogares, el tiempo medio semanal dedicado a las tareas del hogar es de 10 horas. Determine un intervalo de confianza al 95 % para la media de horas dedicadas semanalmente a las tareas del hogar.

b) (4 puntos) Determine el tamaño muestral mínimo necesario para que el error que se cometa al estimar la media de la población por un intervalo de confianza sea, como máximo de 0,75 horas, con un nivel de confianza del 95 %.

c) (2 puntos) A partir de una muestra de 81 hogares se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza (9,8444; 10,7555) para la media de la población. Determine el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo.

Solución:

$$N(\mu; 2)$$

a) $n = 64$, $\overline{X} = 10$ y $NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{2}{\sqrt{64}} = 0,49$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (10 - 0,49; 10 + 0,49) = (9,51; 10,49)$$

b) $0,75 = 1,96\dfrac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 27{,}31804444 \Longrightarrow n = 28$

c) $E = \dfrac{10,7555 - 9,8444}{2} = 0,45555$

$0,45555 = z_{\alpha/2}\dfrac{2}{\sqrt{81}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,049975$

$P(Z \le 2,05) = 0,9798 = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,04 \Longrightarrow NC = 0,96 = 96\,\%$

2.2. Extraordinaria

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma por tres.

Problema 2.2.1 (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a) (5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y la ecuación matricial $XB + A = C$, determine razonadamente el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial esté bien planteada. Despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial.

b) (5 puntos) Calcule, utilizando técnicas matriciales, la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

Solución:

a) $\underset{m\times n}{X} \cdot \underset{3\times 3}{B} + \underset{2\times 3}{A} = \underset{2\times 3}{C} \Longrightarrow m = 2$ y $n = 3 \Longrightarrow \dim(X) = 2\times 3$

$XB + A = C \Longrightarrow X = (C-A)B^{-1}$, como $|B| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \exists B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$X = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 12 \end{pmatrix}$

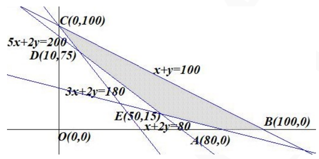
b) Resolvemos por Gauss:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 2F_2 \end{bmatrix} =$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -3y + z = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

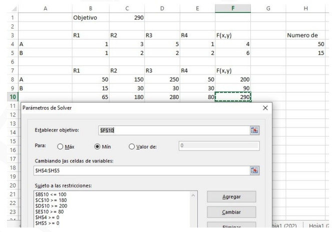
Problema 2.2.2 (10 puntos) Emilia quiere fertilizar sus campos de cultivo utilizando sacos de fertilizantes de dos marcas comerciales, A y B. Por cuestiones medioambientales debe comprar como máximo 100 sacos. Un saco del fertilizante A cuesta 4€ y uno del B cuesta 6€. Un saco del fertilizante A contiene 3 unidades de nitrógeno, 5 de fósforo y 1 de potasio, mientras que un saco del B contiene 2 unidades de cada nutriente. Los terrenos estarán bien fertilizados con al menos 180 unidades de nitrógeno, al menos 200 de fósforo y, al menos, 80 de potasio. ¿Cuál es el gasto mínimo que tiene que hacer Emilia y qué debe comprar para satisfacer las necesidades nutricionales de los cultivos?
Solución:
Sea x sacos de A e y sacos de B.

	N	P	K	coste
A	3	5	1	4
B	2	2	2	6
	≥ 180	≥ 200	≥ 80	

- $f(x,y) = 4x + 6y$ en el recinto S:
$$\begin{cases} x + y \leq 100 \\ 3x + 2y \geq 180 \\ 5x + 2y \geq 200 \\ x + 2y \geq 80 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
Los vértices a estudiar serán: $A(80,0)$, $B(100,0)$, $C(0,100)$, $D(10,75)$ y $E(50,15)$.



Solución por solver :



- $f(x,y) = 4x + 6y$
$$\begin{cases} f(80,0) = 320 \\ f(100,0) = 400 \\ f(0,100) = 600 \\ f(10,75) = 490 \\ f(50,15) = 290 \end{cases} \Longrightarrow$$
El mínimo coste será de 290€ y se alcanza con 50 sacos de A y 15 de B.

Problema 2.2.3 (10 puntos) El coste total de fabricación, en euros, de cierto producto viene dado por la función $C(x) = x^2 + 80x + 10000$, donde x representa el número de unidades producidas y vendidas.

a) (5 puntos) Si cada producto se vende a 400 euros, plantee la función beneficio (ingresos menos costes) en función del número de unidades producidas y vendidas. Determine el número de unidades del producto que deben venderse para que el beneficio sea máximo (justificando que lo es). ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

b) (5 puntos) ¿En qué nivel de producción se minimiza el coste medio por unidad $CM(x) = \dfrac{C(x)}{x}$?

Solución:

a) $B(x) = I(x) - C(x) = 400x - (x^2 + 80x + 10000) = -x^2 + 320x - 10000$
$B'(x) = -2x + 320 = 0 \Longrightarrow x = 160$
$B''(x) = -2 \Longrightarrow B''(160) = -2 < 0 \Longrightarrow x = 160$ es un máximo relativo, en nuestro caso también es absoluto.
El máximo beneficio de obtiene con la producción de 160 unidades y asciende a $B(160) = 15600$€.

b) $CM(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{x^2 + 80x + 10000}{x} \Longrightarrow CM'(x) = \dfrac{x^2 - 10000}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 100$, la solución negativa es irrelevante.

	$(0,100)$	$(100,\infty)$
$CM'(x)$	$-$	$+$
$CM(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(0,100)$ y creciente en el $(100,\infty)$. Tiene un mínimo relativo en el punto $(100,280)$, en nuestro caso también es absoluto.
El coste mínimo por unidad se obtiene con la producción de 100 unidades y es de $CM(100) = 280$€.

Problema 2.2.4 (10 puntos) Dada $f(x) = \dfrac{mx^3 - 1}{x^2}$

a) (6 puntos) Determine el valor del parámetro m para que la función tenga un extremo relativo en $x = -1$. Razone si se trata de un máximo o un mínimo relativo.

b) (4 puntos) Calcule el valor de m para que $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx = 4$.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{mx^3 + 2}{x^3} = 0 \Longrightarrow f'(-1) = m - 2 = 0 \Longrightarrow m = 2$

$f'(x) = \dfrac{2x^3 + 2}{x^3} \Longrightarrow f''(x) = -\dfrac{6}{x^4} \Longrightarrow f''(-1) = -6 < 0 \Longrightarrow x = -1$ es un máximo relativo.

b) $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \frac{mx^3 - 1}{x^2}\,dx = \int_1^2 \left(mx - x^{-2}\right)\,dx = \left.\frac{mx^2}{2} + \frac{1}{x}\right]_1^2 = 2m + \frac{1}{2} - \frac{m}{2} - 1 = \frac{3m}{2} - \frac{1}{2} = 4 \Longrightarrow m = 3$

Problema 2.2.5 (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

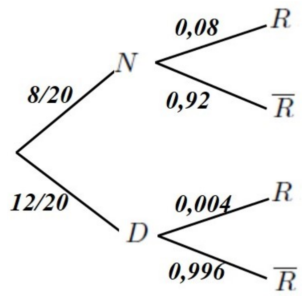
a) (6 puntos) La probabilidad de que un autobús escolar llegue con retraso en un día nublado es de 0,08 y en un día despejado 0,004. Durante un periodo de 20 días ha habido 8 días nublados y 12 días despejados. Para un día elegido al azar, ¿cuál será la probabilidad de que el autobús llegue con retraso?

b) (4 puntos) De los sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio se sabe que: $P(A) = 3/8$, $P(B) = 5/8$ y $P(A \cup B) = 3/4$. Calcule $P(A \cap B)$, $P(A|B)$, $P(A \cap \overline{B})$. Justifique si A y B son dos sucesos independientes.

Solución:

a) Sean N día nublado, D día despejado, R llega con retraso y $\overline{R}$ no llega con retraso.

$P(R) = P(R|N)P(N) + P(R|D)P(D) = 0,08 \cdot \dfrac{8}{20} + 0,004 \cdot \dfrac{12}{20} = 0,0344$



b)
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \dfrac{3}{8} + \dfrac{5}{8} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4} = 0,25$
- $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1/4}{5/8} = \dfrac{2}{5} = 0,4$
- $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8} = 0,125$

☛ $P(A)\cdot P(B) = \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{5}{8} = \dfrac{15}{64} \neq P(A\cap B) \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

Problema 2.2.6 (10 puntos) Se pretende analizar el consumo anual en alimentación y bebidas en los hogares españoles. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica de 3000 euros.

a) (5 puntos) Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 96 % para la media de dicha variable ¿cuántas familias tenemos que encuestar para que la amplitud del intervalo no sea superior de 2000 euros?

b) (4 puntos) En una muestra de 60 hogares se obtuvo un consumo medio anual en alimentación y bebidas de 17000 euros, halle el intervalo de confianza al 96 % para la media de dicha variable.

c) (1 punto) Si desde una asociación de consumidores se afirma «el consumo anual medio en alimentación y bebidas en hogares es de 20000 euros al año». Razone, a la vista del apartado *b*) si hay motivos para dudar de su afirmación.

Solución:

$$N(\mu; 3000)$$

a) $2E = 2000 \Longrightarrow E = 1000$
$NC = 96\,\% = 0,96 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,04 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,02$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,98 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,055$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1000 = 2,055\frac{3000}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 38,007225 \Longrightarrow n = 39$$

b) $n = 60$, $\overline{X} = 17000$ y $NC = 96\,\% \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,055$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,055\frac{3000}{\sqrt{60}} = 795,8981$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (17000 - 795,8981; 17000 + 795,8981) = (16204,10192; 17795,8981)$$

c) El consumo medio anual de 20000€ no se encuentra dentro del intervalo de confianza, lo que es un motivo suficiente para dudar de esta afirmación con una confianza del 96 %.

"www.musat.net"

Capítulo 3

Asturias

3.1. Ordinaria

281125638355

- Responde en el pliego del examen a cuatro preguntas cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de 2,5 puntos.
- Indica en el pliego del examen la agrupación de preguntas que responderás: agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la anulación de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Problema 3.1.1 (2,5 puntos) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -m & -1 \\ 1+4m & 4+m \end{pmatrix}$,$C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Si $\dfrac{1}{2} \cdot A^2 \cdot B \cdot C = D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) (1,5 puntos) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es única? Resuelve el sistema para $m = -2$.

Solución:

a) $\dfrac{1}{2} \cdot A^2 \cdot B \cdot C = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} -m & -1 \\ 1+4m & 4+m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+my \\ mx+y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x+my \\ mx+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x+my = 1 \\ mx+y = 1 \end{cases}$

b) $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 1 - m^2 = 0 \Longrightarrow m = \pm 1$

- Si $m \in R - \{\pm 1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(\overline{A}) = 2 =$Rango$(A) =$ número de incógnitas y el sistema es compatible determinado (solución única)
- Si $m = -1$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow$ sistema incompatible (el sistema no tiene solución)

☛ Si $m=1$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2+F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (el sistema tiene infinitas soluciones)

c) Si $m=-2$:

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y=1 \\ -2x+y=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-1 \end{array}\right.$$

Problema 3.1.2 (2,5 puntos) Los medios utilizados para realizar la publicidad al lanzar un nuevo producto, así como los costes y la audiencia estimada por anuncio se muestran a continuación:

	TELEVISIÓN	RADIO
Audiencia por anuncio	100000	18000
Coste por anuncio	2100€	300€

Para lograr un uso balanceado de los medios, los anuncios en radio deben ser al menos el 50 % de los anuncios totales y los anuncios en televisión deben ser al menos el 10 % de los anuncios totales. Por otro lado se tiene que el presupuesto total para anuncios se ha limitado a 24000€.

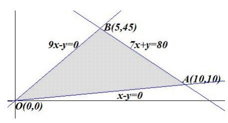
a) (1,75 puntos) ¿Cuántos anuncios de cada tipo se pueden hacer? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían hacerse 10 anuncios en televisión y 20 en radio?

b) (0,75 puntos) Si el objetivo es maximizar la audiencia total, ¿cuántos anuncios de cada tipo se deben hacer? ¿Cuánta audiencia total habría en ese caso?

Solución:
Sea x el n$^{\underline{o}}$ de anuncios en TV e y el n$^{\underline{o}}$ de anuncios en la RADIO.

a) Dibujamos la región factible:

$$\left\{\begin{array}{l} y \geq 0,5(x+y) \\ x \geq 0,1(x+y) \\ 2100x+300y \leq 24000 \\ x,y \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-y \leq 0 \\ 9x-y \geq 0 \\ 7x+y \leq 80 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right.$$



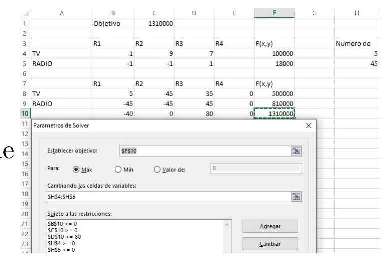
Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(10,10)$ y $B(5,45)$.
El punto $P(10,20)$ se encuentra fuera de la región factible. Luego no se trata de una solución posible.

b) $f(x,y)=100000x+18000y$

Solución por solver :

$$\left\{\begin{array}{l} f(0,0)=0 \\ f(10,10)=1180000 \\ f(5,45)=1310000 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

Se deberán poner 5 anuncios de TV y 45 de RADIO y llegaría a 1310000 personas.



Problema 3.1.3 (2,5 puntos) La producción diaria de una determinada empresa oscila entre 1 y 10 toneladas. El beneficio diario (f), en miles de euros, depende de la producción (x) y su relación puede expresarse como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 22 + ax & \text{si} \quad 1 \le x \le 3 \\ 100 + 10x + bx^2 & \text{si} \quad 3 < x \le 10 \end{cases}$$

a) (0,75 puntos) Determina las constantes a y b si se sabe que los días en los que se producen 3 toneladas el beneficio es de 112 miles de euros y que la función f es continua en todo su dominio.

b) (1,75 puntos) Considerando los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[1, 10]$. Si un día el beneficio ha sido de 100 miles de euros, ¿cuánto se ha producido ese día? ¿Cuál es el beneficio mínimo un día cualquiera? ¿Y el beneficio máximo?

Solución:

a)
- ☛ Las ramas son polinomios y son continuas en el dominio de la función. Hay que estudiar la continuidad en $x = 3$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (22 + ax) = 22 + 3a \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (100 + 10x + bx^2) = 130 + 9b \\ f(3) = 22 + 3a \end{cases} \Longrightarrow 22+3a = 130+9b \Longrightarrow a-3b = 36$$

- ☛ En $f(3) = 22 + 3a = 112 \Longrightarrow a = 30$.
- ☛

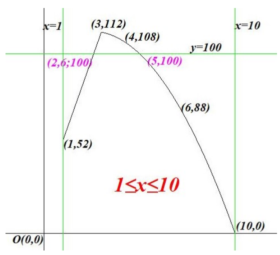
$$\begin{cases} a - 3b = 36 \\ a = 30 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 30 \\ b = -2 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} 22 + 30x & \text{si} \quad 1 \le x \le 3 \\ 100 + 10x - 2x^2 & \text{si} \quad 3 < x \le 10 \end{cases}$$

Se hace una tabla de valores $f(1) = 52 \Longrightarrow (1, 52)$, $f(3) = 112 \Longrightarrow (3, 112)$, $f(4) = 108 \Longrightarrow (4, 108)$, $f(6) = 88 \Longrightarrow (6, 88)$ y $f(10) = 0 \Longrightarrow (10, 0)$.

Si el beneficio ha sido de 100 euros $f(x) = 100$ y pueden ser dos valores:



- ☛ $22 + 30x = 100 \Longrightarrow x = 2,6 \Longrightarrow (2,6; 100)$ El beneficio de 100000€ se produce con la producción de 2,6 toneladas.
- ☛ $100 + 10x - 2x^2 = 100 \Longrightarrow x = 0$ (no relevante) y $x = 5 \Longrightarrow (5, 100)$ El beneficio de 100000€ se produce con la producción de 5 toneladas.

El beneficio mínimo será de 0€ cuando la producción sea de 10 toneladas y será máximo con 112000€ cuando la producción sea de 3 toneladas.

Problema 3.1.4 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = -x^2 + 4x$, se pide:

a) (0,5 puntos) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 2$.

b) (2 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x = -1$ y $x = 3$.

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int (-x^2 + 4x)\,dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + C$

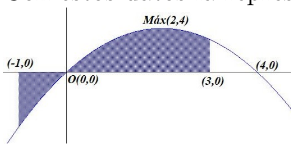
$F(1) = -\dfrac{1}{3} + 2 + C = 2 \Longrightarrow C = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow$

$$F(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + \frac{1}{3}$$

b) La función es una parábola y $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ con puntos de corte en:

- Con OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
- Con OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow -x^2 + 4x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ y $(4, 0)$
  $f'(x) = -2x + 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$, $f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(2) = -2 < 0 \Longrightarrow (2, 4)$ es un máximo relativo (el vértice de la parábola)

Con estos datos la representación gráfica sería la siguiente:



Tendríamos dos recintos: S_1 en $[-1, 0]$ y S_2 en $[0, 3]$ con $S = |S_1| + |S_2|$

Tenemos: $F(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 2x^2$.

$S_1 = \displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-1) = 0 - \frac{7}{3} = -\frac{7}{3}$

$S_2 = \displaystyle\int_{0}^{3} f(x)\,dx = F(3) - F(0) = 9 - 0 = 9$

$S = |S_1| + |S_2| = \dfrac{7}{3} + 9 = \dfrac{34}{3} \simeq 11,33\ u^2$

Problema 3.1.5 (2,5 puntos) Según cierto estudio, se sabe que el 80 % de los hogares de un determinado país tiene contratado el acceso a internet y que el 40 % tiene contratado algún canal de televisión de pago. Además se sabe que el 25 % de los hogares disponen de ambos servicios. Si se selecciona un hogar al azar:

a) (1,25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga contratada televisión de pago, pero no internet?

b) (1,25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

Solución:
Sean I tiene internet y T tiene TV de pago.
$P(I) = 0,8$, $P(T) = 0,4$ y $P(I \cap T) = 0,25$.

a) $P(T \cap \overline{I}) = P(T) - P(T \cap I) = 0,4 - 0,25 = 0,15$

b) $P(\overline{T} \cap \overline{I}) = P(\overline{T \cup I}) = 1 - P(T \cup I) = 1 - (P(T) + P(I) - P(T \cap I)) = 1 - (0,4 + 0,8 - 0,25) = 0,05$

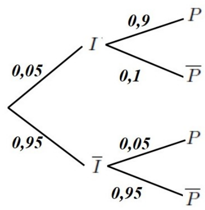
Problema 3.1.6 (2,5 puntos) En una determinada población, el 5 % de los individuos han contraído un virus. Para estudiar dicha enfermedad se somete a los individuos a un cribado consistente en una prueba que determina que tiene virus el 90 % de las veces si el individuo está infectado y determina que no tiene virus el 95 % de las veces si no está infectado. Se pide:

a) (1,25 puntos) Si la prueba determina que un individuo tiene el virus, ¿cuál es la probabilidad de que realmente no lo tenga?

b) (1,25 puntos) Si la prueba determina que un individuo no tiene el virus, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo tenga?

Solución:

Sean I infectado por el virus y P la prueba da infectado.



a) $P(P) = P(P|I)P(I) + P(P|\overline{I})P(\overline{I}) = 0,9\cdot 0,05 + 0,05\cdot 0,95 = 0,0925$

$$P(\overline{I}|P) = \frac{P(P|\overline{I})P(\overline{I})}{P(P)} = \frac{0,05\cdot 0,95}{0,0925} = 0,5135$$

b) $P(I|\overline{P}) = \dfrac{P(\overline{P}|I)P(I)}{P(\overline{P})} = \dfrac{0,1\cdot 0,05}{1-0,0925} = 0,0055$

Problema 3.1.7 (2,5 puntos) Se supone que la duración de un aparato electrónico, en años, sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 0,5 años.

a) (1,5 puntos) Para estimar la duración media, se considera una muestra aleatoria de 150 aparatos, los cuales han durado, en media, 1,8 años. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la duración media, al 95 % de confianza.

b) (1 punto) ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera duración media a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,2 años y un nivel de confianza del 99 %?

Nota: Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Solución:

$$N(\mu; 0,5)$$

a) $NC = 95\,\% = 0,95 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{0,5}{\sqrt{150}} = 0,08$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (1,8 - 0,08; 1,8 + 0,08) = (1,72; 1,88)$$

b) $NC = 99\,\% = 0,99 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,58$$

$$0,2 = 2,58\frac{0,5}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 41,6025 \Longrightarrow n = 42$$

Problema 3.1.8 (2,5 puntos) Una empresa hace un estudio de mercado antes de lanzar un nuevo producto. Para ello selecciona al azar a 200 personas a las que proporciona su producto durante 4 semanas para que indiquen al final de ese periodo si les ha gustado o no. A 150 de ellas les ha gustado y al resto no.

a) (1,5 puntos) Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción poblacional de personas a las que les gustará el producto, al 99 % de confianza.

b) (1 punto) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese disminuido el tamaño de la muestra?

Nota: Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Solución:

a) $NC = 99\,\% = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,58$$

$$\hat{p} = \frac{150}{200} = 0,75, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,25$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,58\sqrt{\frac{0,75 \cdot 0,25}{200}} = 0,079$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,75 - 0,079; 0,75 + 0,079) = (0,671; 0,829) = (67,1\,\%; 82,9\,\%)$$

b) Resuelto en el apartado anterior tenemos $E = 0,079$. Tenemos la fórmula $E = z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ si se mantiene el nivel de confianza y la proporción, al disminuir el tamaño muestral (está dividiendo) el error aumenta.

3.2. Extraordinaria

- ☛ Responde en el pliego del examen a cuatro preguntas cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de 2,5 puntos.

- ☛ Indica en el pliego del examen la agrupación de preguntas que responderás: agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la anulación de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Problema 3.2.1 (2,5 puntos) En una fiesta se bebieron m copas de vino tinto por cada una de vino blanco. Cada copa (sea de vino tinto o blanco) contiene 0,15 litros y en total se tomaron $3m$ litros de vino.

a) (0,5 puntos) Plantea un sistema de dos ecuaciones en función del parámetro m donde las incógnitas x e y sean el número de copas de vino tinto y blanco, respectivamente.

b) (2 puntos) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas copas se tomaron de cada tipo si en total se consumieron 9 litros de vino?

Solución:

a) Sea x el número de copas de vino tinto e y del blanco.

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{m}=y \\ x+y=\dfrac{3m}{0,15} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-my=0 \\ x+y=20m \end{array}\right.$$

b) $\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 0 \\ 1 & 1 & 20m \end{array}\right)$ con $|A|=1+m=0 \Longrightarrow m=-1$

- Si $m\neq -1 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=2=$Rango$(A)=n^{\text{o}}$ de incognitas y el sistema es compatible determinado (solución única)
- Si $m=-1$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -20 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema incompatible y no tiene solución.
- Si $3m=9 \Longrightarrow m=3$:

$$\left\{\begin{array}{l} x-3y=0 \\ x+y=60 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=45 \text{ copas de vino tinto} \\ y=15 \text{ copas de vino blanco} \end{array}\right.$$

Problema 3.2.2 (2,5 puntos) Una empresa que usa dos tamaños de vehículos debe renovar su flota. Cada vehículo grande le costará 30000 euros; cada vehículo pequeño, 20000 euros y dispone de un presupuesto total de 500000 euros para comprar vehículos. Debe comprar a lo sumo el doble de vehículos grandes que pequeños. El mantenimiento anual de cada vehículo pequeño lo calcula en 300 euros; el de cada uno grande, en 600 euros y dispone de un presupuesto anual total de 9000 euros para mantenimiento.

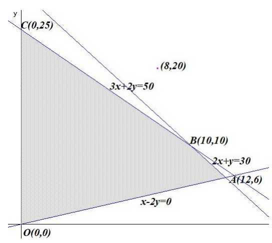
a) (1,75 puntos) ¿Cuántos vehículos de cada tipo puede comprar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían comprar 8 vehículos grandes y 20 pequeños?

b) (0,75 puntos) El beneficio esperado por cada vehículo grande es de 10000 euros y por cada uno pequeño, de 6000 euros. ¿Cuántos vehículos debe comprar de cada tipo para maximizar el beneficio esperado? ¿Cuál sería ese beneficio esperado?

Solución:
Sea x el n$^{\text{o}}$ de vehículos grandes e y el n$^{\text{o}}$ de vehículos pequeños.

a) La región factible es

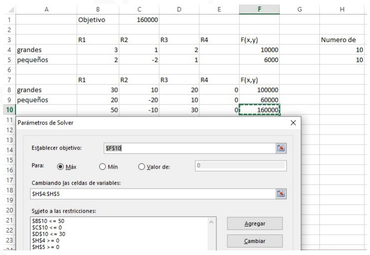
$$\left\{\begin{array}{l} 30000x+20000y\leq 500000 \\ x\leq 2y \\ 600x+300y\leq 9000 \\ y\geq 0 \\ x\geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x+2y\leq 50 \\ x-2y\leq 0 \\ 2x+y\leq 30 \\ y\geq 0 \\ x\geq 0 \end{array}\right.$$



Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(12,6)$, $B(10,10)$ y $C(0,25)$.
El punto $P(8,20)$ se encuentra fuera de la región factible. Luego no se trata de una solución posible. No debe comprar 8 vehículos grandes y 20 pequeños.

b) $f(x,y) = 10000x + 6000y$

Solución por solver :



$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(12,6) = 156000 \\ f(10,10) = 160000 \\ f(0,25) = 150000 \end{cases} \Longrightarrow$$

Se deberán comprar 10 vehículos grandes y 10 pequeños con un beneficio máximo esperado de 160000€.

Problema 3.2.3 (2,5 puntos) El consumo energético de una comunidad de vecinos durante una mañana se ajusta aproximadamente a la siguiente función donde x representa las horas transcurridas desde las 6:00 de la mañana:

$$f(x) = \begin{cases} a(x+2) & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ 3(x^2 - 6x + 12) & \text{si} \quad 2 < x \le 4 \\ -x^2 + 11x - 16 & \text{si} \quad 4 < x \le 8 \end{cases}$$

a) (0,75 puntos) Estudia la continuidad de la función. Determina el valor de a para que dicha función sea continua en todo su dominio.

b) (1,75 puntos) Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente f en todo su dominio. ¿En qué momento el consumo es máximo? ¿Y mínimo?

Solución:

a) Continuidad de f:

☛ Las tres ramas son polinomios y, por tanto, son continuas. Hay que estudiar la continuidad en $x = 2$ y en $x = 4$

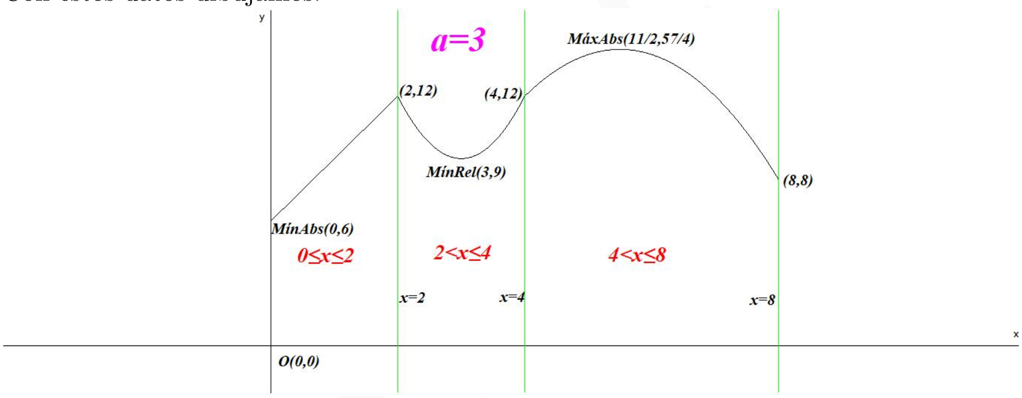
☛ Continuidad en $x = 2$:
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} a(x+2) = 4a \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} 3(x^2 - 6x + 12) = 12 \\ f(2) = 12 \end{cases} \Longrightarrow 4a = 12 \Longrightarrow a = 3.$$
La función es continua en $x = 2$ siempre que $a = 3$

☛ Continuidad en $x = 4$:
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} 3(x^2 - 6x + 12) = 12 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} (-x^2 + 11x - 16) = 12 \\ f(4) = 12 \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = f(4) \Longrightarrow .$$
La función es continua en $x = 4$.

☛ La función es continua en $\mathrm{Dom}(f) = [0,8]$ siempre que $a = 3$. Si $a \neq 3$ la función sería continua en $[0,3) \cup (3,8]$

b) Si $a = 3$: $f(x) = \begin{cases} 3(x+2) & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ 3(x^2 - 6x + 12) & \text{si} \quad 2 < x \le 4 \\ -x^2 + 11x - 16 & \text{si} \quad 4 < x \le 8 \end{cases}$

- La rama $0 \le x \le 2$ es una recta que une los puntos $(0, 6)$ y $(2, 12)$
- La rama $2 < x \le 4$ es una parábola entre $(2, 12)$ y $(4, 12)$, con un punto intermedio en $(3, 9)$. Además $f'(x) = 3(2x - 6) = 0 \Longrightarrow x = 3$ como $f''(x) = 6$ es $f''(3) = 6 > 0 \Longrightarrow$ $(3, 9)$ es un mínimo relativo, pero no absoluto.
- La rama $4 < x \le 8$ es una parábola entre $(4, 12)$ y $(8, 8)$, con un punto intermedio en $(11/2, 57/4)$. Además $f'(x) = -2x + 11 = 0 \Longrightarrow x = 11/2$ como $f''(x) = -2$ es $f''(11/2) = -2 < 0 \Longrightarrow (11/2, 57/4) = (5,5; 14,25)$ es un máximo relativo y también absoluto. El consumo es máximo a las 11:30 con 14,25 y mínimo a las 6:00 y valdrá 6.
- Con estos datos dibujamos:



Problema 3.2.4 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = e^x + 2$, se pide:

a) (0,5 puntos) Encontrar la primitiva F de f verificando $F(0) = 3$.

b) (2 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 2$.

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int (e^x + 2)\, dx = e^x + 2x + C$

$F(0) = 1 + C = 3 \Longrightarrow C = 2 \Longrightarrow F(x) = e^x + 2x + 2$

b) La función tiene $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ con puntos de corte en:

- Con OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 3)$
- Con OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow e^x + 2 = 0$ no tiene solución$\Longrightarrow f$ No corta al eje de abscisas.

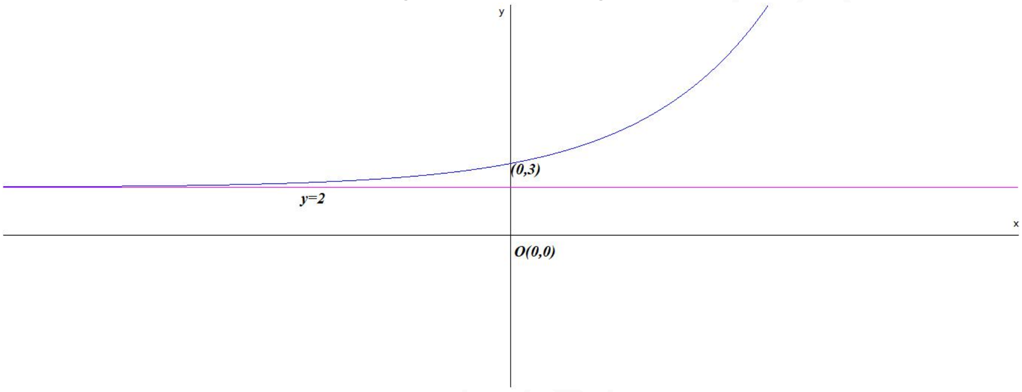
$f'(x) = e^x > 0 \Longrightarrow$ No tiene extremos y es siempre creciente.
$f''(x) = e^x > 0 \Longrightarrow \smile$ la función es cóncava en todo el dominio y no tiene puntos de inflexión.
Asíntotas:

- Verticales: no hay

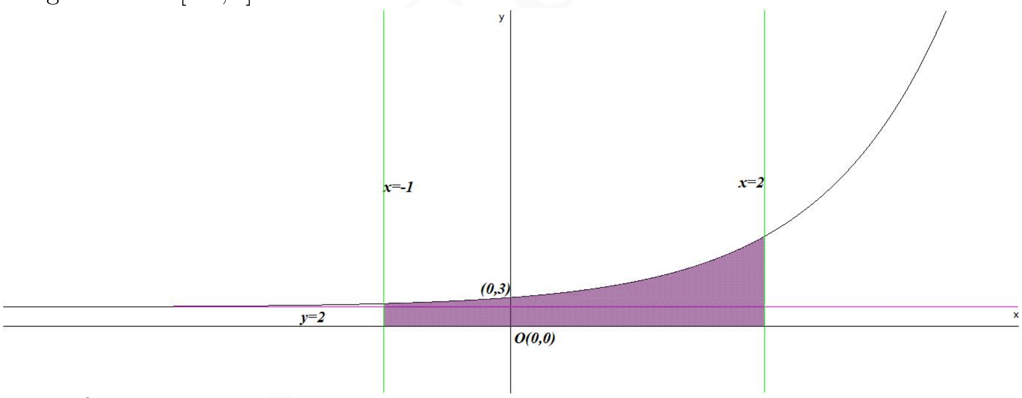
☛ Horizontales: $y = 2$ cuando $x \longrightarrow -\infty$

$$\lim_{x\to -\infty}(e^x+2) = 2, \quad \lim_{x\to\infty}(e^x+2) = +\infty$$

Con estos datos la representación gráfica sería la siguiente:



La función es positiva y está por encima del eje de abscisas. Sólo habría un recinto de integración $S : [-1, 2]$



$$S = \int_{-1}^{2}(e^x+2)\,dx = \left. e^x + 2x\right]_{-1}^{2} = (e^2+4) - (e^{-1}-2) = \frac{e^3+6e-1}{e} \simeq 13,0212\ u^2$$

Problema 3.2.5 (2,5 puntos) El 80 % de los empleados de una empresa hablan inglés y el 25 % de todos los empleados hablan alemán. Además el 20 % de los empleados que hablan inglés, también hablan alemán.

a) (1,25 puntos) Elegido un empleado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés pero no alemán?

b) (1,25 puntos) Elegido al azar un empleado entre los que hablan alemán, ¿cuál es la probabilidad de que no hable inglés?

Solución:
Sean I habla inglés, $\overline{I}$ no habla inglés, A habla alemán, $\overline{A}$ no habla alemán.
$P(I) = 0,8$, $P(A) = 0,25$ y $P(A|I) = 0,2 = \dfrac{P(A\cap I)}{P(I)} \Longrightarrow P(A\cap I) = 0,2\cdot 0,8 = 0,16.$

a) $P(I\cap\overline{A}) = P(I) - P(A\cap I) = 0,8 - 0,16 = 0,64$

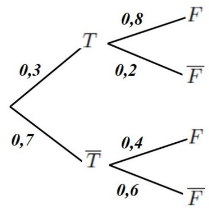
b) $P(\overline{I}|A) = \dfrac{P(\overline{I} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(A \cap I)}{P(A)} = \dfrac{0,25 - 0,16}{0,25} = 0,36$

Problema 3.2.6 (2,5 puntos) El 30 % de los pasajeros que volaron con una compañía aérea el mes pasado lo hicieron por trabajo. De ellos, el 80 % tienen tarjeta de fidelidad. Entre los pasajeros que volaron por causas diferentes al trabajo, el 40 % tienen tarjeta de fidelidad.

a) (1,25 puntos) Elegido un pasajero del mes pasado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga tarjeta de fidelidad?

b) (1,25 puntos) Entre los pasajeros con tarjeta de fidelidad del mes pasado se eligió uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que volase por trabajo?

Solución:
Sean T volaron por trabajo, $\overline{T}$ no volaron por trabajo, F con tarjeta de fidelidad y $\overline{F}$ sin tarjeta de fidelidad.



a) $P(F) = P(F|T)P(T) + P(F|\overline{T})P(\overline{T}) = 0,8 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,7 = 0,52$

b) $P(T|F) = \dfrac{P(F|T)P(T)}{P(F)} = \dfrac{0,8 \cdot 0,3}{0,52} = 0,4615$

Problema 3.2.7 (2,5 puntos) En una región se realiza un estudio sobre jóvenes (menores de 25 años) con carné de conducir.

a) (1 punto) Se quiere estimar el verdadero porcentaje de jóvenes que tienen carné de conducir con un nivel de confianza del 95 %, ¿cuál es el número mínimo de jóvenes que deberían ser entrevistados para que el error de estimación fuese menor o igual de 0,1?

b) (1,5 puntos) Finalmente, se tomó una muestra de 140 jóvenes y se observó que 120 tenían carné de conducir. Halla, con un nivel de confianza del 99 %, un intervalo para estimar la proporción de jóvenes que tienen carné de conducir en esa región.

Nota: Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Solución:

a) $NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$\hat{p} = 0,5, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} = 0,1 \Longrightarrow n \geq 96,04 \Longrightarrow n = 97$$

b) $n = 140$ y $\hat{p} = \dfrac{120}{140} = 0,8571 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \dfrac{120}{140} = \dfrac{20}{140} = 0,1428$
$NC = 99\,\% = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,58$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,58\sqrt{\frac{\frac{120}{140}\cdot\frac{20}{140}}{140}} = 0,0763$$

$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,8571 - 0,0763; 0,8571 + 0,0763) =$
$(0,7808; 0,9334) = (78,08\,\%; 93,34\,\%)$

Problema 3.2.8 (2,5 puntos) Un local que vende comida a domicilio trata de estimar el tiempo medio que sus repartidores tardan en entregar el pedido desde que lo recogen en el local. En una muestra de 200 pedidos se obtuvo un tiempo medio de 17,5 minutos. Se supone que el tiempo de reparto de un pedido, en minutos, se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 4 minutos.

a) (1,5 puntos) Construye un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99 %, para el tiempo medio de entrega de esos repartidores.

b) (1 punto) ¿Cuál es el error de estimación en el intervalo anterior? Si, basándonos en la misma muestra, quisiésemos obtener un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 99,5 %, ¿el error sería mayor o menor que el obtenido en el apartado anterior?

Nota: Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Solución:

$$N(\mu; 4)$$

a) $n = 200$, $\overline{X} = 17,5$ y $NC = 99\,\% = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,58$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,58\frac{4}{\sqrt{200}} = 0,7297$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (17,5 - 0,7297; 17,5 + 0,7297) = (16,7703; 18,2297)$$

b) El error de estimación del intervalo anterior era de 0,7297, como se vió en el aprtado anterior. El error es directamente proporcional al nivel de confianza por lo que si aumentamos este nivel el error aumentará.

Capítulo 4

Cantabria

4.1. Ordinaria

INDICACIONES

a) El examen consta de seis ejercicios, de los cuales se resolverán únicamente tres (cualesquiera).

b) En caso de intentar resolver más de tres ejercicios, se corregirán únicamente los tres primeros que aparezcan en el cuadernillo del examen.

c) La puntuación máxima de cada ejercicio es de 2,5 puntos (dentro de cada ejercicio, la puntuación máxima de cada apartado se indica entre corchetes). La nota del examen será el resultado de dividir por 0,75 la suma de la puntuación obtenida en los tres ejercicios.

d) Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.

e) Queda prohibido el uso de calculadoras gráficas y/o programables, así como el de cualquier dispositivo con capacidad de almacenar y/o transmitir datos.

Problema 4.1.1 (2,5 puntos)En un almacén de construcción venden sacos de cemento de 25 kg, 50 kg y 100 kg. Cierto día se vendió un total de 180 sacos por un importe de 29200€. Se sabe que el precio del kg de cemento es de 4€ y que ese día se vendieron el doble de sacos de 25 kg que la suma de los sacos de 50 kg más los de 100 kg.

a) (1,25 puntos) Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular cuántos sacos de cada tamaño se vendieron ese día.

b) (1,25 puntos) Resuélvalo.

Solución:

a) Sean x sacos de 25 kg a 4€ = 100€,
y sacos de 50 kg a 4€ = 200€ y
z sacos de 100 kg a 4€ = 400€.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=180 \\ 100x+200y+400z=29200 \\ x=2(y+z) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=180 \\ x+2y+4z=292 \\ x-2y-2z=0 \end{array}\right.$$

b) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 1 & 2 & 4 & 292 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & 1 & 3 & 112 \\ 0 & -3 & -3 & -180 \end{array} \right) =$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & 1 & 3 & 112 \\ 0 & -2 & 0 & -68 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 180 - y - z = 120 \text{ sacos} \\ y = \dfrac{-68}{-2} = 34 \text{ sacos} \\ z = \dfrac{112 - y}{3} = 26 \text{ sacos} \end{array} \right.$$

sistema compatible determinado. Solución única.

Problema 4.1.2 (2,5 puntos) El ayuntamiento dispone de 48000€ para la puesta en marcha de huertas ecológicas en un viejo terreno municipal abandonado. Se destinará un máximo de 50 hectáreas al cultivo de hortalizas y un mínimo de 10 al de árboles frutales. Se dispone de un tanque de agua con una capacidad de 480 m^3 anuales para riego. Se sabe que cada hectárea dedicada al cultivo de hortalizas necesita 8 m^3 de agua anuales, cantidad que disminuye hasta los 4 m^3 anuales en el caso de las hectáreas dedicadas al cultivo de árboles frutales. Se sabe también que cada hectárea dedicada al cultivo de hortalizas requiere una inversión por parte del ayuntamiento de 400€, siendo esta cantidad de 800€ para cada hectárea dedicada al cultivo de árboles frutales. Se sabe además que la producción anual de cada hectárea de hortalizas es de 450 kg y la de cada hectárea de árboles frutales es de 600 kg. El objetivo que persigue el ayuntamiento es maximizar la producción anual total.

a) (0,75 puntos) Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

b) (1 punto) Dibuje la región factible en el plano, identificando claramente sus vértices.

c) (0,5 puntos) ¿Cuántas hectáreas se deben dedicar al cultivo de hortalizas y cuántas al de árboles frutales para maximizar la producción anual total?

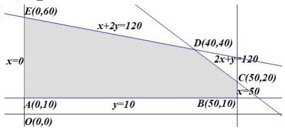
d) (0,25 puntos) ¿A cuánto asciende dicha producción?

Solución:
Sea x Ha para hortalizas e y Ha para árboles frutales.

a) $f(x,y) = 450x + 600y$ sujeto a

$$\left\{ \begin{array}{l} x \le 50 \\ y \ge 10 \\ 8x + 4y \le 480 \\ 400x + 800y \le 48000 \\ x, y \ge 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + y \le 120 \\ x + 2y \le 120 \\ x \le 50 \\ y \ge 10 \\ x \ge 0 \end{array} \right.$$

b) Representación:



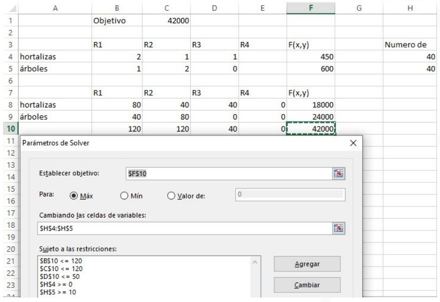
Los vértices a estudiar serán:

$$A(0,10),\ B(50,10),\ C(50,20),\ D(40,40),\ \text{y } E(0,60)$$

c) Sustituyendo en la función objetivo $f(x,y) = 450x + 600y$:

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(0,10) = 6000 \\ f(50,10) = 28500 \\ f(50,20) = 34500 \\ f(40,40) = 42000 \Longleftarrow \text{Máximo} \\ f(0,60) = 36000 \end{cases} \Longrightarrow$$



deben de dedicar 40 Ha al cultivo de hortalizas y 40 Ha al de árboles frutales con una producción máxima de 42000 kg.

d) La producción máxima es de 42000 kg.

Problema 4.1.3 (2,5 puntos)

a) (1,25 puntos) ¿Cuáles son las asíntotas (horizontales, verticales y/u oblicuas) de la siguiente función?

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 1}$$

b) (1,25 puntos) Dada la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si} \quad 0,5 \le x < 1 \\ ax^2 + b & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ e^x + 1 & \text{si} \quad 2 \le x < 2,5 \end{cases}$$

Determine los parámetros a y b para que f sea continua en el intervalo $[0,5; 2,5]$.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: $x = 1$ $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x^2-1}{x-1} = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x^2-1}{x-1} = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty$
- Horizontales: No hay $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2-1}{x-1} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2-1}{x-1} = +\infty$
- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{x^2-x} = 2$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2-1}{x-1} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-1+2x}{x-1} = 2$$

$$y = x + 2$$

b) Las ramas son continuas, hay que estudiar la continuidad en $x = 1$ y en $x = 2$:

☛ En $x = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln x}{x-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (ax^2+b) = a+b \\ f(1) = a+b \end{array}\right. \Longrightarrow a+b=1$$

☛ En $x = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (ax^2+b) = 4a+b \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (e^x+1) = e^2+1 \\ f(2) = e^2+1 \end{array}\right. \Longrightarrow 4a+b=e^2+1$$

☛ $\left\{\begin{array}{c} a+b=1 \\ 4a+b=e^2+1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{e^2}{3} = 2,463018699 \\ \\ b = \dfrac{3-e^2}{3} = -1,463018699 \end{array}\right.$

Problema 4.1.4 (2,5 puntos)

a) (1,25 puntos) Un hospital ha determinado que el número de pacientes que hay en urgencias a lo largo de un turno de 36 horas viene dado por la función $P(t)$, donde $t \in [0, 36]$ se expresa en horas. Se sabe que $P'(t) = t^2 - 40t + 231$ es la derivada de $P(t)$ y que al finalizar el turno quedan en urgencias 448 pacientes. ¿En qué momento del turno hay menos pacientes en urgencias? ¿Cuantos pacientes hay en ese momento?

b) (1,25 puntos) En una panadería el coste de producción de una hogaza es de 2€, y el precio de venta de x hogazas, en €, viene dado por la función $P(x) = x(122 - x)$. Además, esta panadería tiene unos gastos fijos mensuales de 500€. Suponiendo que todas las hogazas que se producen se venden, ¿cuántas hogazas debería producir la panadería al mes para maximizar sus ganancias mensuales? ¿A cuánto ascenderían esas ganancias?

Solución:

a) $P(t) = \displaystyle\int (t^2 - 40t + 231) = \dfrac{t^3}{3} - 20t^2 + 231t + C$
$P(36) = -2052 + C = 448 \Longrightarrow C = 2500$
$P(t) = \dfrac{t^3}{3} - 20t^2 + 231t + 2500$
$P(0) = 2500$ y $P(36) = 448$
$P'(t) = t^2 - 40t + 231 = 0 \Longrightarrow t = 7$ y $t = 33$
$P''(t) = 2t - 40 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} P''(7) = -26 < 0 \Longrightarrow t = 7 \text{ Máximo relativo} \\ P''(33) = 26 > 0 \Longrightarrow t = 33 \text{ Mínimo relativo} \end{array}\right.$
La función es creciente en el intervalo $(0, 7) \cup (33, 36)$ y es decreciente en el $(7, 33)$.
Cuando $t = 33$ horas hay $P(33) = 322$ pacientes y este mínimo es absoluto.

b) $B(x) = P(x) - C(x) - 500 = x(122 - x) - 2x - 500 = -x^2 + 120x - 500$
$B'(x) = -2x + 120 = 0 \Longrightarrow x = 60$
$B''(x) = -2 \Longrightarrow B''(60) = -2 < 0 \Longrightarrow (60, 3100)$ es un máximo relativo.
Debería producir 60 hogazas con un beneficio de 3100€

Problema 4.1.5 (2,5 puntos) El precio de las lavadoras que se venden en una gran superficie es una variable que sigue una distribución normal de desviación típica 235€. Para una muestra de 50 lavadoras, escogidas al azar, se obtiene un precio medio de 405€.

a) (1,25 puntos) Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el precio medio de una lavadora.

b) (1,25 puntos) ¿Cuál es el número mínimo de lavadoras que habría que considerar para que el error cometido al estimar el precio medio por lavadora con un nivel de confianza del 97 % fuese de 50€?

Solución:

$$N(\mu; 235)$$

a) $n = 50$, $\overline{X} = 405$ y $NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{235}{\sqrt{50}} = 65,1387$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (405 - 65,1387; 405 + 65,1387) = (339,8613; 470,1387)$$

b) $NC = 97\,\% = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$E = 50 \Longrightarrow 50 = 2,17\frac{235}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{2,17 \cdot 235}{50}\right)^2 = 104,0196009 \Longrightarrow n = 105$$

Problema 4.1.6 (2,5 puntos) Se tiene una urna que contiene 5 bolas blancas, 3 negras y 2 rojas. Si se extraen al azar dos bolas de forma consecutiva y sin reemplazamiento:

a) (0,25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean rojas?

b) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color?

c) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las dos bolas extraídas sea negra?

d) (0,75 puntos) Si la segunda bola que se extrae es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la primera haya sido blanca?

Solución:
Sean B bola blanca, N bola negra y R bola roja. Urna$= \{5B, 3N, 2R\}$

a) $P(RR) = \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{45} \simeq 0,0222$

b) $P(BB) + P(NN) + P(RR) = \dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{4}{9} + \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{1}{9} = \dfrac{14}{45} \simeq 0,3111$

c) $P(\text{alguna negra}) = 1 - P(\text{ninguna negra}) = 1 - (P(BR) + P(RB) + P(BB) + P(RR)) =$
$1 - \left(\dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{5}{9} + \dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{4}{9} + \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{8}{15} \simeq 0,5333$

d) $P(B|R) = \dfrac{P(BR)}{P(R)} = \dfrac{P(BR)}{P(BR) + P(NR) + P(RR)} = \dfrac{\frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9}}{\frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9}} = \dfrac{5}{9} \simeq 0,5556$

4.2. Extraordinaria

INDICACIONES

a) El examen consta de seis ejercicios, de los cuales se resolverán únicamente tres (cualesquiera).

b) En caso de intentar resolver más de tres ejercicios, se corregirán únicamente los tres primeros que aparezcan en el cuadernillo del examen.

c) La puntuación máxima de cada ejercicio es de 2,5 puntos (dentro de cada ejercicio, la puntuación máxima de cada apartado se indica entre corchetes). La nota del examen será el resultado de dividir por 0,75 la suma de la puntuación obtenida en los tres ejercicios.

d) Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.

e) Queda prohibido el uso de calculadoras gráficas y/o programables, así como el de cualquier dispositivo con capacidad de almacenar y/o transmitir datos.

Problema 4.2.1 (2,5 puntos) Una empresa de 244 trabajadores se compone de operarios, supervisores y gerentes; siendo el número de operarios ocho veces el de gerentes. Además, se sabe que un día en el que faltaron la mitad de los supervisores y el 60 % de los gerentes, el número de operarios fue cuatro veces la suma de los supervisores y los gerentes que se quedaron.

a) (1,25 puntos) Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular cuántos operarios, cuántos supervisores y cuántos gerentes componen la empresa.

b) (1,25 puntos) Resuélvalo.

Solución:

a) Sea x el número de operarios, y el número de supervisores y z el número de gerentes.

$$\begin{cases} x+y+z=244 \\ x=8z \\ x=4(0,5y+0,4z) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=244 \\ x-8z=0 \\ 5x-10y-8z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=160 \\ y=64 \\ z=20 \end{cases}$$

b) $$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 244 \\ 1 & 0 & -8 & 0 \\ 5 & -10 & -8 & 0 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-5F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 244 \\ 0 & -1 & -9 & -244 \\ 0 & -15 & -13 & -1220 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-15F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 244 \\ 0 & -1 & -9 & -244 \\ 0 & 0 & 122 & 2440 \end{array}\right)\Longrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{2440}{122}=20 \text{ gerentes} \\ y=244-9z=64 \text{ supervisores} \\ x=244-y-z=160 \text{ operarios} \end{cases}$$

Problema 4.2.2 (2,5 puntos) Una empresa de alquiler de vehículos necesita ampliar su flota con el objetivo de maximizar beneficios, para lo cual adquiere nuevos utilitarios y deportivos. Como máximo, tiene planeado adquirir un total de 120 vehículos. Tiene claro que no comprará más de 90 utilitarios ni menos de 10 deportivos. Además, quiere que el número de utilitarios sea, al menos, el doble del de deportivos. Teniendo en cuenta que al final de su vida útil espera haber obtenido un beneficio de 25000€ por cada utilitario y de 40000€ por cada deportivo:

a) (0,75 puntos) Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

b) (1 punto) Dibuje la región factible en el plano, identificando claramente sus vértices.

c) (0,5 puntos) ¿Cuántos utilitarios y cuántos deportivos debe adquirir la empresa para maximizar el beneficio?

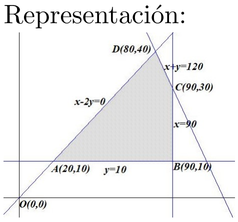
d) (0,25 puntos) ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Solución:
Sea x el nº de utilitarios e y el nº de deportivos.

a) $f(x, y) = 25000x + 40000y$ sujeto a

$$\begin{cases} x + y \le 120 \\ x \le 90 \\ y \ge 10 \\ x \ge 2y \\ x \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \le 120 \\ x - 2y \ge 0 \\ x \le 90 \\ y \ge 10 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

b) Representación:



Los vértices a estudiar serán:

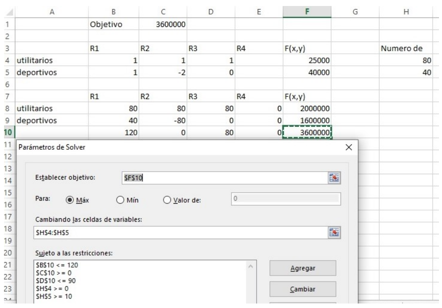
$$A(20, 10),\quad B(90, 10),\quad C(90, 30) \text{ y } D(80, 40)$$

c) Sustituyendo en la función objetivo $f(x, y) = 25000x + 40000y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(20, 10) = 900000 \\ f(90, 10) = 2650000 \\ f(90, 30) = 3450000 \\ f(80, 40) = 3600000 \Longleftarrow \text{máximo} \end{cases} \Longrightarrow$$

debe comprar 80 utilitarios y 40 deportivos para obtener el máximo beneficio.



d) El beneficio máximo es de 3600000€.

Problema 4.2.3 (2,5 puntos) Dadas las funciones $f(x) = -x^2 + 6x$ y $g(x) = x^2 - 2x$

a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones.

b) ¿Cuáles y de qué tipo (máximo/mínimo relativo/absoluto) son los extremos de ambas funciones?

c) Dibuje la gráfica de ambas funciones, indicando claramente sus puntos de corte con los ejes OX y OY, así como los puntos de corte entre f y g.

d) Calcule el área de la región que queda encerrada entre las funciones f y g.

Solución:

a) Monotonía:

☛ $f(x) = -x^2 + 6x \Longrightarrow f'(x) = -2x + 6 = 0 \Longrightarrow x = 3$

	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $(3, +\infty)$ y creciente en $(-\infty, 3)$. Tiene un máximo relativo en el punto $(3, 9)$

☛ $g(x) = x^2 - 2x \Longrightarrow g'(x) = 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
$g'(x)$	$-$	$+$
$g(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(1, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 1)$. Tiene un mínimo relativo en el punto $(1, -1)$

b) ☛ El máximo relativo de $f(x)$ es absoluto en el punto $(3, 9)$

☛ El mínimo relativo de $g(x)$ es absoluto en el punto $(1, -1)$

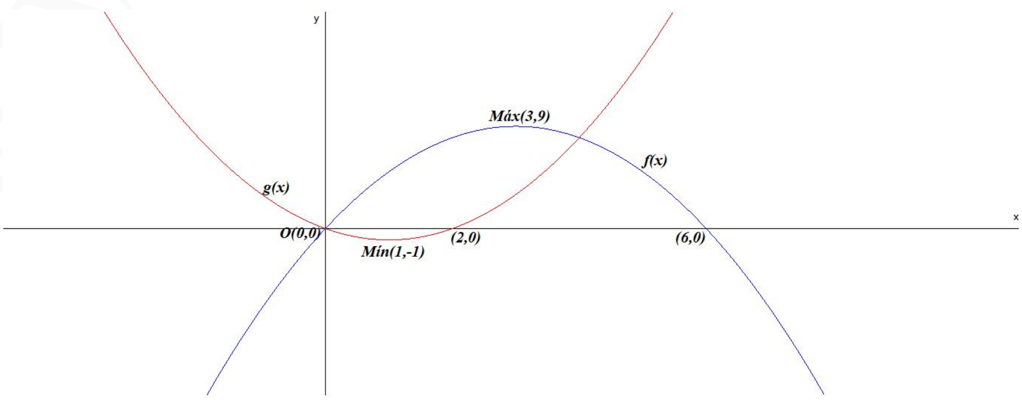
c) Puntos de corte:

☛ $f(x) = -x^2 + 6x$

- Con OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
- Con OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow -x^2 + 6x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ y $(6, 0)$

☛ $g(x) = x^2 - 2x$

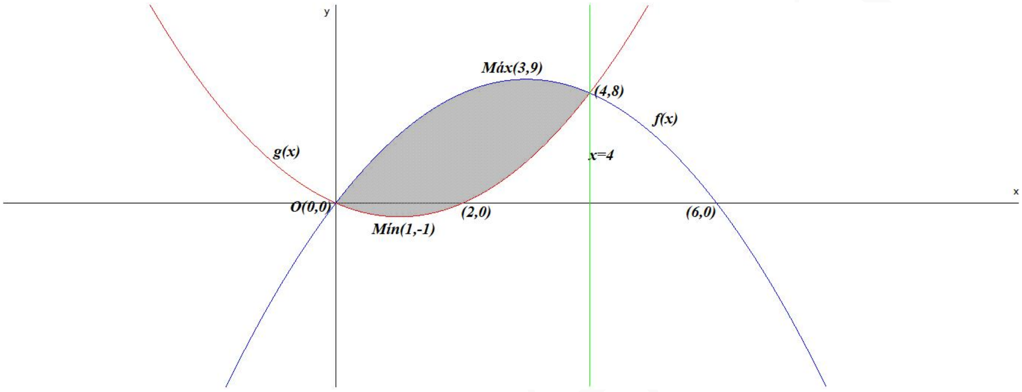
- Con OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
- Con OX hacemos $g(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ y $(2, 0)$



d) Entre las dos curvas:
$f(x) = g(x) \Longrightarrow -x^2 + 6x = x^2 - 2x \Longrightarrow -2x^2 + 8x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 4$
Los puntos de corte serían $(0,0)$ y $(4,8)$

e) $S = \left|\int_0^4 (f(x) - g(x))\,dx\right| = \left|\int_0^4 (-2x^2 + 8x)\,dx\right| = \left|-\dfrac{2x^3}{3} + 4x^2\right]_0^4\right| =$

$$\left|\frac{64}{3}\right| = \frac{64}{3} \simeq 21,333\ u^2$$



Problema 4.2.4 (2,5 puntos)

a) (1,25 puntos) Una frutería ha conseguido determinar que el peso total de la fruta que guarda en el almacén, expresado en kilogramos, viene dado por la función $P(t) = 30t^2 - 240t + 3000$, donde $t \in [0,6]$ representa las horas transcurridas desde el momento de la apertura. ¿En qué momento hay menos fruta en el almacén? ¿Cuántos kilogramos hay en ese momento?

b) (1,25 puntos) En una sastrería familiar, el coste total que supone producir x pantalones, en €, viene dado por la función $C(x) = 120x + 700$. Por otro lado, el precio de venta de esos x pantalones, en €, viene dado por la función $P(x) = x(200 - x)$. Suponiendo que todos los pantalones que se producen se venden, ¿cuántos pantalones habría que producir para que el beneficio obtenido sea máximo?

Solución:

a) $P'(t) = 60t - 240 = 0 \Longrightarrow t = 4$

	$(0,4)$	$(4,6)$
$P'(t)$	$-$	$+$
$P(t)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(0,4)$ y creciente en el $(4,6)$. Presenta un mínimo relativo que también es absoluto en el punto $(4, 2520)$.
El momento en el que hay menos fruta en el almacén es cuando han transcurrido 4 horas y hay 2520 kg.

b) El beneficio $B(x) = P(x) - C(x) = x(200 - x) - (120x + 700) = -x^2 + 80x - 700$
$B'(x) = -2x + 80 = 0 \Longrightarrow x = 40$.
$B''(x) = -2 \Longrightarrow B''(40) = -2 < 0 \Longrightarrow x = 40$ es un máximo relativo que también es absoluto.
El beneficio es máximo con la producción de 40 pantalones y es de $B(40) = 900$€.

Problema 4.2.5 (2,5 puntos)

a) (1,25 puntos) Con un nivel de confianza del 95 % se ha determinado que el intervalo de confianza para el tiempo medio de vida útil de los microondas que fabrica una cierta marca de electrodomésticos es (8,2 años;9,4 años). Sabiendo que el tiempo de vida útil de estos microondas es una variable que sigue una distribución normal de desviación típica 3,2 años, halle el tamaño mínimo que debe presentar una muestra de microondas, escogidos aleatoriamente, que permita obtener el intervalo de confianza indicado.

b) (1,25 puntos) En un aeropuerto, el tiempo que tarda un viajero en llegar al avión desde que atraviesa el control de seguridad sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 2 minutos. A partir de una muestra de 125 viajeros, escogidos al azar, se determinó que el tiempo medio para llegar al avión tras atravesar el control de seguridad es de 16 minutos. Halle el intervalo de confianza para la media de la distribución con un nivel de confianza del 97,5 %.

Solución:

a) $NC = 95\,\% = 0,95 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$E = \dfrac{9,4-8,2}{2} = 0,6$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,6 = 1,96\frac{3,2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 109,2722 \Longrightarrow n = 110$$

b) $NC = 97,5\,\% = 0,975 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,025 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,0125$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9875 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,24$$

$n = 125$, $\overline{X} = 16$ y $\sigma = 2$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,24\frac{2}{\sqrt{125}} = 0,4007$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (16 - 0,4007; 16 + 0,4007) = (15,5993; 16,4007)$$

Problema 4.2.6 (2,5 puntos) El 55 % de los artículos que fabrica una empresa de iluminación son bombillas, el 30 % fluorescentes y el resto halógenos. Tras un análisis en el departamento de calidad se encuentra que el 2 % de las bombillas, el 1 % de los fluorescentes y el 3 % de los halógenos que se producen presenta algún tipo de defecto de fábrica. Si se escoge un producto al azar de los que se producen:

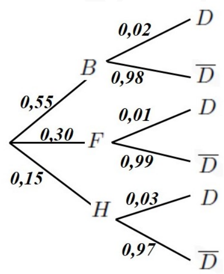
a) (0,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un fluorescente y no presente ningún defecto de fábrica?

b) (0,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sea una bombilla y presente algún defecto de fábrica?

c) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que presente algún defecto de fábrica?

d) (0,75 puntos) Si no presenta ningún defecto de fábrica, ¿cuál es la probabilidad de que sea un halógeno?

Solución:
Sean B bombillas, F fluorescentes, H halógenos, D tiene defectos y $\overline{D}$ no tiene defectos.



a) $P(F \cap \overline{D}) = P(\overline{D}|F)P(F) = 0,99 \cdot 0,30 = 0,297$

b) $P(B \cap D) = P(D|B)P(B) = 0,02 \cdot 0,55 = 0,011$

c) $P(D) = P(D|B)P(B) + P(D|F)P(F) + P(D|H)P(H) =$
$0,02 \cdot 0,55 + 0,01 \cdot 0,30 + 0,03 \cdot 0,15 = 0,0185$

d) $P(H|\overline{D}) = \dfrac{P(\overline{D}|H)P(H)}{P(\overline{D})} = \dfrac{0,97 \cdot 0,15}{1 - 0,0185} = 0,1482$

Capítulo 5

Castilla-La Mancha

5.1. Ordinaria

El examen está compuesto de tres secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Es necesario detallar el proceso de resolución de los ejercicios.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

Problema 5.1.1 (1,5 puntos) En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,y) = -x - 5y + 10$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ -4 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)

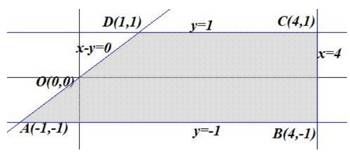
b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)

Solución:

a) Tenemos:

$f(x,y) = -x - 5y + 10$ sujeto a

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ -4 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

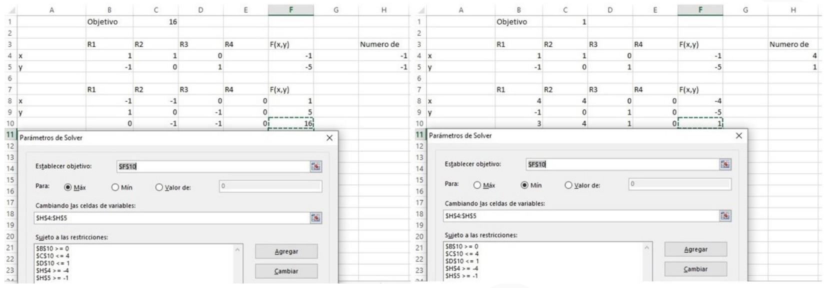


b) Los vértices a estudiar serán: $A(-1,-1)$, $B(4,-1)$, $C(4,1)$ y $D(1,1)$.
Sustituyendo en $f(x,y) = -x - 5y + 10$

$$\begin{cases} f(-1,-1) = 16 \\ f(4,-1) = 11 \\ f(4,1) = 1 \\ f(1,1) = 4 \end{cases} \Longrightarrow$$

El máximo se encuentra en el punto $A(-1,-1)$ y vale 16 y el mínimo en el punto $C(4,1)$ y vale 1.

Solución por solver :



Problema 5.1.2 (1,5 puntos) La discografía de un legendario grupo de rock se reedita en tres discos (I, II y III) y las ventas totales ascienden a 70000 unidades. Sabemos que del disco III se vendieron las mismas unidades que entre los otros dos discos juntos y que la diferencia entre las unidades vendidas del III y las del II equivalen al triple de la diferencia entre las unidades vendidas del II y las del I.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de unidades de cada disco se vendieron. (0,75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0,75 puntos)

Solución:

a) Sean x unidades vendidas del disco I, y unidades vendidas del disco II y z unidades vendidas del disco III.

$$\begin{cases} x + y + z = 70000 \\ z = x + y \\ z - y = 3(y - x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 70000 \\ x + y - z = 0 \\ 3x - 4y + z = 0 \end{cases}$$

b) $$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70000 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70000 \\ 0 & 0 & -2 & -70000 \\ 0 & -7 & -2 & -210000 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible determinado. Solución única:

$$\begin{cases} z = \dfrac{-70000}{-2} = 35000 \\ -7y - 70000 = -210000 \Longrightarrow y = 20000 \\ x + 20000 + 35000 = 70000 \Longrightarrow x = 15000 \end{cases}$$

Se venden 15000 discos I, 20000 discos II y 35000 discos III.

Bloque 2

Problema 5.1.3 (1,5 puntos) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + tx - 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x + t & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 1$? (0,5 puntos)

b) Para $t = 2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 1)$. (0,5 puntos)

c) Para $t = 2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-\infty, 1)$. (0,5 puntos)

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(2x^2 + tx - 1) = t + 1 = f(1)$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x + t) = 1 + t \Longrightarrow$ la función es contínua $\forall t \in \mathbb{R}$. (Los límites laterales son iguales y coinciden con el valor de la función en el punto.

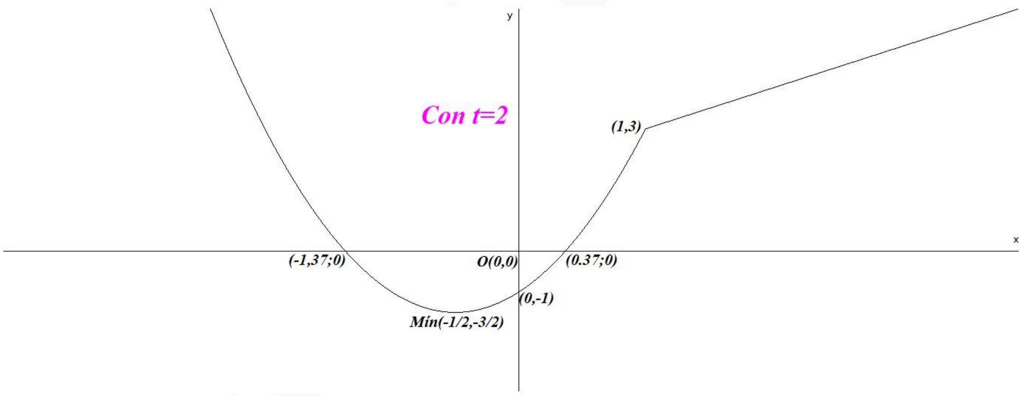
b) Si $t = 2$ y $x \in (-\infty, 1) \Longrightarrow f(x) = 2x^2 + 2x - 1 \Longrightarrow f'(x) = 4x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.

$f''(x) = 4 \Longrightarrow f''\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 4 > 0 \Longrightarrow \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$ es un mínimo.

c) Si $t = 2$ y $x \in (-\infty, 1)$:

	$\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$	$\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$ y creciente en el $\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$.



Problema 5.1.4 (1,5 puntos) La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ tiene un punto de inflexión en $(2, -5)$ y la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es -12: Calcula razonadamente los valores de los parámetros a, b, y c.
Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c \Longrightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Longrightarrow f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\begin{cases} f(2) = -5 \Longrightarrow 8a + 4b + c = -5 \\ f'(2) = -12 \Longrightarrow 12a + 4b = -12 \\ f''(2) = 0 \Longrightarrow 12a + 2b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 11 \end{cases}$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11$$

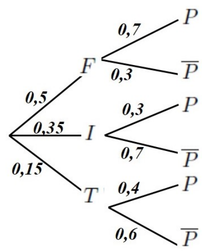
Sección 2 (3,5 puntos) Bloque 1

Problema 5.1.5 (1,5 puntos) En un determinado instituto el 50 % de los estudiantes prefiere como red social Facebook, pero un 30 % de estos no publica habitualmente nada. El 35 % prefiere Instagram, pero solo el 30 % de los que prefieren esta plataforma hacen publicaciones habitualmente. Finalmente, el resto de los estudiantes prefiere TikTok y un 60 % de estos no publica habitualmente.

a) Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no publique habitualmente nada en su red social preferida? (0,75 puntos)

b) Si se sabe que un estudiante publica habitualmente, ¿cuál es la probabilidad de que su red social preferida sea Instagram? (0,75 puntos)

Solución:
Sean F prefiere facebook, I prefiere Instagram, T prefiere TikTok, P publica habitualmente y $\overline{P}$ no publica habitualmente.



a) $P(\overline{P}) = P(\overline{P}|F)P(F) + P(\overline{P}|I)P(I) + P(\overline{P}|T)P(T) =$
$0,3 \cdot 0,5 + 0,7 \cdot 0,35 + 0,6 \cdot 0,15 = 0,485$

b) $P(I|P) = \dfrac{P(P|I)P(I)}{P(P)} = \dfrac{0,3 \cdot 0,35}{1 - 0,485} = 0,2039$

Problema 5.1.6 (2 puntos) Una asociación benéfica ha tomado una muestra de 9 personas y ha registrado las cantidades donadas por estas personas, obteniendo 60, 40, 55, 35, 20, 25, 50, 45 y 30 euros. Si el dinero donado sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 100$ euros^2.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del dinero donado con un nivel de confianza del 97 %. (1 punto)

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 2 euros. (1 punto)

Solución:

$$N(\mu; 10)$$

a) $n = 9$, $\overline{X} = \dfrac{60 + 40 + 55 + 35 + 20 + 25 + 50 + 45 + 30}{9} = 40$ y $NC = 97\,\% = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17\frac{10}{\sqrt{9}} = 7,2333$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (40 - 7,2333; 40 + 7,2333) = (32,7667; 47,2333)$$

b) $2 = 2,17\dfrac{10}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 117{,}7225 \Longrightarrow n = 118$

Bloque 2

Problema 5.1.7 (1,5 puntos) Un teatro ha vendido las 660 entradas disponibles que tenía para un espectáculo. El número de entradas que se han vendido para jubilados es la cuarta parte de las entradas que se han vendido para adultos. Además, las entradas para niños equivalen al 10 % de las que se han vendido entre adultos y jubilados.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular cómo se han repartido las entradas entre adultos, jubilados y niños. (0,75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0,75 puntos)

Solución:

a) Sea x número de entradas de jubilados, y número de entradas de adultos y z número de entradas de niños.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=660 \\ x=\dfrac{y}{4} \\ z=0,1(x+y) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=660 \\ 4x-y=0 \\ x+y-10z=0 \end{array}\right.$$

b) $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 660 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -10 & 0 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-4F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 660 \\ 0 & -5 & -4 & -2640 \\ 0 & 0 & -11 & -660 \end{array}\right) \Longrightarrow$
sistema compatible determinado. Solución única:
$z=\dfrac{-660}{-11}=60$, $-5y-240=-2640 \Longrightarrow y=480$ y $x+480+60=660 \Longrightarrow x=120$
Se han vendido 120 entradas de jubilados 480 de adultos y 60 de niños.

Problema 5.1.8 (2 puntos) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

a) Calcula $A\cdot B\cdot C^T$ (0,75 puntos)

b) Calcula $\dfrac{1}{3}B^2-I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. (0,75 puntos)

c) Razona si se puede calcular $(A-B)-C$ y $B\cdot C$ (No es necesario realizar las operaciones). (0,5 puntos)

Solución:

a) $$A\cdot B\cdot C^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $$\frac{1}{3}B^2-I=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $\underset{3\times3}{A}-\underset{3\times3}{B}=\underset{3\times3}{A-B}$ se puede realizar esta resta pero no es posible restar $\underset{1\times3}{C}$ por tener distinta dimensión.
$\underset{3\times3}{B}\cdot\underset{1\times3}{C}$ no se puede hacer ya que el número de columnas de B es distinto del número de filas de C.

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

Problema 5.1.9 (1,5 puntos) De los 80 estudiantes solicitantes de una beca Erasmus en Italia, 50 son mujeres. Se seleccionan al azar y sin reposición a 3 estudiantes que serán los que disfruten de la beca Erasmus en ese destino. Calcular la probabilidad de que:

a) Los tres seleccionados sean mujeres. (0,5 puntos)

b) Los tres seleccionados sean del mismo sexo. (0,5 puntos)

c) Al menos dos de los seleccionados sean hombres. (0,5 puntos)

Solución:
Sean H hombre y M mujer.

a) $P(MMM) = \dfrac{50}{80} \cdot \dfrac{49}{79} \cdot \dfrac{48}{78} = \dfrac{245}{1027} = 0,2386$

b) $P(MMM) + P(HHH) = \dfrac{245}{1027} + \dfrac{30}{80} \cdot \dfrac{29}{79} \cdot \dfrac{28}{78} = \dfrac{245}{1027} + \dfrac{203}{4108} = \dfrac{91}{316} = 0,288$

c) $P(HHH) + P(HHM) + P(HMH) + P(MHH) = \dfrac{203}{4108} + 3 \cdot \dfrac{725}{8216} = \dfrac{2581}{8216} = 0,3141$

$P(HHM) = \dfrac{30}{80} \cdot \dfrac{29}{79} \cdot \dfrac{50}{78} = \dfrac{725}{8216}$

$P(HMH) = \dfrac{30}{80} \cdot \dfrac{50}{79} \cdot \dfrac{29}{78} = \dfrac{725}{8216}$

$P(MHH) = \dfrac{50}{80} \cdot \dfrac{30}{79} \cdot \dfrac{29}{78} = \dfrac{725}{8216}$

Problema 5.1.10 (2 puntos) Un fabricante de motores para coches de Fórmula 1 ha tomado una muestra aleatoria de 81 motores para examinar su peso, proporcionando una media de 153 kg. Si se sabe que el peso de los motores sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 30$ kg,

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del peso de los motores con un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 93,12 %? (0,5 puntos)

c) El fabricante afirma que el peso medio de los motores es de 145 kg. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del 92 %? Justificar la respuesta. (0,5 puntos)

Solución:

$$N(\mu; 30)$$

a) $n = 81$, $\overline{X} = 153$ y $NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{30}{\sqrt{81}} = 6,5333$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (153 - 6,5333; 153 + 6,5333) = (146,4667; 159,5333)$$

b) $NC = 93,12\,\% = 0,9312 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,0688 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,0344$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9656 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,82$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,82\frac{30}{\sqrt{100}} = 5,46$$

c) $145 \notin IC_{95\,\%} \Longrightarrow 145 \notin IC_{92\,\%}$ ya que si se disminuye el nivel de confianza también disminuye la amplitud del intervalo. No se acepta la afirmación del fabricante.

Bloque 2

Problema 5.1.11 (1,5 puntos) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -(x+t)^2+2 & \text{si} \quad x \le -2 \\ t-2 & \text{si} \quad -2 < x \le 2 \\ x^2-(t+3)x+9 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

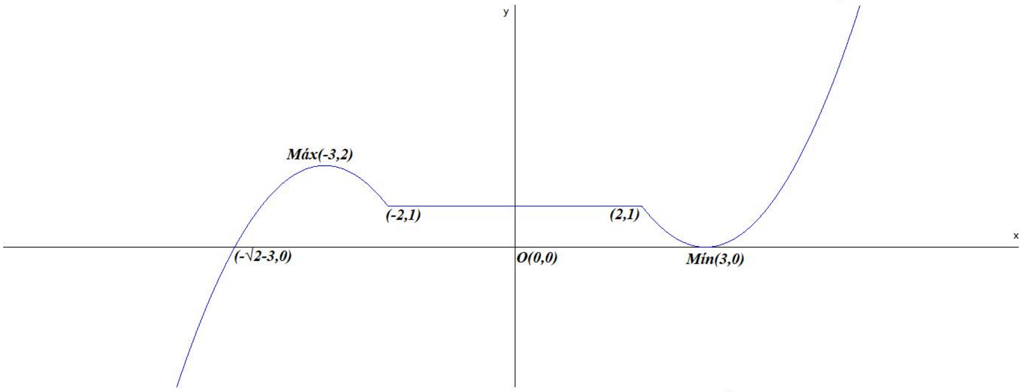
a) ¿Existe un valor de t para el que la función $f(x)$ es continua en $x=-2$ y en $x=2$? (0,75 puntos)

b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $t=3$. (0,75 puntos)

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-}(-(x+t)^2+2) = -t^2+4t-2$ y $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+}(t-2) = t-2 \Longrightarrow$
$-t^2+4t-2 = t-2 \Longrightarrow t^2-3t=0 \Longrightarrow t=0$ y $t=3$.
Si $t=0$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(-2) = -2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+9) = 7 \end{cases} \Longrightarrow f$ discontinua en $x=2$
Si $t=3$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-6x+9) = 1 \\ f(2) = 1 \end{cases} \Longrightarrow f$ continua en $x=2$
Luego si $t=3$ la función es continua en $\mathbb{R}$, dado que las ramas son continuas.

b) Si $t=3 \Longrightarrow \begin{cases} -(x+3)^2+2 & \text{si} \quad x \le -2 \\ 1 & \text{si} \quad -2 < x \le 2 \\ x^2-6x+9 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$
Dos ramas parabólicas y una rama horizontal en el intervalo $(-2,2]$
Rama $x \le -2 \Longrightarrow f(x) = -(x+3)^2+2 = 0 \Longrightarrow (-\sqrt{2}-3, 0)$ y $f'(x) = -2(x+3) = 0 \Longrightarrow$ $x=-3$, como $f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(-3) = -2 < 0 \Longrightarrow (-3,2)$ es un máximo.
Rama $x > 2 \Longrightarrow f(x) = x^2-6x+9 = 0 \Longrightarrow (3,0)$ y $f'(x) = 2x-6 = 0 \Longrightarrow x = 3$, como $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(3) = 2 > 0 \Longrightarrow (3,0)$ es un mínimo.



Problema 5.1.12 (2 puntos) La altura, medida en metros, que alcanza una pelota lanzada verticalmente hacia arriba viene expresada en función del tiempo por $H(x) = 20x - 2x^2$ con $x =$ tiempo en segundos y $(0 \leq x \leq 10)$.

a) ¿Qué altura habrá alcanzado la pelota a los 3 segundos? (0,5 puntos)

b) ¿En qué momentos la pelota se encuentra a 32 metros de altura? (0,5 puntos)

c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? ¿En qué momento? (1 punto)

Solución:

a) $H(3) = 42$ metros,

b) $H(x) = 20x - 2x^2 = 32 \Longrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Longrightarrow x = 2$ segundos y $x = 8$ segundos.

c) $H'(x) = 20 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 5$ y $H''(x) = -4 \Longrightarrow H(5) = -4 < 0 \Longrightarrow$ hay un máximo relativo (en este caso absoluto: $H(0) = H(10) = 0$) a los 5 segundos con una altura $H(5) = 50$ metros.

5.2. Extraordinaria

El examen está compuesto de tres secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Es necesario detallar el proceso de resolución de los ejercicios.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

Problema 5.2.1 (1,5 puntos) En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 4x + 5y - 3$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - 2y \leq 5 \\ y \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

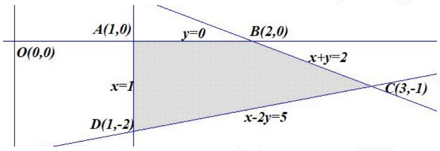
a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1,25 puntos)

b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0,25 puntos)

Solución:

a) Tenemos:
$f(x, y) = 4x + 5y - 3$ sujeto a

$$\begin{cases} x + y \le 2 \\ x - 2y \le 5 \\ y \le 0 \\ x \ge 1 \end{cases}$$

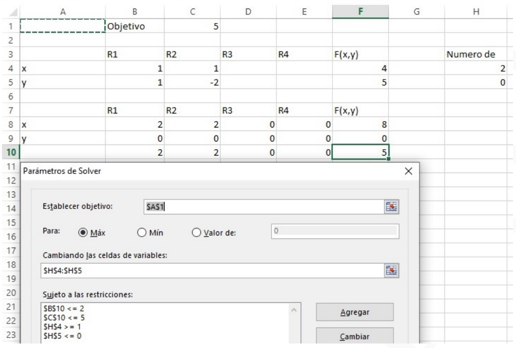


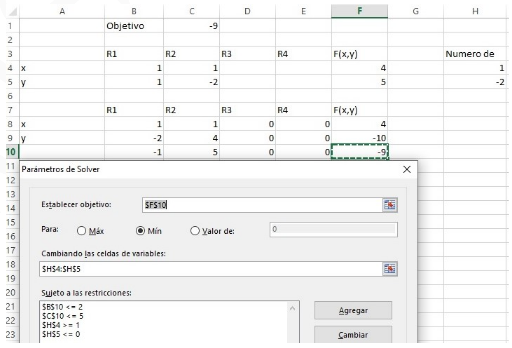
Los vértices a estudiar serán: $A(1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(3, -1)$ y $D(1, -2)$.

b) Sustituyendo en $f(x, y) = 4x + 5y - 3$: $\begin{cases} f(1, 0) = 1 \\ f(2, 0) = 5 \\ f(3, -1) = 4 \\ f(1, -2) = -9 \end{cases} \Longrightarrow$

El máximo se encuentra en el punto $B(2, 0)$ con un valor de 5 unidades. El mínimo se encuentra en el punto $D(1, -2)$ con un valor de -9 unidades.

Soluciones por solver :





Problema 5.2.2 (1,5 puntos) En una galería de arte disponen de cuadros de tres artistas: uno realiza arte urbano, otro se dedica al arte abstracto y el tercero al grafiti. El 40 % de la suma de los cuadros pintados por el primero y el segundo es 28. El doble de los cuadros del que realiza arte abstracto equivale al triple de los cuadros del que hace grafiti. En total, en la galería disponen de 110 cuadros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para determinar cuántos cuadros tiene cada artista en la galería. (0,75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0,75 puntos)

Solución:

a) Sean x el número de cuadros con arte urbano, y el número de cuadros con arte abstracto y z el número de cuadros con grafiti.

$$\begin{cases} x + y + z = 110 \\ 0,4(x + y) = 28 \\ 2y = 3z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 110 \\ x + y = 70 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

b) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 1 & 1 & 0 & 70 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 0 & 0 & -1 & -40 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$
sistema compatible determinado. Solución única:
$$\left\{ \begin{array}{l} z = 40 \\ 2y - 120 = 0 \Longrightarrow y = 60 \\ x + 60 + 40 = 110 \Longrightarrow x = 10 \end{array} \right.$$
En la galería hay 10 cuadros de arte urbano, 60 cuadros abstractos y 40 de grafiti.

Bloque 2

Problema 5.2.3 (1,5 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} |x+1| + t & \text{si} & x \le 0 \\ -x^3 + 2x^2 + (t+2)x + 3 & \text{si} & x > 0 \end{array} \right.$$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$? (0,5 puntos)

b) Para $t = 2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, \infty)$. (0,5 puntos)

c) Para $t = 2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, \infty)$. (0,5 puntos)

Solución:

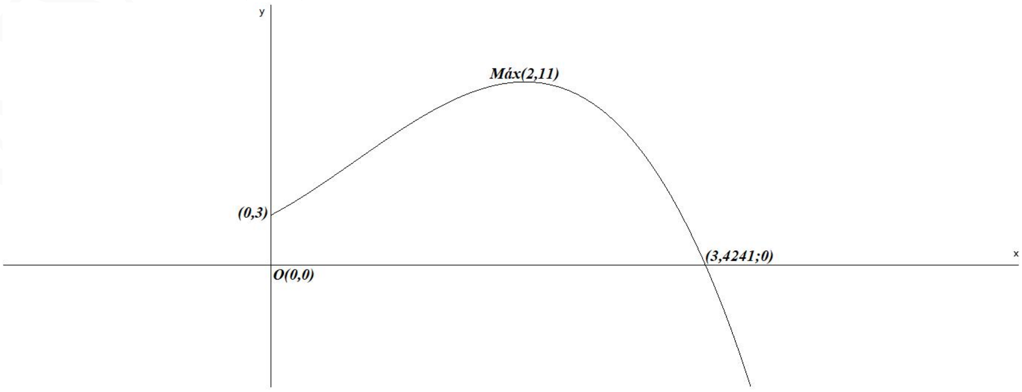
a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}(|x+1| + t) = 1 + t$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}(-x^3 + 2x^2 + (t+2)x + 3) = 3$ y $f(0) = 1 + t \Longrightarrow 1 + t = 3 \Longrightarrow t = 2$.

b) Si $t = 2$ y $x \in (0, \infty) \Longrightarrow f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x + 3 \Longrightarrow f'(x) = -3x^2 + 4x + 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $x = -\dfrac{2}{3}$ no válida por no estar en la rama.
$f''(x) = -6x + 4 \Longrightarrow f''(2) = -8 < 0 \Longrightarrow x = 2$ es un máximo relativo.

c)

	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(0, 2)$ y decreciente en el $(2, \infty)$ Presenta un máximo relativo en el punto $(2, 11)$



Problema 5.2.4 (1,5 puntos) Halla razonadamente los parámetros a y b de la función $f(x) = ax^2 + bx - 20$, sabiendo que dicha función tiene un máximo en el punto $(6, 16)$.
Solución:

$$f(x) = ax^2 + bx - 20 \Longrightarrow f'(x) = 2ax + b$$

$$\begin{cases} f(6) = 16 \Longrightarrow 36a + 6b - 20 = 16 \\ f'(6) = 0 \Longrightarrow 12a + b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 12 \end{cases}$$

$$f(x) = -x^2 + 12x - 20$$

Comprobamos que $x = 6$ es un máximo: $f'(x) = -2x + 12 \Longrightarrow f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(6) = -2 < 0 \Longrightarrow (6, 16)$ es un máximo relativo.

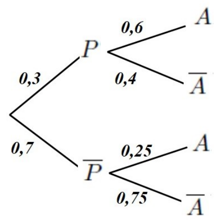
Sección 2 (3,5 puntos) Bloque 1

Problema 5.2.5 (1,5 puntos) Un estudio sobre ingredientes de pizza indica que solo al 30 % de la población le gusta la piña en la pizza y de estos, a un 60 % le gustan las anchoas. Sin embargo, de los que no les gusta la piña, el 75 % afirman que no les gustan las anchoas en la pizza.

a) Elegido un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le gusten las anchoas en la pizza? (0,75 puntos)

b) Si se sabe que a una persona no le gustan las anchoas en la pizza, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la piña? (0,75 puntos)

Solución:
Sean P les gusta la piña, $\overline{P}$ no les gusta la piña, A les gusta las anchoas y $\overline{A}$ no les gusta las anchoas.



a) $P(A) = P(A|P)P(P) + P(A|\overline{P})P(\overline{P}) = 0,6 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,7 = 0,355$

b) $P(P|\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A}|P)P(P)}{P(\overline{A})} = \dfrac{0,4 \cdot 0,3}{1 - 0,355} = 0,1860$

Problema 5.2.6 (2 puntos) Una marca de productos de repostería ha tomado una muestra aleatoria de 36 bizcochos y ha medido su contenido calórico, proporcionando una media de 223 calorías. Si se sabe que el contenido calórico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 51$ calorías,

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del contenido calórico de los bizcochos con un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con un nivel de confianza del 94,64 %, el error máximo admisible sea menor que 10 calorías. (1 punto)

Solución:

$$N(\mu; 51)$$

a) $n = 36$, $\overline{X} = 223$ calorías y $NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{51}{\sqrt{36}} = 16,66 \text{ calorías}$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (223 - 16,66; 223 + 16,66) = (206,34; 239,66)$$

b) $NC = 94,64\,\% = 0,9464 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,0536 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,0268$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9732 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,93$$

$$10 = 1,93\frac{51}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{1,93 \cdot 51}{10}\right)^2 = 96,8846 \Longrightarrow n = 97 \text{ bizcochos.}$$

Bloque 2

Problema 5.2.7 (1,5 puntos) Una cooperativa manchega que distribuye tres tipos de vino, blanco, rosado y tinto, ha recibido un pedido de 50 botellas. Se sabe que el doble de botellas de vino blanco, por una parte, excede en una unidad al de botellas de vino rosado y, por otra parte, coincide con el quíntuplo del número de botellas de vino tinto.

a) Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar cuántas botellas de vino blanco, rosado y tinto se pidieron. (0,75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Solución:

a) Sea x número de botellas de blanco, y número de botellas de rosado y z número de botellas de tinto.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=50 \\ 2x=y+1 \\ 2x=5z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=50 \\ 2x-y=1 \\ 2x-5z=0 \end{array}\right.$$

b) $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & -3 & -2 & -99 \\ 0 & -2 & -7 & -100 \end{array}\right) =$

$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 - 2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & -3 & -2 & -99 \\ 0 & 0 & -17 & -102 \end{array}\right) \Longrightarrow$

Sistema compatible determinado. Solución única:

$$\left\{\begin{array}{l} z = \dfrac{102}{17} = 6 \\ -3y - 12 = -99 \Longrightarrow y = 29 \\ x + 29 + 6 = 50 \Longrightarrow x = 15 \end{array}\right.$$

El pedido es de 15 botellas de vino blanco, 29 de rosado y 6 de tinto.

Problema 5.2.8 (1,5 puntos)

a) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ demuestra que M y N conmutan. (0,5 puntos)

b) Resuelve la ecuación matricial $M \cdot P \cdot X = N^T - M$ (1 punto)

c) Calcula la matriz que sumada con la matriz $(N+I)^2$ da como resultado la matriz nula, siendo I la matriz identidad de orden 2. (0,5 puntos)

Solución:

a) $MN = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$NM = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Luego $MN = NM = I$

b) $MPX = N^T - M \Longrightarrow X = (MP)^{-1}(N^T - M) =$
$\left[\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}\left[\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -1/3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -10/3 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$

c) $X + (N+I)^2 = O \Longrightarrow X = O - (N+I)^2 = -(N+I)^2 =$
$-\left[\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} -10 & 36 \\ 4 & -18 \end{pmatrix}$

Sección 3 (3,5 puntos) Bloque 1

Problema 5.2.9 (1,5 puntos) En una empresa de reparto el 9 % de los paquetes llega con retraso, el 14 % llega defectuoso y 19 % llega con retraso o defectuoso o ambos.

a) Elegido un paquete al azar, ¿cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso y con retraso? (0,75 puntos)

b) Si se sabe que un paquete llega con retraso, ¿cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso? (0,75 puntos)

Solución:
Sean R llega con retraso, $\overline{R}$ no llega con retraso, D es defectuoso y $\overline{D}$ no es defectuoso. $P(R) = 0,09$, $P(D) = 0,14$ y $P(R \cup D) = 0,19$

a) $P(R\cup D) = P(R) + P(D) - P(R\cap D) \Longrightarrow 0,19 = 0,09 + 0,14 - P(R\cap D) \Longrightarrow P(R\cap D) = 0,23 - 0,19 = 0,04$

b) $P(D|R) = \dfrac{P(R\cap D)}{P(R)} = \dfrac{0,04}{0,09} = 0,4444$

Problema 5.2.10 (2 puntos) La distancia alcanzada en el lanzamiento de jabalina por los integrantes de un equipo de atletismo infantil sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 81$ metros^2. Se ha tomado una muestra de 9 atletas del equipo y las distancias alcanzadas han sido 16, 21, 15, 17, 16, 19, 14, 14 y 19 metros.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la distancia de lanzamiento de jabalina con un nivel de confianza del 97 %. (1 punto)

b) Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0,5 puntos)

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 49 atletas y un nivel de confianza del 95,96 %? (0,5 puntos)

Solución:

$$N(\mu;\sqrt{81})$$

a) $n=9$, $\overline{X}=16,7778$ metros y $NC=97\,\%=0,97=1-\alpha\Longrightarrow \alpha=0,03\Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2}=0,015$

$$P(Z\le z_{\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}=0,985\Longrightarrow z_{\alpha/2}=2,17$$

$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2,17\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}}=6,51 \text{ metros}$$

$$IC=(\overline{X}-E,\overline{X}+E)=(16,7778-6,51;16,7778+6,51)=(10,2678;23,2878)$$

b) Si se disminuye el tamaño de la muestra el error se hace más grande y la amplitud del intervalo de confianza aumenta.

c) $NC=95,96\,\%=0,9596=1-\alpha\Longrightarrow \alpha=0,0404\Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2}=0,0202$

$$P(Z\le z_{\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}=0,9798\Longrightarrow z_{\alpha/2}=2,05$$

$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2,05\frac{9}{\sqrt{49}}=2,6357 \text{ metros}$$

Bloque 2

Problema 5.2.11 (1,5 puntos) Se considera la función $f(x)=\left\{\begin{array}{lll}(x+2)^2 & \text{si} & x\le c\\ 6x+3 & \text{si} & x>c\end{array}\right.$

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x=c$? (0,75 puntos)

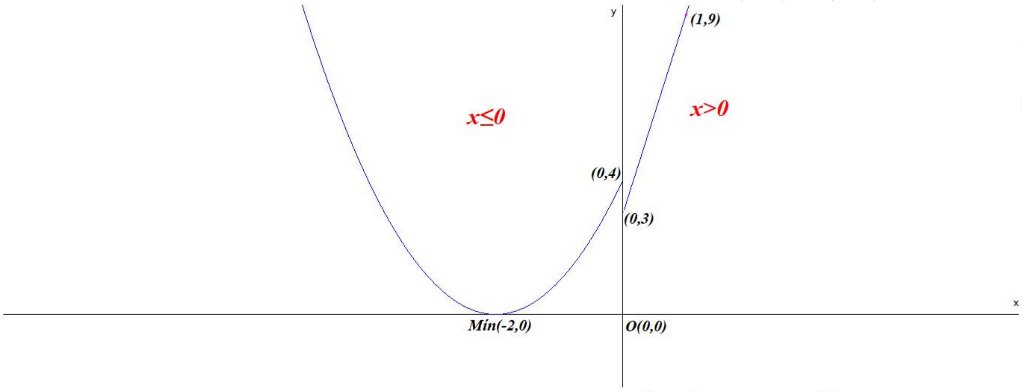
b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $c=0$. (0,75 puntos)

Solución:

a) En $x=c$:
$\lim\limits_{x\to c^-}f(x)=\lim\limits_{x\to c}(x+2)^2=(c+2)^2$ y $\lim\limits_{x\to c^+}f(x)=\lim\limits_{x\to c}(6x+3)=6c+3$ y $f(c)=(c+2)^2\Longrightarrow$ $(c+2)^2=6c+3\Longrightarrow c^2-2c+1=0\Longrightarrow c=1$.

b) $c=0\Longrightarrow f(x)=\left\{\begin{array}{lll}(x+2)^2 & \text{si} & x\le 0\\ 6x+3 & \text{si} & x>0\end{array}\right.\Longrightarrow$
$f'(x)=\left\{\begin{array}{lll}2(x+2)=0\Longrightarrow x=-2 & \text{si} & x<0\\ 6>0 & \text{si} & x>0\end{array}\right.$
La rama $x\le 0$ tiene un punto de corte con el eje OX en $(x+2)^2=0\Longrightarrow(-2,0)$ y con el eje OY en $(0,4)$. Tiene un extremo relativo en $f'(x)=2(x+2)=0\Longrightarrow(-2,0)$ y como $f''(x)=2\Longrightarrow f''(-2)=2>0$ es un mínimo relativo.

La rama $x > 0$ es una recta creciente que pasa por los puntos: $(0,3)$ y $(1,9)$.



Problema 5.2.12 (2 puntos) El consumo de agua, en dm^3, de una urbanización durante 6 horas viene reflejado por la función $C(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$ siendo x el tiempo medido en horas y $0 \le x \le 6$.

a) ¿En qué momentos se produjo el mayor consumo y a cuánto ascendió? (1,25 puntos)

b) ¿En qué intervalo de tiempo disminuyó el consumo de agua? (0,75 puntos)

Solución:

a) $C'(x) = 3x^2 - 24x + 45 = 0 \Longrightarrow x = 3$ y $x = 5$.

	$(0,3)$	$(3,5)$	$(5,6)$
$C'(x)$	$+$	$-$	$+$
$C(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(3,5)$ y creciente en el $(0,3) \cup (5,6)$. Presenta un mínimo relativo en el punto $(5,50)$ y un máximo relativo en el $(3,54)$
Tenemos: $C(0) = 0$ y $C(6) = 54$. Luego el mínimo absoluto estaría en la hora cero con un consumo de 0 dm^3; el consumo máximo sería en la hora 3 y en la hora 6, serían el máximos absolutos con un consumo de 54 dm^3.

b) El consumo decrece en el intervalo de 3 a 5 horas ($C'(x) < 0$).

Capítulo 6

Castilla-León

6.1. Ordinaria

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER TRES PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.
CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

Problemas a elegir tres

(Números y álgebra)

Problema 6.1.1 (3 puntos) Compramos tres entradas para tres actividades: una para el teatro, otra para un partido de baloncesto y otra para un concierto. Tras descontarnos el 10 % del precio total, hemos pagado 117 euros por todas las entradas. Sabiendo que el precio de la entrada al concierto es el doble que el precio de la entrada al teatro y que la entrada al concierto es 20 euros más cara que la entrada del partido de baloncesto, determinar el precio de la entrada a cada actividad.
Solución:
Sean x € entrada al teatro, y € entrada al partido y z € entrada al concierto.

$$\left\{\begin{array}{l} 0,9x+0,9y+0,9z=117\\ z=2x\\ z=y+20 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=130\\ 2x-z=0\\ y-z=-20 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=30€\\ y=40€\\ z=60€ \end{array}\right.$$

$$A=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 130\\ 2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -20 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{l} F_1\\ F_2-2F_1\\ F_3 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 130\\ 0 & -2 & -3 & -260\\ 0 & 1 & -1 & -20 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{l} F_1\\ F_2\\ 2F_3+F_2 \end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 130 \\ 0 & -2 & -3 & -260 \\ 0 & 0 & -5 & -300 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible determinado (solución única)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} -5z = -300 \Longrightarrow z = 60 \\ -2y - 180 = -260 \Longrightarrow y = 40 \\ x + 40 + 60 = 130 \Longrightarrow x = 30 \end{array}\right.$$

La entrada al teatro cuesta 30€, al partido cuesta 40€ y al concierto cuesta 60€

(Números y álgebra)

Problema 6.1.2 (3 puntos) Se consideran las matrices

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 2 & a & 0 \\ -1 & 1 & a \end{array}\right), \; B = \left(\begin{array}{rr} 1 & b \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{array}\right), \; C = \left(\begin{array}{rr} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{array}\right)$$

a) Hallar los valores de a y b para que se cumpla la igualdad $A \cdot B = C$.

b) Para $a = 2$ y $b = 4$, resolver la ecuación matricial $X = AB + 3C$

Solución:

a) $A \cdot B = \left(\begin{array}{rrr} 2 & a & 0 \\ -1 & 1 & a \end{array}\right)\left(\begin{array}{rr} 1 & b \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rr} 4a+2 & 2a+2b \\ a+3 & 3a-b+52 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rr} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} 4a+2 = -2 \\ 2a+2b = 2 \\ a+3 = 2 \\ 3a-b+52 = -3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ b = 2 \end{array}\right.$$

b) Si $a = 2$ y $b = 4$

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right), \; B = \left(\begin{array}{rr} 1 & 4 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{array}\right), \; C = \left(\begin{array}{rr} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{array}\right)$$

$$X = AB + 3C = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{rr} 1 & 4 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{array}\right) + 3\left(\begin{array}{rr} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rr} 4 & 18 \\ 11 & -5 \end{array}\right)$$

(Análisis)

Problema 6.1.3 (3 puntos) Tras una etapa de seis horas, un ciclista publica los datos sobre la potencia desarrollada en función del tiempo. Para la segunda parte de la etapa, dicha potencia (en vatios) viene dada por la función $f(t) = -32t^2 + 352t - 568$ para $3 \le t \le 6$, donde t es el tiempo (en horas).

a) ¿Qué potencia alcanzó en el momento de iniciar la segunda parte de la etapa? ¿En qué intervalo de esa segunda parte alcanzó una potencia inferior a 272 vatios?

b) ¿Al cabo de cuántas horas alcanzó la máxima potencia? Calcular esa potencia máxima.

Solución:

a) $f(3) = 200$ vatios.
$f(t) = -32t^2 + 352t - 568 < 272 \Longrightarrow (-\infty; 3,5) \cup (7,5; \infty)$, como tiene que ser en el intervalo $[3, 6] \Longrightarrow (3; 3,5)$ es donde $f(t) < 272$ vatios

b) $f'(t) = -64t + 352 = 0 \Longrightarrow t = \dfrac{11}{2}$
$f''(t) = -64 \Longrightarrow f''(5,5) = -64 < 0 \Longrightarrow t = \dfrac{11}{2}$ horas es un máximo relativo con $f\left(\dfrac{11}{2}\right) =$ 400 vatios.
Tenemos $f(3) = 200$ y $f(6) = 392$, luego el máximo calculado es absoluto.

(Análisis)

Problema 6.1.4 (3 puntos) Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{1}{2x-1} & x > 1 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en todo su dominio. Calcular, si los tiene, los puntos de discontinuidad.

b) Determinar el área encerrada entre $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[0, 1]$, dibujando el recinto correspondiente.

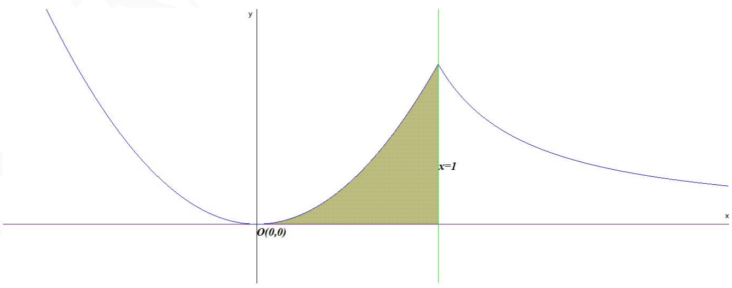
Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
En la rama $x \le 1$ la función es un polinomio y, por tanto, continua en toda la rama.
En la rama $x > 1$ el denominador de la función se anula en $x = \dfrac{1}{2} \notin \{x > 1\} \Longrightarrow$ continua en toda la rama.
Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{2x-1} = 1 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 1$$

Luego f continua en $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

b) En $[0, 1] \Longrightarrow f(x) = x^2$ la función no tiene punto de corte con el eje OX en el interior del intervalo, luego el área de integración es $S_1 : [0, 1]$
$S_1 = \displaystyle\int_0^1 x^2\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$
$S = |S_1| = \dfrac{1}{3} \simeq 0,333\ u^2$



(Estadística y probabilidad)

Problema 6.1.5 (3 puntos) El precio del litro de gasolina en una provincia sigue una distribución normal con media desconocida μ y desviación típica 0,05 euros. Un día cualquiera se toma una muestra de 10 estaciones de servicio, elegidas al azar en dicha provincia, registrando los siguientes precios del litro de gasolina (en euros):

$$1,612 \quad 1,739 \quad 1,625 \quad 1,771 \quad 1,642 \quad 1,713 \quad 1,705 \quad 1,654 \quad 1,632 \quad 1,647$$

a) Con esta muestra, determinar un intervalo de confianza, al nivel del 95 %, para la media poblacional μ (en euros) del precio del litro de gasolina en esa provincia.

b) Para un nivel de confianza del 99 %, ¿cuál es el tamaño mínimo de muestra que hay que tomar en esa provincia para que el error cometido al estimar la media poblacional μ (en euros) sea inferior a 2 céntimos de euro?

Solución:

a) $N(\mu; 0,05)$, $n = 10$, $\overline{X} = 1,674$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\dfrac{0,05}{\sqrt{10}} = 0,031$
$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (1,674 - 0,031; 1,674 + 0,031) = (1,643; 1,705)$

b) $E = 0,02$ y $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,02 = 2,575\dfrac{0,05}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 41,44140625 \Longrightarrow n = 42$

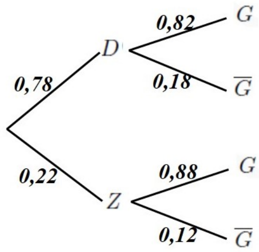
(Estadística y probabilidad)

Problema 6.1.6 (3 puntos) En el pasado mundial de fútbol, el 78 % de los penaltis fueron lanzados por un jugador diestro mientras que el resto de penaltis fueron lanzados por un jugador zurdo. Además, se marcó gol en el 82 % de los penaltis lanzados por jugadores diestros y en el 88 % de los penaltis lanzados por jugadores zurdos. Si se elige al azar un jugador para lanzar un penalti:

a) ¿Qué probabilidad hay de que marque gol?

b) Si al lanzar el penalti no se marcó gol, ¿cuál es la probabilidad de que el jugador que lanzó el penalti sea zurdo?

Solución:
Sean D jugador diestro, Z jugador zurdo, G marca gol y $\overline{G}$ no marca gol.



a) $P(G) = P(G|D)P(D) + P(G|Z)P(Z) =$
$0,82 \cdot 0,78 + 0,88 \cdot 0,22 = 0,8332$

b) $P(Z|\overline{G}) = \dfrac{P(\overline{G}|Z)P(Z)}{P(\overline{G})} = \dfrac{0,12 \cdot 0,22}{1 - 0,8332} = 0,1583$

Cuestiones a elegir una
(Números y álgebra)

Problema 6.1.7 (1 puntos) Dado el sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \\ 3x-3y-3z=0 \end{cases}$ justifica que es un sistema compatible e indeterminado.
Solución:
Se trata de un sistema homogéneo y, por tanto, siempre tiene solución (la trivial $x = y = z = 0$), luego siempre es compatible. En nuestro caso la tercera ecuación es el triple de la segunda, luego es un sistema compatible indeterminado.

(Análisis)

Problema 6.1.8 ¿Cuál es el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2-1}$? Justifica la respuesta.
Solución :
Tiene que cumplirse: $x^2 - 1 \geq 0$
$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1 \Longrightarrow$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

$\Longrightarrow \text{Dom}(f) = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$

(Estadística y probabilidad)

Problema 6.1.9 (1 puntos) ¿Qué probabilidad hay de que coincida algún día de cumpleaños en un grupo de tres amigas que no son hermanas? Considerar años no bisiestos para el cálculo.
Solución:
$P(\text{coincide algún cumpleaños}) = 1 - P(\text{no coincide ningún cumpleaños}) = 1 - \dfrac{365}{365}\cdot\dfrac{364}{365}\cdot\dfrac{363}{365} = 0,0082$

6.2. Extraordinaria

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER TRES PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.
CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

Problemas a elegir tres

(Números y álgebra)

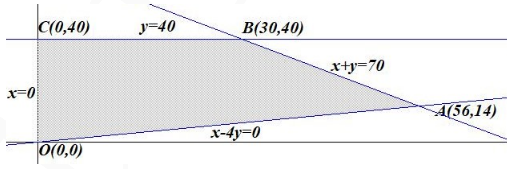
Problema 6.2.1 (3 puntos) Un centro logístico está planificando el reparto de dos formatos de un producto, S y L, a una de sus tiendas. Debido a sus características, la cantidad total máxima que se puede transportar de ambos formatos a la vez es 70 unidades, pero la tienda necesita recibir del formato L, al menos, un quinto del total de unidades totales. En este momento, sólo están disponibles para enviar a la tienda un máximo de 40 unidades del formato L. Además, la tienda consigue un beneficio de 3000 euros por cada unidad vendida del formato S y de 2500 euros por cada unidad vendida del formato L. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas unidades hay que repartir a la tienda de cada formato para que se pueda maximizar el beneficio. ¿A cuánto ascenderá ese beneficio máximo?

Solución:

Sean x : nº artículos en formato S e y : nº artículos en formato L.

- ☛ La región factible es:

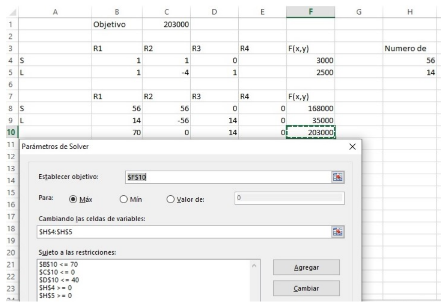
$$\left\{\begin{array}{l} x+y\le 70\\ y\ge \dfrac{1}{5}(x+y)\\ y\le 40\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y\le 70\\ x-4y\le 0\\ y\le 40\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{array}\right.$$



- ☛ Los vértices son: $O(0,0)$, $A(56,14)$, $B(30,40)$ y $C(0,40)$.

- ☛ La función objetivo: $f(x,y) = 3000x + 2500y$

Solución por solver :



$$\left\{\begin{array}{l} f(0,0)=0\\ f(56,14)=203000 \ \text{Máximo}\\ f(30,40)=190000\\ f(0,40)=100000\end{array}\right.$$

Se deben repartir 56 artículos de formato S y 14 del L con un beneficio máximo de 203000 €.

(Números y álgebra)

Problema 6.2.2 (3 puntos) Dado el sistema con el parámetro a: $\left\{\begin{array}{r} x+z=1\\ x-y+z=0\\ x+y+az=0\end{array}\right.$

a) (1,5 puntos) Clasificar el sistema en función de los distintos valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos) Resolver el sistema para $a=-1$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & a & 0\end{array}\right)$ y $|A| = 1 - a = 0 \Longrightarrow a = 1$

- ☛ Si $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ =nº de incógnitas$\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)

☛ Si $a = 1$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] =$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema incompatible (no tiene solución)}$$

b) Si $a = -1$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$
$$\left\{\begin{array}{l} y = 1 \\ 1 - 2z = -1 \Longrightarrow z = 1 \\ x + 1 = 1 \Longrightarrow x = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

(Análisis)

Problema 6.2.3 (3 puntos) En una factoría los costes variables (miles de euros) vienen dados por la función:
$$c(x) = 2x + 720 + \frac{80000}{x}$$
siendo $x > 0$ el número de toneladas producidas.

a) (1,5 puntos) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de los costes variables en esa factoría.

b) (1,5 puntos) Calcular el coste variable mínimo y el número de toneladas que se han de producir para alcanzar dicho coste mínimo.

Solución:
$$c(x) = 2x + 720 + \frac{80000}{x} = \frac{2x^2 + 720x + 80000}{x} \Longrightarrow c'(x) = \frac{2(x^2 - 40000)}{x^2}$$

a) $c'(x) = 0 \Longrightarrow x = \pm 200$, la solución negativa está fuera del dominio de la función y es irrelevante.

	$(0, 200)$	$(200, \infty)$
$c'(x)$	$-$	$+$
$c(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

Los costes son decrecientes hasta las 200 Tm, el intervalo $(0, 200)$. Los costes son crecientes a partir de las 200 Tm, el intervalo $(200, \infty)$.

b) Hay un mínimo relativo en $x = 200$ Tm y es de $c(200) = 1520000$€. Tenemos $c(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x^2 + 720x + 80000}{x} = \left[\dfrac{80000}{0^+}\right] = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 + 720x + 80000}{x} = \infty$, luego el mínimo anterior es absoluto.

(Análisis)

Problema 6.2.4 (3 puntos) Consideremos la función
$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} 6x - 1 & \text{si} & x \le 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} & x > 0 \end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Estudiar la continuidad de la función $f(x)$ en todo su dominio. Calcular, si los tiene, los puntos de discontinuidad.

b) (1,5 puntos) Calcular el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[1, 10]$, dibujando el recinto correspondiente.

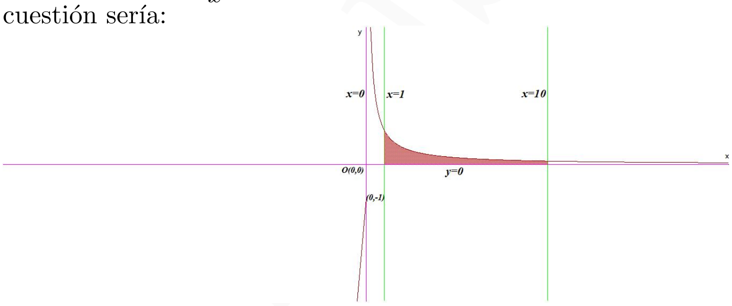
Solución:

a) Las dos ramas son continuas, hay que imponer la continuidad en $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (6x-1) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = \infty \\ f(0) = 11 \end{array}\right. \Longrightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) \Longrightarrow$$

f es discontinua no evitable en $x = 0$, donde hay un salto infinito entre las dos ramas.
La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

b) En el recinto indicado es $f(x) = \dfrac{1}{x}$, función siempre positiva sin corte con el eje de abscisas, con una asíntota vertical en $x = 0$ y una horizontal en $y = 0$.
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
Como $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0 \Longrightarrow f$ no tiene extremos y es siempre decreciente. El recinto en cuestión sería:



$$S = \int_1^{10} \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|]_1^{10} = \ln 10 \simeq 2,3026\ u^2$$

(Estadística y probabilidad)

Problema 6.2.5 (3 puntos) La recaudación diaria de una tienda de deportes de determinada marca es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media μ euros y desviación típica de 328 euros. Se elige una muestra de 100 tiendas de dicha marca y se obtiene una recaudación diaria media de 1248 euros.

a) (1,5 puntos) Calcular el intervalo de confianza para la media μ al nivel de confianza del 99 %.

b) (1,5 puntos) ¿Qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de tiendas de dicha marca para alcanzar, con un nivel de confianza del 95 %, un error máximo de 127 euros en la estimación de μ.

Solución:

$$N(\mu, 328)$$

a) $n = 100$, $\overline{X} = 1248$ y $NC = 99\,\% = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$

$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\dfrac{328}{\sqrt{100}} = 84,46$

$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (1248 - 84,46; 1248 + 84,46) = (1163,54; 1332,46)$

b) $E = 127$ y $NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$127 = 1,96\dfrac{328}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\dfrac{1,96 \cdot 328}{127}\right)^2 = 25,62432230 \Longrightarrow n = 26$

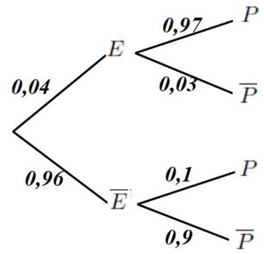
(Estadística y probabilidad)

Problema 6.2.6 (3 puntos) En los estudios realizados sobre un tipo de test de antígenos para detectar el SARS-COV-2 en cierta población, la probabilidad de que una persona enferma obtenga un resultado positivo es de 0,97, mientras que la probabilidad de que una persona sana obtenga un resultado negativo es 0,90. En el momento de probar este tipo de test de antígenos, la probabilidad de que una persona esté enferma en esa población es 0,04. Si se elige una persona al azar de esa población y se le realiza este tipo de test de antígenos,

a) (1,5 puntos) Calcular la probabilidad de que la persona elegida obtenga un resultado positivo.

b) (1,5 puntos) Si el resultado del test es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona elegida esté enferma con SARS-COV-2?

Solución:
Sean E enferma , $\overline{E}$ sana, P test positivo, y $\overline{P}$ test negativo.



a) $P(P) = P(P|E)P(E) + P(P|\overline{E})P(\overline{E}) =$
$0,97 \cdot 0,04 + 0,1 \cdot 0,96 = 0,1348$

b) $P(E|P) = \dfrac{P(P|E)P(E)}{P(P)} = \dfrac{0,97 \cdot 0,04}{0,1348} = 0,2878$

Cuestiones a elegir una
(Números y álgebra)

Problema 6.2.7 (1 punto) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 4 & 1 & 8 \\ -2 & b & 4 & c \end{pmatrix}$ hallar los valores a, b y c para que el rango de la matriz A sea 1.

Solución:
Para que el rango de la matriz sea uno las dos filas tienen que ser proporcionales $F_2 = mF_1$:

$$\begin{cases} a = -2m \\ 4 = mb \\ 1 = 4m \\ 8 = mc \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = 16 \\ c = 32 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow F_2 = \frac{1}{2}F_1$$

(Análisis)

Problema 6.2.8 (1 punto) Dada la función $f(x) = \ln(x^2-4)$, determinar su dominio de definición.
Solución :
Hay que resolver la inecuación: $x^2 - 4 > 0$:
$x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
signo	$+$	$-$	$+$

$\Longrightarrow \text{Dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

(Estadística y probabilidad)

Problema 6.2.9 (1 punto) Para realizar un rescate, la probabilidad de llegar antes del anochecer desde el centro de emergencias situado en la localidad A es de 0,7 y 0,4 desde el situado en la localidad B. Se decide enviar a equipos desde ambas localidades. Si los equipos actúan de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno llegue antes del anochecer?
Solución:
Sea A_a llega antes del anochecer en la localidad A y A_b llega antes del anochecer en la localidad B
Tenemos $P(A_a) = 0,3$ y $P(A_b) = 0,6$:

$$P(A_a \cup A_b) = 1 - P(\overline{A_a \cup A_b}) = 1 - P(\overline{A_a} \cap \overline{A_b}) = 1 - 0,3 \cdot 0,6 = 1 - 0,18 = 0,82$$

Capítulo 7

Cataluña

7.1. Ordinaria

Responda a **CUATRO** de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.
Cada cuestión vale 2,5 puntos.
Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.
Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

Problema 7.1.1 (2,5 puntos) El precio de un vuelo entre Barcelona e Islandia es de 500€. Una compañía aérea tiene capacidad para 300 pasajeros diarios, pero existe una determinada época del año en la que sólo vende 180 billetes. Después de realizar un estudio de mercado, la compañía se da cuenta de que la relación entre el precio del billete y el número de pasajeros es lineal, por lo que por cada 5€ de descuento en el precio del billete consigue dos pasajeros más.

a) (1 punto) Si llamamos x el número de veces que se aplica el descuento, escriba la función que da los ingresos diarios de la compañía por la venta de billetes en función de x.

b) (1,5 puntos) ¿A qué precio es necesario vender cada billete para obtener el máximo de ingresos? ¿Qué ingresos se obtendrán con ese precio?

Solución:

a) Si aplicamos el descuento x veces los ingresos serán:

$$I(x) = (500 - 5x)(180 + 2x) = -10x^2 + 100x + 90000, \quad 0 \le x \le 60$$

b) $I'(x) = -20x + 100 = 0 \Longrightarrow x = 5$ y $I''(x) = -20 \Longrightarrow I''(5) = -20 < 0 \Longrightarrow x = 5$ es un máximo relativo.
El precio del billete sería $500 - 5 \cdot 5 = 475$€ con unos ingresos de $I(5) = 90250$€

Problema 7.1.2 (2,5 puntos) Un centro cívico ofrece cursos de francés de nivel principiante, intermedio y avanzado. Los alumnos inscritos, si lo desean, tienen garantizada una plaza para el siguiente curso. Es por eso que, antes de terminar el curso, se hacen las reservas de plaza para el próximo curso. Del alumnado de nivel principiante, un 15 % quiere repetir el mismo curso, un 50 %

quiere realizar el curso intermedio y un 5 % quiere pasar directamente al curso de nivel avanzado. En cuanto al alumnado de nivel intermedio, un 10 % quiere repetir el curso y un 60 % quiere realizar el curso de nivel avanzado. Por último, del alumnado de nivel avanzado, un 20 % quiere repetir el curso. Ningún alumno pide reserva de plaza para un curso de nivel inferior y el resto de alumnos no quieren continuar en el centro el próximo curso. Este año ha habido 100 alumnos matriculados de nivel novato, 90 de nivel intermedio y 60 de nivel avanzado.

a) (1,25 puntos) Calcule el número de plazas que hay que reservar de cada nivel para el curso siguiente mediante un producto de matrices.

b) (1,25 puntos) El mismo centro cívico ofrece dos horarios de yoga, uno por la mañana y uno por la tarde. Para el próximo curso, el 50 % de los alumnos que actualmente hacen yoga por la mañana quieren continuar con el mismo horario, mientras que un 30 % quieren pasar al horario de tarde. El resto de alumnos por la mañana no continuarán. En cuanto a los alumnos que actualmente realizan yoga por la tarde, un 40 % quieren pasar al horario de mañana y un 60 % quieren continuar haciendo el horario de tarde. Si sabemos que para el curso siguiente es necesario reservar 49 plazas para el horario de mañana y 51 plazas para el horario de tarde, ¿cuántos alumnos están matriculados actualmente en cada horario?

Solución:

a) Sean P actualmente principiante, I actualmente intermedio, A actualmente avanzado, PP próximo curso principiante, PI próximo curso intermedio y PA próximo curso avanzado.

	P	I	A
PP	$0,15$	0	0
PI	$0,5$	$0,10$	0
PA	$0,05$	$0,6$	$0,20$

$$\Longrightarrow M = \begin{pmatrix} 0,15 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,10 & 0 \\ 0,05 & 0,6 & 0,20 \end{pmatrix}$$

$N =$

	plazas
PP	100
PI	90
PA	60

$$\Longrightarrow N = \begin{pmatrix} 100 \\ 90 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 0,15 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,10 & 0 \\ 0,05 & 0,6 & 0,20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 90 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 59 \\ 71 \end{pmatrix}$$

15 para nivel principiante, 59 para nivel intermedio y 71 para nivel avanzado.

b) Sean M actualmente turno de mañana, T actualmente turno de mañana, PM próximo curso turno de mañana, PT próximo curso turno de tarde y PN próximo curso no continuarán.

	M	T
PM	$0,5$	$0,4$
PT	$0,3$	$0,6$
NC	$0,2$	0

$$\Longrightarrow Q = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix},$$ NC es irrelevante.

	plazas
PM	49
PT	51

$$\Longrightarrow S = \begin{pmatrix} 49 \\ 51 \end{pmatrix} \text{ y } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Tenemos el sistema $QX = S$:

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ 51 \end{pmatrix}, \text{ resolvemos por Gauss: } \left(\begin{array}{cc|c} 0,5 & 0,4 & 49 \\ 0,3 & 0,6 & 51 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 0,5F_2 - 0,3F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,5 & 0,4 & 49 \\ 0 & 0,18 & 10,8 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema compatible determinado (solución única):}$$

$y = \dfrac{10,8}{0,18} = 60 \Longrightarrow 0,5x + 0,4 \cdot 60 = 49 \Longrightarrow x = 50$
En el turno de mañana hay 50 alumnos y 60 en el de tarde.

Problema 7.1.3 (2,5 puntos) Robert ha realizado tres pruebas de una asignatura. Haciendo la media aritmética de las notas obtenidas en cada una de las tres pruebas le ha quedado una nota global de 6. Robert sabe que la nota de la tercera prueba ha sido igual que la media aritmética de las notas de las otras dos pruebas.

a) (1,25 puntos) Con esta información, ¿puede saber alguna de las tres notas? En caso afirmativo, ¿de qué prueba y cuál sería la nota obtenida?

b) (1,25 puntos) La profesora le dice que ha sido muy irregular y que si sólo se tuvieran en cuenta las notas de las dos últimas pruebas habría obtenido una media de 7. ¿Qué nota ha obtenido en cada prueba?

Solución:
Sean x nota del primer examen, y nota del segundo examen y z nota del tercer examen.

a) $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x+y+z}{3} = 6 \\ z = \dfrac{x+y}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z = 18 \\ x+y-2z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 12-\lambda \\ y = \lambda \\ z = 6 \end{array}\right.$

No se puede saber la nota de los tres exámenes, pero si de la última que fue un 6.

b) $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x+y+z}{3} = 6 \\ z = \dfrac{x+y}{2} \\ \dfrac{y+z}{2} = 7 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z = 18 \\ x+y-2z = 0 \\ y+z = 14 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 8 \\ z = 6 \end{array}\right.$

En el primer examen sacó un 4, en el segundo 8 y en el tercero un 6.

Problema 7.1.4 (2,5 puntos) Una empresa de Menorca quiere ofrecer dos tipos de actividades: bautizos de submarinismo desde una barca y excursiones en barca por la costa para bañarse en calas. El bautizo de submarinismo tiene un precio de 60 euros por persona y en cada embarcación irán 10 participantes y 5 instructores. La excursión por la costa tiene un precio de 18 euros por persona y en cada embarcación irán 25 participantes y 2 instructores. La empresa dispone de 30 embarcaciones iguales y de 75 instructores que pueden realizar salidas de submarinismo o excursiones en barca por las calas indistintamente. Su intención es obtener el máximo de ingresos suponiendo que llenará todas las embarcaciones.

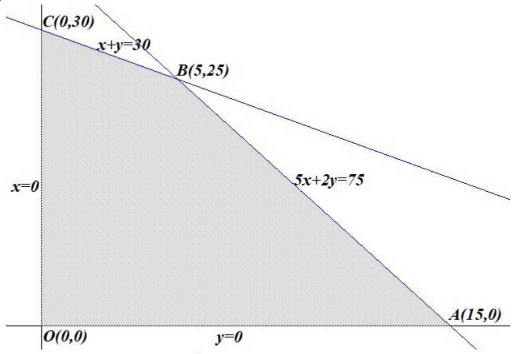
a) (1,25 puntos) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible.

b) (1,25 puntos) ¿Cuántas salidas de cada tipo debe ofrecer la empresa todos los días para obtener el máximo de ingresos? ¿Cuánto dinero ingresará a diario?

Solución:
Sean x submarinismo e y : excursiones.

	embarcaciones	instructores	precio
submarinismo	1	5	60
excursiones	1	2	18
	≤ 30	≤ 75	

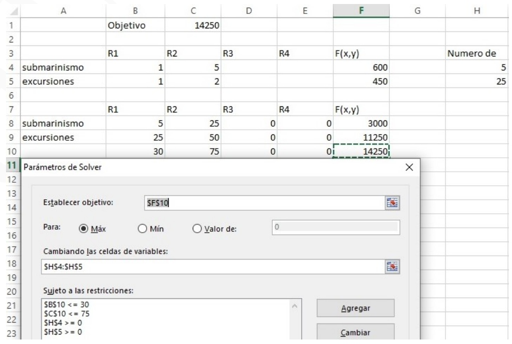
a) $f(x,y) = 60 \cdot 10x + 25 \cdot 18y = 600x + 450y$ sujeto a:



$$\begin{cases} x + y \leq 30 \\ 5x + 2y \leq 75 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices son: $O(0,0)$, $A(15,0)$, $B(5,25)$ y $C(0,30)$.

b) $f(x,y) = 600x + 450y$



$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(15,0) = 9000 \\ f(5,25) = 14250 \ \text{Máximo} \\ f(0,30) = 13500 \end{cases}$$

Se deberían emplear 5 embarcaciones para el bautizo de submarinismo y 25 embarcaciones para excursiones, con unos ingresos máximos diarios de 14250€.

Problema 7.1.5 (2,5 puntos) El número de kilogramos de comida que han gastado en un albergue de animales durante una semana concreta se puede calcular mediante la función $f(t) = 10\left(-\dfrac{t^3}{8} + \dfrac{3t^2}{2} - \dfrac{9t}{2} + 10\right)$, en el que t es el tiempo en días y va desde el día $t = 1$ (lunes) hasta el día $t = 8$ (lunes de la semana siguiente).

a) (1 punto) Calcule cuántos kilogramos de comida se gastaron el primer lunes y el lunes siguiente. Encuentre qué día de esa semana se gastaron 100 kg de comida.

b) (1,5 puntos) Determine los días de la semana en que el gasto en comida fue mayor y los días en que fue menor. ¿Cuántos kilogramos de comida se gastaron estos días?

Solución:

a) $f(1) = 68,75$ kg y $f(8) = 60$ kg.

$f(t) = 100 \Longrightarrow 10\left(-\dfrac{t^3}{8} + \dfrac{3t^2}{2} - \dfrac{9t}{2} + 10\right) = 100 \Longrightarrow t = 0$ y $t = 6$.

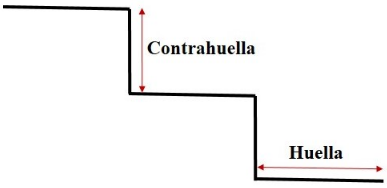
La solución $t = 0$ no es válida por no estar en el dominio de la función. La solución será $t = 6$, que corresponde al sábado, en el que se gastarán 100 kg de comida.

b) $f'(t) = -\dfrac{t^2 - 8t + 12}{4} = 0 \Longrightarrow t = 2$ y $t = 6$

	$(1,2)$	$(2,6)$	$(6,8)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La cantidad de comida decrece entre el lunes y el martes, crece entre el martes y el sábado y vuelve a decrecer entre el sábado y el lunes de la semana siguiente.
La función presenta un mínimo relativo en $t = 2$ (martes) con $f(2) = 60$ kg y un máximo relativo en $t = 6$ (sábado) con 100 kg. El máximo es absoluto y el mínimo se vuelve a repetir en $t = 8$ (lunes de la semana siguiente)
Luego el gasto mínimo se produjo el martes y el lunes de la semana siguiente con 60 kg y el máximo en el sábado con 100 kg.

Problema 7.1.6 (2,25 puntos)
Cuando se diseñan los escalones de una escalera hay varios parámetros a tener en cuenta, dos de los cuales son la huella (la parte horizontal del escalón, donde se pone el pie) y la contrahuella (la parte vertical del escalón, es decir, la altura). El arquitecto francés François Blondel estableció a finales del siglo XVII que la relación ideal entre estas dos magnitudes era que la suma de dos contrahuellas más una huella fuera igual a 64 cm.
Llamamos y la longitud de la contrahuella y x la longitud de la huella.



a) (1 punto) Encuentre la función que permite calcular la longitud ideal de la contrahuella en función de la longitud de la huella. ¿Cuál sería la longitud ideal de la contrahuella si la huella es de 28 cm?

b) (1,5 puntos) La normativa actual establece que en el diseño de escaleras de uso público es necesario que la huella sea como mínimo de 28 cm y que la contrahuella esté comprendida entre 13 y 18,5 cm. Además, la suma de dos contrahuellas más una huella debe estar entre 54 y 70 cm. Escriba estas tres condiciones en función de x y de y. Si queremos construir una escalera con escalones de 40 cm de huella, calcule entre qué valores debe estar comprendida la contrahuella para cumplir con la normativa actual.

Solución:

a) $x + 2y = 64 \Longrightarrow y = \dfrac{64 - x}{2}$
Si $x = 28$ cm$\Longrightarrow y = 18$ cm

b) Tenemos las siguientes inecuaciones: $\begin{cases} x \geq 28 \\ 13 \leq y \leq 18,5 \\ 54 \leq x + 2y \leq 70 \end{cases}$

Si $x = 40$ se cumple la primera condición. Sustituyendo en la tercera inecuación tenemos $54 \leq x + 2y \leq 70 \Longrightarrow 54 \leq 40 + 2y \leq 70 \Longrightarrow 14 \leq 2y \leq 30 \Longrightarrow 7 \leq y \leq 15$, pero por la segunda inecuación $y \geq 13$. Concluimos: la contrahuella tiene que cumplir $13 \leq y \leq 15$ cm.

7.2. Extraordinaria

Responda a **CUATRO** de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.
Cada cuestión vale 2,5 puntos.
Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.
Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o

para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

Problema 7.2.1 (2,5 puntos) La empresa de deportes acuáticos DiverAqua ofrece tres tipos de actividades: esquí acuático, kayak y moto acuática. El precio por sesión y cliente de cada una de estas actividades es de 40 € por el esquí acuático, 20 € por el kayak y 60 € por la moto acuática. Sabemos que hoy DiverAqua ha vendido 45 sesiones en total. También sabemos que el número de clientes que han escogido esquí acuático es el triple de quienes han escogido una sesión de kayak. La recaudación total del día ha sido de 1.700 €.

a) (1 punto) Plantee un sistema de ecuaciones lineales que recoja toda esta información.

b) (1,5 puntos) ¿Cuántas personas han realizado cada una de las tres actividades?

Solución:

Sean x sesiones de esquí, y sesiones de kayak y z sesiones de moto.

a) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=45 \\ 40x+20y+60z=1700 \\ x=3y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=45 \\ x-3y=0 \\ 2x+y+3z=85 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=30 \\ y=10 \\ z=5 \end{array}\right.$

b) Resolvemos por Gauss:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 85 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & -4 & -1 & -45 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ 4F_3-F_2 \end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & -4 & -1 & -45 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema compatible determinado}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 5z=25 \Longrightarrow z=5 \\ -4y-5=-45 \Longrightarrow y=10 \\ x+10+5=45 \Longrightarrow x=30 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=30 \\ y=10 \\ z=5 \end{array}\right.$$

Se han realizado 30 sesiones de esquí acuático, 10 de kayak y 5 de moto acuática.

Problema 7.2.2 (2,5 puntos) Un fabricante de vehículos eléctricos ha sacado al mercado un nuevo modelo con tanto éxito que vende todos los que fabrica. El precio de venta de cada coche es de 35000€. Fabricar un cierto número de coches le supone unos gastos de $C(x)=x^2+34880x+1100$ euros, en los que x representa el número de vehículos fabricados.

a) (1,25 puntos) ¿Entre qué valores debe mantener la producción para no tener pérdidas?

b) (1,25 puntos) ¿Cuántos vehículos debe fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Qué valor toma ese beneficio máximo?

Solución:

a) $B(x)=I(x)-C(x)=35000x-(x^2+34880x+1100)=-x^2+120x-1100$
$B(x)=0 \Longrightarrow -x^2+120x-1100=0 \Longrightarrow x=10$ y $x=110$

$B'(x)=-2x+120=0 \Longrightarrow x=60$

	$(0,60)$	$(60,\infty)$
$B'(x)$	$+$	$-$
$B(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

$B(0) = -1100$ cuando se producen cero automóviles la función está en pérdidas, estás pérdidas van disminuyendo hasta la venta de 10 coches y a partir de este momento empiezan los beneficios, la función entra en pérdidas otra vez cuando la producción es mayor de 110 automóviles.

b) $B''(x) = -2 \Longrightarrow B''(60) = -2 < 0 \Longrightarrow x = 60$ automóviles es un máximo relativo (en este caso también absoluto) con un beneficio de $B(60) = 2500$€

Problema 7.2.3 (2,5 puntos) Una cooperativa de campesinos vende naranjas y mandarinas en dos tipos de cajas. La caja A contiene 8 kg de naranjas y 2 kg de mandarinas, y la caja B contiene 5 kg de naranjas y 5 kg de mandarinas. Este año la producción de naranjas ha sido de 24000 kg y la de mandarinas, de 12000 kg. El precio de venta de las naranjas es de 0,60 €/kg y el de las mandarinas de 0,70 €/kg. Los campesinos de la cooperativa quieren saber cuántas cajas de cada tipo deben vender para maximizar los ingresos.

a) (1,25 puntos) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible.

b) (1,25 puntos) Determine cuántas cajas de cada tipo hay que vender para obtener el máximo de ingresos y cuáles serían estos ingresos.

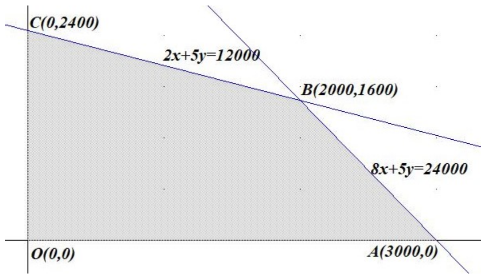
Solución:
Sean x número de cajas A e y número de cajas B.

	naranjas	mandarinas	precio
A	8	2	$0,6 \cdot 8 + 0,7 \cdot 2 = 6,2$
B	5	5	$0,6 \cdot 5 + 0,7 \cdot 5 = 6,5$
	≤ 24000	≤ 12000	

a) $f(x, y) = 6,2x + 6,5y$ sujeto a:

$$\begin{cases} 8x + 5y \le 24000 \\ 2x + 5y \le 12000 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

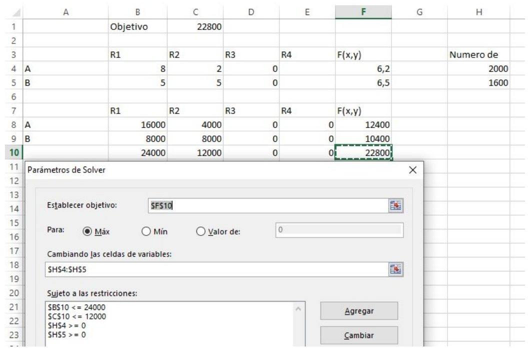
Los vértices son: $O(0,0)$, $A(3000,0)$, $B(2000,1600)$ y $C(0,2400)$.



b) $f(x, y) = 6,2x + 6,5y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(3000,0) = 18600 \\ f(2000,1600) = 22800 \;\text{ Máximo} \\ f(0,2400) = 15600 \end{cases}$$

Se deberían vender 2000 cajas A y 1600 cajas tipo B, con unos ingresos máximos de 22800€.



Problema 7.2.4 (2,5 puntos) El número de nuevas personas infectadas por una enfermedad, en miles, es dado por la siguiente función:

$$f(t) = \frac{30t}{t^2 - 2t + 4}, \quad t \geq 0$$

donde t representa el tiempo transcurrido, en semanas, desde que se inició la infección.

a) (1 punto) ¿Cuántos enfermos se infectarán en la semana 1 y cuántos en la semana 2? ¿Podemos pensar que, a largo plazo, esta infección va a desaparecer?

b) (1,5 puntos) ¿En qué instante se produce el número máximo de infectados por esta enfermedad? ¿Cuál es ese número?

Solución:

a) $f(1) = 10 \Longrightarrow 10000$ infectados y $f(2) = 15 \Longrightarrow 15000$ infectados.
$\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{30t}{t^2 - 2t + 4} = 0 \Longrightarrow$ la infección tiende a desaparecer a largo plazo.

b) $f'(t) = -\dfrac{30(t^2 - 4)}{(t^2 - 2t + 4)^2} = 0 \Longrightarrow t = \pm 2$ la solución negativa no está en el dominio definido de la función.

	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$f'(t)$	$+$	$-$
$f(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función tiene un máximo en la semana $t = 2$ con $f(2) = 15 \Longrightarrow 15000$ infectados.

Problema 7.2.5 (2,5 puntos) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) (1 punto) Si llamamos I a la matriz identidad de orden 2, encuentre el valor de a para el que $A^2 = I$.

b) (1,5 puntos) Para $a = -1$, calcule A^2, A^3, y A^4. Utilice los cálculos anteriores para deducir el valor de A^{-1} y de A^{23}.

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+1 & 0 \\ 0 & 2a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow 2a + 1 = 1 \Longrightarrow a = 0$

b) $a = -1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$

$A^3 = A^2A = -IA = -A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $A^4 = A^3A = -AA = -A^2 = -(-I) = I$

$A^2 = -I \Longrightarrow -AA = I \Longrightarrow A(-A) = I \Longrightarrow A^{-1} = -A$
$A^{23} = (A^4)^5A^3 = I^5A^3 = A^3 = -A$

Problema 7.2.6 (2,5 puntos) Una tienda vende un tipo determinado de botella de agua a 70 céntimos. Esta semana hace una oferta de 4×3, es decir, que si compramos cuatro botellas de agua sólo pagamos tres. La tienda también ha anunciado que la próxima semana la oferta de 4×3 ya no estará vigente, pero, en cambio, aplicará un 20 % de descuento sobre el total de la compra que hagan los clientes.

a) (1,5 puntos) Calcule el precio que deberemos pagar por 4 botellas de agua tanto esta semana como la próxima. En lugar de un 20 %, ¿qué descuento debería aplicarse para igualar la oferta de 4×3?

b) (1 punto) Calcule, en general, qué descuento debería aplicarse para igualar una oferta de $m \times (m-1)$; es decir, que consiste en vender m botellas de agua por el precio de $m-1$ botellas, en las que m es un entero mayor que 1.

Solución:

a) Esta semana pagamos por 4 botellas el precio de tres: $70 \cdot 3 = 210$ céntimos $= 2,10$€
La semana que viene pagaré $0,8 \cdot 4 \cdot 70 = 224$ céntimos $= 2,24$€
Para pagar lo mismo las dos semanas $(1-x)\cdot 4 \cdot 70 = 210 \Longrightarrow x = 0,25 \Longrightarrow$ el descuento a aplicar tiene ques del 25 %.

b) $70(m-1)$ con la oferta y $(1-x)\cdot m \cdot 70 = 70(m-1) \Longrightarrow x = \dfrac{1}{m}$ el descuento a aplicar tiene que ser $\dfrac{100}{m}$ %.

Capítulo 8

Comunidad Valenciana

8.1. Ordinaria

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres.
Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas. Solo se corregirán los tres primeros problemas contestados.

Problema 8.1.1 (10 puntos) El veterinario me ha recomendado que mi perro tome diariamente un mínimo de 8 unidades de hidratos de carbono, un mínimo de 46 unidades de proteínas y un mínimo de 12 unidades de grasas. En el mercado encuentro dos marcas A y B de comida para perros. Una lata de la marca A contiene 4 unidades de hidratos de carbono, 6 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Una lata de la marca B contiene 2 unidades de hidratos de carbono, 20 unidades de proteínas y 12 unidades de grasas. La lata de la marca A cuesta 10 euros y la lata de la marca B cuesta 16 euros.

a) ¿Cómo deberé combinar ambas marcas para obtener la dieta deseada por el mínimo precio? (8 puntos)

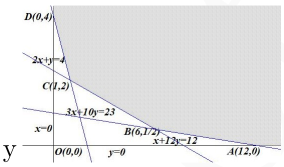
b) ¿Cuál es el mínimo precio que habré de pagar? (2 puntos)

Solución:
Sean x cantidad de marca A e y cantidad de marca B.

	hidratos	proteinas	grasas	coste
A	4	6	1	10
B	2	20	12	16
	≥ 8	≥ 46	≥ 12	

a) La región factible es:

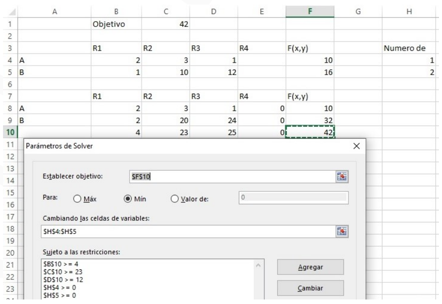
$$\begin{cases} 4x+2y\ge 8 \\ 6x+20y\ge 46 \\ x+12y\ge 12 \\ x,y\ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x+y\ge 4 \\ 3x+10y\ge 23 \\ x+12y\ge 12 \\ x,y\ge 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(12,0)$, $B\left(6,\dfrac{1}{2}\right)$, $C\,(1,2)$ y $D(0,4)$.

$f(x,y)=10x+16y$

Solución por solver :



$$\begin{cases} f(12,0)=120 \\ f\left(6,\dfrac{1}{2}\right)=68 \\ f(1,2)=42 \ \text{Mínimo} \\ f(0,4)=64 \end{cases}$$

b) Se debe mezclar una lata de A con dos de B con un coste mínimo de 42 €.

Problema 8.1.2 (10 puntos) Una matriz A se denomina normal si $A^tA=AA^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

a) Calcula el valor de x para que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ sea normal. (4 puntos)

b) Calcula la matriz X que satisface la ecuación $AX=B^tX-C$, donde $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ (6 puntos)

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 5 & 2-x \\ 2-x & x^2+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & x-2 \\ x-2 & x^2+1 \end{pmatrix}\Longrightarrow 2-x=x-2\Longrightarrow x=2$

b) $AX=B^tX-C\Longrightarrow AX-B^tX=-C\Longrightarrow (A-B^t)X=-C\Longrightarrow$
$X=-(A-B^t)^{-1}C=$
$-\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}=$
$-\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Problema 8.1.3 (10 puntos) Se considera la función $f(x)=\dfrac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}$

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

d) Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Solución:

a) El denominador se anula en $2x^2-3x-2=0 \Longrightarrow x=2$ y $x=-\dfrac{1}{2} \Longrightarrow \text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2},2\right\}$

Corte con el eje OY hacemos $x=0 \Longrightarrow \left(0,\dfrac{15}{2}\right)$

Corte con el eje OX hacemos $f(x)=0 \Longrightarrow x^2+2x-15=0 \Longrightarrow (-5,0)$ y $(3,0)$

b) Asíntotas:

☛ Verticales:

- $x=-\dfrac{1}{2}$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-(1/2)^-}\dfrac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}\left[\dfrac{-63/4}{0^+}\right]=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-(1/2)^+}\dfrac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}=\left[\dfrac{-63/4}{0^-}\right]=+\infty \end{array}\right.$$

- $x=2$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}\left[\dfrac{-7}{0^-}\right]=\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}=\left[\dfrac{-7}{0^+}\right]=-\infty \end{array}\right.$$

☛ Horizontales: $y=\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}=\frac{1}{2}$$

☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales

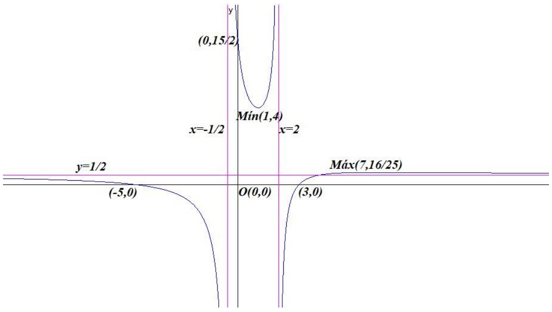
c) $f'(x)=\dfrac{-7(x^2-8x+7)}{(2x^2-3x-2)^2}=0 \Longrightarrow x=1$ y $x=7$.

	$(-\infty,1)$	$(1,7)$	$(7,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

La función decrece en el intervalo $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2},1\right)\cup(7,\infty)$ y crece en el intervalo $(1,2)\cup(2,7)$.

d) La función tiene un máximo relativo en el punto $\left(7,\dfrac{16}{25}\right)$ y un mínimo relativo en $(1,4)$.

e) Gráfica:



Problema 8.1.4 (10 puntos) Una pequeña empresa paga una cuota fija mensual a su compañía eléctrica de 1200 euros. Además de la cuota fija, los primeros 250 kWh consumidos los paga a 5 euros cada uno; los siguientes, hasta los 900 kWh, a 3 euros cada uno; y el resto a 2 euros cada uno.

a) ¿A cuánto asciende el recibo de un mes de la empresa si ese mes consumió 400 kWh? (2 puntos)

b) Obtén la función que dé el importe del recibo mensual de la empresa si consume x kWh. Dibuja su gráfica. (5 puntos)

c) Otra pequeña empresa, con la misma cuota fija, paga todos los kWh a 3 euros. ¿Puede ocurrir que en un mes las dos empresas consuman lo mismo y además sus recibos coincidan? En caso afirmativo indica cuál será en ese mes el consumo y el importe del recibo de ambas empresas. (3 puntos)

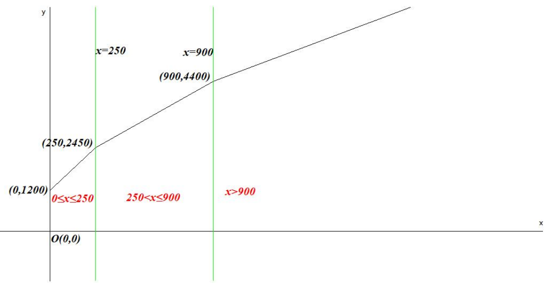
Solución:

a) $1200 + 250 \cdot 5 + (400 - 250)3 = 2900$€

b) $$f(x) = \begin{cases} 1200 + 5x & \text{si} \quad 0 \le x \le 250 \\ 2450 + 3(x - 250) & \text{si} \quad 250 < x \le 900 \\ 4400 + 2(x - 900) & \text{si} \quad x > 900 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} 1200 + 5x & \text{si} \quad 0 \le x \le 250 \\ 1700 + 3x & \text{si} \quad 250 < x \le 900 \\ 2600 + 2x & \text{si} \quad x > 900 \end{cases}$$

Gráfica:



c) $h(x) = 1200 + 3x$ y $f(x) = h(x) \Longrightarrow$

$$\begin{cases} 1200 + 5x = 1200 + 3x \Longrightarrow x = 0 & \text{si} \quad 0 \le x \le 250 \quad \text{válida} \\ 1700 + 3x = 1200 + 3x \Longrightarrow !1700 = 1200! & \text{si} \quad 250 < x \le 900 \quad \text{no válida} \\ 2600 + 2x = 1200 + 3x \Longrightarrow x = 1400 & \text{si} \quad x > 900 \quad \text{válida} \end{cases}$$

El recibo coincidirá en el momento inical $x = 0 \Longrightarrow$ recibo de 1200€ y cuando el consumo sea de 1400 Kw con un recibo de $2600 + 2 \cdot 1400 = 5400$€

Problema 8.1.5 (10 puntos) Arsenio Lupin ha descubierto que la alarma del Banco de París no se puede desconectar. No obstante, ha averiguado que la probabilidad de que la alarma suene cuando hay un motivo justificado es 0,95 y que la probabilidad de que suene injustificadamente es 0,3. El 31 de diciembre hay una probabilidad de 0,1 de que Arsenio Lupin atraque el Banco de París y se sabe que nadie más lo atracará ese día.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin atraque el Banco de París ese día y que no suene la alarma? (4 puntos)

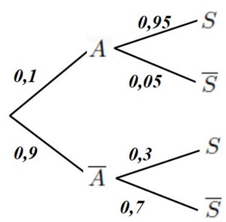
b) Si ese día suena la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin no esté atracando el Banco de París?(3 puntos)

c) Si la alarma no ha sonado ese día, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin haya atracado el Banco de París? (3 puntos)

Solución:

Sean A Lupin atraca el banco, $\overline{A}$ Lupin no atraca el banco, S suena la alarma, y $\overline{S}$ no suena la alarma.

a) $P(A \cap \overline{S}) = P(\overline{S}|A)P(A) = 0,05 \cdot 0,01 = 0,005$



b) $P(S) = P(S|A)P(A) + P(S|\overline{A})P(\overline{A}) = 0,95 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,9 = 0,365$

$$P(\overline{A}|S) = \frac{P(S|\overline{A})P(\overline{A})}{P(S)} = \frac{0,3 \cdot 0,9}{0,365} = 0,7397$$

c) $$P(A|\overline{S}) = \frac{P(\overline{S}|A)P(A)}{P(\overline{S})} = \frac{0,05 \cdot 0,1}{1 - 0,365} = 0,0079$$

Problema 8.1.6 (10 puntos) Se sabe que el 60 % de los clientes de una agencia de viajes realiza un viaje al año, el 30 % realiza dos viajes al año, y el 10 % restante realiza tres o más viajes al año. Se sabe también que hay un 54 % de clientes que están casados y realizan un viaje al año, que hay un 14 % de clientes que están casados y realizan dos viajes al año, y que hay un 2 % de clientes que están casados y realizan tres o más viajes al año. Seleccionamos al azar un cliente de la agencia.

a) Si sabemos que el cliente seleccionado realiza dos o más viajes al año, ¿cuál es la probabilidad de que no esté casado? (3 puntos)

b) Llamemos G al suceso “el cliente seleccionado no está casado” y H al suceso “el cliente seleccionado realiza menos de tres viajes al año”. Calcula $P(G \cup H)$. (3 puntos)

c) Llamemos J al suceso “el cliente seleccionado está casado” y K al suceso “el cliente seleccionado no realiza dos viajes al año”. ¿Son J y K sucesos independientes? (4 puntos)

Solución:
Sean $R1$ realiza un viaje al año, $R2$ realiza dos viajes al año, $R3$ realiza tres viajes al año, C está casado y $\overline{C}$ no está casado.

	$R1$	$R2$	$R3$	Total
C	$0,54$	$0,14$	$0,02$	
$\overline{C}$				
Total	$0,6$	$0,3$	$0,1$	1

$\Longrightarrow$

	$R1$	$R2$	$R3$	Total
C	$0,54$	$0,14$	$0,02$	$0,70$
$\overline{C}$	$0,06$	$0,16$	$0,08$	$0,30$
Total	$0,6$	$0,3$	$0,1$	1

a) $P(\overline{C}|R2\cup R3) = \dfrac{P(\overline{C}\cap(R2\cup R3))}{P(R2\cup R3)} = \dfrac{0,24}{0,4} = 0,6$

b) $G = \overline{C}$ y $H = R1\cup R2 \Longrightarrow P(G\cup H) = P(\overline{C}\cup(R1\cup R2)) =$
$P(\overline{C}) + P(R1\cup R2) - P(\overline{C}\cap(R1\cup R2)) = 0,3+0,9-0,22 = 0,98$

c) $J = C$ y $K = R1\cup R3 \Longrightarrow P(C\cap(R1\cup R3)) = 0,56$, $P(C) = 0,7$ y $P(R1\cup R3) = 0,7 \Longrightarrow$
$P(J)\cdot P(K) = 0,7\cdot 0,7 = 0,49$
Luego $P(J\cap K) = 0,56 \neq P(J)P(K) = 0,49 \Longrightarrow J$ y K no son independientes.

8.2. Extraordinaria

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres.
Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas. Solo se corregirán los tres primeros problemas contestados.

Problema 8.2.1 (10 puntos) Dadas las matrices
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (5 puntos) Calcular la matriz A^2 y su inversa.

b) (5 puntos) Resuelve la ecuación matricial $2A^2X = 4B$.

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/8 & -1/16 & -5/8 \\ 5/8 & -3/16 & 1/8 \\ 3/8 & -5/16 & -1/8 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{16}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

b) $2A^2X = 4B \Longrightarrow X = 2(A^2)^{-1}B = 2\cdot\dfrac{1}{16}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} -5 & 0 & -14 \\ 33 & -32 & 6 \\ 23 & -32 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/8 & 0 & -7/4 \\ 33/8 & -4 & 3/4 \\ 23/8 & -4 & -3/4 \end{pmatrix}$

Problema 8.2.2 (10 puntos) Un millonario ha dejado en herencia todo su dinero a sus tres hijas. A la hija mayor le ha dejado 9 millones de euros más la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija mediana le ha dejado la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija pequeña le ha dejado el 35 % de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. ¿Cuánto dinero ha dejado el millonario a cada una de sus hijas?
(Planteamiento correcto 5 puntos-Resolución correcta 5 puntos)

Solución:
Sean x la cantidad dejada a la hija mayor, y la cantidad dejada a la hija mediana y z la cantidad dejada a la hija menor.

$$\begin{cases} x = 9 + \dfrac{y+z}{2} \\ y = \dfrac{x+z}{2} \\ z = 0,35(x+y) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 18 \\ x - 2y + z = 0 \\ 7x + 7y - 20z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 33€ \\ y = 27€ \\ z = 21€ \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 18 \\ 7 & 7 & -20 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 7F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 18 \\ 0 & 21 & -27 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 7F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 18 \\ 0 & 0 & -6 & -126 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible determinado}:$$

$$\begin{cases} -6z = -126 \Longrightarrow z = 21 \\ 3y - 63 = 18 \Longrightarrow y = 27 \\ x - 54 + 21 = 0 \Longrightarrow x = 33 \end{cases}$$

La mayor recibiría 33 millones de euros, la mediana 27 millones y la pequeña 21 millones.

Problema 8.2.3 (10 puntos) Se considera la función $f(x) = \dfrac{4x-5}{2(x^2-1)}$

a) (2 puntos) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) (2 puntos) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) (2 puntos) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) (2 puntos) Los máximos y mínimos locales, si existen.

e) (2 puntos) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Solución:

a) El denominador se anula en $x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow \left(0, \dfrac{5}{2}\right)$

Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow 4x - 5 = 0 \Longrightarrow \left(\dfrac{5}{4}, 0\right)$

b) Asíntotas:

☛ Verticales:

- $x = -1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{4x-5}{2(x^2-1)} = \left[\dfrac{-9}{0^+}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{4x-5}{2(x^2-1)} = \left[\dfrac{-9}{0^-}\right] = +\infty \end{cases}$$

- $x = 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{4x-5}{2(x^2-1)} = \left[\dfrac{-1}{0^-}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{4x-5}{2(x^2-1)} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

☛ Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{4x-5}{2(x^2-1)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4x-5}{2(x^2-1)} = 0$$

☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

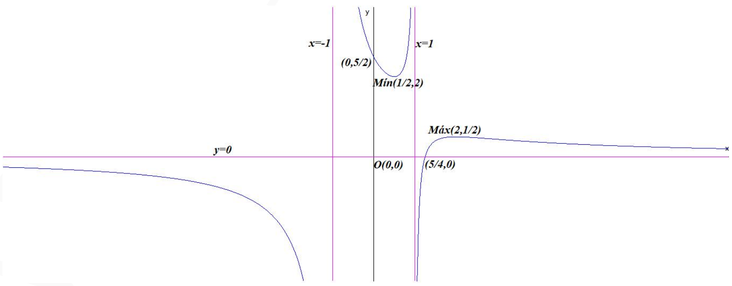
c) $f'(x) = -\dfrac{2x^2-5x+2}{(x^2-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ y $x = 2$.

	$(-\infty, 1/2)$	$(1/2, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

La función decrece en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (-1, 1/2) \cup (2, \infty)$ y crece en el intervalo $(1/2, 1) \cup (1, 2)$.

d) La función tiene un máximo relativo en el punto $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ y un mínimo relativo en $\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$.

e) Gráfica:



Problema 8.2.4 (10 puntos) El consumo de energía (en Mwh) en una empresa metalúrgica a las x horas de un día viene dado por la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+14 & \text{si} \quad x \in [0,6] \\ -x^2+24x-82 & \text{si} \quad x \in (6,18] \\ -x+34 & \text{si} \quad x \in (18,24] \end{cases}$$

a) (3 puntos) Estudia la continuidad de esta función en el intervalo [0,24].

b) (4 puntos) Determina a qué horas del día el consumo alcanza sus valores máximo y mínimo. ¿Cuáles son dichos valores?

c) (3 puntos) Planteando la integral adecuada, calcula el consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana.

Solución:

a) Continuidad de f en $[0, 24]$

- Las tres ramas son polinomios y, por tanto, continuas.
- Continuidad en $x = 6$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 6^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 6}(2x+14) = 26 \\ \lim\limits_{x\to 6^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 6}(-x^2+24x-82) = 26 \\ f(6) = 26 \end{cases} \Longrightarrow f$ continua en $x = 6$.
- Continuidad en $x = 18$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 18^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 18}(-x^2+24x-82) = 26 \\ \lim\limits_{x\to 18^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 18}(-x+34) = 16 \\ f(18) = 26 \end{cases} \Longrightarrow f$ no es continua en $x = 18$. (Hay un salto)
- La función es continua en $[0, 18) \cup (18, 24]$

b) $f'(x) = \begin{cases} 2 > 0 & \text{si} \quad x \in (0,6) \\ -2x+24 = 0 \Longrightarrow x = 12 & \text{si} \quad x \in (6,18) \\ -1 < 0 & \text{si} \quad x \in (18,24) \end{cases}$

	$(0,6)$	$(6,12)$	$(12,18)$	$(18,24)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	crece $\nearrow$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	decrece $\searrow$

La función crece en el intervalo $(0, 12)$ y decrece $(12, 18) \cup (18, 24)$. Tiene un máximo relativo en el punto $(12, 62)$.
Tenemos $f(0) = 14$ y $f(24) = 10$, luego el consumo mínimo se produce a las 24 horas y es de 10 Mwh y el consumo máximo se produce a las 12 horas y es de 62 Mwh.

c) $S = \displaystyle\int_8^{10} (-x^2 + 24x - 82)\, dx = -\frac{x^3}{3} + 12x^2 - 82x\Big]_8^{10} = \frac{316}{3}$ Mwh.

Problema 8.2.5 (10 puntos) Una estación espacial internacional cuenta con un grupo de especialistas en ingeniería y con otro de especialistas en ciencias. El grupo de especialistas en ingeniería está compuesto por 10 especialistas de América y 20 de Europa, entre los cuales 7 y 9 son mujeres, respectivamente. El grupo de especialistas en ciencias está formado por 21 especialistas de América y 19 de Europa, entre los cuales 12 y 10 son mujeres, respectivamente. Se elige un integrante de la estación espacial al azar.

a) (2 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Europa?

b) (2 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y especialista en ciencias?

c) (3 puntos) Si se ha elegido una mujer, ¿es más probable que sea especialista en ciencias o en ingeniería?

d) (3 puntos) ¿Son independientes los sucesos “ser mujer” y “ser especialista en ingeniería”?

Solución:

Sean I especialista en ingeniería, C especialista en ciencias, A americano, E europeo, H hombre y M mujer.

a) Ordenando los datos en una tabla tenemos:

	A	E	Total
I	10	20	30
C	21	19	40
Total	31	39	70

$$\Longrightarrow P(E) = \frac{39}{70} \simeq 0,5571$$

b) Ordenando los datos en una tabla tenemos:

	H	M	Total
I	14	16	30
C	18	22	40
Total	32	38	70

$$\Longrightarrow P(H \cap C) = \frac{18}{70} = \frac{9}{35} \simeq 0,2571$$

c) $P(C|M) = \dfrac{P(C \cap M)}{P(M)} = \dfrac{22/70}{38/70} = \dfrac{11}{19} \simeq 0,5789$

$P(I|M) = \dfrac{P(I \cap M)}{P(M)} = \dfrac{16/70}{38/70} = \dfrac{8}{19} \simeq 0,4211$

Es más probable que sea de ciencias.

d) $P(I \cap M) = \dfrac{16}{70} = \dfrac{8}{35} \neq P(I)P(M) = \dfrac{30}{70} \cdot \dfrac{38}{70} = \dfrac{57}{245}$

Problema 8.2.6 (10 puntos) En una población hay dos compañías, A y B, que proporcionan el servicio de internet. La compañía A proporciona servicio al 70 % de los hogares que han contratado el servicio de internet. El 65 % de los hogares que han contratado el servicio de internet tienen contratado también el servicio de televisión de pago. Sabemos que la mitad de los clientes de la compañía B ha contratado televisión de pago.

a) (3 puntos) Calcula el porcentaje de hogares que no han contratado el servicio de televisión de pago y tienen contratado el servicio de internet con la compañía A.

b) (4 puntos) Si en un hogar se ha contratado el servicio de internet, pero no el servicio de televisión de pago, ¿cuál es la probabilidad de que sea cliente de la compañía B?

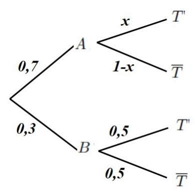
c) (3 puntos) Sea A el suceso “ser cliente de la compañía A” y C el suceso “haber contratado la televisión de pago”. Calcula $P(A \cup C)$.

Solución:

Sean A compañía A, B compañía B, I tiene internet, $\overline{I}$ no tiene internet, T tiene TV de pago y $\overline{T}$ no tiene TV de pago.

a) La vivienda tiene internet:

Tenemos $P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,3$; $P(T|B) = 0,5$; $P(\overline{T}|B) = 0,5$; $P(T|A) = x$ y $P(\overline{T}|A) = 1 - x$



$P(T) = 0,65 = P(T|A)P(A) + P(T|B)P(B) = 0,7x + 0,5 \cdot 0,3 \Longrightarrow x = \dfrac{5}{7}$

$P(\overline{T}|A) = 1 - x = \dfrac{2}{7}$

$P(\overline{T} \cap A) = P(\overline{T}|A)P(A) = \dfrac{2}{7} \cdot 0,7 = \dfrac{1}{5} = 0,2 \Longrightarrow 20\,\%$

b) $P(B|\overline{T}) = \dfrac{P(\overline{T}|B)P(B)}{P(\overline{T})} = \dfrac{0,5 \cdot 0,3}{P(\overline{T}|A)P(A) + P(\overline{T}|B)P(B)} = \dfrac{0,15}{\frac{2}{7} \cdot 0,7 + 0,15} = \dfrac{3}{7} = 0,4286$

c) $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = P(A) + P(T) - P(A \cap T) = 0,7 + 0,65 - \dfrac{5}{7} \cdot 0,7 = 0,85$

Capítulo 9

Extremadura

9.1. Ordinaria

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN
El examen consta de 10 problemas, cuyo valor es de 2 puntos cada uno. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el sexto lugar.

Problema 9.1.1 (2 puntos) Calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\left\{\begin{array}{l} 2X+3Y=\begin{pmatrix} 2 & 13\\ 6 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}\\ 3X-Y=\begin{pmatrix} 3 & 3\\ -13 & 1\\ -14 & 4\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} 2X+3Y=\begin{pmatrix} 2 & 13\\ 6 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}\\ 3X-Y=\begin{pmatrix} 3 & 3\\ -13 & 1\\ -14 & -4\end{pmatrix}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2X+3Y=\begin{pmatrix} 2 & 13\\ 6 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}\\ 9X-3Y=\begin{pmatrix} 9 & 9\\ -39 & 3\\ -42 & -12\end{pmatrix}\end{array}\right. \Longrightarrow 11X=\begin{pmatrix} 11 & 22\\ -33 & 0\\ -44 & -11\end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ -3 & 0\\ -4 & -1\end{pmatrix}$$

Tenemos $Y=3X-\begin{pmatrix} 3 & 3\\ -13 & 1\\ -14 & -4\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 & 2\\ -3 & 0\\ -4 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 3\\ -13 & 1\\ -14 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3\\ 4 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

Problema 9.1.2 (2 puntos) Sea A la matriz siguiente: $A=\begin{pmatrix} 2 & x & 1\\ 4 & -2 & 0\\ 2 & -1 & x\end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x existe la inversa de A. (1 punto)

b) Para $x = 1$, calcular la matriz X tal que $X \cdot A = I + A$, siendo I la matriz identidad de orden 3. (1 punto)

Solución:

a) $|A| = -4x(x+1) = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = -1 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall x \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$.

b) Si $x = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot A = I + A \Longrightarrow X = (I + A)A^{-1} = A^{-1} + I \Longrightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 9.1.3 (2 puntos) Un hotel cuenta con tres tipos de habitaciones: sencillas (1 cama), dobles (2 camas) y triples (3 camas). El número de habitaciones es de 195. El número de camas en habitaciones sencillas y dobles es de 300. Además, el número de habitaciones dobles es 2 veces el número conjunto de las sencillas y las triples. Calcular, justificando la respuesta, el número de habitaciones de cada tipo que hay en el hotel.

Solución:

Sean x número de habitaciones sencillas, y número de habitaciones dobles y z número de habitaciones triples.

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 195 \\ x + 2y = 300 \\ y = 2(x + z) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 195 \\ x + 2y = 300 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{array}\right.$$

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 195 \\ 1 & 2 & 0 & 300 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 195 \\ 0 & 1 & -1 & 105 \\ 0 & -3 & 0 & -390 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

sistema compatible determinado

$$\left\{\begin{array}{l} -3y = -390 \Longrightarrow y = 130 \\ 130 - z = 105 \Longrightarrow z = 25 \\ x + 130 + 25 = 195 \Longrightarrow x = 40 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 40 \text{ habitaciones} \\ y = 130 \text{ habitaciones} \\ z = 25 \text{ habitaciones} \end{array}\right.$$

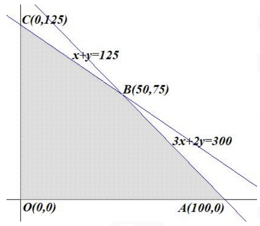
Problema 9.1.4 (2 puntos) Una empresa de compra y venta de vehículos usados compra coches y motocicletas, obteniendo un beneficio de 500 euros por cada coche y 400 euros por cada motocicleta al, posteriormente, venderlos. Se sabe que dispone de 300000 euros para comprar vehículos al precio de 3000 euros cada coche y 2000 euros cada motocicleta y que, por limitaciones de espacio, no puede comprar más de 125 vehículos. Calcular, justificando las respuestas, el número de coches y motocicletas que debe comprar para hacer máximos los beneficios y el valor de dichos beneficios máximos.

Solución:

Sea x el número de coches e y el número de motocicletas.

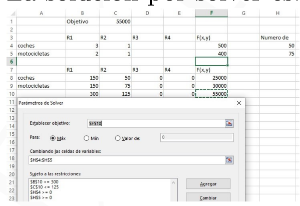
☛ Región factible:

$$\begin{cases} 3000x + 2000y \le 300000 \\ x + y \le 125 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x + 2y \le 300 \\ x + y \le 125 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



Los vértices del recinto son: $O(0,0)$, $A(100,0)$, $B(50,75)$ y $C(0,125)$.

La solución por solver es:



☛ Función objetivo: $f(x,y) = 500x + 400y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(100,0) = 50000 \\ f(50,75) = 55000 \ \text{Máximo} \\ f(0,125) = 50000 \end{cases}$$

☛ Para obtener el máximo beneficio debe vender 50 coches y 75 motocicletas. El beneficio sería de 55000€.

Problema 9.1.5 (2 puntos) Los ingresos, $I(t)$, y los gastos, $G(t)$, en euros, de una tienda de paquetería que está abierta desde las 9 hasta las 14 horas depende de la hora del día, según las siguientes expresiones:

$$I(t) = t^2 + At, \quad 9 \le t \le 14 \ \text{ y}, \quad G(t) = 3At - (A^2 + B), \quad 9 \le t \le 14$$

a) Calcular la función $B(t)$ que relaciona los beneficios obtenidos con la hora del día. (0,5 puntos)

b) Sabiendo que a las 12 horas se obtiene el beneficio mínimo de 150 euros, determinar, justificando la respuesta, las constantes A y B. (1,5 puntos)

Solución:

a) $B(t) = I(t) - G(t) = t^2 + At - 3At + (A^2 + B) = t^2 - 2At + A^2 + B, \quad 9 \le t \le 14$

b) $B'(t) = 2t - 2A \Longrightarrow B'(12) = 0 \Longrightarrow 24 - 2A = 0 \Longrightarrow A = 12$
$B(12) = 150 \Longrightarrow 12^2 - 24A + A^2 + B = 150 \Longrightarrow 12^2 - 24A + A^2 + B = 150 \Longrightarrow$
$144 - 288 + 144 + B = 150 \Longrightarrow B = 150$

Comprobamos que $t = 12$ es un mínimo: $B''(t) = 2 \Longrightarrow B''(12) = 2 > 0 \Longrightarrow t = 12$ es un mínimo relativo.

Problema 9.1.6 (2 puntos) El valor (en euros) de cada acción de una determinada empresa del IBEX-35, $V(t)$, durante las 8 horas de duración de la sesión bursátil, depende del tiempo, t, (en horas) que ha transcurrido desde que se inició dicha sesión, según la función:

$$V(t) = 60 + 84t - 27t^2 + 2t^3 \quad 0 \le t \le 8$$

Se pide, razonando las respuestas:

a) Determinar los intervalos de tiempo a lo largo de la sesión bursátil en que el valor de la acción se ha incrementado y los intervalos en que el valor de la acción ha disminuido. (1,25 puntos)

b) Establecer los valores inicial y final de la acción y representar gráficamente la evolución del valor de la acción a lo largo de la sesión bursátil. (0,75 puntos)

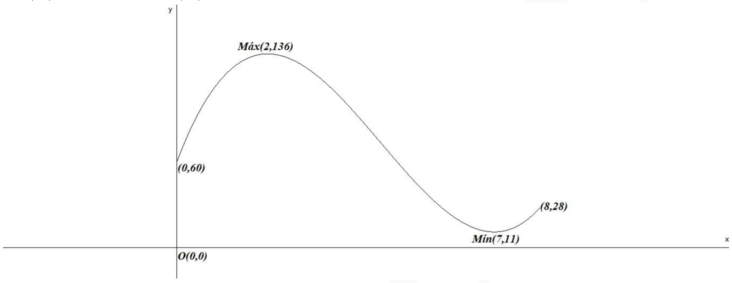
Solución:

a) $V'(t) = 84 - 54t + 6t^2 = 0 \Longrightarrow t = 2$ y $t = 7$

	$(0,2)$	$(2,7)$	$(7,8)$
$V'(t)$	$+$	$-$	$+$
$V(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

El valor de las acciones crece en el intervalo horario de $(0,2) \cup (7,8)$ y decrece en el $(2,7)$

b) $V(0) = 60$ y $V(8) = 28$, la evolución seguiría la siguiente gráfica:



Problema 9.1.7 (2 puntos) Determinar el área delimitada por la función $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = 4$, representando dicha función y el área que se pide. Razona las respuestas.

Solución:

- Para dibujar la función calculamos $f'(x) = -2x + 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(2) = -2 < 0 \Longrightarrow (2,1)$ es un máximo relativo. Dibujamos con los puntos de corte con OY : hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0,-3)$ y con OX : hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow -x^2+4x-3 = 0 \Longrightarrow x = (1,0)$ y $(3,0)$

- $-x^2 + 4x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = 3$. Los dos puntos se encuentran dentro del recinto de integración y tendremos tres: $S_1 : [0,1]$, $S_2 : [1,3]$ y $S_3 : [3,4]$.

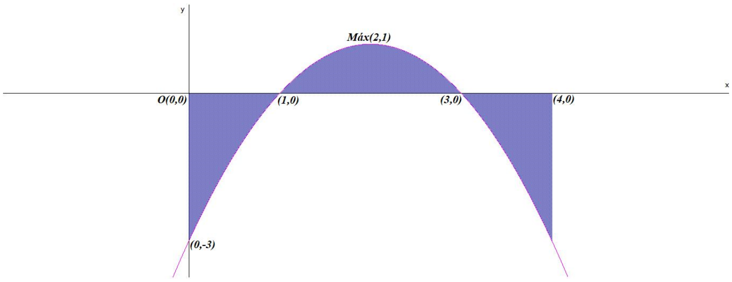
$$F(x) = \int (-x^2 + 4x - 3)\,dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x$$

$$S_1 = \int_0^1 (-x^2 + 4x - 3)\,dx = F(1) - F(0) = F(1) - F(0) = -\frac{4}{3} - 0 = -\frac{4}{3}$$

$$S_1 = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\,dx = F(3) - F(1) = F(3) - F(1) = 0 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

$$S_1 = \int_3^4 (-x^2 + 4x - 3)\,dx = F(4) - F(3) = F(4) - F(3) = -\frac{4}{3} - 0 = -\frac{4}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| + |S_3| = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4\ u^2$$



Problema 9.1.8 (2 puntos) Cierto programa de televisión predice lluvia el 20 % de los días. Si se sabe que el programa ha predicho lluvia, la probabilidad de que realmente llueva es de 0,9. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que el programa prediga lluvia y realmente llueva. (1 punto)

b) Si se sabe que el 15 % de los días llueve, calcular la probabilidad de que o bien el programa prediga lluvia o bien realmente llueva. (1 punto)

Solución:
Sean P predice lluvia, $\overline{P}$ no predice lluvia, Ll llueve y $\overline{Ll}$ no llueve.
$P(P) = 0,2$ y $P(Ll|P) = 0,9$

a) $P(Ll \cap P) = P(Ll|P)P(P) = 0,9 \cdot 0,2 = 0,18$

b) $P(Ll) = 0,15$, $P(P \cup Ll) = P(P) + P(Ll) - P(Ll \cap P) = 0,2 + 0,15 - 0,18 = 0,17$

Problema 9.1.9 (2 puntos) El tiempo que se emplea en montar un determinado producto en una fábrica se distribuye de acuerdo con una distribución normal con desviación típica 10 minutos. Se cronometra el montaje de 49 productos, resultando un tiempo medio de 45 minutos. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90 %, para el tiempo medio de montaje de dicho producto. Razonar la respuesta.
Solución:

$$N(\mu; 10)$$

$NC = 90\,\% = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,10 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$$

$n = 49$ y $\overline{X} = 45$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{10}{\sqrt{49}} = 2,35$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (45 - 2,35; 45 - 2,35) = (42,65; 47,35)$$

.

Problema 9.1.10 (2 puntos) Se quiere realizar un estudio sobre la proporción de clubes de fútbol en situación de bancarrota. Como dicha proporción es desconocida, asumimos de principio un valor $P = 0,5$. Se pide determinar el número mínimo de clubes que hay que examinar si deseamos calcular un intervalo de confianza para dicha proporción con un nivel confianza del 95 % y cuya

longitud sea inferior a $0,1$. Razonar la respuesta.
Solución: $NC = 95\,\% = 0,95 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$\hat{p} = 0,5, \ \ \hat{q} = 1-\hat{p} = 0,5 \ \text{ y } \ E = \frac{0,1}{2} = 0,05$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,05 = 1,96\sqrt{\frac{0,5\cdot 0,5}{n}} \Longrightarrow n \ge 384,16 \Longrightarrow n = 385$$

9.2. Extraordinaria

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN
El examen consta de 10 problemas, cuyo valor es de 2 puntos cada uno. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el sexto lugar.

Problema 9.2.1 (2 puntos) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
Hallar la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $X\cdot A - A^t = B$, donde A^t es la matriz traspuesta de A. Justificar la respuesta.

Solución:
$X\cdot A - A^t = B \Longrightarrow XA = B + A^t \Longrightarrow X = (B+A^t)A^{-1} =$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right]\cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} -9 & -5 & -2 \\ 10 & 2 & 2 \\ -7 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 9.2.2 (2 puntos) Sean las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} -1 & x \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Se pide, justificando las respuestas:

a) (1 punto) Determinar el valor de x para que se verifique que $A^2 = -I$.

b) (1 punto) Para el valor de x referido en el apartado a), determinar la matriz A^{43}.

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & x \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1-2x & 0 \\ 0 & 1-2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow 1-2x = -1 \Longrightarrow x = 1.$

b) Si $x = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = -I, \quad A^3 = A^2A = -IA = -A,$$

$$A^4 = A^3A = -AA = -A^2 = I, \quad A^5 = A^4A = IA = A, \ldots$$

$$A^{43} = A^{40}A^3 = (A^4)^{10}A^3 = I^{10}(-A) = -A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 9.2.3 (2 puntos) Un charcutero vende lomos a 26€ el kilogramo, salchichones a 15€ el kilogramo y chorizos a 9€ el kilogramo. Durante un día vendió 60 kg de embutidos, cobrando por ellos 737€. Sabiendo que el peso de los chorizos es el doble de lo que pesan conjuntamente los lomos y los salchichones, calcular, razonando la respuesta, cuántos kilogramos de cada tipo de embutido vendió ese día.

Solución:
Sean x kg de lomos, y kg de salchichones y z kg de chorizos

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=60 \\ 26x+15y+9z=737 \\ z=2(x+y) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=60 \\ 2x+2y-z=0 \\ 26x+15y+9z=737 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7 \text{ kg} \\ y=13 \text{ kg} \\ z=40 \text{ kg} \end{array}\right.$$

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 26 & 15 & 9 & 737 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 26F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & -3 & -120 \\ 0 & -11 & -17 & -823 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

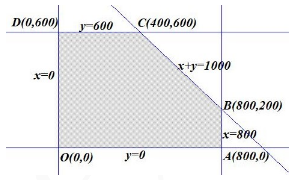
sistema compatible determinado

$$\left\{\begin{array}{l} -3z=-120 \Longrightarrow z=40 \\ -11y-680=-823 \Longrightarrow y=13 \\ x+13+40=60 \Longrightarrow x=7 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7 \text{ kg de lomo} \\ y=13 \text{ kg de salchichón} \\ z=40 \text{ kg de chorizo} \end{array}\right.$$

Problema 9.2.4 (2 puntos) Una empresa fabrica móviles y tabletas que después vende a 720 euros y 540 euros la unidad, respectivamente. Por cuestiones logísticas, no puede fabricar semanalmente más de 800 móviles ni más de 600 tabletas, ni más de 1000 entre los dos productos. Suponiendo que vende todo el material que fabrica, calcular, justificando las respuestas, el número de móviles y de tabletas que debe fabricar semanalmente para obtener unos ingresos máximos y el valor de dichos ingresos máximos.
Solución:
Sea x el número de móviles e y el número de tabletas.

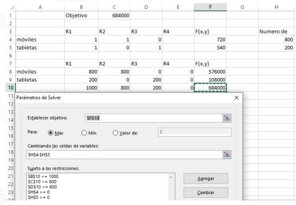
☛ Región factible:

$$\begin{cases} x \le 800 \\ y \le 600 \\ x + y \le 1000 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



Los vértices del recinto son: $O(0,0)$, $A(800,0)$, $B(800,200)$, $C(400,600)$ y $D(0,600)$.

La solución por solver es:



- ☛ Función objetivo: $f(x,y) = 720x + 540y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(800,0) = 576000 \\ f(800,200) = 684000 \text{ Máximo} \\ f(400,600) = 612000 \\ f(0,600) = 324000 \end{cases}$$

- ☛ Para obtener el máximo ingreso se deben fabricar y vender 800 móviles y 200 tabletas, con unos ingresos máximos de 684000€.

Problema 9.2.5 (2 puntos) Una fábrica de materiales de construcción ha descubierto que la producción diaria de ladrillos no defectuosos (en toneladas), $P(x)$, depende de la dureza del material que utiliza, x, (en una escala del 0 al 10) de acuerdo con la función:

$$P(x) = -x^3 + 3Ax^2 - 3Bx + 23 \quad 0 \le x \le 10$$

Determinar, justificando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la producción mínima de ladrillos no defectuosos es de 13 toneladas y se alcanza cuando la dureza del material es de 1.

Solución:

$P(x) = -x^3 + 3Ax^2 - 3Bx + 23 \Longrightarrow P'(x) = -3x^2 + 6Ax - 3B$

$$\begin{cases} P(1) = 13 \Longrightarrow -1 + 3A - 3B + 23 = 13 \Longrightarrow A - B = -3 \\ P'(1) = 0 \Longrightarrow -3 + 6A - 3B = 0 \Longrightarrow 2A - B = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = 7 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$P(x) = -x^3 + 12x^2 - 21x + 23 \Longrightarrow P'(x) = -3x^2 + 24x - 21$$

$P''(x) = -6x + 24 \Longrightarrow P''(1) = 18 > 0 \Longrightarrow x = 1$ es un mínimo relativo.
Tenemos $P(0) = 23$, $P(1) = 13$ y $P(10) = 13 \Longrightarrow x = 1$ y $x = 10$ son mínimos absolutos.

Problema 9.2.6 (2 puntos) Una empresa constructora, tiene que afrontar gastos de suelo y gastos de edificación, (en miles de euros), que dependen de la distancia al centro, x, (en km). Dichos gastos vienen dados, respectivamente, por las funciones:

$$S(x) = 10x + 100 \quad 0 \le x \le 25; \qquad E(x) = -x^2 + 10x + 200 \quad 0 \le x \le 25$$

Determinar, justificando las respuestas:

a) (0,5 puntos) La expresión $G(x)$ que indica los gastos totales de la constructora en función de la distancia al centro de la ciudad donde se realice la obra.

b) (1,5 puntos) A qué distancias del centro los gastos de construcción son máximos y mínimos, así como el valor de dichos gastos.

Solución:

a) $G(x) = S(x) + E(x) = (10x + 100) + (-x^2 + 10x + 200) = -x^2 + 20x + 300 \quad 0 \le x \le 25$

b) $G'(x) = -2x + 20 = 0 \Longrightarrow x = 10$
$G''(x) = -2 \Longrightarrow G''(10) = -2 < 0 \Longrightarrow x = 10$ es un máximo relativo.
Tenemos $G(0) = 300$, $G(10) = 400$ y $G(25) = 175$. Luego el máximo relativo calculado es también absoluto y se encuentra cuando la separación del centro es de 10 Km con un coste de 400000€. El mínimo coste se produce cuando la separación del centro es de 25 km y es de 175000€

Problema 9.2.7 (2 puntos) Determinar el área delimitada por la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = 5$, representando dicha función y el área que se pide. Razonar las respuestas.

Solución:

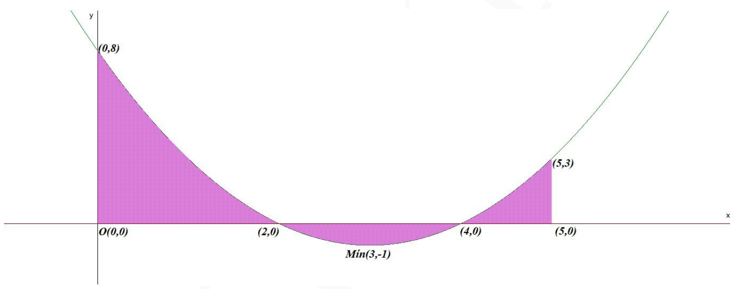
Buscamos los puntos de corte de f con el eje de abscisas: $x^2 - 6x + 8 = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $x = 4$. El punto $x = 2$ y el $x = 4$ se encuentran dentro del intervalo $[0, 5]$ de integración, luego tendremos tres recintos de integración S_1 en $[0, 2]$, S_2 en $[2, 4]$ y S_3 en $[4, 5]$.

$$S_1 = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (x^2 - 6x + 8)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right]_0^2 = \frac{20}{3}$$

$$S_2 = \int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 (x^2 - 6x + 8)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right]_2^4 = -\frac{4}{3}$$

$$S_3 = \int_4^5 f(x)\,dx = \int_4^5 (x^2 - 6x + 8)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right]_4^5 = \frac{4}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| + |S_3| = \left|\frac{20}{3}\right| + \left|-\frac{4}{3}\right| + \left|\frac{4}{3}\right| = \frac{28}{3} \simeq 9,3333\ u^2$$



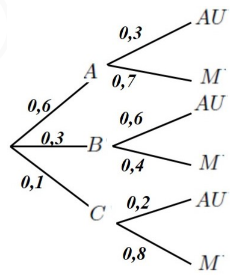
Para dibujar la gráfica: hemos calculado el punto de corte con el eje de ordenadas $(0, 8)$, el extremo relativo $f'(x) = 2x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 3$ y como $f''(x) = 2 > 0 \Longrightarrow (3, -1)$ es un mínimo relativo y un punto $(5, 3)$

Problema 9.2.8 (2 puntos) Un concesionario trabaja con tres marcas de coches: la marca A representa el 60 % de sus ventas, la B el 30 % y la C el resto. En un estudio acerca de las preferencias de los clientes sobre el cambio de marchas (manual, automático) se obtiene que el 70 % de los coches vendidos de la marca A, el 40 % de los de la marca B y el 80 % de los de la marca C tienen el cambio manual. Se pide, razonando la respuesta:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el concesionario venda un coche con cambio automático.

b) (1 punto) Sabiendo que un coche vendido tiene el cambio manual, calcular la probabilidad de que sea de la marca C.

Solución:
Sean A marca A, B marca B, C marca C, AU automático y M manual.



a) $P(AU) = P(AU|A)P(A) + P(AU|B)P(B) + P(AU|C)P(C) =$
$0,3 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,1 = 0,38$

b) $P(C|M) = \dfrac{P(M|C)P(C)}{P(M)} = \dfrac{0,8 \cdot 0,1}{1 - 0,38} = 0,129$

Problema 9.2.9 (2 puntos) Se realiza un estudio sobre el contenido de cierta sustancia en una marca de refrescos. De 500 latas analizadas, 120 contenían dicha sustancia. Calcular un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95 %, para la proporción de latas de esta marca que contenían la sustancia. Razonar la respuesta.
Solución:
Tenemos: $\hat{p} = \dfrac{120}{500} = 0,24$ y $q = 0,76$
$NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\dfrac{0,24 \cdot 0,76}{500}} = 0,0374$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,24 - 0,0374; 0,24 - 0,0374) = (0,2026; 0,2774) = (20,26\,\%; 27,74\,\%)$$

Problema 9.2.10 Se pretende realizar un estudio sobre el contenido en alcohol de las cervezas, variable que sigue una distribución normal con desviación típica 1,5 grados. ¿Qué cantidad de cervezas habrá que analizar como mínimo si queremos obtener un intervalo de confianza para el contenido medio de alcohol, con un nivel de confianza del 99 % y una longitud no superior a 1 grado? Razonar la respuesta.
Solución:

$$N(\mu; 1,5)$$

$NC = 99\,\% = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$
$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,995 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$
$E = \dfrac{1}{2} = 0,5$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\frac{1,5}{\sqrt{n}} = 0,5 \Longrightarrow n \ge \left(\frac{2,575 \cdot 1,5}{0,5}\right)^2 = 59,68 \Longrightarrow n = 60$$

Capítulo 10

Galicia

10.1. Ordinaria

El examen consta de 6 ejercicios, todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos), de los que puede realizar un MÁXIMO DE 3 combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, sólo se corregirán los tres primeros realizados.

Problema 10.1.1 Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule la matriz A^t (siendo A^t la matriz transpuesta de A) y calcula $A \cdot B$.

b) Calcule la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumple $A \cdot B \cdot X = C + I$ donde $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad 2×2.

Solución:

a) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $|A \cdot B| = -5 \neq 0 \Longrightarrow \exists (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 1/5 & -3/5 \end{pmatrix}$

$A \cdot B \cdot X = C + I \Longrightarrow X = (A \cdot B)^{-1}(C + I) = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 1/5 & -3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & -2/5 \\ 2/5 & -2/5 \end{pmatrix}$

Problema 10.1.2 Un grupo empresarial desea crear una red de producción formada por plantas de dos tipos: A y B. Cada planta de producción A generaría unos costes mensuales de 1.000 euros y necesitaría 8 empleados para su funcionamiento, mientras que cada planta de producción B generaría unos costes mensuales de 2.000 euros y necesitaría 4 empleados. El número de plantas de producción A no deberá superar al doble de las de tipo B. Además, los costes mensuales de esta red de producción no deben superar los 42.000 euros y tampoco debe suponer la contratación de más de 120 empleados.

a) Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema.

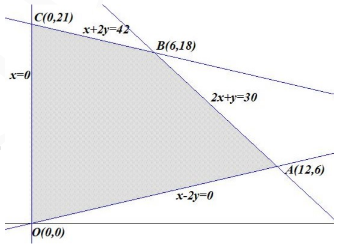
b) Represente gráficamente la región factible y calcula sus vértices.

c) Si se sabe que cada planta de producción A generaría unos beneficios mensuales de 24.000 euros y cada planta de producción B de 20.000 euros, ¿cuántas plantas de producción de cada tipo deberían formar la red para que los beneficios mensuales sean máximos?

Solución:
Sean x número de plantas A e y número de plantas B

	costes	empleados
A	1000	8
B	2000	4
	42000	120

a) La región factible es:



$$\begin{cases} 1000x + 2000y \leq 42000 \\ 8x + 4y \leq 120 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y \leq 42 \\ 2x + y \leq 30 \\ x - 2y \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

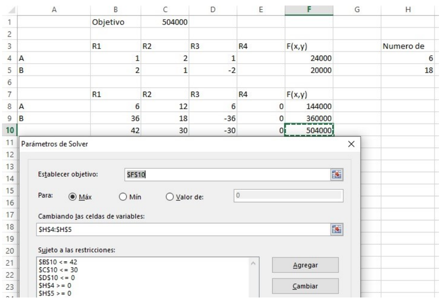
b) Los vértices son: $O(0,0)$, $A(12,6)$, $B(6,18)$ y $C(0,21)$.

c) La función objetivo es:
$f(x,y) = 24000x + 20000y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(12,6) = 408000 \\ f(6,18) = 504000 \ \text{Máximo} \\ f(0,21) = 420000 \end{cases}$$

El máximo es 504000€ y se consigue con 6 plantas tipo A y 18 de tipo B.

Solución por solver :



Problema 10.1.3 El volumen de agua (en millones de litros) almacenado en un embalse a lo largo de un periodo de 11 años en función del tiempo t (en años) viene dado por la función

$$N(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8000 \quad 0 \leq t \leq 11$$

a) Determine los períodos de crecimiento y decrecimiento del agua almacenada.

b) Calcule la cantidad de agua almacenada en el último año ($t = 11$).

c) Calcule el año del periodo en el que el volumen almacenado fue máximo y el volumen máximo que tuvo el embalse a lo largo de ese periodo.

Solución:

a) $N'(t) = 3t^2 - 48t + 180 = 0 \Longrightarrow t = 6$ y $t = 10$

	$(0,6)$	$(6,10)$	$(10,11)$
$N'(t)$	$+$	$-$	$+$
$N(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

El volumen de agua es creciente en el intervalo $(0,6) \cup (10,11)$ años y decreciente en el $(6,10)$ años.

b) $N(11) = 8407$ millones de litros.

c) La función tiene un máximo relativo en el punto $(6,8432)$ y un mínimo relativo en el $(10,8400)$.
Como $N(0) = 8000$ y $N(11) = 8407$ podemos concluir que el máximo $(6,8432)$ es absoluto. Es decir, el volumen máximo se produce a los 6 años con 8432 millones de litros.

Problema 10.1.4 Los beneficios obtenidos durante el primer año (en cientos de euros) por un establecimiento dedicado al reparto de comida a domicilio vienen dados por la función

$$B(t) = t(t-a)^2 \quad 0 \le t \le 12$$

en donde t es el tiempo transcurrido en meses desde la apertura del establecimiento.

a) Calcule el valor del parámetro "a" teniendo en cuenta que $B(t)$ presenta un punto de inflexión en $t = 6$.

b) Para $a = 9$, ¿cuál ha sido el mayor beneficio obtenido? ¿En qué momento o momentos se ha producido? Justifica las respuestas.

c) Para $a = 9$, represente la gráfica de la función $B(t)$ teniendo en cuenta la información anterior y el estudio de sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

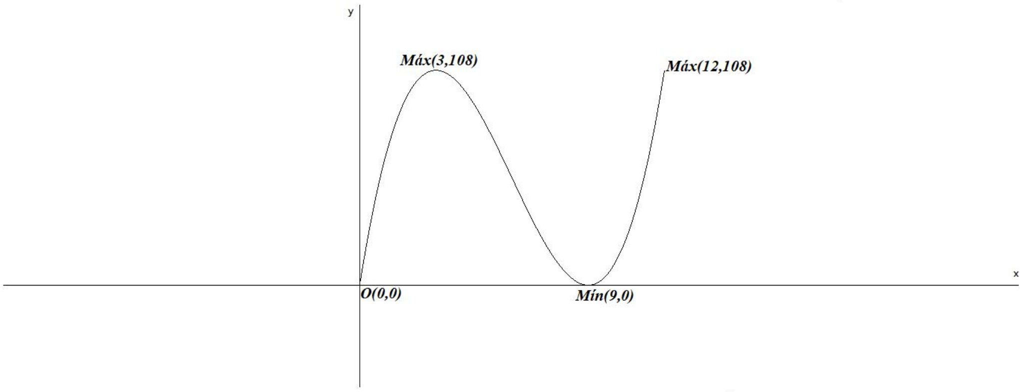
a) $B(t) = t^3 - 2at^2 + a^2t \Longrightarrow B'(t) = 3t^2 - 4at + a^2 \Longrightarrow B''(t) = 6t - 4a$, como $B''(6) = 0 \Longrightarrow 36 - 4a = 0 \Longrightarrow a = 9$.

b) Se explica con el apartado siguiente.

c) $B(t) = t(t-9)^2 = t^3 - 18t^2 + 81t \Longrightarrow B'(t) = 3t^2 - 36t + 81 = 0 \Longrightarrow t = 3$ y $t = 9$.

	$(0,3)$	$(3,9)$	$(9,12)$
$B'(t)$	$+$	$-$	$+$
$B(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

El beneficio es creciente en el intervalo $(0,3) \cup (9,12)$ meses y decreciente en el $(3,9)$ meses.
La función presenta un máximo relativo en el punto $(3,108)$, ya que $B(3) = 108$, y un mínimo relativo en el punto $(9,0)$, ya que $B(9) = 0$. Como $B(0) = 0$ y $B(12) = 108$ el beneficio máximo es de 10800€ y se produce el mes 3 y el 12.
Su representación gráfica sería:



Problema 10.1.5 En una ciudad, el 70 % de la población recibe publicidad de un establecimiento, de los cuales un 90 % realiza alguna compra en dicho establecimiento. También se sabe que de los que no reciben publicidad, un 60 % realiza alguna compra en dicho establecimiento.

a) ¿Qué porcentaje de la población de la ciudad realiza alguna compra en ese establecimiento?

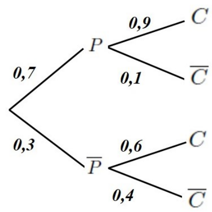
b) Si elegimos una persona al azar que ha realizado alguna compra en ese establecimiento, ¿cuál es la probabilidad de que haya recibido publicidad del mismo?

c) ¿Son independientes los sucesos "realizar alguna compra en ese establecimiento" y "recibir publicidad del mismo"? Justifique la respuesta.

Justifique la respuesta.

Solución:

Sea P "recibe publicidad" y C "realiza compra".



a) $P(C) = P(C|P)P(P) + P(C|\overline{P})P(\overline{P}) = 0,9 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,3 = 0,81$

b) $P(P|C) = \dfrac{P(C|P)P(P)}{P(C)} = \dfrac{0,9 \cdot 0,7}{0,81} = 0,7778$

c) $P(P \cap C) = P(C|P)P(P) = 0,9 \cdot 0,7 = 0,63$ y $P(P) \cdot P(C) = 0,7 \cdot 0,81 = 0,567$. Luego $P(P \cap C) \neq P(P) \cdot P(C) \Longrightarrow P$ y C no son independientes.

Problema 10.1.6 En una muestra aleatoria de 120 empresas inspeccionadas, de entre las visitadas un año por los inspectores de trabajo de una provincia, se ha sancionado a 30 de ellas.

a) Calcule, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo de confianza para la proporción de empresas sancionadas por la Inspección de Trabajo.

b) Si ignoramos los datos iniciales y con un nivel de confianza del 95 %, ¿cuál es el tamaño mínimo de la muestra necesaria para estimar la proporción de empresas sancionadas con un error máximo del 2 %?

Solución:

a) $n = 120$, $\hat{p} = \dfrac{30}{120} = 0,25$, $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,75$ y $NC = 0,9$.
$0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,10 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1,645\sqrt{\frac{0,25\cdot 0,75}{120}} = 0,065$$

$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,25 - 0,065; 0,25 + 0,065) = (0,185; 0,315) = (18,5\,\%; 31,5\,\%)$

b) Si ignoramos los datos iniciales tenemos: $\hat{p} = 0,5$ y $\hat{q} = 0,5$
$E = 0,02$ y $NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,02 = 1,96\sqrt{\frac{0,5\cdot 0,5}{n}} \Longrightarrow n \ge 2401 \Longrightarrow n = 2401.$$

10.2. Extraordinaria

El examen consta de 6 ejercicios, todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos), de los que puede realizar un MÁXIMO DE 3 combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, sólo se corregirán los tres primeros realizados.

Problema 10.2.1 (3,33 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcule los valores de a para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) Para $a = 1$, calcule, si es posible, la inversa de la matriz A.

c) Exprese en forma matricial el sistema de ecuaciones siguiente y resuélvalo: $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2y - z = -1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

Solución:

a) $|A| = 2 - 3a = 0 \Longrightarrow a = \dfrac{2}{3} \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

b) Si $a = 1 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$

Problema 10.2.2 (3,33 puntos) Un barco pesquero se dedica a la captura de jurel y caballa. Las normas sobre cuotas son: las capturas totales no pueden exceder de 30 toneladas (Tm); la cantidad de jurel como máximo puede triplicar la de caballa y la cantidad de caballa no puede superar las 18 Tm.
Si el precio al que vende el jurel es de 5 €/kg y el de la caballa 6 €/kg.

a) Formule y resuelva el problema que determina las cantidades que debe pescar de cada especie para maximizar los ingresos, cumpliendo las normas.

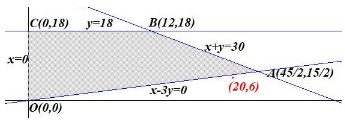
b) Represente gráficamente la región factible e indique sus vértices. ¿A cuánto ascienden los ingresos máximos?

c) ¿Cumpliría las normas sobre cuotas pesqueras si captura 20 Tm de jurel y 6 Tm de caballa? Explique su respuesta.

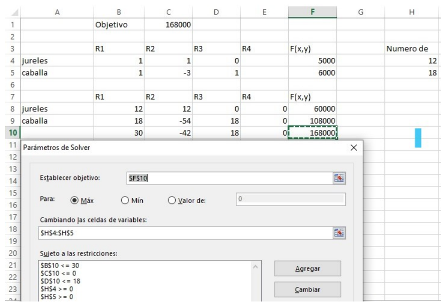
Solución:
Sean x Tm de jurel e y Tm de caballa.

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x + y \leq 30 \\ x \leq 3y \\ y \leq 18 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \leq 30 \\ x - 3y \leq 0 \\ y \leq 18 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Solución por solver :



b) Los vértices son: $O(0,0)$, $A\left(\frac{45}{2}, \frac{15}{2}\right)$, $B(12,18)$ y $C(0,18)$.

c) La función objetivo es:
$f(x,y) = 5000x + 6000y \quad (1 \text{ Tm} = 1000 \text{ kg})$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f\left(\frac{45}{2}, \frac{15}{2}\right) = 157500 \\ f(12,18) = 168000 \text{ Máximo} \\ f(0,18) = 108000 \end{cases}$$

El máximo es 168000€ y se consigue con la pesca de 12 Tm de jureles y 18 Tm de caballa.

d) El punto (20,6) está fuera de la región factible y no cumple las normas sobre cuotas pesqueras.

Problema 10.2.3 (3,33 puntos) El número de ejemplares vendidos de una revista (en miles de unidades), en los primeros cinco meses del año, viene dado por la función

$$N(t) = \begin{cases} 8 - t(t-2) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 3 \\ 2t - 1 & \text{si} \quad 3 < t \leq 5 \end{cases}$$ donde t es el tiempo transcurrido en meses.

a) Estudie el crecimiento y decrecimiento del número de ejemplares vendidos. Calcule en qué momentos se produce el máximo y el mínimo número de ventas y a cuánto ascienden.

b) Represente gráficamente la función N(t). Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función $N(t)$, el eje de abscisas y las rectas $t = 0$ y $t = 5$.

Solución:

a) Primero estudiamos la continuidad de la función en su dominio. Como son polinomios, la función es continua en sus ramas, estudiamos en $t = 3$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 3^-} N(t) = \lim\limits_{t\to 3} \left(-t^2 + 2t + 8\right) = 5 \\ \lim\limits_{t\to 3^+} N(t) = \lim\limits_{t\to 3} (2t - 1) = 5 \\ N(3) = 5 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

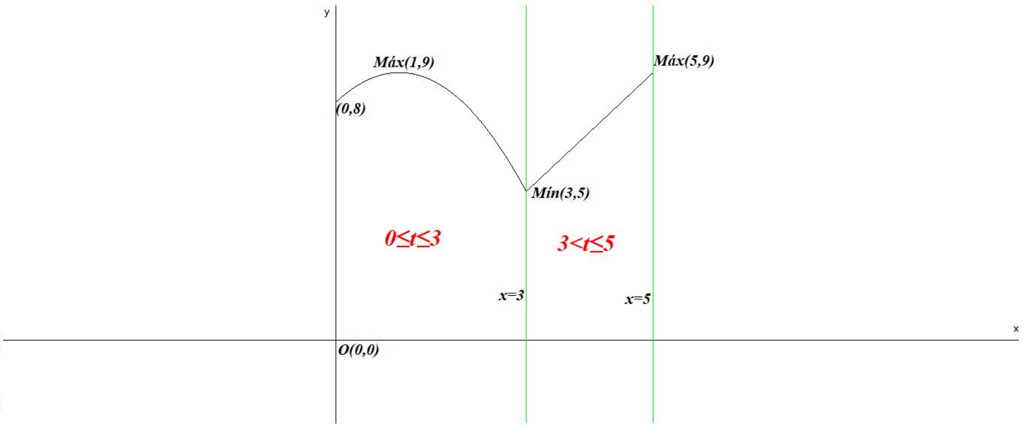
N continua en $t = 3 \Longrightarrow N$ continua en todo el dominio $[0, 5]$

$$N'(t) = \left\{\begin{array}{lll} -2t + 2 = 0 \Longrightarrow t = 1 & \text{si} & 0 < t < 3 \\ 2 > 0 & \text{si} & 3 < t < 5 \end{array}\right.$$

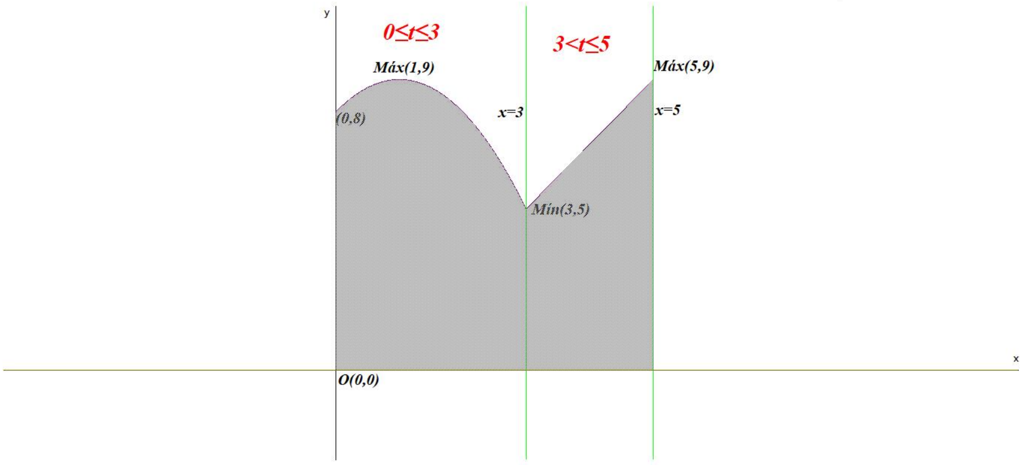
	$(0,1)$	$(1,3)$	$(3,5)$
$N'(t)$	$+$	$-$	$+$
$N(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función crece en el intervalo $(0, 1) \cup (3, 5)$ y decrece en el $(1, 3)$. Tiene un máximo relativo en el punto $(1, 9)$ y un mínimo relativo en el $(3, 5)$.
Tenemos también $N(0) = 8$ y $N(5) = 9$. Luego el máximo se produce el mes 1 y el mes 5 con 9000 ejemplares vendidos y el mínimo en el mes 3 con 5000 ejemplares.

b) Con los datos anteriores dibujamos la gráfica de la función:



La gráfica del área pedida sería:



$$S=\int_0^3(-t^2+2t+8)\,dt+\int_3^5(2t-1)\,dt=-\frac{t^3}{3}+t^2+8t\Big]_0^3+t^2-t\Big]_3^5=24+14=38\ u^2$$

Problema 10.2.4 (3,33 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}$, $x\neq 0$, $a\neq 0$

a) Calcule los valores del parámetro "a" para que $f(x)$ tenga un punto crítico en $x_0=3$.

b) Para $a=3$, estudie el crecimiento y decrecimiento de la función y sus máximos y mínimos, si existen. Estudie también sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión, si existen.

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}\Longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{a}-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{x^2-a^2}{ax^2}$

$f'(3)=0\Longrightarrow \dfrac{9-a^2}{9a}=0\Longrightarrow a=\pm 3$

b) Si $a=3\Longrightarrow f(x)=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}=\dfrac{x^2+9}{3x}$

- ☛ $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{0\}$
- ☛ $f'(x)=\dfrac{x^2-9}{3x^2}\Longrightarrow x=\pm 3$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

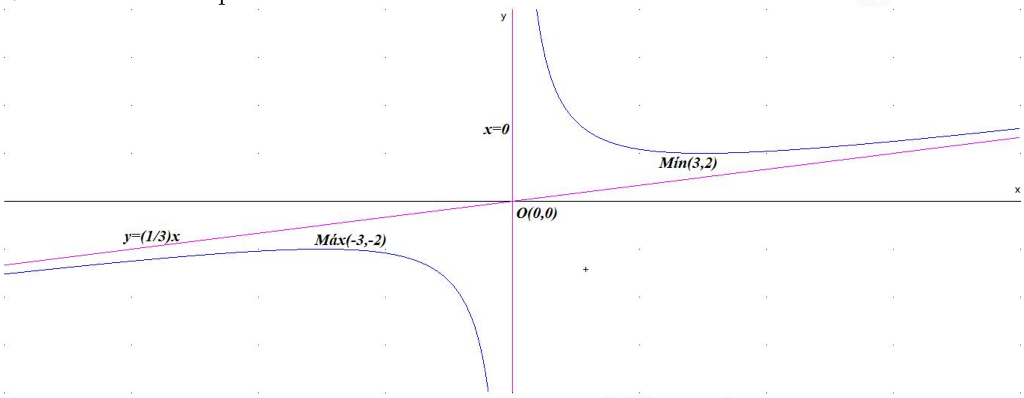
La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$ y decreciente en el $(-3,0)\cup(0,3)$.

- ☛ La función tiene un máximo relativo en el punto $(-3,-2)$ y un mínimo relativo en el $(3,2)$
- ☛ $f''(x)=\dfrac{6}{x^3}\neq 0\Longrightarrow$ no hay puntos de inflexión.

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa $\frown$ en el intervalo $(-\infty, 0)$ y cóncava $\smile$ en el $(0, \infty)$

☛ Con estos datos representamos la función:



Problema 10.2.5 (3,33 puntos) En una urna A hay 8 bolas verdes y 6 rojas y en otra urna B hay 4 verdes y 5 rojas. Se lanza un dado y si sale un número menor que 3 se saca una bola de la urna A y si sale un número mayor o igual a 3 se saca la bola de la urna B. Se extrae una bola al azar,

a) Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

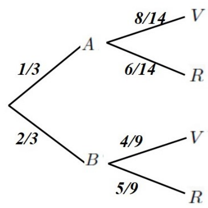
b) Sabiendo que se extrajo una bola verde, ¿Cuál es la probabilidad de que haya salido de la urna A?

c) ¿Son independientes los sucesos "extraer bola roja" y "la bola procede de la urna A"?

Solución:

Sea A se extrae de la urna A, B se extrae de la urna B, V bola verde y R bola roja. Sea X el número que ha salido en el dado: $P(A) = P(X < 3) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ y $P(B) = \dfrac{2}{3}$

a) $P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) = \dfrac{6}{14} \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{9} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{97}{189} \simeq 0,5132$



b) $P(A|V) = \dfrac{P(V|A)P(A)}{P(V)} = \dfrac{8/14 \cdot 1/3}{1 - 97/189} = \dfrac{9}{23} = 0,3913$

c) Tenemos $P(A) = \dfrac{1}{3}$ y $P(R) = \dfrac{97}{189} \Longrightarrow$
$P(A) \cdot P(R) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{97}{189} = \dfrac{97}{567} \simeq 0,1711$
$P(A \cap R) = P(R|A)P(A) = \dfrac{6}{14} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{7} \simeq 0,1428$
Luego $P(A \cap R) \neq P(A) \cdot P(R) \Longrightarrow A$ y R no son independientes.

Problema 10.2.6 (3,33 puntos) El salario (en €) de los trabajadores de una empresa se distribuye normalmente con desviación típica $\sigma = 300$€. Se preguntó a 36 trabajadores elegidos al azar, y se establece que el salario medio de los trabajadores de la empresa oscila entre 1552€ e 1748€.

a) ¿Cuál ha sido el salario medio de los trabajadores de la muestra? ¿Con qué nivel de confianza se ha establecido el intervalo anterior?

b) Si el salario medio de los trabajadores de la empresa es $\mu = 1650$€, ¿cuál es la probabilidad de que el salario medio de muestras de 36 trabajadores sea superior a 1590€?

Solución:

a) $2E = 1748 - 1552 = 196 \Longrightarrow E = 98$ y $\overline{X} = \dfrac{1748 + 1552}{2} = 1650$

$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 98 = Z_{\alpha/2}\dfrac{300}{\sqrt{36}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$P(Z \leq 1,96) = 0,975 = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow 1 - \alpha = 0,95 \Longrightarrow NC = 95\,\%$

b) $\overline{X} \overset{N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}{\approx} N(1650; 50)$

$P(\overline{X} > 1590) = P\left(Z > \dfrac{1590 - 1650}{50}\right) = P(Z > -1,2) = P(Z < 1,2) = 0,8849$

Capítulo 11

Isalas Baleares

11.1. Ordinaria

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4.
Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.
Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

Problema 11.1.1 (10 puntos) Queremos contratar una empresa de gestión de entre las siguientes:

- ☛ La empresa A nos cobra 150€ de coste base, y adicionalmente 5€ por cada cliente y 3€ por cada factura que emite.
- ☛ La empresa B nos cobra 300€ de coste base, 10€ por cada cliente y no cobra por emitir facturas.
- ☛ La empresa C nos cobra 100€ de coste base, no cobra en función del número de clientes, pero cobra 5€ por cada factura que emite.

a) (3 puntos) Si el año pasado tuvimos 50 clientes y, en total, emitimos 180 facturas, ¿qué empresa nos hubiese costado menos contratar?
De cara al año que viene, tenemos una previsión de x clientes e y facturas. Con esta previsión, la empresa A nos costaría 1050€ y la empresa B nos costaría 900€.

b) (5 puntos) Calcula el número de clientes x y el número de facturas y previstos.

c) (2 puntos) Con x clientes e y facturas, ¿cuánto nos costaría la empresa C?

Solución:

a) El coste de la empresa A sería: $150 + 50 \cdot 5 + 180 \cdot 3 = 940$€
El coste de la empresa B sería: $300 + 50 \cdot 10 + 180 \cdot 0 = 800$€
El coste de la empresa C sería: $100 + 50 \cdot 0 + 180 \cdot 5 = 1000$€
El menor coste es el de la empresa B con 800€.

b) $\left\{\begin{array}{l} 150+5x+3y=1050 \\ 300+10x+0y=900 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 5x+3y=900 \\ x=60 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=60 \text{ clientes} \\ y=200 \text{ facturas} \end{array}\right.$

c) El coste de la empresa C sería: $100+60\cdot 0+200\cdot 5=1100$€.

Problema 11.1.2 (10 puntos) Un camión transporta una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen, y como máximo un peso de 18 toneladas. Puede transportar:

- Arena, que pesa 1,6 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 80€ por metro cúbico.
- Gravilla, que pesa 1,8 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 100€ por metro cúbico.
- Ceniza, que pesa 0,5 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 25€ por metro cúbico.

Nos interesa calcular el precio más alto que podrá facturar en un viaje. Para hacerlo, se pide:

a) (4 puntos) Plantea la maximización de este precio como un problema de programación lineal en dos variables. (4 pt)

b) (4 puntos) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 pt)

c) (2 puntos) Calcula el número de toneladas de cada material que se tienen que transportar para alcanzar el precio máximo, y determina también dicho precio máximo. (2 pt)

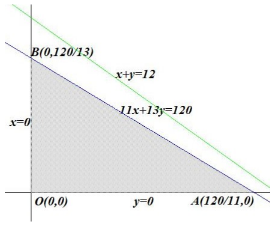
Solución:
Sean x m^3 de arena, y m^3 de gravilla y $12-x-y$ m^3 de ceniza.

	Peso	factura
Tm arena	$1,6$	80
Tm gravilla	$1,8$	100
Tm ceniza	$0,5$	25
	≤ 18	

Tenemos: $1,6x+1,8y+0,5(12-x-y)\leq 18 \Longrightarrow 11x+13y\leq 120$ y $12-x-y\geq 0 \Longrightarrow x+y\leq 12$

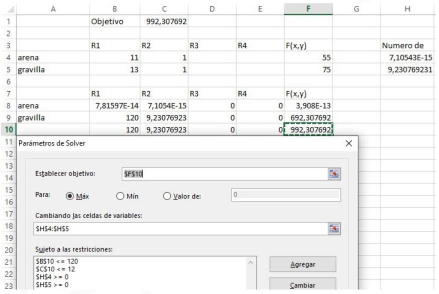
a) La función objetivo es:
$f(x,y) = 80x + 100y + 25(12 - x - y) = 55x + 75y + 300$
La región factible es:

$$\begin{cases} 11x + 13y \le 120 \\ x + y \le 12 \text{ no relevante} \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



b) Los vértices son: $O(0,0)$, $A\left(\frac{120}{11}, 0\right)$ y $B\left(0, \frac{120}{13}\right)$.

Solución por solver :



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Objetivo	992,307692					
2								
3		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		Numero de
4	arena	11	1			55		7,10543E-15
5	gravilla	13	1			75		9,230769231
6								
7		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		
8	arena	7,81597E-14	7,1054E-15	0	0	3,908E-13		
9	gravilla	120	9,23076923	0	0	692,307692		
10		120	9,23076923	0	0	992,307692		

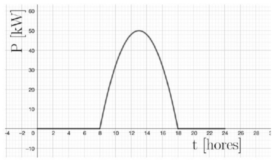
c) La función objetivo es:
$f(x,y) = 55x + 75y + 300$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f\left(\frac{120}{11}, 0\right) = 900 \\ f\left(0, \frac{120}{13}\right) = 992,31 \text{ Máximo} \end{cases}$$

Para obtener el máximo beneficio de 992,31€ tiene que facturar 0 m^3 de arena, $\frac{120}{13} \simeq 9,231$ m^3 de gravilla y $12 - \left(0 + \frac{120}{13}\right) = \frac{120}{13} = \frac{36}{13} \simeq 2,769$ m^3 de ceniza. En toneladas serían 0 Tm de arena, $\frac{120}{13} \cdot 1,8 = 16,615$ Tm de gravilla y $\frac{36}{13} \cdot 0,5 = 1,385$ Tm de ceniza.

Problema 11.1.3 (10 puntos) La potencia generada por una placa solar, P (medida en kW), depende del tiempo transcurrido, t (medido en horas), según la siguiente expresión:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le t < 8 \\ -2t^2 + 52t + c & \text{si} \quad 8 \le t < 18 \\ 0 & \text{si} \quad 18 \le t \le 24 \end{cases}$$



Donde c es un parámetro real.

a) (3 puntos) Teniendo en cuenta que la función es continua, ¿cuál es el valor del parámetro c?

b) (3 puntos) Teniendo en cuenta que el valor máximo se alcanza a las 13 horas, calcula con la expresión dada cuál es la potencia en ese momento.

c) (4 puntos) ¿En qué intervalos la función es creciente? ¿En qué intervalos es decreciente?

Solución:

a) La función es continua en las tres ramas, falta analizar en $t = 8$ y en $t = 18$.

☛ Estudiamos la continuidad en $t = 8$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t\longrightarrow 8^-} (0) = 0 \\ \lim\limits_{t\longrightarrow 8^+} \left(-2t^2 + 52t + c\right) = 288 + c \\ f(8) = 288 + c \end{array}\right. \Longrightarrow 288 + c = 0 \Longrightarrow c = -288$$

☛ Estudiamos la continuidad en $t = 18$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t\longrightarrow 18^-} \left(-2t^2 + 52t + c\right) = 288 + c \\ \lim\limits_{t\longrightarrow 18^+} (0) = 0 \\ f(18) = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow 288 + c = 0 \Longrightarrow c = -288$$

La función es continua cuando $c = -288$

b) $P(13) = 50$ Kw.

c) $P'(t) = -4t + 52 = 0 \Longrightarrow t = 13$

	$(0,8)$	$(8,13)$	$(13,18)$	$(18,24)$
$P'(t)$	0	$+$	$-$	0
$P(t)$		creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	

La potencia generada por la placa crece en en el intervalo horario $(8,13)$ y decrece en el $(13,18)$ con un máximo relativo en la hora 13 con 50 kw. En el intervalo $[0,8)\cup(18,24]$ la función es constante.

Problema 11.1.4 (10 puntos) Consideremos el peso de un adulto, p (en kg), y su metabolismo basal, m (en vatios). Un investigador proporciona el modelo siguiente:

$$p(m) = 0,1 \cdot m^{1,5}, \quad m \in (0, +\infty)$$

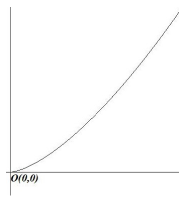
a) (7 puntos) Haz un gráfico esquemático de la función $p(m)$, indicando el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales.

b) (3 puntos) Encuentra la función que da el metabolismo basal en función del peso, $m(p)$ (es decir, aísla la variable m).

Solución:

a) Tenemos:

$\text{Dom}(p) = (0,\infty)$, $p'(m) = \dfrac{3\sqrt{m}}{20} = 0 \Longrightarrow m = 0 \notin (0,\infty) \Longrightarrow$ la función no tiene extremos y $p'(m) > 0 \Longrightarrow$ la función es siempre creciente. En los bordes del intervalo tenemos:
$\lim\limits_{m\to 0^+} 0,1 \cdot m^{1,5} = 0$ y $\lim\limits_{m\to +\infty} 0,1 \cdot m^{1,5} = +\infty$



b) $p = 0,1 \cdot m^{1,5} \Longrightarrow \sqrt{m^3} = \dfrac{p}{0,1} = 10p \Longrightarrow m^3 = 100p^2 \Longrightarrow m = \sqrt[3]{100p^2}$

$$m(p) = \sqrt[3]{100p^2} \quad p \in (0, +\infty)$$

Problema 11.1.5 (10 puntos) Considera las funciones:

$$f(x) = (x + 2)^3, \quad g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$$

a) (4 puntos) Justifica, calculando, que $f'(x) = g'(x)$.

b) (3 puntos) ¿Es cierto que $f(x) = g(x)$?.

c) (3 puntos) Calcula $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Solución:

a) $f'(x) = 3(x + 2)^2$ y $g'(x) = 3x^2 + 12x + 12$
$3(x + 2)^2 - (3x^2 + 12x + 12) = 0 \Longrightarrow f'(x) = g'(x)$

b) $(x + 2)^3 - (x^3 + 6x^2 + 12x) = 8 \Longrightarrow f(x) \neq g(x)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+2)^3}{x^3 + 6x^2 + 12x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \overset{f'(x)=g'(x)}{=} 1$

Problema 11.1.6 (10 puntos) Manel escoge al azar dos cifras entre 0 y 9, que pueden estar repetidas.

a) (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas cifras sean múltiplo de tres?

b) (4 puntos) El producto de las dos cifras es múltiplo de tres si lo es al menos una de ellas. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las dos cifras sea múltiplo de tres?
Ahora, Pep te da su número de teléfono, que contiene nueve cifras también entre 0 y 9, posiblemente repetidas, y que supondremos que son cifras escogidas al azar.

c) (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las nueve cifras sea múltiplo de tres?

Solución:
Sean $M3$ múltiplo de 3 y $\overline{M3}$ no es múltiplo de 3

a) $P(M3) = \dfrac{4}{10} = 0,4$ y $P(M3 \cap M3) = \dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{4}{10} = 0,4^2 = 0,16$

b) $P(M3 \cup M3) = P(M3) + P(M3) - P(M3 \cap M3) = 0,4 + 0,4 - 0,16 = 0,64$

c) $P(\text{producto múltiplo 3}) = 1 - P(\overline{M3}\cap\overline{M3}\cap\overline{M3}\cap\overline{M3}\cap\overline{M3}\cap\overline{M3}\cap\overline{M3}\cap\overline{M3}\cap\overline{M3}\cap\overline{M3}) =$
$1 - 0,6^{10} = 0,994$

Problema 11.1.7 (10 puntos) De un total de $n = 80$ alumnos, el 80 % de los alumnos han aprobado un examen de matemáticas, y el 75 % han aprobado un examen de física. Además, de los que han suspendido el examen de matemáticas, solo un 50 % ha aprobado el de física.

a) (4 puntos) De los que han suspendido el examen de física, ¿Cuántos han aprobado el de matemáticas?

b) (3 puntos) ¿Cuántos alumnos han aprobado alguno de los dos exámenes?

c) (3 puntos) ¿Aprobar el examen de física y aprobar el examen de matemáticas son sucesos independientes?

Solución:

Sean AM aprueba matemáticas, $\overline{AM}$ suspende matemáticas, AF aprueba física y $\overline{AF}$ suspende física.

$AM = 80 \cdot P(AM) = 0,8 \cdot 80 = 64$, $\overline{AM} = 80 - 64 = 16$, $AF = 80 \cdot P(AF) = 80 \cdot 0,75 = 60$, $\overline{AF} = 80 - 60 = 20$ y $P(AF|\overline{AM}) = \dfrac{P(AF \cap \overline{AM})}{P(\overline{AM})} = 0,5 \Longrightarrow AF \cap \overline{AM} = 16 \cdot 0,5 = 8$

	AF	$\overline{AF}$	Total
AM			64
$\overline{AM}$	8		16
Total	60	20	80

$\Longrightarrow$

	AF	$\overline{AF}$	Total
AM	52	12	64
$\overline{AM}$	8	8	16
Total	60	20	80

a) $AM \cap \overline{AF} = 12$

b) Han aprobado algún examen $80 - \overline{AM} \cap \overline{AF} = 80 - 8 = 72$

c) $P(AM) = 0,8$, $P(AF) = 0,75$ y $P(AM \cap AF) = \dfrac{52}{80} = 0,65$
$P(AM) \cdot P(AF) = 0,8 \cdot 0,75 = 0,6 \neq P(AM \cap AF) \Longrightarrow AM$ y AF no son independientes.

Problema 11.1.8 (10 puntos) Para estudiar la vida de las tortugas marinas, hemos recopilado la edad que alcanzaron algunos ejemplares que murieron por causas naturales, y hemos obtenido (en años):

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
55	62	69	70	72	77	94	103

$\overline{x}$
75,25

Suponiendo que estos datos siguen una distribución normal, y que su desviación típica poblacional es de $\sigma = 20$ años.

a) (4 puntos) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional con el 90 % de confianza. Supongamos ahora, además, que la media poblacional es de $\mu = 75,25$.

b) (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una tortuga marina supere los 80 años de vida?

c) (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una tortuga marina supere los 80 años de vida, pero no los 100 años de vida?

Solución:

$$N(\mu, 20)$$

a) $NC = 90\,\% = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,10 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{20}{\sqrt{8}} = 11,6319$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (75,25 - 11,6319; 75,25 + 11,6319) = (63,6181; 86,8819)$$

b) $N(75,25;20)$:
$P(X>80)=P\left(Z>\dfrac{80-75,25}{20}\right)=P(Z>0,24)=1-P(Z<0,24)=$
$1-0,5948=0,4052$

c) $P(80<X<100)=P\left(\dfrac{80-75,25}{20}<Z<\dfrac{100-75,25}{20}\right)=P(0,24<Z<1,24)=$
$P(Z<1,24)-P(Z<0,24)=0,8925-0,5948=0,2977$

11.2. Extraordinaria

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4.
Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.
Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

Problema 11.2.1 (10 puntos) Queremos medir el consumo de un coche eléctrico que tiene una batería de 50 kWh y que tiene un consumo diferente si lo conducimos por autopista, por ciudad o por carretera de montaña. Haremos tres salidas, cada una empezando con la batería completamente cargada, y podremos recorrer las siguientes distancias hasta terminar la batería:

- ☛ Primer día: 180 km por autopista y 60 km por ciudad.
- ☛ Segundo día: 200 km por ciudad y 80 km por carretera de montaña.
- ☛ Tercer día: 150 km por autopista y 80 km por carretera de montaña.

a) (7 puntos) Calcula el consumo del coche para cada uno de los tipos de carreteras.

b) (3 puntos) Si únicamente lo utilizamos para conducir por ciudad, cuál sería la cantidad total de km que podremos recorrer con una carga completa de la batería?

Solución:
Sean x el consumo en KWh/km en autopista, y el consumo en KWh/km en ciudad y z el consumo en KWh/km en carretera de montaña.

a)

$$\begin{cases} 180x+60y=50\\ 200y+80z=50\\ 150x+80z=50\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 18x+6y=5\\ 20y+8z=5\\ 15x+8z=5\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{9}\simeq 0,2222\\ y=\dfrac{1}{6}\simeq 0,1667\\ z=\dfrac{5}{24}\simeq 0,2083\end{cases}$$

Resolvemos el sistema por Gauss:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 18 & 6 & 0 & 5\\ 0 & 20 & 8 & 5\\ 15 & 0 & 8 & 5\end{array}\right)=\left[\begin{array}{l} F_1\\ F_2\\ 18F_3-15F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 18 & 6 & 0 & 5\\ 0 & 20 & 8 & 5\\ 0 & -90 & 144 & 15\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3+9F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 18 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 20 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 360 & 75 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = \dfrac{75}{360} = \dfrac{5}{24} \simeq 0,2083 \\ 20y + \dfrac{40}{24} = 5 \Longrightarrow y = \dfrac{1}{6} \simeq 0,1667 \\ 18x + 1 = 5 \Longrightarrow x = \dfrac{2}{9} \simeq 0,2222 \end{array}\right.$$

b) $0 \cdot \dfrac{2}{9} + t \cdot \dfrac{1}{6} + 0 \cdot \dfrac{5}{24} = 50 \Longrightarrow t = 300$ km.

Problema 11.2.2 (10 puntos) Un camión necesita transportar una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen, y de exactamente 18 toneladas de peso. Puede transportar:

- ☛ Arena, que pesa 1,6 toneladas por metro cúbico.
- ☛ Grava, que pesa 1,8 toneladas por metro cúbico.
- ☛ Ceniza, que pesa 0,5 toneladas por metro cúbico.

a) (5 puntos) Si queremos llenar el camión solo con arena y ceniza, calcula qué cantidad de cada material que nos permite alcanzar simultáneamente la máxima capacidad de volumen y la máxima capacidad de peso.

b) (5 puntos) Si queremos llenar el camión solo con arena y grava, no podemos alcanzar simultáneamente la máxima capacidad de volumen y la máxima capacidad de peso. Justifica por qué no.

Solución:
Sean x los metros cúbicos de arena, y los metros cúbicos de grava y z los metros cúbicos de ceniza.

a)

$$\left\{\begin{array}{l} x + z = 12 \\ 1,6x + 0,5z = 18 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + z = 12 \\ 16x + 5z = 180 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{120}{11} \simeq 10,9091 \\ z = \dfrac{12}{11} \simeq 1,0909 \end{array}\right.$$

Sistema compatible determinado con soluciones positivas.

b)

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 12 \\ 1,6x + 1,8y = 18 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y = 12 \\ 8x + 9y = 90 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 18 \\ y = -6 \end{array}\right.$$

Sistema compatible determinado, pero los metros cúbicos de grava salen negativos, luego la única solución posible no es válida.

Problema 11.2.3 (10 puntos) En una pastelería quieren promocionar sus productos con dos ofertas:

- ☛ Oferta A: 2 ensaimadas, 2 cocas de patata, 4 barras de chocolate, a 4€.
- ☛ Oferta B: 6 ensaimadas, 3 cocas de patata, 3 barras de chocolate, a 8€.

Disponen de 120 ensaimadas, 60 cocas de patata y 72 barras de chocolate. Suponiendo que todas las ofertas se venderán completamente, nos interesa calcular cuántas ofertas A y cuántas ofertas B deberían ofrecer para maximizar el beneficio.

a) (3 puntos) Plantea la maximización de este beneficio como un problema de programación lineal con dos variables.

b) (5 puntos) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c) (2 puntos) ¿Cuántas ofertas A y cuántas ofertas B deberían ofrecer para maximizar el beneficio? ¿Cuál sería el beneficio en ese caso?

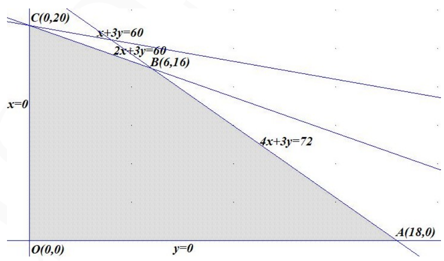
Solución:
Sean x número de ofertas A e y número de ofertas B.

	ensaimadas	cocas	barras	ingresos
A	2	2	4	4
B	6	3	3	8
	≤ 120	≤ 60	≤ 72	

a) La región factible es:

$$\begin{cases} 2x+6y \leq 120 \\ 2x+3y \leq 60 \\ 4x+3y \leq 72 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x+3y \leq 60 \\ 2x+3y \leq 60 \\ 4x+3y \leq 72 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



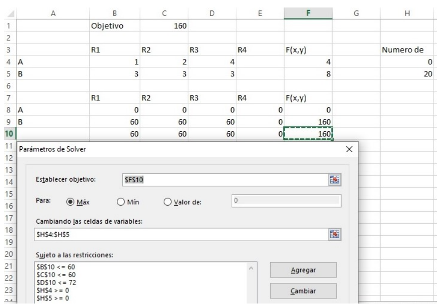
b) Los vértices son: $O(0,0)$, $A(18,0)$, $B(6,16)$ y $C(0,20)$.

c) La función objetivo es:

Solución por solver :

$$f(x,y) = 4x + 8y$$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(18,0) = 72 \\ f(6,16) = 152 \\ f(0,20) = 160 \;\; \text{Máximo} \end{cases}$$



d) La máxima venta es de 160€ y se llega vendiendo 0 ofertas A y 20 ofertas B.

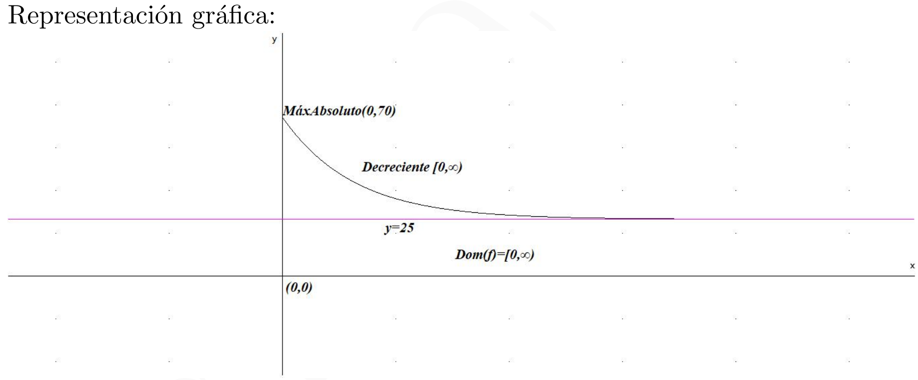
Problema 11.2.4 (10 puntos) La temperatura de un objeto, t (en grados centígrados), cambia a medida que pasa el tiempo, s (en segundos), según el siguiente modelo:
$t(s) = 45 \cdot e^{-0{,}08s} + 25 = 45 \cdot 0{,}923^s + 25 \quad$ para $s \geq 0$
(Te proprocionamos dos expresiones algebraicas válidas y equivalentes, puedes utilizar la que prefieras.)

a) (7 puntos) Haz una gráfica esquemática de la función $t(s)$. Calcula o justifica, e indica sobre la gráfica: el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales y globales.

b) (3 puntos) ¿A qué tenderá la temperatura del objeto cuando haya pasado mucho tiempo?

Solución:

a)
- ☛ $\text{Dom}(t) = [0, \infty)$
- ☛ La función corta al eje de ordenadas en el punto $(0, 70)$ y al eje de abscisas en $45 \cdot e^{-0,08s} + 25 = 0 \Longrightarrow$ no tiene solución, luego no hay punto de corte con este eje coordenado.
- ☛ $t'(s) = -3,6e^{-0,08s} \neq 0 \Longrightarrow$ no hay extremos relativos, como $t'(s) < 0 \ \forall s \in [0, \infty) \Longrightarrow$ t es decreciente en todo el dominio de la función.
  Como $t(0) = 70$ hay un máximo absoluto en $s = 0$ y es de 70 grados centígrados. No habría mínimo absoluto, la función decrece infinítamente sin llegar a un valor exacto.
- ☛ Representación gráfica:



b) $\lim\limits_{s\to\infty} t(s) = \lim\limits_{s\to\infty} (45 \cdot e^{-0,08s} + 25) = 25 \Longrightarrow$ la temperatura tiende a estabilizarse en 25 grados cetígrados cuando pasa mucho tiempo.

Problema 11.2.5 (10 puntos) Una maleta rectangular tiene tres medidas (anchura, altura y profundidad), y su volumen es el producto de las tres medidas. Queremos diseñar una maleta rectangular de 30 cm de profundidad, y tal que la suma de la anchura, altura y profundidad sea exactamente 110 cm. Cuál es el volumen máximo que puede tener esta maleta?

Solución:

sean x cm de ancho, y cm de alto y z cm de profundidad.
Tenemos: $x + y + z = 110$, $z = 30$ y hay que optimizar $V(x, y, z) = xyz$.
$x + y + 30 = 110 \Longrightarrow x + y = 80 \Longrightarrow y = 80 - x$
$V(x) = 30x(80 - x) = 2400x - 30x^2 \Longrightarrow V'(x) = 2400 - 60x = 0 \Longrightarrow x = 40$ cm
$V''(x) = -60 \Longrightarrow V''(40) = -60 < 0 \Longrightarrow x = 40$ es un máximo relativo. Las dimensiones serían $x = 40$ cm, $y = 80 - 40 = 40$ cm y $z = 30$ cm.
El volumen de la maleta sería: $V(40) = 48000$ cm^3

Problema 11.2.6 (10 puntos) Tiramos dos dados no trucados. Considera los siguientes sucesos:

- ☛ A: En el primer dado ha salido un 1.
- ☛ B: En el segundo dado ha salido un 1.

- C: La suma de los valores de ambos dados es 3.

a) (3 puntos) Calcula $P(A)$

b) (3 puntos) Calcula $P(A \cup B)$

c) (4 puntos) ¿Son C y $A \cup B$ sucesos independientes?

Solución:

a) $P(A) = \dfrac{1}{6}$

b) $P(B) = \dfrac{1}{6}$ y $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{36}$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{36} = \dfrac{11}{36} = 0,3056$

c) $P(C) = P(1;2) + P(2;1) = \dfrac{1}{36} + \dfrac{1}{36} = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$
$P(A \cup B) = \dfrac{11}{36}$
$P(C) \cdot P(A \cup B) = \dfrac{1}{18} \cdot \dfrac{11}{36} = \dfrac{11}{648}$ y $P(C \cap (A \cup B)) = P(C) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$
$P(C)P(A \cup B) = \dfrac{11}{648} \neq P(C \cap (A \cup B)) = \dfrac{1}{18} \Longrightarrow C$ y $A \cup B$ no son independientes.

Problema 11.2.7 (10 puntos) En una población:

- las alturas de los hombres siguen una distribución normal de media 1,76 metros y desviación típica 0,12 metros; y
- las alturas de las mujeres siguen una distribución normal de media 1,62 metros y desviación típica 0,11 metros.

Se pide:

a) (3 puntos) Escogemos a un hombre al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que su altura sea mayor o igual que 1,76 metros?

b) (4 puntos) Escogemos una mujer al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que su altura sea mayor o igual que 1,76 metros?

c) (3 puntos) ¿Qué es más probable, que un hombre tenga una altura inferior a 1,76 metros, o que una mujer tenga una altura inferior a 1,76 metros?

Solución:
Sean X la variable aleatoria hombres $X \approx N(1,76; 0,12)$ e Y la variable aleatoria mujeres $Y \approx N(1,62; 0,11)$

a) $P(X \geq 1,76) = P\left(Z \geq \dfrac{1,76 - 1,76}{0,12}\right) = P(Z \geq 0) = 1 - P(Z \leq 0) = 1 - 0,5 = 0,5$

b) $P(Y \geq 1,76) = P\left(Z \geq \dfrac{1,76 - 1,62}{0,11}\right) = P(Z \geq 1,27) = 1 - P(Z \leq 1,27) =$
$1 - 0,8980 = 0,102$

c) Tenemos $P(X < 1,76) = 1 - P(X \geq 1,76) = 1 - 0,5 = 0,5$ y
$P(Y < 1,76) = 1 - P(Y \geq 1,76) = 1 - 0,102 = 0,8980$,
luego es más probable que una mujer mida menos de 1,76 metros que un hombre tenga una altura inferior a 1,76 metros.

Problema 11.2.8 (10 puntos) Echamos una moneda al aire 100 veces, y ha salido 46 veces cara y 54 veces cruz. Un estudiante cree que la moneda no está trucada y propone aproximar el número de caras que salen en 100 tiradas como una variable aleatoria con distribución normal $N(\mu = 50, \sigma = 5)$

a) (3 puntos) Según la distribución propuesta, ¿cuál habría sido la probabilidad de obtener 60 caras o más?

b) (4 puntos) Calcula el intervalo de confianza que contenga el 90 % de los valores más probables que aparecen en la distribución propuesta. ¿Es razonable la hipótesis de que la moneda no está trucada?

Ahora, echaremos otra moneda al aire 100 veces, y el número de caras que obtendremos también seguirá una distribución normal $N(\mu = 50, \sigma = 5)$. Sospecharemos que la moneda está trucada si el número de caras no está contenido en el intervalo calculado en el apartado anterior.

c) (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sospechemos que la moneda está trucada?

Solución:

$$N(50; 5)$$

a) $P(X \geq 60) = P\left(Z \geq \dfrac{60 - 50}{5}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

b) $NC = 90\,\% = 0,9 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,055$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$$

$\mu = 50$ y $\sigma = 5$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sigma = 1,645 \cdot 5 = 8,225$$

$$IC = (\mu - E, \mu + E) = (50 - 8,225; 50 + 8,225) = (41,775; 58,225)$$

Como 46 (número de caras) está dentro del intervalo de confianza es razonable pensar que la moneda no está trucada.

c) Por el apartado anterior la probabilidad de que no esté trucada sería del 90 %, por tanto, la probabilidad de que sí lo esté sería del 10 %.

Capítulo 12

Islas Canarias

12.1. Ordinaria

Instrucciones: Resolver un máximo de 4 preguntas, eligiendo UNA entre A1 y B1, UNA entre A2 y B2, UNA entre A3 y B3 y UNA entre A4 y B4. Cada pregunta se evaluará entre 0 y 2,5 puntos.

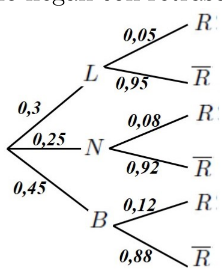
Problema 12.1.1 A1 (2,5 puntos) En un aeropuerto operan tres líneas aéreas: LAVOLONA, NUBERIA y BRINKEN. El 30 % de las llegadas diarias corresponden a la compañía LAVOLONA, el 25 % a NUBERIA y el resto a BRINKEN. La proporción de vuelos que llegan con retraso es del 5 % para los de LAVOLONA, el 8 % para los de NUBERIA y el 12 % para los de BRINKEN.

a) Dibujar el correspondiente árbol de probabilidades.

b) Se ha ido a recoger un pasajero al aeropuerto y el avión llega con retraso. ¿Cuál es la probabilidad de que el avión pertenezca a la compañía NUBERIA?

c) Suponiendo que los retrasos se producen independientemente unos de otros, si los dos próximos aterrizajes corresponden a sendos aviones de la compañía BRINKEN, ¿cuál es la probabilidad de que alguno de ellos llegue con retraso?

Solución:
Sean L LAVOLONA, N NUBERIA, B BRINKEN, R llegan con retraso y $\overline{R}$ no llegan con retraso .



a) El árbol de probabilidad a la derecha.

b) $P(R) = P(R|L)P(L) + P(R|N)P(N) + P(R|B)P(B) =$
$= 0,05 \cdot 0,3 + 0,08 \cdot 0,25 + 0,12 \cdot 0,45 = 0,089$
$P(N|R) = \dfrac{P(R|N)P(N)}{P(R)} = \dfrac{0,08 \cdot 0,25}{0,089} = 0,2247$

c) $P(\text{alguno de los dos retrasado}) = 1 - P(\text{ninguno de los dos retrasado}) =$
$1 - P(\overline{R}|B)^2 = 1 - 0,88^2 = 0,2256$

Problema 12.1.2 B1 (2,5 puntos) Según un determinado estudio, la probabilidad de que un cliente realice una compra, en una tienda de un centro comercial, es del 10 %. En una muestra aleatoria de 500 clientes, calcular la probabilidad de que:

a) Entre 40 y 60 clientes realicen una compra.

b) Al menos, 435 clientes no hayan comprado.

c) Al menos 45 clientes realicen una compra.

Solución:

Se trata de una $B(500; 0,1)$ como $n > 10$, $np = 50 > 5$ y $nq = 450 > 5$ podemos aproximar esta binomial por una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(50; 6,71)$

a) $P(40 \leq X \leq 60) = P\left(\dfrac{39,5-50}{6,71} \leq Z \leq \dfrac{60,5-50}{6,71}\right) = P(-1,56 \leq Z \leq 1,56) =$ $P(Z \leq 1,56) - P(Z \leq -1,56) = P(Z \leq 1,56) - (1 - P(Z \leq 1,56)) =$ $2P(Z \leq 1,56) - 1 = 2 \cdot 0,9406 - 1 = 0,8812$

b) $P($ al menos 435 no han comprado$) = P($ han comprado menos de 65$) = P(X < 65) =$ $P\left(Z \leq \dfrac{64,5-50}{6,71}\right) = P(Z \leq 2,16) = 0,9846$

c) $P(X \geq 45) = P\left(Z \geq \dfrac{44,5-50}{6,71}\right) = P(Z \geq -0,82) = P(Z \leq 0,82) = 0,7939$

Problema 12.1.3 **A2** (2,5 puntos) En una muestra de 150 estudiantes, de un determinado grado universitario, 90 utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.

a) Determinar la proporción muestral de los estudiantes de ese grado que no utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.

b) Determinar un intervalo de confianza al 99 % para la proporción de estudiantes de ese grado que utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.

c) Si se mantiene la proporción muestral del apartado a), para una muestra de 450 estudiantes del referido grado, ¿cuál es el intervalo de confianza al 97 % para la proporción de estudiantes que no utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.

Solución:

a) $\hat{p} = \dfrac{90}{150} = 0,6 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,4.$

b) $NC = 99\,\% = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$ $P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} =$ $0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$
$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,575\sqrt{\dfrac{0,6 \cdot 0,4}{150}} = 0,103$
$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,6 - 0,103; 0,6 + 0,103) = (0,497; 0,703) = (49,7\,\%; 70,3\,\%)$

c) $n = 450$ y $NC = 97\,\% = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,985 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,17$
$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,17\sqrt{\dfrac{0,6 \cdot 0,4}{450}} = 0,05$
$IC = (\hat{q} - E, \hat{q} + E) = (0,4 - 0,05; 0,4 + 0,05) = (0,35; 0,45) = (35\,\%; 45\,\%)$

Problema 12.1.4 B2 (2,5 puntos) En una encuesta se pregunta a 10000 jóvenes sobre el número de botellines de cerveza que consumen a la semana, resultando una media de 5 botellines y una desviación típica de 2 botellines. Suponiendo que esta variable es normal:

a) Determinar un intervalo de confianza al 80 % para el número medio de botellines consumidos a la semana.

b) Si, para estimar el número medio de botellines de cerveza que consumen a la semana, se admite un error máximo de 0,25 botellines, con un nivel de confianza igual a 0,9 y manteniendo la desviación típica inicial, ¿a cuántos jóvenes en necesario entrevistar?

c) Si la encuesta se realizara a 8500 jóvenes y se obtuviera la misma media de 5 botellines y, con una confianza del 82 %, se obtuviera el mismo intervalo del apartado a), ¿cuál debería ser la desviación típica?

Solución:

a) $\overline{X} = 5$, $n = 10000$, $\sigma = 2$ y $NC = 0,8$
$NC = 80\,\% = 0,80 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,20 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,1$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,9 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,285$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,285\dfrac{2}{\sqrt{10000}} = 0,0257$
$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (5 - 0,0257; 5 + 0,0257) = (4,9743; 5,0257)$

b) $NC = 90\,\% = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,10 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,25 = 1,645\dfrac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 173,1856 \Longrightarrow n = 174.$

c) $n = 8500$, $\overline{X} = 5$,$\sigma = 2$ y $NC = 0,82$
$NC = 82\,\% = 0,82 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,18 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,09$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,91 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,34$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,34\dfrac{\sigma}{\sqrt{8500}} = 0,0257 \Longrightarrow \sigma = 1,768226063$

Problema 12.1.5 A3 (2,5 puntos) Una empresa, que se dedica a la venta de material tecnológico, tiene unos beneficios (en miles de euros) dados por la función:

$$B(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{2} & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ x^2 - 5x + 9 & \text{si} \quad 2 \le x \le 4 \\ 5 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

donde x es el tiempo en años.

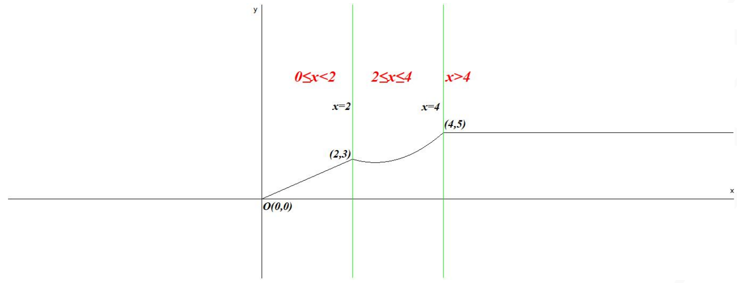
a) Hacer una gráfica de $B(x)$ ¿Es esta función continua? ¿Es derivable?

b) ¿Cuándo aumentan y cuándo disminuyen dichos beneficios?

c) ¿En qué año o años el beneficio es igual a 3000 euros?

Solución:

a) ☛ Haciendo una tabla de valores tenemos la gráfica:



☛ Continuidad en $[0,\infty)$. Las tres ramas son continuas y hay que analizar la continuidad en $x=2$ y $x=4$.

- En $x=2$:
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} B(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \left(\dfrac{3x}{2}\right) = 3 \\ \\ \lim\limits_{x\to 2^+} B(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(x^2-5x+9\right) = 3 \\ \\ B(2)=3 \end{array}\right. \Longrightarrow B(x) \text{ es continua en } x=2.$$
- En $x=4$:
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^-} B(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} \left(x^2-5x+9\right) = 5 \\ \\ \lim\limits_{x\to 4^+} B(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} (5) = 5 \\ \\ B(4)=5 \end{array}\right. \Longrightarrow B(x) \text{ es continua en } x=4.$$
- Luego la función es continua en $[0,\infty)$.

☛ Derivabilidad:
$$B'(x) = \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{3}{2} & \text{si} & 0<x<2 \\ \\ 2x-5 & \text{si} & 2<x<4 \\ 0 & \text{si} & x>4 \end{array}\right.$$

Las ramas son derivables hay que estudiar la derivabilidad en $x=2$ y $x=4$.

- En $x=2$:
$$\left\{\begin{array}{l} B'(2^-) = \dfrac{3}{2} \\ \\ B'(2^+) = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow B'(2^-) \neq B'(2^+) \text{ no es derivable en } x=2.$$
- En $x=4$:
$$\left\{\begin{array}{l} B'(4^-) = 3 \\ B'(4^+) = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow B'(4^-) \neq B'(4^+) \text{ no es derivable en } x=4.$$
- La función es derivable en $[0,2)\cup(2,4)\cup(4,\infty)$

b) Tenemos $2x - 5 = 0 \Longrightarrow x = 5/2$ y nos queda:

	$(0,2)$	$\left(2, \dfrac{5}{2}\right)$	$\left(\dfrac{5}{2}, 4\right)$	$(4, \infty)$
$B'(x)$	$+$	$-$	$+$	0
$B(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	constante

La función es decreciente en el intervalo $\left(2, \dfrac{5}{2}\right)$
y creciente en el $[0,2) \cup \left(\dfrac{5}{2}, 4\right)$.
Tiene un mínimo relativo en $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{11}{4}\right)$ y otro absoluto en $(0,0)$.
Tiene un máximo relativo en $(2,3)$ y otro absoluto en $(4,5)$.
En conclusión:
Los beneficios crecen hasta el año 2 donde alcanza un beneficio de $\dfrac{6000}{2} = 3000$€. A partir de ese momento los beneficios decrecen hasta el año $\dfrac{5}{2}$ con un beneficio de $\dfrac{11000}{4} = 2750$€. A partir de ese momento los beneficios crecen hasta el año 4 donde se estabilizan en 5000€.

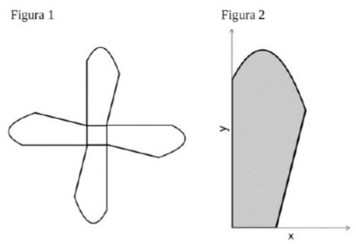
c) $B(x) = 3$:

- Si $0 \le x < 2 \Longrightarrow B(x) = \dfrac{3x}{2} = 3 \Longrightarrow x = 2$ valor que no está en la rama.
- Si $2 \le x \le 4 \Longrightarrow B(x) = x^2 - 5x + 9 = 3 \Longrightarrow x = 2$ y $x = 3$, luego en el año 2 y en el año 3 hay un beneficio de 3000€.
- Si $x > 4 \Longrightarrow B(x) = 5 \neq 3 \Longrightarrow$ no se producirá nunca esta circunstancia.

Problema 12.1.6 B3 (2,5 puntos) Una empresa de juguetes fabrica molinillos de plástico como el que se muestra en la figura 1. Las cuatro aspas del molinillo son iguales. La figura 2 muestra una de estas aspas: por encima está limitada por la parábola $y = -0,24x^2 + 2x + 20$, por la izquierda por el eje de ordenadas, por la derecha por la recta $y = 4x - 24$ y, por debajo, por el eje de abscisas. Las unidades de los ejes se miden en cm.

a) Calcular la superficie total del molinillo (incluyendo el cuadrado central).

b) Cada molinillo se fabrica en plástico, con un coste de fabricación de 1,4 céntimos de euro por cm^2 de superficie, al que se añaden 20 céntimos por el palito que le sirve de soporte. Asimismo, el coste de distribución (transportar los molinillos desde la fábrica a los puntos de venta) es de 24 céntimos por molinillo. ¿A qué precio se debe vender cada molinillo si se desea que el beneficio total obtenido con la venta (precio de venta menos costes de fabricación y distribución) sea un 20 % del precio de venta?



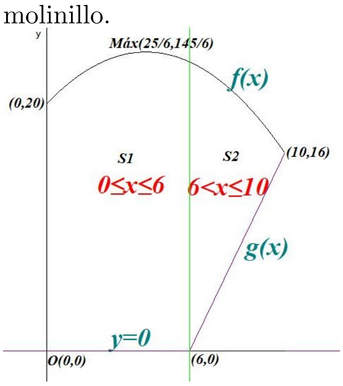
Solución:

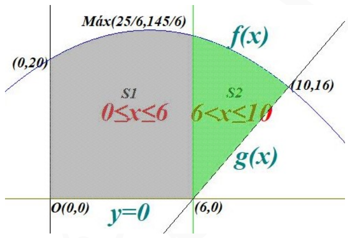
a) Tenemos $f(x) = -0,24x^2 + 2x + 20$ y $g(x) = 4x - 24$

- Buscamos los puntos de corte entre las dos gráficas con $x > 0$:
$f(x) = g(x) \Longrightarrow -0,24x^2 + 2x + 20 = 4x - 24 \Longrightarrow -0,24x^2 - 2x + 44 = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{55}{2}$

(solución no válida) y $x = 10$. Por otro lado $f(0) = 20 \Longrightarrow (0, 20)$ y $g(x) = 4x - 24 = 0 \Longrightarrow x = 6 \Longrightarrow (6, 0)$

También tenemos $f'(x) = -0,48x+2 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{25}{6}$ y $f''(x) = -0,48 \Longrightarrow f''\left(\dfrac{25}{6}\right) = -0,48 \Longrightarrow \left(\dfrac{25}{6}, \dfrac{145}{6}\right)$ es un máximo relativo y con estos datos dibujamos un aspa del molinillo.





- ☛ Tenemos dos áreas:

$$S_1 = \left| \int_0^6 (f(x) - 0)\, dx \right| \text{ y } S_2 = \left| \int_6^{10} (f(x) - g(x))\, dx \right|$$

$$\int_0^6 (f(x) - 0)\, dx = \int_0^6 (-0,24x^2 + 2x + 20)\, dx = -0,08x^3 + x^2 + 20x\Big]_0^6 = 138,72$$

$$\int_6^{10} (f(x) - g(x))\, dx = \int_6^{10} (-0,24x^2 - 2x + 44)\, dx = -0,08x^3 - x^2 + 44x\Big]_6^{10} = 49,28$$

$$S = S_1 + S_2 = 138,72 + 49,28 = 188 \text{ cm}^2$$

- ☛ Área del cuadrado central $6^2 = 36$ cm^2
- ☛ Área total$= 4S + 36 = 188 \cdot 4 + 36 = 788$ cm^2

b) C =Coste del molinillo$= 1,4 \cdot 788 + 20 + 24 = 1147,2$¢ $= 11,472$€

Sea x el precio de venta, el beneficio $B = x - C = 0,2x \Longrightarrow 0,8x = C \Longrightarrow x = \dfrac{C}{0,8} = \dfrac{11,472}{0,8} = 14,34$€

Problema 12.1.7 **A4** (2,5 puntos) Dos modelos de relojes, A y B, se producen en una fábrica en la que hay 12 personas trabajando, cada una de ellas con una jornada laboral de 8 horas diarias. El modelo A se tarda en hacer 3 horas y por él se obtiene un beneficio de 70 euros. El modelo B se tarda en hacer 6 horas y por él se obtiene un beneficio de 160 euros. La producción diaria debe ser como mínimo de 15 relojes, con la condición de que el número de unidades del modelo B sea como máximo la mitad del número de unidades del modelo A.
Para maximizar el beneficio diario:

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal.

b) Representar la región factible.

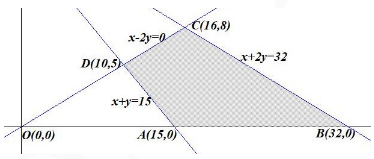
c) ¿Cuántos relojes de cada tipo le interesa producir al día para obtener el máximo beneficio diario? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Solución:
Sean x número de relojes A e y número de relojes B.

	horas	beneficio
A	3	70
B	6	160
	≤ 96	

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x+y\geq 15 \\ 3x+6y\leq 96 \\ y\leq \dfrac{x}{2} \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y\geq 15 \\ x+2y\leq 32 \\ x-2y\geq 0 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

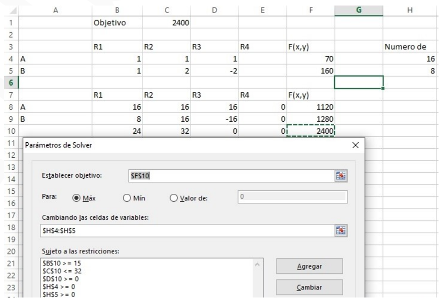


Los vértices son: $A(15,0)$, $B(32,0)$, $C(16,8)$ y $D(10,5)$.

b) La función objetivo es: $f(x,y)=70x+160y$

$$\begin{cases} f(15,0)=1050 \\ f(32,0)=2240 \\ f(16,8)=2400 \ \text{Máximo} \\ f(10,5)=1500 \end{cases}$$

Solución por solver :



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Objetivo	2400					
2								
3		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		Numero de
4	A	1	1	1		70		16
5	B	1	2	-2		160		8
6								
7		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		
8	A	16	16	16	0	1120		
9	B	8	16	-16	0	1280		
10		24	32	0	0	2400		

Parámetros de Solver
Establecer objetivo: $F$10
Para: Máx Mín Valor de: 0
Cambiando las celdas de variables:
$H$4:$H$5
Sujeto a las restricciones:
$B$10 >= 15
$C$10 <= 32
$D$10 >= 0
$H$4 >= 0
$H$5 >= 0
Agregar
Cambiar

c) El máximo beneficio es de 2400€ y se alcanza con la producción de 16 relojes A y 8 relojes B.

Problema 12.1.8 B4 (2,5 puntos) En un barrio viven un total de 875 personas clasificados en tres grupos: niños y jóvenes, adultos y jubilados. La cuarta parte de los adultos es igual al doble de la quinta parte de los niños y jóvenes y por cada 9 jubilados hay 26 del resto.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Explicando los pasos del método usado, resolver el sistema planteado.

c) ¿Cuántas personas hay en cada grupo?

Solución:
Sean x número de niños y jóvenes, y número de adultos y z número de jubilados.

a) $$\begin{cases} x+y+z=875 \\ \dfrac{1}{4}y=\dfrac{2}{5}x \\ 9(x+y)=26z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=875 \\ 8x-5y=0 \\ 9x+9y-26z=0 \end{cases}$$

b)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 875 \\ 8 & -5 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & -26 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 8F_1 \\ F_3 - 9F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 875 \\ 0 & -13 & -8 & -7000 \\ 0 & 0 & -35 & -7875 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible determinado

$$z = \frac{-7875}{-35} = 225, \ -13y - 1800 = -7000 \Longrightarrow y = 400, \ x + 400 + 225 = 875 \Longrightarrow x = 250$$

hay 250 niños y jóvenes, 400 adultos y 225 jubilados.

12.2. Extraordinaria

Instrucciones: Resolver un máximo de 4 preguntas, eligiendo UNA entre A1 y B1, UNA entre A2 y B2, UNA entre A3 y B3 y UNA entre A4 y B4. Cada pregunta se evaluará entre 0 y 2,5 puntos.

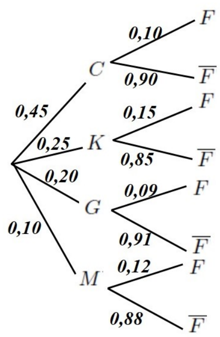
Problema 12.2.1 A1 (2,5 puntos) En un taller de electricidad de vehículos se reparan coches (45 %), camiones (25 %), guaguas (20 %) y motos (resto). El 10 % de los coches, el 15 % de los camiones, el 9 % de las guaguas y el 12 % de las motos vienen al taller por fallos en el sistema de arranque.

a) (0,5 puntos) Construir un diagrama de árbol que describa lo anterior.

b) (1 puntos) Calcular la probabilidad de que se repare en el taller un vehículo que no tenga fallos en el sistema de arranque.

c) (1 puntos) Si se ha reparado en el taller un vehículo que presentaba fallos en el sistema de arranque, ¿cuál es la probabilidad de que sea una moto?

Solución:
Sean C coche, K camión, G guagua, M motos, F fallos en el sistema de arranque y $\overline{F}$ sin fallos en el sistema de arranque.



a) El árbol de probabilidad a la derecha.

b) $P(\overline{F}) =$
$P(\overline{F}|C)P(C) + P(\overline{F}|K)P(K) + P(\overline{F}|G)P(G) + P(\overline{F}|M)P(M) =$
$0,9 \cdot 0,45 + 0,85 \cdot 0,25 + 0,91 \cdot 0,2 + 0,88 \cdot 0,1 = 0,8875$

c) $P(M|F) = \dfrac{P(F|M)P(M)}{P(F)} = \dfrac{0,12 \cdot 0,10}{1 - 0,8875} = 0,1067$

Problema 12.2.2 B1 (2,5 puntos) La probabilidad de que un ave rapaz, que nace en un zoológico, sobreviva más de 5 años, es del 10 %.

a) (0,5 puntos) Si en un zoo tenemos 10 aves rapaces nacidas este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellas sigan vivas dentro de 5 años.

b) (1 puntos) Si entre todos los zoológicos del país hay 200 aves rapaces nacidas este mismo año, hallar la probabilidad de que, al cabo de 5 años, hayan sobrevivido más de 10 y menos de 15 de ellas.

c) (1 puntos) Se ha hecho un seguimiento de 160 aves rapaces que viven en libertad, observándose que sólo 12 de ellas han sobrevivido más de 5 años. Calcular un intervalo de confianza al 90 % para la proporción de aves rapaces en libertad que sobreviven más de 5 años.

Solución:

a) $B(10; 0,1)$
$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$
$1 - \left(\binom{10}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^9\right) = 0,2639$

b) $B(200; 0,1)$, $n > 10$, $np = 20 > 5$ y $nq = 180 > 5 \Longrightarrow B(200; 0,1) \overset{N(np,\sqrt{npq})}{\approx} N(20; 4,2426)$
$P(10 < X < 15) = P\left(\frac{10,5 - 20}{4,2426} < Z < \frac{14,5 - 20}{4,2426}\right) = P(-2,24 < Z < -1,3) =$
$P(Z < -1,3) - P(Z < -2,24) = 1 - P(Z < 1,3) - (1 - P(Z < 2,24)) =$
$P(Z < 2,24) - P(Z < 1,3) = 0,9875 - 0,9032 = 0,0843$

c) $n = 160$, $\hat{p} = \frac{12}{160} = 0,075$ y $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,925$
$NC = 90\,\% = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,05$ $P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow$
$Z_{\alpha/2} = 1,645$
$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,645\sqrt{\frac{0,075 \cdot 0,925}{160}} = 0,0343$
$IC = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) = (0,075 - 0,0343; 0,075 + 0,0343) = (0,0407; 0,1093)$

Problema 12.2.3 A2 (2,5 puntos) Se realiza un estudio para evaluar qué proporción de los pasajeros en las rutas interinsulares viaja con descuento de residente. Para ello se toma una muestra de 300 pasajeros, de los cuales se observa que 225 viajan con este descuento.

a) (1,25 puntos) Determinar un intervalo de confianza, al 96 %, para la proporción de pasajeros que viajan con descuento de residente.

b) (0,75 puntos) Usando la proporción de pasajeros con descuento de residencia calculada en esta muestra como estimación de dicha proporción en la población, ¿de qué tamaño debería ser la muestra si se desea construir un intervalo de confianza al 92 % para esa proporción con un error máximo de 0,03?

c) (0,5 puntos) Si se pierden los datos de 5 de los pasajeros de la muestra, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de ellos viajara con descuento de residencia.

Solución:

a) $\hat{p} = \frac{225}{300} = 0,75 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,25$, $n = 300$ y
$NC = 96\,\% = 0,96 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,04 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,02$ $P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,98 \Longrightarrow$
$Z_{\alpha/2} = 2,055$
$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,055\sqrt{\frac{0,75 \cdot 0,25}{300}} = 0,0514$
$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,75-0,0514; 0,75+0,0514) = (0,6986; 0,8014) = (69,86\,\%; 80,14\,\%)$

b) $NC = 92\,\% = 0,92 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,08 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,04$ $P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,96 \Longrightarrow$ $Z_{\alpha/2} = 1,75$

$$E = 0,03 = 1,75\sqrt{\frac{0,75\cdot 0,25}{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{1,75}{0,03}\right)^2 (0,75\cdot 0,25) = 638,021 \Longrightarrow n = 639$$

c) $B(5;0,75) \Longrightarrow P(X=0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 0,75^0 \cdot 0,25^5 = 0,00098$

Problema 12.2.4 B2 (2,5 puntos) Un fabricante de televisores afirma que la duración media de su producto es de 10 años. Para verificar esto, se selecciona una muestra aleatoria de 50 televisores y se encuentra que la duración media es de 9,5 años, con una desviación típica de 2 años.

a) (1,25 puntos) Calcular el intervalo de confianza del 88 % para la duración media de los televisores del fabricante.

b) (1,25 puntos) ¿Qué tamaño muestral se necesita para estimar la duración media de los televisores con un error menor de 6 meses y con un nivel de confianza del 95 %?

Solución:

a) $n = 50$, $\overline{X} = 9,5$, $\sigma = 2$ y $NC = 88\,\%$
$NC = 88\,\% = 0,88 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,12 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,06$ $P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,94 \Longrightarrow$ $Z_{\alpha/2} = 1,555$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,555\dfrac{2}{\sqrt{50}} = 0,4398$ $IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (9,5 - 0,4398; 9,5 + 0,4398) =$ $(9,0602; 9,9398)$

b) $NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$ $P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} =$ $0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,5 = 1,96\dfrac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 61,4656 \Longrightarrow n = 62$

Problema 12.2.5 A3 (2,5 puntos) El beneficio de una empresa, en miles de euros, a lo largo de 50 años viene dado por:

$$B(t) = \begin{cases} -0,04t^2 + 2,4t & \text{para} \quad 0 \le t < 40 \\ \dfrac{40t - 320}{t} & \text{para} \quad 40 \le t \le 50 \end{cases}$$

siendo t el tiempo transcurrido (en años).

a) (0,75 puntos) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $B(t)$ a lo largo de los 50 años.

b) (1,25 puntos) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de $B(t)$. ¿Cuál es el beneficio máximo y cuándo se produjo?

c) (0,5 puntos) Hacer una gráfica de $B(t)$.

Solución:

a) ☛ Continuidad en $[0,50]$. Las dos ramas son continuas y hay que analizar la continuidad en $t = 40$:

- Continuidad en $t = 40$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 40^-} B(t) = \lim\limits_{t\to 40^-} \left(-0,04t^2 + 2,4t\right) = 32 \\ \lim\limits_{t\to 40^+} B(t) = \lim\limits_{t\to 40^+} \dfrac{40t - 320}{t} = 32 \\ B(40) = 32 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$B(t)$ es continua en $t = 40$.

- Luego la función es continua en $[0, 50]$.

☛ Derivabilidad en $[0, 50]$. Las dos ramas son derivables y hay que analizar la derivabilidad en $t = 40$: $B'(t) = \left\{\begin{array}{lll} -0,08t + 2,4 & \text{para} & 0 < t < 40 \\ \dfrac{320}{t^2} & \text{para} & 40 < t50 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} B'(40^-) = -0,8 \\ B'(40^+) = 0,2 \end{array}\right.$

Luego B no es derivable en $t = 40 \Longrightarrow B$ derivable en cualquier punto del intervalo $(0, 40) \cup (40, 50)$

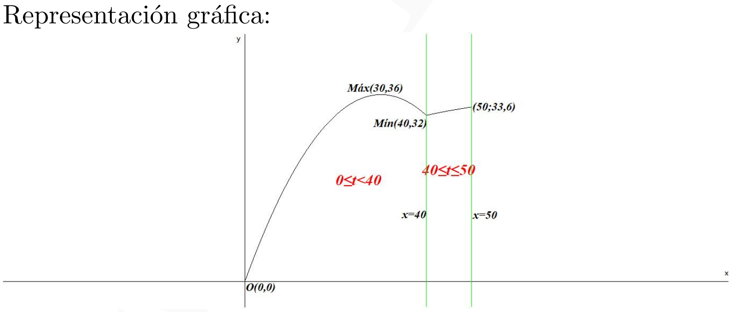
b) Monotonía:

$$B'(t) = \left\{\begin{array}{lll} -0,08t + 2,4 = 0 \Longrightarrow t = 30 & \text{para} & 0 < t < 40 \\ \dfrac{320}{t^2} > 0 & \text{para} & 40 < t < 50 \end{array}\right.$$

	$(0, 30)$	$(30, 40)$	$(40, 50)$
$B'(t)$	$+$	$-$	$+$
$B(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(30, 40)$
y creciente en el $(0, 30) \cup (40, 50)$.
Tiene un mínimo relativo en $(40; 32)$ y un máximo relativo en $(30, 36)$.
Además tenemos $B(0) = 0$ y $B(50) = 33,6$ por lo que el máximo relativo calculado anteriormente es absoluto. Podemos afirmar que el máximo beneficio es de 36000€ cuando han transcurrido 30 años.

c) Representación gráfica:



Problema 12.2.6 B3 (2,5 puntos) Un joyero quiere revender una lámina de oro cuyos márgenes limitan las funciones $f(x) = (x-2)^2$ y $g(x) = x + 4$. Si se mide en centímetros:

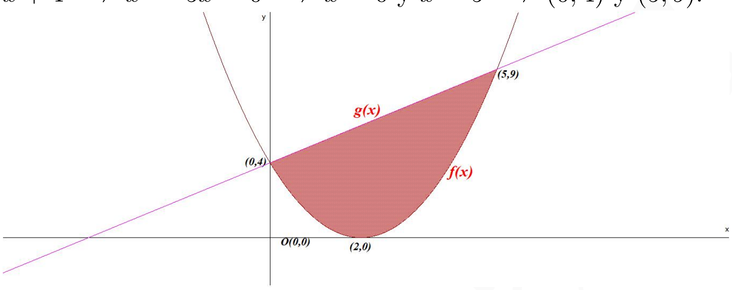
a) (1,25 puntos) Hacer una gráfica de la lámina ¿Cuál es la superficie de la lámina?

b) (0,75 puntos) Si cada centímetro cuadrado de lámina pesa 2 gramos, ¿cuántos gramos pesa la lámina?

c) (0,5 puntos) Si el costo de adquisición de la lámina fue de 20 euros por gramo, ¿cuál debe ser el precio que debe poner a cada gramo de oro para tener un beneficio de 625 euros?

Solución:

a) La función $f(x)$ corta el eje de ordenadas en $(0,4)$ y el de abscisas en el $(2,0)$; $f'(x) = 2(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $f''(2) = 4 > 0 \Longrightarrow (2,0)$ es un mínimo relativo; además $f(x) > 0$. La función $g(x)$ es una recta que corta a $f(x)$ en los puntos $f(x) = g(x) \Longrightarrow (x-2)^2 = x+4 \Longrightarrow x^2 - 5x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 5 \Longrightarrow (0,4)$ y $(5,9)$.



$$S = \int_0^5 (g(x) - f(x))\, dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x)\, dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\Big]_0^5 = \frac{125}{6} \simeq 20,83 \text{ cm}^2$$

b) Peso$= 2 \cdot \dfrac{125}{6} = \dfrac{125}{3} \simeq 41,67$ gr.

c) Tenemos: Beneficio=Venta-Coste, es decir: $625 = \dfrac{125}{3} \cdot p - \dfrac{125}{3} \cdot 20 \Longrightarrow p = 35$€/gr.

Problema 12.2.7 A4 (2,5 puntos) Una cerrajería se encarga de realizar dos tipos de puertas mixtas, de hierro y madera. Para las puertas tipo TIMANFAYA, necesita 2 metros cuadrados de hierro y 2 metros cuadrados de madera, y para las puertas tipo TABURIENTE, necesita 1 metro cuadrado de hierro y 3 metros cuadrados de madera. Dispone un stock de 1000 metros cuadrados de hierro y 1500 metros cuadrados de madera. La cerrajería obtiene un beneficio de 250 euros por cada puerta tipo TIMANFAYA y, por cada puerta tipo TABURIENTE, obtiene un beneficio de 350 euros.

a) (1 punto) Formular el correspondiente problema de programación lineal.

b) (0,5 puntos) Representar la región factible y determinar sus vértices.

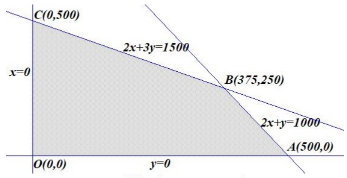
c) (1 punto) ¿Cuántas puertas de cada tipo se deben fabricar, con los metros cuadrados de material disponibles en el almacén, para obtener un beneficio máximo? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio?

Solución:
Sean x número de tipo TIMANFAYA e y número de tipo TABURIENTE.

	m^2 hierro	m^2 madera	beneficio
TIMANFAYA	2	2	250
TABURIENTE	1	3	350
	≤ 1000	≤ 1500	

a) La región factible es:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 1000 \\ 2x + 3y \leq 1500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



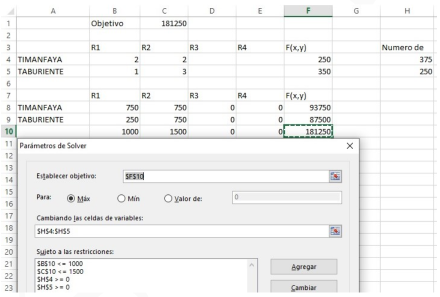
Los vértices son: $O(0,0)$, $A(500,0)$, $B(375,250)$ y $C(0,500)$.

b) La función objetivo es:

$$f(x,y) = 250x + 350y$$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(500,0) = 125000 \\ f(375,250) = 181250 \ \text{Máximo} \\ f(0,500) = 175000 \end{cases}$$

Solución por solver :



c) El máximo beneficio es de 181250€ y se alcanza con la fabricación de 375 puertas tipo TIMANFAYA y 250 tipo TABURIENTE.

Problema 12.2.8 B4 (2,5 puntos) Un avión ofrece asientos de tres clases: primera, business y turista. El número de asientos business son el doble que los de primera clase, y por cada 15 asientos de clase turista hay dos de clase business. El precio por asiento fue de 350€ para primera clase, 280€ para clase business y 200€ para la clase turista. Si el importe total cobrado por los asientos fue de 31280€, ¿cuántos asientos de cada clase había en el avión?

Solución:

Sean x número de asientos de primera, y número de asientos de business y z número de asientos de turista.

☛ $$\begin{cases} y = 2x \\ \dfrac{z}{15} = \dfrac{y}{2} \\ 350x + 280y + 200z = 31280 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 15y - 2z = 0 \\ 35x + 28y + 20z = 3128 \end{cases}$$

☛ $$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -2 & 0 \\ 35 & 28 & 20 & 3128 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - 35F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -2 & 0 \\ 0 & 91 & 40 & 6256 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 15F_3 - 91F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 782 & 93840 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible determinado}$$

$z = \dfrac{93840}{782} = 120, \ 15y - 240 = 0 \Longrightarrow y = 16, \ 2x - 16 = 0 \Longrightarrow x = 8$

Se ofrecen 8 asientos de primera, 16 de business y 120 de turista.

Capítulo 13

La Rioja

13.1. Ordinaria

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con 3 ejercicios.
En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a 2 de un bloque y a 1 de cada bloque restante.
Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuestas a qué cuatro ejercicios se responde en el examen.
Todos los ejercicio valen 2,5 puntos, y en la mayoría de ellos dicha puntuación se desglosa con más detalle.
Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.
El tiempo disponible para resolver a las preguntas es de una hora y media.

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

Problema 13.1.1 (2,5 puntos) Una pequeña empresa ha comprado, para regalar a sus clientes, cien botellas de vino tinto de tres clases y a tres precios distintos: las de vino joven cuestan 4€, las de crianza 8€ y las de reserva 12€. Se ha gastado lo mismo en reserva que en las otras dos clases juntas. Además, si hubiera cambiado las botellas de reserva, por botellas de crianza y viceversa se habría gastado en total 20€ más.

a) (2 puntos)¿Cuántas botellas ha comprado de cada clase?

b) (0,5 puntos) ¿Cuánto ha gastado en total?

Solución:
Sean x botellas de vino joven, y botellas de crianza y z botellas de reserva.

a) $$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=100\\ 12z=4x+8y\\ 4x+12y+8z=20+4x+8y+12z\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=100\\ x+2y-3z=0\\ y-z=5\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=25 \text{ botellas}\\ y=40 \text{ botellas}\\ z=35 \text{ botellas}\end{array}\right.$$

Por Gauss:
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1&1&1&100\\ 1&2&-3&0\\ 0&1&-1&5\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1&1&1&100\\ 0&1&-4&-100\\ 0&1&-1&5\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_2\end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & -4 & -100 \\ 0 & 0 & 3 & 105 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema compatible determinado.}$$

$3z = 105 \Longrightarrow z = 35$, $y - 4 \cdot 35 = -100 \Longrightarrow y = 40$ y $x + 40 + 35 = 100 \Longrightarrow x = 25$

b) Se ha gastado: $4x + 8y + 12z = 4 \cdot 25 + 8 \cdot 40 + 12 \cdot 35 = 840$€

Problema 13.1.2 (2,5 puntos) Sean

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determina cuáles de las siguientes matrices tienen inversa, y si es el caso calcúlela:

a) A b) B c) C d) ABC e) BC

Solución:

a) $|A| = 0 \Longrightarrow \nexists\, A^{-1}$

b) $|B| = 6 \neq 0 \Longrightarrow \exists\, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

c) $|C| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \exists\, C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

d) $|ABC| = |A||B||C| = 0 \Longrightarrow \nexists\, (ABC)^{-1}$

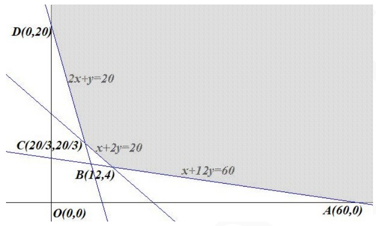
e) $|BC| = |B||C| = 12 \neq 0 \Longrightarrow \exists\, (BC)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} =$
$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/12 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

Problema 13.1.3 (2,5 puntos) Necesitamos obtener al menos 80 gramos de cobre, 60 de zinc y 60 de níquel, y sabemos hacerlo mediante dos técnicas distintas a partir de objetos desechados fabricados con alpaca. Usaremos la primera técnica durante un tiempo x, y después usaremos la segunda durante un tiempo y.
Con la primera técnica podemos conseguir, en cada hora, 8 g de cobre, 3 g de zinc y 1 g de níquel.
Con la segunda técnica obtenemos en una hora 4 g de cobre, 6 g de zinc y 12 g de níquel.
¿Cuánto deben valer x e y para conseguir el objetivo en el menor tiempo posible?
Solución:
Sean x el tiempo de la primera técnica e y el de la segunda.

	Cu	Zn	Ni
técnicaprimera	8	3	1
técnicasegunda	4	6	12
	≥ 80	≥ 60	≥ 60

- ☛ La región factible es:

$$\begin{cases} 8x+4y\geq 80\\ 3x+6y\geq 60\\ x+12y\geq 60\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x+y\geq 20\\ x+2y\geq 20\\ x+12y\geq 60\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{cases}$$

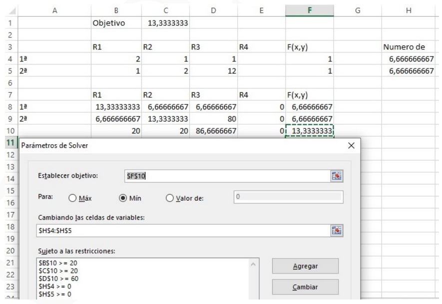


- ☛ Los vértices son: $A(60,0)$, $B\,(12,4)$, $C\left(\dfrac{20}{3},\dfrac{20}{3}\right)$ y $D(0,20)$.

- ☛ La función objetivo es:
$f(x,y)=x+y$

$$\begin{cases} f(60,0)=60\\ f\,(12,4)=16\\ f\left(\dfrac{20}{3},\dfrac{20}{3}\right)=\dfrac{40}{3}\simeq 13,33 \;\text{Mínimo}\\ f\,(0,20)=20\end{cases}$$

Solución por solver :



- ☛ Hay que utilizar la técnica primera $\dfrac{20}{3}$ unidades de tiempo y la técnica segunda $\dfrac{20}{3}$ unidades de tiempo, con un total mínimo de $\dfrac{40}{3}$ unidades de tiempo.

Bloque 2. Análisis.

Problema 13.1.4 (2,5 puntos) Definimos la función

$$f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+x-2}$$

en todos los valores reales x en los que la expresión tiene sentido. ¿Cuál es entonces su dominio? (0,25 puntos)
¿Qué asíntotas horizontales y verticales observaremos en la gráfica $y=f(x)$ Indica los límites de f relevantes en cada una. (0,75 puntos)
Dibuja dicha gráfica, señalando en la misma las asíntotas, los cortes con los ejes y también los extremos relativos de f, que debes calcular previamente. (1,5 puntos)
Solución:

- ☛ $x^2+x-2=0\Longrightarrow x=-2$ y $x=1\Longrightarrow \text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

- ☛ Asíntotas:
  - Verticales:
    - En $x=-2$:
    $\displaystyle\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2+x}{x^2+x-2}=\left[\frac{2}{0^+}\right]=\infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to -2^+}\frac{x^2+x}{x^2+x-2}=\left[\frac{2}{0^-}\right]=-\infty$

- ○ En $x=1$:
  $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+x}{x^2+x-2}=\left[\dfrac{2}{0^-}\right]=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+x}{x^2+x-2}=\left[\dfrac{2}{0^+}\right]=\infty$
- Horizontales: $y=1$
  $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+x}{x^2+x-2}=1$
- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

☛ Puntos de corte:

- Con OY hacemos $x=0\Longrightarrow (0,0)$
- Con OX hacemos $f(x)=0\Longrightarrow x^2+x=0\Longrightarrow (0,0)$ y $(-1,0)$

☛ Monotonía: $f'(x)=-\dfrac{2(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}=0\Longrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

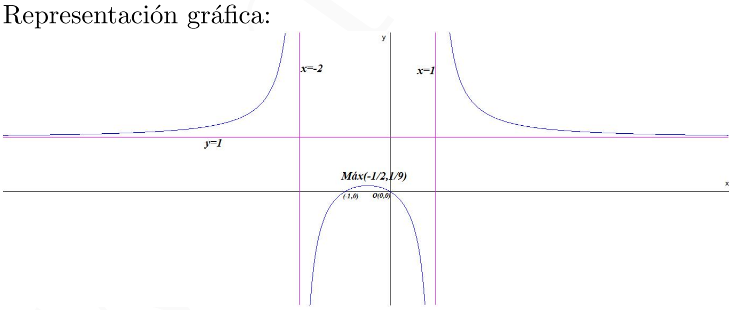
	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-2)\cup\left(-2,-\dfrac{1}{2}\right)$

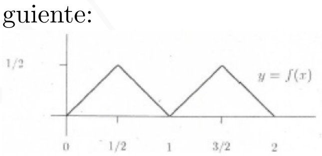
La función es decreciente en el intervalo $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$.

Tiene un máximo relativo en $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{9}\right)$.

☛ Representación gráfica:



Problema 13.1.5 (2,5 puntos) Una función f, definida en el intervalo $[0,2]$, tiene la gráfica siguiente:



(I) (1,75 puntos) Expresa por intervalos el valor de $f(x)$.

(II) (0,75 puntos) Calcula los valores x tales que $f(x)=1/3$.

Solución:

(I) En el intervalo $[0,1/2)$ $f(x)$ es una recta que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(1/2,1/2) \Longrightarrow$ $f(x)=x$
En el intervalo $[1/2,1)$ $f(x)$ es una recta que pasa por los puntos $(1/2,1/2)$ y $(1,0) \Longrightarrow$ $f(x)=-x+1$
En el intervalo $[1,3/2)$ $f(x)$ es una recta que pasa por los puntos $(1,0)$ y $(3/2,1/2) \Longrightarrow$ $f(x)=x-1$
En el intervalo $[3/2,2)$ $f(x)$ es una recta que pasa por los puntos $(3/2,1/2)$ y $(2,0) \Longrightarrow$ $f(x)=-x+2$

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} x & \text{si} & 0\le x<1/2 \\ -x+1 & \text{si} & 1/2\le x<1 \\ x-1 & \text{si} & 1\le x<3/2 \\ -x+2 & \text{si} & 3/2\le x\le 2 \end{array}\right.$$

(II) $$f(x)=\frac{1}{3}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{ccc} x=\dfrac{1}{3} & \text{si} & 0\le x<\dfrac{1}{2} \\ \\ -x+1=\dfrac{1}{3}\Longrightarrow x=\dfrac{2}{3} & \text{si} & \dfrac{1}{2}\le x<1 \\ \\ x-1=\dfrac{1}{3}\Longrightarrow x=\dfrac{4}{3} & \text{si} & 1\le x<\dfrac{3}{2} \\ \\ -x+2=\dfrac{1}{3}\Longrightarrow x=\dfrac{5}{3} & \text{si} & \dfrac{3}{2}\le x\le 2 \end{array}\right.$$

Problema 13.1.6 (2,5 puntos) Sea $f(x)=x^3-3x+2$.

(I) (1 punto) Encuentra sus extremos relativos, y evalúa f en dichos puntos.

(II) (1,5 puntos) Halla el área de la región limitada por $y=f(x)$, $y=0$, $x=1$, $x=-2$, y haz un dibujo de dicha región.

Solución:

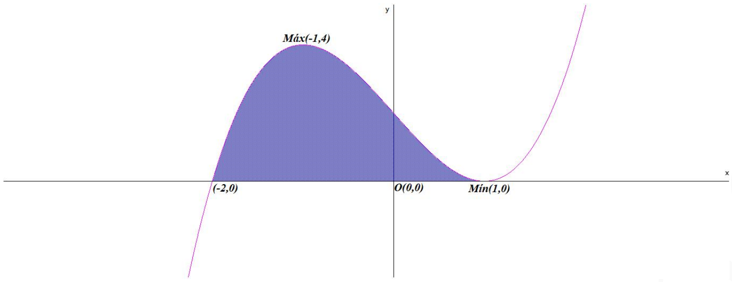
(I) $f'(x)=3x^2-3=0\Longrightarrow x=\pm 1$
$$f''(x)=6x\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} f''(1)=6>0\Longrightarrow x=1 \text{ Mínimo} \\ f''(-1)=-6<0\Longrightarrow x=-1 \text{ Máximo} \end{array}\right.$$
Hay un Mínimo relativo en el punto $(1,0)$ y un máximo relativo en el $(-1,4)$.

(II) $x^3-3x+2=0\Longrightarrow x=1$ y $x=-2\Longrightarrow$ la función no corta al eje de abscisas en ningún punto interior del recinto de integración $[-2,1]$

$$F(x)=\int (x^3-3x+2)\,dx=\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x$$

$$S_1=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)\,dx=F(1)-F(-2)=\frac{3}{4}+6=\frac{27}{4}$$

$$S=|S_1|=\frac{27}{4}\simeq 6,75\ u^2$$



Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

Problema 13.1.7 (2,5 puntos) Un bombo de lotería tiene diez bolas, numeradas del 0 al 9. Realizamos dos extracciones consecutivas, sin reemplazar la primera bola. Sean los sucesos:
$A =$ “la primera bola es 0”
$B =$ “la primera bola es 5”
$C =$ “la segunda bola es mayor que la primera”
Calcula entonces las probabilidades siguientes:

a) $P(A)$ b) $P(B)$ c) $P(C)$ d) $P(A|C)$ e) $P(B|C)$

Solución:

a) $P(A) = \dfrac{1}{10} = 0,1$

b) $P(B) = \dfrac{1}{10} = 0,1$

c) $P(C) = P(0; 123456789) + P(1; 23456789) + P(2; 3456789) + P(3; 456789) + P(4; 56789) + P(5; 6789) + P(6; 789) + P(7; 89) + P(8; 9) = \dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{9}{9}+\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{8}{9}+\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{7}{9}+\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{6}{9}+\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{5}{9}+\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{3}{9}+\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{9}{9}+\dfrac{8}{9}+\dfrac{7}{9}+\dfrac{6}{9}+\dfrac{5}{9}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{3}{9}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{45}{9} = \dfrac{45}{90} = 0,5$

d) $P(A|C) = \dfrac{P(A\cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(A)}{P(C)} = \dfrac{0,1}{0,5} = 0,2$

e) $P(B|C) = \dfrac{P(B\cap C)}{P(C)} = \dfrac{\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{45} = 0,0889$

Problema 13.1.8 (2,5 puntos) La variable X mide la estatura de los (y las) policías de Francia. Sigue una distribución normal con desviación típica de 6,5 (en cm), de forma que el 11,507 % de policías de Francia mide más de 183 cm.

a) (1,75 puntos) Calcula la media de la variable X.

b) (0,75 puntos) Averigua la estatura que es superada por el 88,493 % de policías en Francia.

Solución:

$$N(\mu; 6,5)$$

a) $P(X \geq 183) = P\left(Z \geq \dfrac{183-\mu}{6,5}\right) = 1 - P\left(Z \leq \dfrac{183-\mu}{6,5}\right) = 0,11507 \Longrightarrow$
$P\left(Z \leq \dfrac{183-\mu}{6,5}\right) = 1 - 0,11507 = 0,88493 \Longrightarrow \dfrac{183-\mu}{6,5} = 1,2 \Longrightarrow \mu = 175,2$

b) $P(X \geq t) = P\left(Z \geq \dfrac{t - 175,2}{6,5}\right) = P\left(Z \leq -\dfrac{t - 175,2}{6,5}\right) = 0,88493 \Longrightarrow$
$-\dfrac{t - 175,2}{6,5} = 1,2 \Longrightarrow t = 167,4$
El 88,493 % de los policías superan la altura de $167,4$ cm.

Problema 13.1.9 (2,5 puntos) Llamamos X a la longitud de la cola de un ejemplar adulto de lémur barbado, especie recientemente descrita. Sigue una distribución normal cuya desviación típica tiene un valor asumido de 4,2 cm (por los estudios realizados en variedades similares), y para estimar su media μ se ha tomado una muestra independiente de 20 lémures. La media muestral resulta ser $\overline{X} = 38,6$ cm.

a) (1,25 puntos) Calcula un intervalo en el que situaríamos a μ con el 95 % de confianza.

b) (1,25 puntos) Si juzgamos excesivo el error muestral y queremos repetir la estimación con una muestra más numerosa, lo justo para que dicho error sea menor que 1 cm, ¿cuál debería ser el tamaño de dicha muestra?

Solución:

a) $n = 20$, $\overline{X} = 38,6$ y $NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{4,2}{\sqrt{20}} = 1,8407$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (38,6 - 1,8407; 38,6 + 1,8407) = (36,7593; 40,4407)$$

b) $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1,96\dfrac{4,2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 67,765824 \Longrightarrow n = 68.$

13.2. Extraordinaria

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con 3 ejercicios.
En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a 2 de un bloque y a 1 de cada bloque restante.
Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuestas a qué cuatro ejercicios se responde en el examen.
Todos los ejercicio valen 2,5 puntos, y en la mayoría de ellos dicha puntuación se desglosa con más detalle.
Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.
El tiempo disponible para resolver a las preguntas es de una hora y media.

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

Problema 13.2.1 (2,5 puntos) Para que no se desanimen los equipos de menos nivel, los organizadores de un torneo escolar de fútbol adjudican en cada partido un número positivo de puntos a los dos equipos. Lo hacen de forma que:

- ☛ 5 empates equivalen a 2 victorias más 2 derrotas;
- ☛ 1 victoria equivale a 3 derrotas más 1 punto;
- ☛ 1 derrota más 5 puntos equivalen a 1 victoria más 1 empate.

¿Cuántos puntos se adjudican por victoria, empate y derrota?
Solución:
Sean x el número de puntos por victoria, y el número de puntos por empate y z el número de puntos por derrota.

☛ $$\left\{\begin{array}{l} 5y = 2x + 2z \\ x = 3z + 1 \\ z + 5 = x + y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x - 3z = 1 \\ x + y - z = 5 \end{array}\right.$$

☛ $$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \longleftrightarrow F_3 \\ F_2 \\ F_3 \longleftrightarrow F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) =$$
$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & -7 & 4 & -10 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 7F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 18 & 18 \end{array}\right) \Longrightarrow$$
Luego el sistema es compatible determinado (solución única)

☛ $$\left\{\begin{array}{l} 18z = 18 \Longrightarrow z = 1 \\ -y - 2 = -4 \Longrightarrow y = 2 \\ x + 2 - 1 = 5 \Longrightarrow x = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4 \text{ puntos por victoria} \\ y = 2 \text{ puntos por empate} \\ z = 1 \text{ puntos por derrota} \end{array}\right.$$

Problema 13.2.2 (2,5 puntos) Una de las dos matrices siguientes tiene matriz inversa. Calcúlala:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ puntos})$$

¿Cuál es la inversa de dicha matriz inversa? ¿Por qué sabes que la otra matriz no tiene inversa? (0,5 puntos)
Solución:
$$|A| = -2 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$
$|B| = 0 \Longrightarrow \nexists B^{-1}$

Problema 13.2.3 (2,5 puntos) Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) que cumplen
$$\begin{array}{l} 0 \le y, \quad 0 \le x \\ x + y \le 4 \\ x + 2y \le 6, \ \text{y} \\ x \le 3 \end{array} \quad (1 \text{ punto})$$

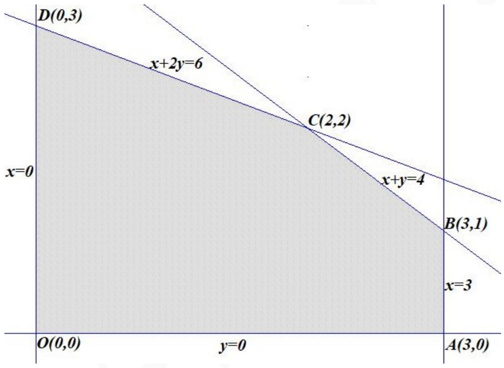
Estudia respectivamente en qué puntos de dicha región toman su valor máximo las siguientes funciones: (1,5 puntos)

I. $x + \frac{1}{2}y$ II. $x + \frac{3}{2}y$ III. $x + 3y$

Solución:

☛ La región factible es:

$$\begin{cases} x + y \le 4 \\ x + 2y \le 6 \\ x \le 3 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



☛ Los vértices son: $O(0,0)$, $A(3,0)$, $B(3,1)$, $C(2,2)$ y $D(0,3)$.

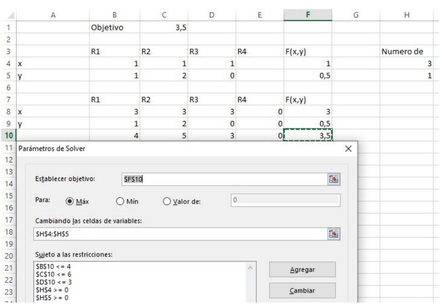
☛ La función objetivo es:

I. $f(x,y) = x + \frac{1}{2}y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(3,0) = 3 \\ f(3,1) = \frac{7}{2} \text{ Máximo} \\ f(2,2) = 3 \\ f(0,3) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

El máximo es de $\frac{7}{2}$ en el punto $B(3,1)$.

Solución por solver :

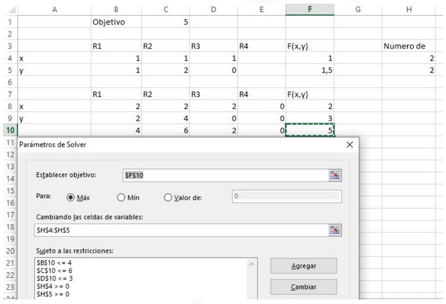


II. $f(x,y) = x + \frac{3}{2}y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(3,0) = 3 \\ f(3,1) = \dfrac{9}{2} \\ f(2,2) = 5 \ \text{Máximo} \\ f(0,3) = \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

El máximo es de 5 en el punto $C(2,2)$.

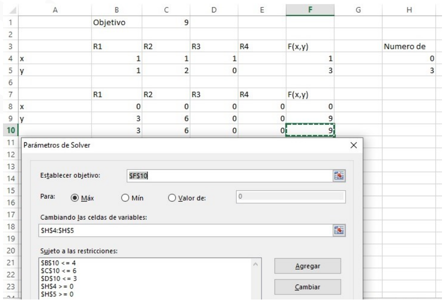


III. $f(x,y) = x + 3y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(3,0) = 3 \\ f(3,1) = 6 \\ f(2,2) = 8 \\ f(0,3) = 9 \ \text{Máximo} \end{cases}$$

El máximo es de 9 en el punto $D(0,3)$.



Bloque 2. Análisis.

Problema 13.2.4 (2,5 puntos) La futura compañía Rioja-Rail seguirá una estricta política de compromiso de puntualidad: si el retraso de un tren de cercanías es igual a un tiempo t (en minutos), y el importe pagado por el trayecto es L (en cualquier criptomoneda) se reintegrará en la cuenta de usuario una cantidad dada por

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} & t < 10 \\ at + b & \text{si} & 10 < t < 20 \\ L/2 & \text{si} & t = 20 \\ ct + d & \text{si} & 20 < t < 60 \\ L & \text{si} & t \geq 60 \end{cases}$$

Sabiendo que r es una función continua, dibuja su gráfica y averigua los valores de a, b, c y d.

Solución:

La función r no está definida para $t = 10$ y, por tanto, no puede ser continua en ese punto. Considero $r(t) = 0$ si $t \leq 0$. La función quedaría de la siguiente forma:

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} & t \leq 10 \\ at + b & \text{si} & 10 < t < 20 \\ L/2 & \text{si} & t = 20 \\ ct + d & \text{si} & 20 < t < 60 \\ L & \text{si} & t \geq 60 \end{cases}$$

Las ramas son siempre continuas, hay que estudiar la continuidad en $t = 10$, $t = 20$ y $t = 60$:

- En $t = 10$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t\longrightarrow 10^-} r(t) = \lim\limits_{t\longrightarrow 10} 0 = 0 \\ \lim\limits_{t\longrightarrow 10^+} r(t) = \lim\limits_{t\longrightarrow 10} (at+b) = 10a+b \\ f(10) = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow 10a+b=0$$

- En $t = 20$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t\longrightarrow 20^-} r(t) = \lim\limits_{t\longrightarrow 20} (at+b) = 20a+b \\ \lim\limits_{t\longrightarrow 20^+} r(t) = \lim\limits_{t\longrightarrow 20} (ct+d) = 20c+d \\ f(20) = \dfrac{L}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow 20a+b = 20c+d = \frac{L}{2} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 40a+2b = L \\ 40c+2d = L \\ 20a+b-20c-d = 0 \end{array}\right.$$

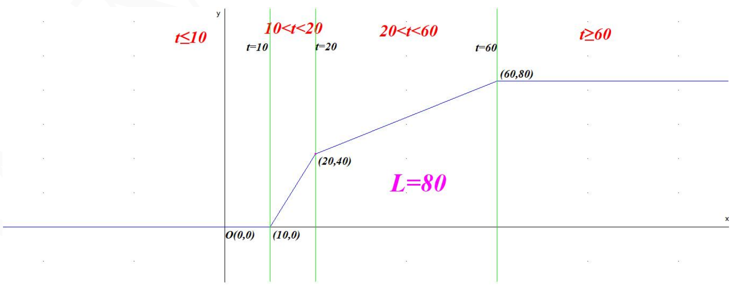
- En $t = 60$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t\longrightarrow 60^-} r(t) = \lim\limits_{t\longrightarrow 60} (ct+d) = 60c+d \\ \lim\limits_{t\longrightarrow 60^+} r(t) = \lim\limits_{t\longrightarrow 60} L = L \\ f(60) = L \end{array}\right. \Longrightarrow 60c+d=L$$

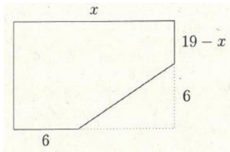
- $$\left\{\begin{array}{l} 10a+b=0 \\ 40a+2b=L \\ 40c+2d=L \\ 20a+b-20c-d=0 \\ 60c+d=L \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{L}{20} \\ b = -\dfrac{L}{2} \\ c = \dfrac{L}{80} \\ d = \dfrac{L}{4} \end{array}\right. \Longrightarrow r(t) = \left\{\begin{array}{lll} 0 & \text{si} & t \le 10 \\ \dfrac{L}{20}t + L & \text{si} & 10 < t < 20 \\ L/2 & \text{si} & t = 20 \\ \dfrac{L}{80}t + \dfrac{L}{4} & \text{si} & 20 < t < 60 \\ L & \text{si} & t \ge 60 \end{array}\right.$$

- Representación gráfica para $L = 80$:

$$r(t) = \left\{\begin{array}{lll} 0 & \text{si} & t \le 10 \\ 4t-40 & \text{si} & 10 < t < 20 \\ 40 & \text{si} & t = 20 \\ t+20 & \text{si} & 20 < t < 60 \\ 80 & \text{si} & t \ge 60 \end{array}\right.$$



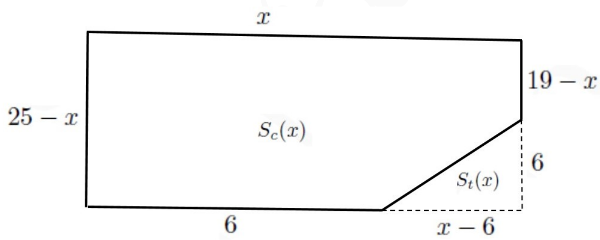
Problema 13.2.5 (2,5 puntos) En la figura, x es un valor tal que $6 \leq x \leq 19$, y algunos segmentos miden lo que se indica.



Justifica debidamente que el área $A(x)$ del polígono dibujado (sin contar el triángulo inferior) viene dada por

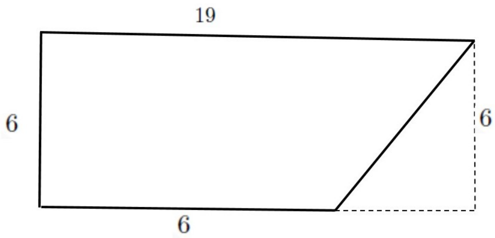
$$A(x) = 18 + 22x - x^2$$

¿Para qué valor de x dicha área es máxima? ¿Para cuál es mínima? Dibuja la figura cuando x es el valor de área mínima.
Solución:



$$A(x) = S_c(x) - S_t(x) = x(25 - x) - \frac{(x-6)6}{2} = 25x - x^2 - 3x - 18 = -x^2 + 22x + 18$$
$A'(x) = -2x + 22 = 0 \Longrightarrow x = 11$
$A''(x) = -2 \Longrightarrow A''(11) = -2 < 0 \Longrightarrow x = 11\ u$ es un máximo relativo con un área máxima de $A(11) = 139\ u^2$.

Para calcular el mínimo valoramos la función en los extremos del intervalo $A(6) = 114$ y $A(19) = 75$. Luego el área mínima es $75\ u^2 \Longrightarrow x = 19\ u$

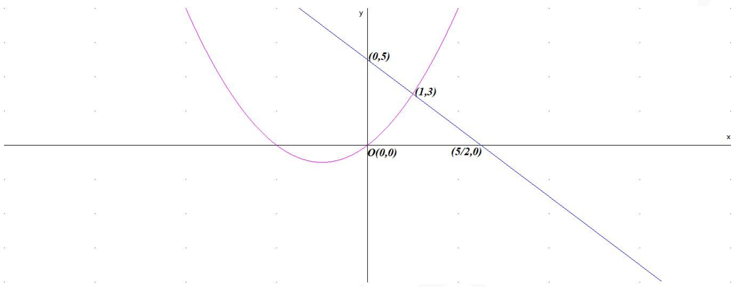


Problema 13.2.6 (2,5 puntos) La recta $y = 5 - 2x$ delimita un triángulo rectángulo con los ejes de coordenadas, Calcula sus vértices. (0,5 puntos)
La parábola $y = x^2 + 2x$ divide al triángulo anterior en dos regiones. Dibújalas señalando los puntos de corte, y halla el área de ambas. (2 puntos)

Solución:

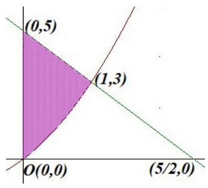
- ☛ Corte con el eje de ordenadas: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 5)$
  Corte con el eje de abscisas: hacemos $y = 0 \Longrightarrow \left(\frac{5}{2}, 0\right)$
  Los vértices del triángulo son $O(0, 0)$, $(0, 5)$ y $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$. Su área sería $S_t = \frac{5/2 \cdot 5}{2} = \frac{25}{4}$ u'2

- ☛ Calculamos los puntos de corte de la recta $y = 5 - 2x$ con la parábola $y = x^2 + 2x \Longrightarrow 5 - 2x = x^2 + 2x \Longrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = -5$ (no válida por no pertenecer a la frontera del triángulo) Dibujamos con una tabla de valores, la recta con los puntos del apartado anterior y la parábola pasa por $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ y $(1, 3)$



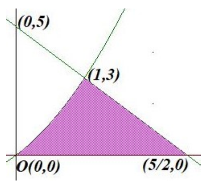
Tenemos dos recintos:

- Primer recinto:
  $S_1 : [0, 1]$ con la recta por encima de la parábola: (recta menos parábola)



$$S_1 = \int_0^1 (-x^2 - 4x + 5)\, dx = -\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x\Big]_0^1 = \frac{8}{3}\ u^2$$

- Segundo recinto:
  S_2 tiene dos recintos, uno $A : [0, 1]$ de la parábola con el eje de abscisas y otro $B : \left[1, \frac{5}{2}\right]$ de la recta con el eje de abscisas:



$$S_2 = A + B = \int_0^1 (x^2 + 2x)\, dx + \int_1^{5/2} (5 - 2x)\, dx =$$

$$\frac{x^3}{3} + x^2\Big]_0^1 + 5x - x^2\Big]_1^{5/2} = \frac{4}{3} + \frac{25}{4} - 4 = \frac{43}{12}\ u^2$$

- Área del triángulo= $S_t = S_1 + S_2 = \frac{8}{3} + \frac{43}{12} = \frac{25}{4}\ u^2$ como era de esperar.

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

Problema 13.2.7 (2,5 puntos) Basándose en encuestas, se considera, para la gente de La Rioja, que los sucesos
A: "le gusta pasar sus vacaciones en la playa";
B: "le gusta pasar sus vacaciones en la montaña"; y
C: "no le gustan ni la playa ni la montaña para sus vacaciones"

Tienen probabilidades: $P(A) = 0,75$, $P(B) = 0,5$ y $P(C) = 0,1$.
Se entiende que "le gusta" y "no le gusta" son en cada caso complementarios: cualquier persona respondería o bien "sí" o bien "no" a las preguntas de si le gustan playa o montaña.

I. ¿Cuánto valen $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$?

II. ¿Son A y B sucesos independientes?

III. ¿Cuál es la probabilidad de que a una persona le guste la montaña si sabemos que para ella no sucede C?

Solución:

I. Tenemos $P(C) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,1 \Longrightarrow P(A \cup B) = 0,9$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow 0,9 = 0,75 + 0,5 - P(A \cap B) \Longrightarrow$
$P(A \cap B) = 1,25 - 0,9 = 0,35$

II. $P(A) \cdot P(B) = 0,75 \cdot 0,5 = 0,375 \neq P(A \cap B) = 0,35 \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

III. $P(B|\overline{C}) = \dfrac{P(B \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \dfrac{P(B) - P(B \cap C)}{1 - P(C)} = \dfrac{0,5 - 0}{1 - 0,1} = \dfrac{5}{9} \simeq 0,5556$

Problema 13.2.8 (2,5 puntos) Una variable aleatoria X tiene distribución normal de media 10 y desviación típica 4. Tomaremos una muestra de cierto número n de valores independientes de X, y llamaremos $\overline{X}$ a su valor promedio. El valor n cumple que

$$P(X < 15) = P(\overline{X} < 11)$$

I. (1 punto) ¿Cuánto vale dicha probabilidad?

II. (1,25 puntos) ¿Qué número es n?

III. (0,25 puntos) ¿Hay algún valor a para el que $P(\overline{X} < a)$ no dependa de n?

Solución:
Tenemos: $X \approx N(10, 4)$ y $\overline{X} \approx N\left(10, \dfrac{4}{\sqrt{n}}\right)$

I. $P(X < 15) = P\left(Z < \dfrac{15 - 10}{4}\right) = P(Z < 1,25) = 0,89435$

II. $P(\overline{X} < 11) = P\left(Z < \dfrac{11 - 10}{4/\sqrt{n}}\right) = 0,89435 \Longrightarrow \dfrac{11 - 10}{4/\sqrt{n}} = 1,25 \Longrightarrow n = 25$

III. Si $a = 10 \Longrightarrow P(\overline{X} < 10) = P\left(Z < \dfrac{10 - 10}{4/\sqrt{n}}\right) = P(z < 0) = 0,5$, el resultado no dependería de n

Problema 13.2.9 (2,5 puntos) Nuestra casa está en la ladera de un monte, justo donde comienza el bosque de pinos. Un día medimos el que tenemos más cerca, y resultó tener una altura de 17,26 metros. Le preguntamos a nuestro amigo guardabosque si es un valor representativo, y nos dijo: "Qué casualidad, hemos calculado un intervalo al 90 % de confianza para la media de la altura, y el extremo superior es de 17,26 m. Hemos supuesto que la altura tiene distribución normal y que la desviación típica es 6,93, la habitual en estas repoblaciones, y hemos medio 100 árboles para calcularlo".

¿Cuál fue el promedio de la altura de los pinos de la muestra, y qué intervalo de confianza se obtuvo por tanto?

Solución:
$N(\mu; 6,93)$, $n = 100$ y extremo superior del $IC = \overline{X} + E = 17,26$
$NC = 90\,\% = 0,9 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,055$
$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$
$E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\dfrac{6,93}{\sqrt{100}} = 1,14$

$$\overline{X} + 1,14 = 17,26 \Longrightarrow \overline{X} = 16,12$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (16,12 - 1,14; 16,12 + 1,14) = (14,98; 17,26)$$

Capítulo 14

Madrid

14.1. Modelo

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN
Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.
Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.
DURACIÓN: 90 minutos.

Opción A

Problema 14.1.1 *(2 puntos)* Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determine los valores de a para los cuales la matriz A es invertible.

b) Calcular A^{-1} para $a = 1$.

Solución:

a) $|A| = a^2 + 2a + 1 = 0 \Longrightarrow a = -1 \Longrightarrow \exists\, A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{-1\}$

b) Si $a = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

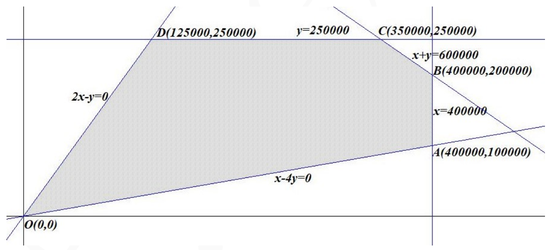
Problema 14.1.2 *(2 puntos)* Una empresa de transportes ha comprado dos furgonetas, una grande y otra mediana. La normativa vigente solo permite circular un máximo de 400000 km a la grande, 250000 km a la mediana y un total de 600000 km entre ambas. Por las rutas que establece la empresa, por cada kilómetro que recorre la furgoneta grande, la mediana circula como máximo 2 km; y por cada kilómetro que recorre la furgoneta mediana, la grande hace un máximo de 4 km. Por cada kilómetro de circulación de la furgoneta grande se obtiene un beneficio de 10 céntimos y por cada kilómetro de circulación de la mediana un beneficio de 5 céntimos.
Determine el máximo beneficio posible y el número de kilómetros que debe recorrer cada una de las furgonetas para obtenerlo.

Solución:
Sean x el número de kilómetros recorridos por la furgoneta grande e y los de la mediana.

☛ La región factible S es:

$$\begin{cases} x \leq 400000 \\ y \leq 250000 \\ x + y \leq 600000 \\ 2x - y \geq 0 \\ x - 4y \leq 0 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(400000, 100000)$, $B(400000, 200000)$, $C(350000, 250000)$ y $D(125000, 250000)$

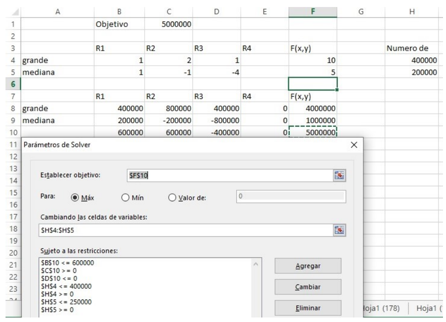


☛ La función objetivo es $f(x, y) = 10x + 5y \Longrightarrow$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(400000, 100000) = 4500000 \\ f(400000, 200000) = 5000000 \\ f(350000, 250000) = 4750000 \\ f(125000, 250000) = 2500000 \end{cases}$$

El máximo beneficio se obtiene cuando la furgoneta grande hace 400000 kms y la mediana 200000 kms, siendo este beneficio de 5000000 céntimos, es decir, 50000€

Solución por solver



Problema 14.1.3 *(2 puntos)* Se pide:

a) Represente la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ prestando especial atención a la determinación de sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. Determine los valores de x en los que f alcanza máximos o mínimos relativos.

b) Represente la gráfica de $g(x) = f(x - 3) + 2$, donde f es la función del apartado anterior.

Solución:

a) Calculamos

☛ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

☛ Puntos de corte:

- Con $OY \Longrightarrow f(0) = 1 \Longrightarrow (0, 1)$
- Con $OX \Longrightarrow f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0 \Longrightarrow (-1,9; 0)$, $(0,35; 0)$ y $(1,5; 0)$ (complejos de obtener y no necesarios)

☛ Asíntotas no tiene.

☛ Monotonía: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(-1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

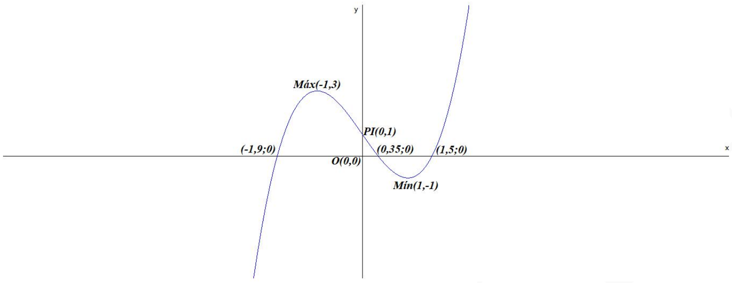
La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, y decreciente en el intervalo $(-1,1)$, tiene un máximo relativo en el punto $(-1,3)$ y un mínimo relativo en $(1,-1)$.

☛ Curvatura: $f''(x)=6x=0\Longrightarrow x=0$

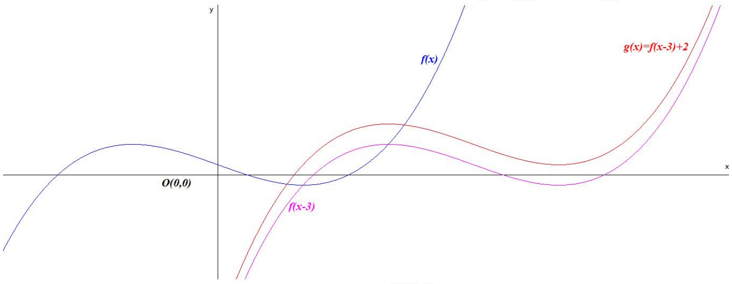
	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa en el intervalo $(-\infty,0)\frown$ y cóncava en el $(0,+\infty)$ $\smile$. Tiene un punto de inflexión en $(0,1)$

☛ Representación gráfica:



b) $f(x-3)$ es la traslación horizontal derecha de 3 unidades de la función $f(x)$ y $g(x)=f(x-3)+2$ es la traslación vertical hacia arriba de dos unidades de la función $f(x-3)$.



Problema 14.1.4 *(2 puntos)* Considere el lanzamiento de un dado equilibrado. Sea A el suceso el resultado es 1 o 2, B el suceso el resultado es 2 o 3 y C el resultado es par.

a) Verifique que $P(A|C)=P(B|C)=P(A\cap B|C)$.

b) Calcule $P(A\cup B|C)$.

Solución:

a) $P(A|C)=\dfrac{1}{3}$ casos favorables sólo hay uno que salga el 2 y 3 casos posibles 2 o 4 o 6.

$P(B|C)=\dfrac{1}{3}$ casos favorables sólo hay uno que salga el 2 y 3 casos posibles 2 o 4 o 6.

$P(A\cap B|C)=\dfrac{1}{3}$, $A\cap B=\{2\}$ luego sólo hay un caso favorable y 3 casos posibles 2 o 4 o 6.

Luego: $P(A|C)=P(B|C)=P(A\cap B|C)=\dfrac{1}{3}$

b) $A\cup B=\{1,2,3\}\Longrightarrow P(A\cup B|C)=\dfrac{1}{3}$ sólo hay un caso favorable de tres posibles.

Problema 14.1.5 *(2 puntos)* Para una población en la que se observa una variable aleatoria X con distribución normal, de media desconocida y desviación típica igual a 1,5, se tomó una muestra aleatoria simple para estimar la media poblacional y se obtuvo un intervalo de confianza cuyos extremos son 11,0703 y 12,9297.

a) Determine el valor de la media muestral.

b) Si el tamaño de la muestra fue 10, ¿cuál es el nivel de confianza del intervalo obtenido?

Solución:

$$N(\mu; 1,5)$$

a) $\overline{X} = \dfrac{11,0703 + 12,9297}{2} = 12$

b) y $2E = 12,9297 - 11,0703 = 1,8594 \Longrightarrow E = 0,9297$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,9297 = z_{\alpha/2}\frac{1,5}{\sqrt{10}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{\sqrt{10}\cdot 0,9297}{1,5} = 1,96$$

$$P\left(Z \le z_{\alpha/2}\right) = P(Z \le 1,96) = 0,975 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 0,95$$

Luego el nivel de confianza es del 95 %.

Opción B

Problema 14.1.6 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{c} x + ay = a \\ ax + y + az = 0 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & a \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = 1 - a^2 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

- ☛ Si $a \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

☛ Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

b) Si $a = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{c} x + 2y = a \\ 2x + y + 2z = 0 \\ z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

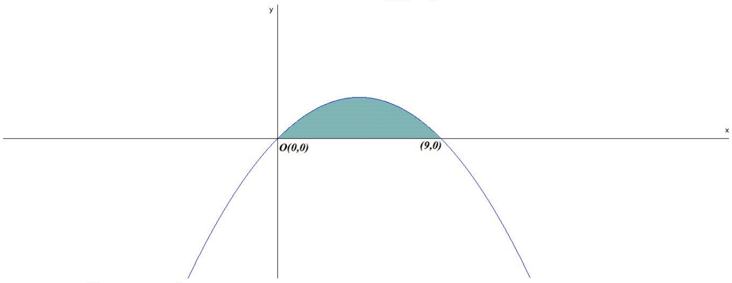
Problema 14.1.7 *(2 puntos)* Se pide:

a) Determine el área de la región acotada del plano limitada inferiormente por el eje de las x y superiormente por la parábola $y = 9x - x^2$.

b) Determine el área de la región acotada del plano limitada inferiormente por la parábola $y = 9x - x^2$ y superiormente por las rectas tangentes a esa parábola en los puntos de corte con el eje de las x.

Solución:

a) $9x - x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 9$. Los límites de integración son los extremos del intervalo $[0, 9]$. La función en este intervalo es positiva ($f(3) = 18 > 0$) y el resultado de la integral debe de ser positiva.
$S = \displaystyle\int_0^9 (9x - x^2)\, dx = \left. \frac{9x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^9 = \frac{243}{2} = 121,5\ u^2$

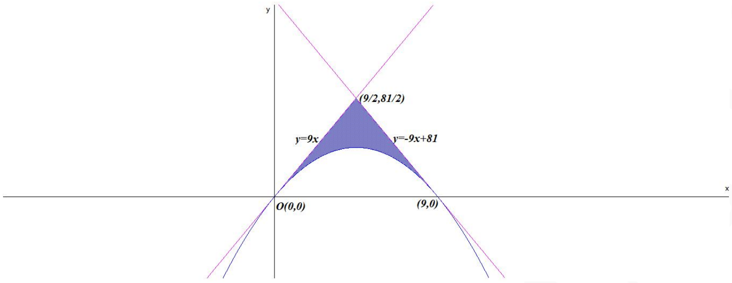


b) $f'(x) = 9 - 2x$
En $(0, 0)$ la pendiente de la recta tangente es $m_0 = f'(0) = 9 \Longrightarrow y = 9x$ es la recta tangente en $(0, 0)$
En $(9, 0)$ la pendiente de la recta tangente es $m_9 = f'(9) = -9 \Longrightarrow y = -9(x - 9) \Longrightarrow y = -9x + 81$ es la recta tangente en $(9, 0)$
Calculamos el punto corte de ambas rectas:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 9x \\ y = -9x + 81 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 9/2 \\ y = 81/2 \end{array} \right.$$

El área del triángulo formado por las dos tangentes y el eje de abscisas es $A = \dfrac{9 \cdot 81/2}{2} = \dfrac{729}{4}\ u^2$

El área buscada es $S_1 = A - S = \dfrac{729}{4} - \dfrac{243}{2} = \dfrac{243}{4} = 60,75\ u^2$



Problema 14.1.8 *(2 puntos)* Una pastelería hace diariamente una cantidad fija de dulces cuya masa requiere de un tiempo de reposo, el cual tiene que ser de una a dos horas. La pastelería usa un ingrediente secreto. La cantidad necesaria de ingrediente secreto, medida en gramos, varía en función del tiempo de reposo de la masa según la siguiente función:

$$Q(t) = \frac{1}{2}t^4 - 3t^2 + 5, \quad 1 \le t \le 2$$

siendo t el tiempo de reposo medido en horas.

a) La producción diaria de dulces tiene un coste fijo de 150 euros más el coste por el uso del ingrediente secreto, el cual cuesta 100 euros/gramo. Obtenga la función que representa el coste de producción diaria de estos dulces y encuentre el tiempo de reposo de la masa que minimiza dicho coste. Indique el valor del coste mínimo.

b) Obtenga el tiempo de reposo que maximiza el coste de producción e indique la cantidad de ingrediente secreto que se necesitaría en este caso.

Solución:

a) $C(t) = 150 + 100\left(\dfrac{1}{2}t^4 - 3t^2 + 5\right) = 50\left(t^4 - 6t^2 + 13\right)$
$C'(t) = 200t\left(t^2 - 3\right) = 0 \Longrightarrow t = \pm\sqrt{3}$, la solución negativa no es relevante.
$C''(t) = 600(t^2 - 1) \Longrightarrow C''(\sqrt{3}) = 1200 > 0 \Longrightarrow t = \sqrt{3}$ horas es un mínimo relativo con un coste de $C(\sqrt{3}) = 200$€
Tenemos $C(1) = 400$ y $C(2) = 250 \Longrightarrow$ el mínimo calculado es absoluto.

b) Por la visto en el apartado anterior el máximo coste se produce en $t = 1$ hora de reposo con una cantidad de $Q(1) = \dfrac{5}{2} = 2,5$ gramos.

Problema 14.1.9 *(2 puntos)* Se pide:

a) Se tienen 7 sobres cerrados. Uno de ellos contiene un premio y el resto son sobres vacíos. Se lanza un dado y luego se descartan tantos sobres vacíos como el dado indique. Posteriormente, se escoge al azar uno de los sobres que restan.

b) ¿Cuál es la probabilidad de escoger el sobre premiado?

c) Si salió el premio, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado del dado haya sido el 1?

Solución:

a) Sean G gana el premio y sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ el espacio muestral del dado.
Tenemos: $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \dfrac{1}{6}$
Tenemos: $P(G|1) = \dfrac{1}{6}$, $P(G|2) = \dfrac{1}{5}$, $P(G|3) = \dfrac{1}{4}$, $P(G|4) = \dfrac{1}{3}$ y $P(G|5) = \dfrac{1}{2}$ y $P(G|6) = 1$

b) $P(G) = P(G|1)P(1)+P(G|2)P(2)+P(G|3)P(3)+P(G|4)P(4)+P(G|5)P(5)+P(G|6)P(6) = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{6}+1\cdot\dfrac{1}{6} = \dfrac{49}{120} \simeq 0,40833$

c) $P(1|G) = \dfrac{P(G|1)P(1)}{P(G)} = \dfrac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{49}{120}} = \dfrac{10}{147} \simeq 0,06803$

Problema 14.1.10 *(2 puntos)* Para estimar la proporción de estudiantes de una determinada facultad que utilizan la cafetería se toma una muestra de estudiantes al azar.

a) Sabiendo que la proporción poblacional es $P = 0,55$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de estudiantes para garantizar que, con una confianza del 98,02 %, el margen de error en la estimación no supera el 10 %.

b) Si la muestra aleatoria fue de 100 estudiantes, de los cuales 70 utilizaban la cafetería, determine un intervalo de confianza al 95 %. para la proporción de estudiantes que utilizan la cafetería.

Solución:

a) Tenemos $NC = 98,02\,\%$
$NC = 0,9802 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,0198 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,0099$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1-\dfrac{\alpha}{2} = 1-0,0099 = 0,9901 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,33$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 2,33\sqrt{\frac{0,55\cdot 0,45}{n}} = 0,1 \Longrightarrow$$

$$n \ge \left(\frac{2,33}{0,1}\right)^2 (0,55\cdot 0,45) = 134,365275 \Longrightarrow n = 135$$

b) $n = 100$, $\hat{p} = \dfrac{70}{100} = 0,7$ y $NC = 95\,\%$:
$NC = 0,95 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1-\dfrac{\alpha}{2} = 1-0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,7\cdot 0,3}{100}} = 0,0898$$

$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,7-0,0898; 0,7+0,0898) = (0,6102; 0,7898) = (61,02\,\%; 78,98\,\%)$

14.2. Ordinaria

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN
Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.
Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.
DURACIÓN: 90 minutos.

Opción A

Problema 14.2.1 *(2 puntos)* Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

b) Determine la matriz X tal que

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|A| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

b) $X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Problema 14.2.2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = 6x^2 + ae^x - 2, \quad a \in \mathbb{R}$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a sabiendo que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = e - 1$.

b) Para $a = 1$, obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

a) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 2x^3 + ae^x - 2x\Big]_0^1 = ae - a = e - 1 \Longrightarrow a(e-1) = e - 1 \Longrightarrow a = 1.$

b) La ecuación punto pendiente de una recta es $y - b = m(x - a)$, en nuestro caso $a = 0$.
$f(x) = 6x^2 + e^x - 2 \Longrightarrow f'(x) = 12x + e^x \Longrightarrow m = f'(0) = 1$ y $b = f(0) = -1 \Longrightarrow y + 1 = x \Longrightarrow y = x - 1$

Problema 14.2.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^4}{x^2+1} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{x^2+1}{x+1} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Indique el dominio de la función $f(x)$ y analice su continuidad, señalando el tipo de discontinuidad si la presenta.

b) Determine las asíntotas de la función anterior.

Solución:

a)
- Continuidad en $x = 0$:
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x^4}{x^2+1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+1}{x+1} = 1 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Longrightarrow f$ no es continua en $x = 0$ hay una discontinuidad no evitable, la función tiene un salto.

- En la rama $x \le 0 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{-x^4}{x^2+1}$ el denominador no se anula para ningún valor de esta rama y, por tanto, es continua en toda la rama.
- En la rama $x > 0 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ el denominador se anula para $x = -1$ valor que no está en la rama y, por tanto, es continua en toda la rama.
- En conclusión, f es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.
- En conclusión, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, en $x = 0$ es $f(0) = 0$.

b) Asíntotas:

- En la rama $x \le 0 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{-x^4}{x^2+1}$ el denominador no se anula para ningún valor de esta rama y, por tanto, no tiene verticales.
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \Longrightarrow$ no hay horizontales.
$m = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \Longrightarrow$ no hay oblicuas.
- En la rama $x > 0 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ el denominador sólo se anula en $x = -1$ y no está en esta rama y, por tanto, no tiene verticales.
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \Longrightarrow$ no hay horizontales.
$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x^2+x} = 1$$
$$n = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1-x}{x+1}\right) = -1 \Longrightarrow$$
$$y = x - 1$$

.

Problema 14.2.4 *(2 puntos)* Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,55$ y $P(B) = 0,1$. Además se sabe que $P(\overline{B}|A) = 0,89$, donde $\overline{B}$ es el suceso complementario de B. Calcule las siguientes probabilidades:

a) $P(A \cap B)$.

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$, siendo $\overline{A}$ el suceso complementario de A.

Solución:

a) $P(\overline{B}|A) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = 0,89 \Longrightarrow P(A) - P(A \cap B) = 0,89P(A) \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,11P(A) = 0,11 \cdot 0,55 = 0,0605$.

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0,55 + 0,1 - 0,0605) = 0,4105$

Problema 14.2.5 *(2 puntos)* La capacidad en mililitros de un bote de champú se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 10 ml.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 200 ml. Determine un intervalo de confianza del 95 % para la capacidad media de los botes de champú.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 mililitros, con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

$$N(\mu; 10)$$

a) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$\overline{X} = 200$ y $n = 10$:
$E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\dfrac{10}{\sqrt{20}} = 4,3827$

$$\left(\overline{X} - E, \overline{X} + E\right) = (195,6173; 204,3827)$$

b) $NC = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,10 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$$P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,5 = 1,645\frac{10}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \simeq 1082,41$$

$$n = 1083$$

Opción B

Problema 14.2.6 *(2 puntos)* Una pastelería tiene 220 buñuelos de chocolate, nata y crema. Hay el doble de buñuelos de nata que de crema. Además, el doble de la cantidad de los buñuelos de crema más el triple de los buñuelos de chocolate es igual al doble de la cantidad de los buñuelos de nata. Calcule la cantidad de buñuelos que hay de cada tipo.
Solución:
Sean x el número de buñuelos de chocolate, y el número de buñuelos de nata y z el número de buñuelos de crema. Se tiene que

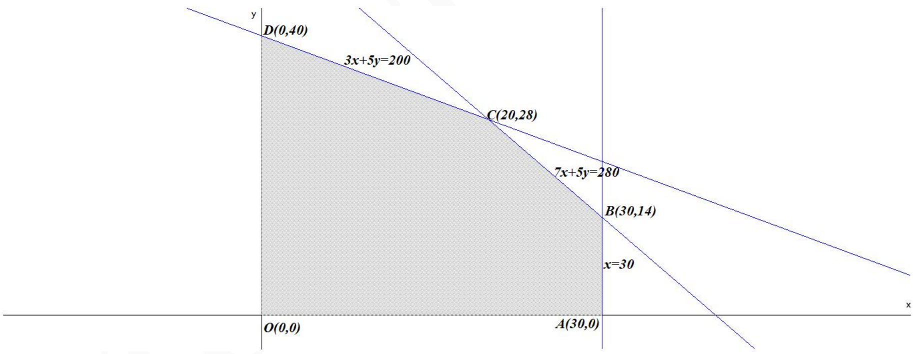
$$\begin{cases} x+y+z=220 \\ y-2z=0 \\ 3x-2y+2z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=40 \\ y=120 \\ z=60 \end{cases}$$

Problema 14.2.7 *(2 puntos)* Se desea producir pintura verde en dos tonalidades, VERDE1 y VERDE2, mezclando pintura azul y amarilla en distintas proporciones. Un litro de pintura VERDE1 necesita 0,3 litros de azul y 0,7 litros de amarillo, mientras que un litro de pintura VERDE2 necesita 0,5 litros de azul y 0,5 litros de amarillo. Actualmente se dispone de 20 l de azul y 28 de amarillo. El beneficio por litro de la pintura VERDE1 es de 1 euro, y por litro de pintura VERDE2 es de 1,2 euros. No se pueden producir más de 30 litros de pintura VERDE1. ¿Cuántos litros de pintura VERDE1 y VERDE2 debe producir para maximizar sus beneficios? ¿Cuál será el beneficio obtenido?
Solución:
Sean x litros de pintura VERDE1 e y litros de pintura VERDE2.

	azul	amarillo	beneficio
VERDE1	$0,3$	$0,7$	1
VERDE2	$0,5$	$0,5$	$1,2$
	20	28	

Región factible:

$$\begin{cases} 0,3x+0,5y\le 20 \\ 0,7x+0,5y\le 28 \\ x\le 30 \\ x,y\ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x+5y\le 200 \\ 7x+5y\le 280 \\ x\le 30 \\ x,y\ge 0 \end{cases}$$



Los vértices son $O(0,0)$, $A(30,0)$, $B(30,14)$, $C(20,28)$ y $D(0,40)$
La función objetivo es $f(x,y)=x+1,2y$

$$\begin{cases} f(0,0)=0 \\ f(30,0)=30 \\ f(30,14)=46,8 \\ f(20,28)=53,6 \\ f(0,40)=48 \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 53,6€ vendiendo 20 l de VERDE1 y 28 l de VERDE2.

Problema 14.2.8 *(2 puntos)* Se consideran las siguientes funciones reales de variable real:

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x, \quad g(x) = 4x$$

a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.

b) Calcule el área de la región acotada limitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el primer cuadrante del plano cartesiano.

Solución:

a) $f'(x) = -3x^2 + 4x + 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $x = -\dfrac{2}{3}$

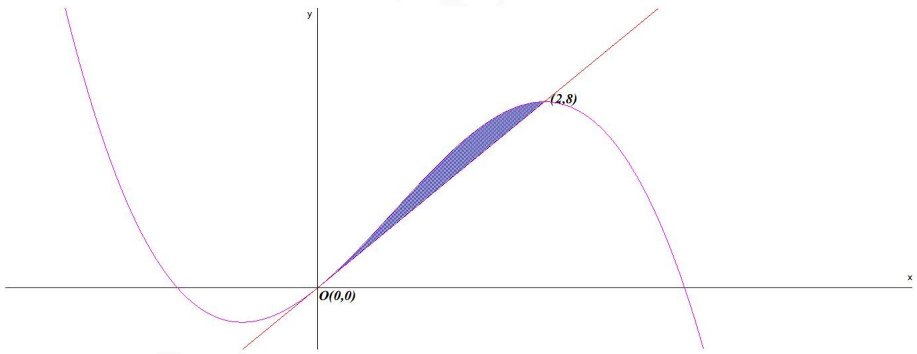
	$(-\infty, -2/3)$	$(-2/3, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -2/3) \cup (2, \infty)$ y creciente en el $(-2/3, 2)$.

b) $f(x) = g(x) \implies -x^3 + 2x^2 = 0 \implies x_0 = 0$ y $x_1 = 2$.

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int (-x^3 + 2x^2)\, dx = -\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}$$

$$S = \left| \int_0^2 (f(x) - g(x))\, dx \right| = |F(2) - F(0)| = \left| \frac{4}{3} - 0 \right| = \frac{4}{3} \simeq 1,33\ u^2$$



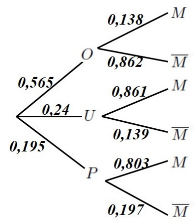
Problema 14.2.9 *(2 puntos)* El Ministerio de Educación y Formación Profesional convoca regularmente unas ayudas al estudio. En el curso 2019-2020 las ayudas destinadas a las Enseñanzas Obligatorias representaron el 56,5 % del total, el 24 % correspondieron a Enseñanzas Universitarias, mientras que el 19,5 % restante fueron para Enseñanzas Postobligatorias No Universitarias. Las ayudas concedidas son financiadas o bien por el ministerio o bien por la Comunidad Autónoma a la que pertenece el estudiante. Concretamente, en el curso 2019-2020, las ayudas financiadas por el ministerio representaron el 13,8 % del total de ayudas de Enseñanzas Obligatorias, el 86,1 % de las Universitarias y el 80,3 % de las Postobligatorias No Universitarias. Eligiendo una ayuda al estudio al azar de las anteriormente descritas, calcule la probabilidad de que:

a) Sea financiada por el ministerio.

b) La ayuda sea de Enseñanza Obligatoria, sabiendo que ha sido financiada por el ministerio.

Solución:

Sean O las ayudas son destinadas a las Enseñanzas Obligatorias, U las ayudas son destinadas a las Enseñanzas Universitarias, P las ayudas son destinadas a las Enseñanzas Postobligatorias No Universitarias, M las ayudas han sido financiadas por el ministerio y $\overline{M}$ las ayudas han sido financiadas por la Comunidad Autónoma.



a) $P(M) = P(M|O)P(O) + P(M|U)P(U) + P(M|P)P(P) = 0,565 \cdot 0,138 + 0,24 \cdot 0,861 + 0,195 \cdot 0,803 = 0,4412$

b) $P(O|M) = \dfrac{P(M|O)P(O)}{P(M)} = \dfrac{0,565 \cdot 0,138}{0,4412} = 0,1767$

Problema 14.2.10 *(2 puntos)* El 30 % de los individuos de una población tienen una titulación universitaria. Se escoge una muestra al azar de 120 individuos.

a) ¿Cuál es la distribución aproximada que sigue la proporción de individuos con titulación universitaria de la muestra?

b) Halle la probabilidad de que más del 35 % de los individuos de la muestra sean titulados universitarios.

Solución:

a) $p = 0,3$ y $n = 120$. Tenemos $n > 30$, $np = 36 > 5$ y $nq = 84 > 5 \Longrightarrow \hat{p} \approx N\left(p, \sqrt{\dfrac{pq}{n}}\right) = N(0,3; 0,0418)$

b) $P(\hat{p} \geq 0,35) = \left(Z \geq \dfrac{0,35 - 0,3}{0,0418}\right) = P(Z \geq 1,2) = 1 - P(Z \leq 1,2) = 1 - 0,8849 = 0,1151$

14.3. Ordinaria-Coincidente

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

DURACIÓN: 90 minutos.

Opción A

Problema 14.3.1 *(2 puntos)* Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcule $A^2 - A$.

b) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Solución:

a) $A^2 - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $|A| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

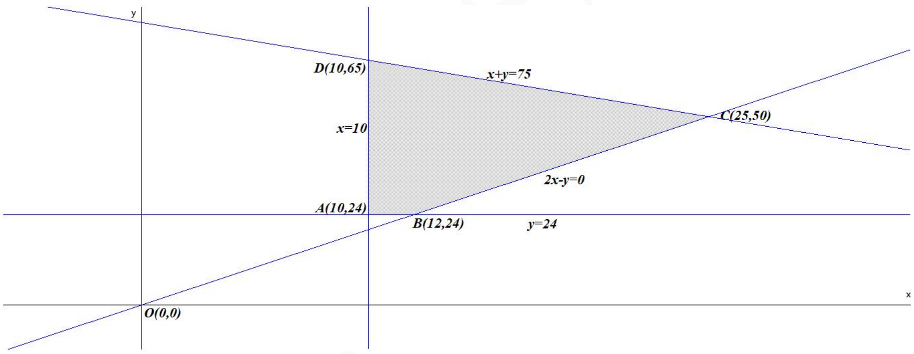
Problema 14.3.2 *(2 puntos)* En una cooperativa se produce aceite de girasol y de oliva. Hay que producir al día como mínimo 10 litros de aceite de girasol y 24 litros de aceite de oliva. Además, los litros de aceite de oliva producidos deben ser al menos el doble de los litros de aceite de girasol y no hay capacidad para producir en total más de 75 litros al día. Sabiendo que un litro de aceite de girasol da un beneficio de 1 euro y que un litro de aceite de oliva da un beneficio de 3 euros, ¿cuántos litros de aceite de cada tipo habrá que producir para maximizar el beneficio? ¿Cuál será ese beneficio?

Solución:

Sean x litros de aceite de girasol e y litros de aceite de oliva.

Región factible:

$$\begin{cases} x + y \leq 75 \\ y \geq 2x \\ x \geq 10 \\ y \geq 24 \end{cases}$$



Los vértices son $A(10,24)$, $B(12,24)$, $C(25,50)$ y $D(10,65)$

La función objetivo es $f(x,y) = x + 3y$

$$\begin{cases} f(10,24) = 82 \\ f(12,24) = 84 \\ f(25,50) = 175 \\ f(10,65) = 205 \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 205€ vendiendo 10 l de girasol y 65 l de oliva.

Problema 14.3.3 *(2 puntos)* Considere la función real de variable real

$$f(x) = ax^2 + 4x + 5$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Para $a = 1$ obtenga la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

a) $f'(x) = 2ax + 4 \Longrightarrow f'(1) = 2a + 4 = 0 \Longrightarrow a = -2.$

b) La ecuación punto pendiente de una recta es $y - b = m(x - a)$, en nuestro caso $a = 0$.
$f(x) = x^2 + 4x + 5 \Longrightarrow f'(x) = 2x + 4 \Longrightarrow m = f'(0) = 4$ y $b = f(0) = 5 \Longrightarrow y - 5 = 4x \Longrightarrow y = 4x + 5$

Problema 14.3.4 *(2 puntos)* El informe ALADINO es un estudio de la Agencia Española de Seguridad Alimentaria y Nutrición (AESAN) que se realiza a escolares de 6 a 9 años residentes en España. En el informe de 2019, el 50,2 % de los escolares encuestados tenían entre 6 y 7 años, los restantes tenían entre 8 y 9 años. Según los estándares de la Organización Mundial de la Salud (OMS), se observó que el 23 % de los escolares estudiados presentaban sobrepeso y que en el grupo de escolares con 6-7 años de edad el 78 % no tenía sobrepeso. Eligiendo un escolar al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Tenga sobrepeso y pertenezca al grupo de escolares con 6-7 años de edad.

b) No tenga sobrepeso y pertenezca al grupo de escolares con 8-9 años de edad.

Solución:
Sean A entre 6 y 7 años, B entre 8 y 9 años, S tiene sobrepeso y $\overline{S}$ no tiene sobrepeso.
Tenemos $P(\overline{S}|A) = \dfrac{P(\overline{S} \cap A)}{P(A)} \Longrightarrow P(\overline{S} \cap A) = P(\overline{S}|A) \cdot P(A) = 0,78 \cdot 0,502 = 0,39156$

	S	$\overline{S}$	
A		$0,39156$	$0,502$
B			
	$0,23$	$0,77$	1

$\Longrightarrow$

	S	$\overline{S}$	
A	$0,11044$	$0,39156$	$0,502$
B	$0,11956$	$0,37844$	$0,498$
	$0,23$	$0,77$	1

a) $P(S \cap A) = 0,11044.$

b) $P(\overline{S} \cap B) = 0,37844$

Problema 14.3.5 *(2 puntos)* Para estimar el porcentaje de países firmantes de la Agenda 2030 que cumplen en 2022 al menos la mitad de los objetivos de desarrollo sostenible se tomó una muestra de países al azar.

a) Sabiendo que la proporción poblacional es $P = 0,20$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de países para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 5 %.

b) Si la muestra aleatoria fue de 34 países, de los cuales 10 cumplían al menos la mitad de los objetivos de desarrollo sostenible, determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de países firmantes que cumplen en 2022 al menos la mitad de los objetivos de desarrollo sostenible.

Solución:

a) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$P = 0,20$ y $Q = 0,80$
$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{PQ}{n}} = 1,96\sqrt{\dfrac{0,2 \cdot 0,8}{n}} = 0,05 \Longrightarrow n \geq 245{,}8624 \Longrightarrow n = 246$

b) $\hat{p} = \dfrac{10}{34} = 0,2941$, $\hat{q} = 0,7059$ y $n = 34$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,2941 \cdot 0,7059}{34}} = 0,1532$$

$$(\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,141; 0,4473)$$

Opción B

Problema 14.3.6 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + ay = 1 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 2a + 2 = 0 \Longrightarrow a = -1$

- ☛ Si $a \in R - \{-1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ =número de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)
- ☛ Si $a = -1$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] =$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Si $a = -1$:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -3y + 2z = -3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{3}\lambda \\ y = 1 + \frac{2}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 14.3.7 *(2 puntos)* Considere la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2} & \text{si} \quad x \le 0 \\ 2x + a & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en su dominio.

b) Para $a = 1$, obtenga el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

a) ☛ Las dos ramas son continuas, independientemente del valor de a.

☛ Continuidad en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} e^{x^2} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (2x + a) = a \\ f(0) = 1 \end{cases} \Longrightarrow a = 1$$

b) Si $a = 1$ y el área pedida se encuentra en el intervalo $[1, 3]$ hay que comprobar si la rama $f(x) = 2x + 1$ corta al eje de abscisas dentro del intervalo: $2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1/2$, luego la función no corta al eje de abscisas dentro del intervalo y los límites de integración serán 1 y 3.

$$S = \int_1^3 (2x + 1)\, dx = x^2 + x\Big]_1^3 = 12 - 2 = 10\ u^2$$

Problema 14.3.8 *(2 puntos)* Considere la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x + 2}{x - 3}$$

a) Halle el dominio de la función y determine sus asíntotas.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$ y sus asíntotas:

☛ Verticales en $x = 3$:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x + 2}{x - 3} = \left[\frac{5}{0^-}\right] = -\infty$$

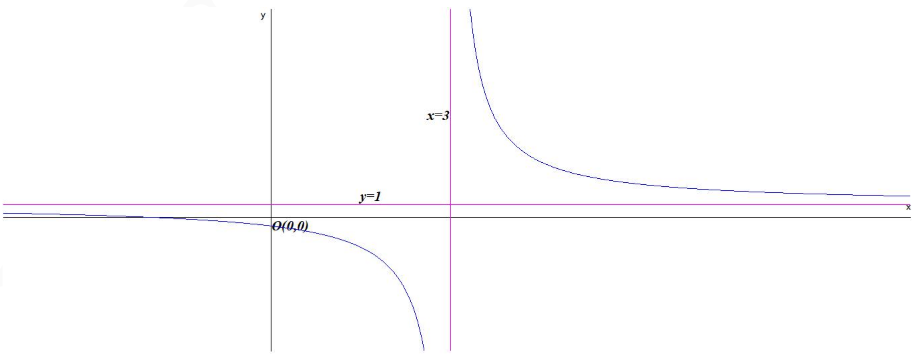
$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x + 2}{x - 3} = \left[\frac{5}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ Horizontales en $y = 1$:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x + 2}{x - 3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x + 2}{x - 3} = 1$$

☛ Oblicuas no hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\dfrac{5}{(x - 3)^2} \neq 0 \Longrightarrow$ no hay extremos relativos. Como $f'(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$ la función es decreciente en todo el dominio de la función.



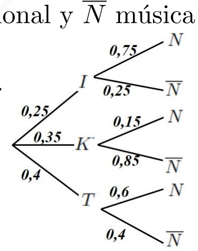
Problema 14.3.9 *(2 puntos)* En un festival de música actúan varios grupos del panorama nacional e internacional reconocidos en la industria musical actual. Los artistas se agrupan por estilo musical en las siguientes categorías: el 25 % son bandas de música *indie*, el 35 % de *k-pop* y el resto de música *trap*. Además, se sabe que son nacionales el 75 % de los grupos *indie*, el 15 % de las agrupaciones de *k-pop* y el 60 % de los artistas *trap*. Eligiendo un grupo musical al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Sea nacional.

b) Toque música *indie*, sabiendo que es nacional.

Solución:

Sean I música *indie*, K música *k-pop*, T música *trap*, N música nacional y $\overline{N}$ música no nacional.



a) $P(N) = P(N|I)P(I) + P(N|K)P(K) + P(N|T)P(T) = 0,75 \cdot 0,25 + 0,15 \cdot 0,35 + 0,6 \cdot 0,4 = 0,48$

b) $P(I|N) = \dfrac{P(N|I)P(I)}{P(N)} = \dfrac{0,75 \cdot 0,25}{0,48} = 0,390625$

Problema 14.3.10 *(2 puntos)* El porcentaje de agua en el cuerpo humano se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ puntos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 personas, obteniéndose una media muestral de 65 puntos. Determine un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) Suponga que $\mu = 67$ puntos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 personas, la media muestral, $\overline{X}$, este comprendida entre 65 y 69 puntos.

Solución:

$$N(\mu; 8)$$

a) $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$$P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$$

$\overline{X} = 65$ y $n = 20$:

$E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\dfrac{8}{\sqrt{20}} = 4,6063$

$$\left(\overline{X} - E, \overline{X} + E\right) = (60,3937; 69,6063)$$

b) $N(67; 8) \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(67; \dfrac{8}{\sqrt{10}}\right) = N(67; 2,5298)$

$P(65 \le \overline{X} \le 69) = \left(\dfrac{65-67}{8/\sqrt{10}} \le Z \le \dfrac{69-67}{8/\sqrt{10}}\right) = P(-0,79 \le Z \le 0,79) = P(Z \le 0,79) - P(Z \le -0,79) = 2P(Z \le 0,79) - 1 = 2 \cdot 0,7852 - 1 = 0,5704$

14.4. Extraordinaria

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.
Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.
DURACIÓN: 90 minutos.

Opción A

Problema 14.4.1 (2 puntos) Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

.

a) Determine A^3 y A^{2023}.

b) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Solución:

a) $A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{2023} = (A^3)^{674}A = I \cdot A = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $|A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = A^2$ ya que $A \cdot A^2 = A^3 = I \Longrightarrow$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Problema 14.4.2 (2 puntos) Considere la función real de variable real

$$f(x) = x^3 + 2x^2$$

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Determine los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si son máximos o mínimos.

Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 + 4x \Longrightarrow m = f'(1) = 7$, $a = 1$ y $b = f(a) = f(1) = 3$.
La ecuación punto pendiente de una recta es $y - b = m(x - a) \Longrightarrow y - 3 = 7(x - 1) \Longrightarrow y = 7x - 4$

b) $f'(x) = 3x^2 + 4x = 0 \Longrightarrow x = 0$, $x = -\dfrac{4}{3}$

$f''(x) = 6x + 4 \Longrightarrow \begin{cases} f''(0) = 4 > 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ mínimo} \\ f''\left(-\dfrac{4}{3}\right) = -4 < 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{4}{3} \text{ máximo} \end{cases}$

Problema 14.4.3 (2 puntos) Considere la función real de variable real.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3 & \text{si} \quad x < 2 \\ e^x & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en su dominio.

b) Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
Continuidad en $x = 2$:

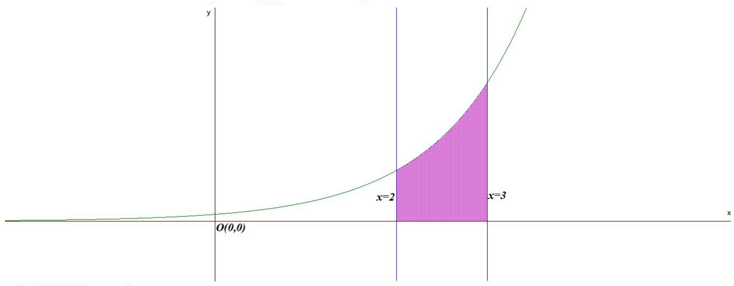
$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (ax^2 + 3) = 4a + 3 \\ \displaystyle\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (e^x) = e^2 \\ f(2) = e^2 \end{array} \right. \Longrightarrow 4a + 3 = e^2 \Longrightarrow$$

$$a = \frac{e^2 - 3}{4} \simeq 1,097264024$$

b) $f(x) = e^x \neq 0 \Longrightarrow$ sólo hay un recinto de integración $S_1 : [2, 3]$:

$$S_1 = \int_2^3 e^x \, dx = e^x]_2^3 = e^3 - e^2$$

$$S = |S_1| = e^3 - e^2 \simeq 12,696 \; u^2$$



Problema 14.4.4 (2 puntos) Un estudio europeo sobre hábitos alimenticios y actividad física indica que el 27,4 %de mujeres españolas mayores de 16 años practica semanalmente alguna actividad física durante al menos 150 minutos, y que el 65,1 % consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día. Además, el 76,3 % de estas mujeres dedica semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física o consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día. Calcule la probabilidad de que eligiendo una mujer española mayor de 16 años al azar:

a) Dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física y consuma de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.

b) No dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física, sabiendo que no consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.

Solución:

Sean A practica actividad física y F come de 1 a 4 porciones de fruta.
Tenemos: $P(A) = 0,274$, $P(F) = 0,651$ y $P(A \cup F) = 0,763$

a) $P(A \cup F) = P(A) + P(F) - P(A \cap F) \Longrightarrow P(A \cap F) = P(A) + P(F) - P(A \cup F) = 0,274 + 0,651 - 0,763 = 0,162$

b) $P(\overline{A}|\overline{F}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{P(\overline{A \cup F})}{1 - P(F)} = \dfrac{1 - P(A \cup F)}{1 - P(F)} = \dfrac{1 - 0,763}{1 - 0,651} = 0,6791$

Problema 14.4.5 (2 puntos) Para estimar la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de la pandemia se tomó una muestra de empresas al azar.

a) Sabiendo que la proporción poblacional es $P = 0,55$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de empresas para garantizar que, con una confianza del 99,01 %, el margen de error en la estimación no supere el 10 %.

b) Si la muestra aleatoria fue de 100 empresas, de las cuales 70 tuvieron pérdidas, determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de pandemia.

Solución:

a) $NC = 0,9901 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,0099 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,00495$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,99505 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$
$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,1 = 2,575\sqrt{\dfrac{0,55 \cdot 0,45}{n}} \Longrightarrow n \ge 164,1079687 \Longrightarrow n = 165.$

b) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
$n = 100$, $\hat{p} = \dfrac{70}{100} = 0,7$ y $\hat{q} = 0,3 \Longrightarrow$
$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\dfrac{0,7 \cdot 0,3}{100}} = 0,0898$
$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,7 - 0,0898; 0,7 + 0,0898) = (0,6102; 0,7898)$

Opción B

Problema 14.4.6 (2 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ x + ay + 2z = a \\ x + 2y + az = 1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 1\\ 1 & a & 2 & a\\ 1 & 2 & a & 1\end{array}\right);\quad |A|=a^3-7a+6=0\Longrightarrow a=-3,\ a=1,\ a=2$$

- ☛ Si $a\in\mathbb{R}-\{-3,1,2\}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=\text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a=-3$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 2 & -3\\ 1 & 2 & -3 & 1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ 3F_2+F_1\\ 3F_3+F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -8 & 8 & -8\\ 0 & 7 & -7 & 4\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 8F_3+7F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -8 & 8 & -8\\ 0 & 0 & 0 & -24\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

- ☛ Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

- ☛ Si $a=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 2 & 1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ 2F_2-F_1\\ 2F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 2 & 1\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

b) Si $a=0$:

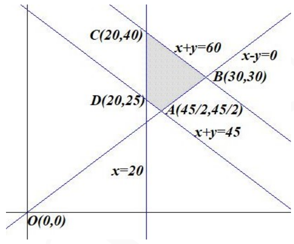
$$\left\{\begin{array}{l} y+2z=1\\ x+2z=0\\ x+2y=1\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=-1/3\\ y=2/3\\ z=1/6\end{array}\right.$$

Problema 14.4.7 (2 puntos) Una entrenadora personal debe diseñar una rutina para un cliente con una duración entre 45 y 60 minutos repartidos entre ejercicios de fuerza y cardiovasculares. El tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza no puede superar al de los cardiovasculares, aunque el tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza debe ser de al menos 20 minutos. La entrenadora considera que para su cliente el beneficio de un minuto cardiovascular es doble que un minuto de fuerza. ¿Qué duración de cada tipo de ejercicios resulta más beneficiosa para su cliente en la rutina programada? ¿Y la menos beneficiosa?

Solución:

Sean x tiempo de entrenamiento de fuerza e y tiempo de entrenamiento cardiovascular.

a) La región factible:



$$S:\begin{cases} 45 \le x+y \le 60 \\ x \le y \\ x \ge 20 \\ y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y \le 60 \\ x+y \ge 45 \\ x \le y \\ x \ge 20 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

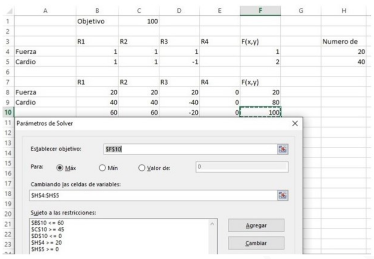
Los vértices a estudiar serán: $A\left(\dfrac{45}{2},\dfrac{45}{2}\right)$, $B(30,30)$, $C(20,40)$ y $D(20,25)$.

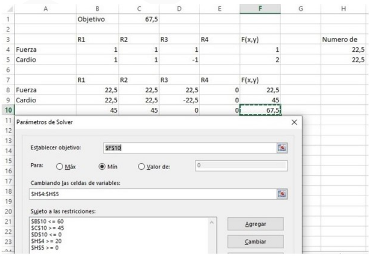
b) $f(x,y) = x + 2y$ en S:

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{45}{2},\dfrac{45}{2}\right) = \dfrac{135}{2} = 67,5 \\ f(30,30) = 90 \\ f(20,40) = 100 \\ f(20,25) = 70 \end{cases} \Longrightarrow$$

El entrenamiento más beneficioso sería con 20 minutos de fuerza y 40 de cardiovascular, con una duración de 100 totales.
El entrenamiento menos beneficioso sería con 22,5 minutos de fuerza y 22,5 de cardiovascular, con una duración de 67,5 totales.

Solución por solver





Problema 14.4.8 (2 puntos) Considere la función real de variable real

$$f(x) = x + \frac{2}{x}$$

a) Halle el dominio de la función y determine sus asíntotas.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

$$f(x) = x + \frac{2}{x} = \frac{x^2+2}{x}$$

a) $\text{Dom}(f) = R - \{0\}$
Asíntotas:

☛ Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+2}{x} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+2}{x} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+2}{x} = +\infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = 0$$

$$y = x$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

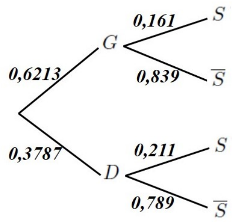
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$ y decreciente en el $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$, con un máximo relativo en $(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ y un mínimo relativo en $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

Problema 14.4.9 (2 puntos) La Agencia Estatal de Investigación Española convoca regularmente el Programa Ramón y Cajal para la contratación de investigadores de trayectoria destacada en dos modalidades: general y jóvenes doctores. En la convocatoria 2021 se presentaron 2159 solicitudes en la modalidad general y 1316 en la modalidad de jóvenes doctores. El porcentaje de investigadores seleccionados en la modalidad general fue el 16,1 %, mientras que en la modalidad de jóvenes doctores fue del 21,1 %. Eligiendo un investigador al azar, entre los solicitantes, calcule la probabilidad de que:

a) Sea seleccionado para recibir una de las ayudas Ramón y Cajal.

b) La solicitud sea de la modalidad general, sabiendo que el investigador ha sido seleccionado.

Solución:
Sean G modalidad general, D jóvenes doctores, S seleccionado y $\overline{S}$ no seleccionado.
Tenemos: $P(G) = \dfrac{2159}{2159+1316} = 0,6213$, $P(D) = 1 - 0,6213 = 0,3787$, $P(S|G) = 0,161$ y $P(S|D) = 0,211$



a) $P(S) = P(S|G)P(G) + P(S|D)P(D) =$
$0,161 \cdot 0,6213 + 0,211 \cdot 0,3787 = 0,179935$

b) $P(G|S) = \dfrac{P(S|G)P(G)}{P(S)} = \dfrac{0,161 \cdot 0,6213}{0,179935} = 0,55592$

Problema 14.4.10 (2 puntos) La distancia diaria en kilometros recorrida por un autobus urbano se puede aproximar por una variable aleatoria con distribucion normal de media desconocida μ y desviacion tipica igual a 2 kilometros.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 50 kilométros diarios. Determine un intervalo de confianza del 99 % para la distancia media recorrida diariamente por los autobuses urbanos.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kilómetro, con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

$$N(\mu; 2)$$

a) $n = 20$, $\overline{X} = 50$ y $NC = 99\,\% = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\frac{2}{\sqrt{20}} = 1,1516$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (50 - 1,1516; 50 + 1,1516) = (48,8484; 51,1516)$$

b) $NC = 90\,\% = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,10 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$$

$$E = 1 \Longrightarrow 1 = 1,645\frac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,645 \cdot 2}{1}\right)^2 = 10,8241 \Longrightarrow n = 11$$

14.5. Extraordinaria-Coincidente

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.
Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.
DURACIÓN: 90 minutos.

Opción A

Problema 14.5.1 (2 puntos) Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

.

a) Determine la matriz X tal que, $A \cdot X = B$.

b) Calcule $B \cdot B^t \cdot A^{-1}$, donde B^t denota la matriz transpuesta de B y A^{-1} la matriz inversa de A.

Solución:

a) Como $|A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists\, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

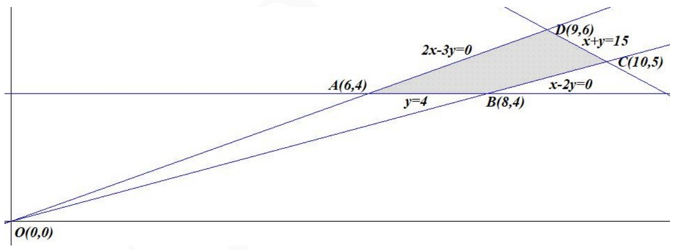
$$A \cdot X = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $B \cdot B^t \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$

Problema 14.5.2 (2 puntos) Una familia acaba de comprar una parcela y desea construir en ella una piscina rectangular. Tiene que decidir el largo y el ancho de la piscina sabiendo que el largo no puede ser más de 2 veces el ancho, y que 3 veces el ancho no puede sobrepasar a 2 veces el largo. Además, el perímetro debe tener 30 metros como máximo y quieren que la piscina tenga al menos 4 metros de ancho. ¿Qué dimensiones deben elegir si quieren una piscina lo más larga posible?
Solución:
Sean x largo de la piscina e y ancho de la piscina.

a) La región factible:

$$S : \begin{cases} x \leq 2y \\ 3y \leq 2x \\ 2x + 2y \leq 30 \\ x \geq 0 \\ y \geq 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ 2x - 3y \geq 0 \\ x + y \leq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 4 \end{cases}$$



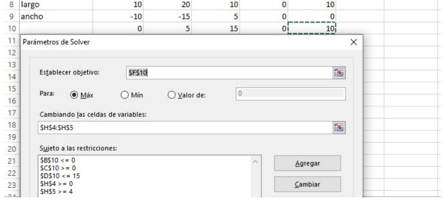
Los vértices a estudiar serán: $A\,(6,4)$, $B(8,4)$, $C(10,5)$ y $D(9,6)$.

b) $f(x,y) = x$ en S:

Solución por solver

$$\begin{cases} f\,(6,4) = 6 \\ f(8,4) = 8 \\ f(10,5) = 10 \\ f(9,6) = 9 \end{cases} \Longrightarrow$$

El máximo largo es de 10 m con un ancho de 5 m.



Problema 14.5.3 (2 puntos) Dada la siguiente función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} ax^2e^{x-3} & \text{si} \quad x \le 3 \\ \\ \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función sea continua en $x = 3$.

b) Para $a = 1$, determine los maximos y minimos relativos de $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 1)$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 3$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (ax^2e^{x-3}) = 9a \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2x - 1}{2x - 3} = \dfrac{5}{3} \\ f(3) = 9a \end{cases} \Longrightarrow$$

$$9a = \frac{5}{3} \Longrightarrow a = \frac{5}{27}$$

b) $f(x) = x^2e^{x-3} \Longrightarrow f'(x) = x(x+2)e^{x-3} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -2$. Ambos puntos pertenecen a la rama $(-\infty, 3]$.

$$f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^{x-3} \Longrightarrow \begin{cases} f''(0) = 2e^{-3} > 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ Mínimo} \\ f''(-2) = -2e^{-5} < 0 \Longrightarrow x = -2 \text{ Máximo} \end{cases}$$

Problema 14.5.4 (2 puntos) Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,57$, $P(B) = 0,46$ y $P(A \cap B) = 0,28$. Calule las siguientes probabilidades:

a) $P(A \cup B$.

b) $P(B|\overline{A})$ siendo $\overline{A}$ el suceso complementario de A.

Solución:

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,57 + 0,46 - 0,28 = 0,75$

b) $P(B|\overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \dfrac{0,46 - 0,28}{1 - 0,57} = 0,4186$

Problema 14.5.5 (2 puntos) La longitud en metros de un coche se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 0,2$ metros.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 4 centímetros con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 4$ metros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 36$ coches, la longitud media, $\overline{X}$, sea mayor de 4,04 metros.

Solución:

a) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,04 = 1,96\frac{0,2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 96,04 \Longrightarrow n = 97.$$

b) $n = 36$, $\mu = 4$ y $\overline{X} \approx N\left(4; \dfrac{0,2}{\sqrt{36}}\right) = N(4; 0,0333)$

$P(\overline{X} \ge 4,04) = P\left(Z \ge \dfrac{4,04-4}{0,0333}\right) = P(Z \ge 1,2) =$
$1 - P(Z \le 1,2) = 1 - 0,8849 = 0,1151$

Opción B

Problema 14.5.6 (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{c} 2ax + y + 2z = 2 \\ x - az = 0 \\ 3x - y - z = 2a \end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2a & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -a & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 2a \end{array}\right); \quad |A| = -2a^2 - 3a - 1 = 0 \Longrightarrow$$

$$a = -1, \ \ a = -\frac{1}{2}$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, -\dfrac{1}{2}\} \Longrightarrow |A| \ne 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $a = -\dfrac{1}{2}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 + 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5/2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

☛ Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ 2F_2+F_1\\ 2F_3+3F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sistema Compatible Indeterminado

b) Si $a=1$:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x+y+2z=2\\ x-z=0\\ 3x-y-z=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2/3\\ y=-2/3\\ z=2/3 \end{array}\right.$$

Problema 14.5.7 (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real dependiente de un parámetro real a:

$$f(x)=-x^3+4ax^2-17x+5a$$

a) Calcule el valor de a para que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$ sea la misma que la pendiente de la recta $g(x)=\sqrt{3}-4x$.

b) Para $a=0$, obtenga el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=2$.

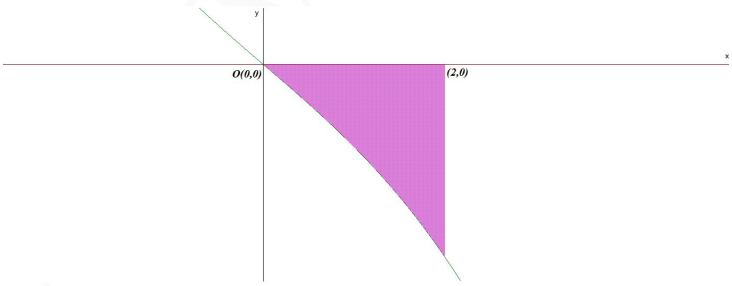
Solución:

a) $f'(x)=-3x^2+8ax-17 \Longrightarrow m=f'(1)=-20+8a$.
$g'(x)=-4 \Longrightarrow g'(1)=4$ como $f'(1)=g'(1) \Longrightarrow -20+8a=-4 \Longrightarrow a=2$

b) Si $a=0 \Longrightarrow f(x)=-x^3-17x=0 \Longrightarrow x=0$ y $x=\pm\sqrt{17}$. Ninguno de estos valores están dentro del intervalo de integración, luego sólo hay un área a estudiar $S_1:[0,2]$.

$$S_1=\int_0^2(-x^3-17x)\,dx=-\frac{x^4}{4}-\frac{17x^2}{2}\Big]_0^2=-38+0=38$$

$$S=|S_1|=38\ u^2$$



Problema 14.5.8 (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x)=\frac{x^2+4x+3}{x}$$

a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) Determine las asíntotas de la función.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{x^2-3}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ y decreciente en el $(-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3})$, con un máximo relativo en $(-\sqrt{3}, 4-2\sqrt{3})$ y un mínimo relativo en $(\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3})$.

b) $\text{Dom}(f) = R - \{0\}$
Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+4x+3}{x} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+4x+3}{x} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+4x+3}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+4x+3}{x} = +\infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x+3}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+3}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{x}\right) = 4$$

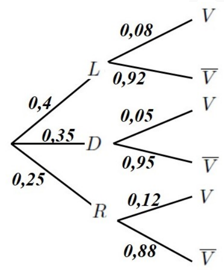
$$y = x + 4$$

Problema 14.5.9 (2 puntos) Un restaurante de comida rápida sirve el 40 % de los menús para consumir en el local, el 35 % es transportado por motoristas a domicilio (delivery) y el resto de menús son recogidos por los clientes en el local (take-away). El restaurante tiene un menú vegetariano que es consumido por el 8 % de los clientes en el local, el 5 % de los pedidos a domicilio y el 12 % de los recogidos en el local por los propios clientes. Eligiendo un menú al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Sea vegetariano.

b) Haya sido llevado a domicilio por un motorista, sabiendo que es vegetariano.

Solución:
Sean L consume en el local, D se transporta a domincilio, R lo recoge el cliente, V menú vegetariano y $\overline{V}$ menú no vegetariano.



a) $P(V) = P(V|L)P(L) + P(V|D)P(D) + P(V|R)P(R) =$
$0,08 \cdot 0,4 + 0,05 \cdot 0,35 + 0,12 \cdot 0,25 = 0,0795$

b) $P(D|V) = \dfrac{P(V|D)P(D))}{P(V)} = \dfrac{0,05 \cdot 0,35}{0,0795} = 0,2201$

Problema 14.5.10 (2 puntos) La vida media de una persona medida en semanas se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 300$ semanas.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 personas ya fallecidas, obteniendose una media muestral de 4020 semanas. Determine un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) ¿Qué tamaño de muestra sería necesario para que la longitud del intervalo anterior no sobrepase las 100 semanas?

Solución:

$$N(\mu; 300)$$

a) $n = 20$, $\overline{X} = 4020$ y $NC = 99\,\% = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\frac{300}{\sqrt{20}} = 172,7363$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (4020 - 172,7363; 4020 + 172,7363) = (3847,2637; 4192,7363)$$

b) $E = \dfrac{100}{2} = 50 \Longrightarrow 50 = 2,575\dfrac{300}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\dfrac{2,575 \cdot 300}{50}\right)^2 = 238,7025 \Longrightarrow n = 239$

Capítulo 15

Murcia

15.1. Ordinaria

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

Problema 15.1.1 (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left\{\begin{array}{l} ax+y+z=1 \\ 2x+y+z=1 \\ x+ay+z=2 \end{array}\right. \quad \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para $a=0$. (0,5 puntos)

Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \end{array}\right); \quad |A|=-a^2+3a-2=0 \Longrightarrow a=1, \ \ a=2$$

- Si $a\neq 1$ y $a\neq 2 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

- Si $a=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ 2F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

Si $a = 0$:

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \right) \Longrightarrow \begin{cases} -2z = -4 \Longrightarrow z = 2 \\ y + 2 = 1 \Longrightarrow y = -1 \\ x + 0 + 2 = 2 \Longrightarrow x = 0 \end{cases}$$

Problema 15.1.2 (2,5 puntos) Una empresa fabrica relojes smartwatch de dos tamaños de pantalla distintos: el tipo A, de 44 milímetros y el tipo B de 40 milímetros. Su producción semanal debe ser al menos de 10 relojes en total y el número de smartwatch que fabrica la empresa tipo B de 40 mm no puede superar en más de 10 unidades a los de tipo A. Los costes de producción de cada tipo de smartwatch son de 150€ para el tipo A y de 100€ los del B, disponiendo la empresa de un máximo de 6000€ a la semana para el coste total de producción. Además, se conoce que los relojes smartwatch tipo A generan un beneficio de 130€ y los de tipo B de 140€.

a) (1,5 puntos) Si la empresa quiere maximizar el beneficio, formule el problema que debe resolver y represente la región factible, calculando sus vértices.

b) (1 punto) ¿Cuántos smartwatch de cada tipo habrá que producir a la semana para que el beneficio total de la empresa sea máximo?, ¿Cuál es este beneficio máximo?

Solución:

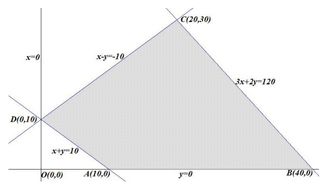
Sea x : número de relojes tipo A e y : número de relojes tipo A.

a)

	Coste	Beneficios
Tipo A	150	5
Tipo B	100	4
	≤ 6000	

La región factible es:

$$\begin{cases} x + y \geq 10 \\ x + 10 \geq y \\ 150x + 100y \leq 6000 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \geq 10 \\ x - y \geq -10 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

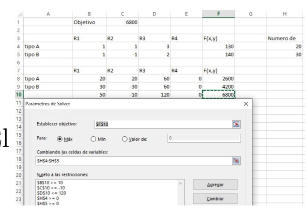


Los vértices son: $A(10, 0)$, $B(40, 0)$, $C(20, 30)$ y $D(0, 10)$

b) $f(x, y) = 130x + 140y$

$$\begin{cases} f(10, 0) = 1300 \\ f(40, 0) = 5200 \\ f(20, 30) = 6800 \text{ Máximo} \\ f(0, 10) = 1400 \end{cases}$$

Solución por solver :



Se deben fabricar 20 relojes tipo A y 30 relojes tipo B. El beneficio es de 6800€.

Problema 15.1.3 (2,5 puntos) La función de coste de una empresa es $C(q) = q^3 + 3q + 10$ donde q representa las unidades producidas. Sabiendo que el precio de venta, en euros, de cada unidad producida es $p = 30$, se desea conocer:

a) (0,5 puntos) La función beneficio de esta empresa.

b) (1,5 puntos) El número de unidades producidas que maximiza el beneficio de la empresa. Razone su resultado.

c) (0,5 puntos) El beneficio máximo que puede lograr la empresa.

Solución:

a) Beneficio = Ingresos - costes:
$B(q) = 30q - (q^3 + 3q + 10) = -q^3 + 27q - 10$

b) $B'(q) = -3q^2 + 27 = 0 \Longrightarrow q = \pm 3$, la solución negativa es irrelevante.

	$(0,3)$	$(3,\infty)$
$B'(q)$	$+$	$-$
$B(q)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(0,3)$ y decreciente en el $(3,\infty)$, con un máximo relativo en $q = 3$ con un beneficio de $B(3) = 44$.
Como $B(0) = -10$ podemos asegurar que ese máximo es absoluto.

c) Como se ha visto en el apartado anterior el beneficio maximo es de 44€.

Problema 15.1.4 (2,5 puntos) Sea la función definida a trozos $f(x) = \begin{cases} 2+\sqrt{x} & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ \dfrac{8x-2}{2x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

a) (0,5 puntos) Estudiar la continuidad de la función en todo su dominio.

b) (1 punto) Estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función en su dominio.

c) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = (0,\infty)$
Las dos ramas son continuas, hay que comprobar la continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2+\sqrt{x}) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{8x-2}{2x} = 3 \\ f(1) = 3 \end{cases} \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 1$$

La función f es continua en $(0,\infty)$.

b) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$

La función es siempre creciente en todo el dominio de la función.

c) En $x = 2 = a$ es $f(x) = \dfrac{8x-2}{2x} \Longrightarrow b = f(a) = f(2) = \dfrac{7}{2}$ y $m = f'(2) = \dfrac{1}{4}$. La ecuación punto pendiente de una recta es $y - b = m(x-a) \Longrightarrow y - \dfrac{7}{2} = \dfrac{1}{4}(x-2) \Longrightarrow y = \dfrac{1}{4}x + 3$

Problema 15.1.5 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{9-x^2}$, calcule:

a) (0,5 puntos) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes.

b) (0,5 puntos) Asíntotas verticales y horizontales.

c) (1 punto) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) (0,5 puntos) Máximos y mínimos locales.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 3\}$ y los puntos de corte:

- ☛ Con OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0,0)$
- ☛ Con OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow 2x^2 = 0 \Longrightarrow (0,0)$

b) Asíntotas:

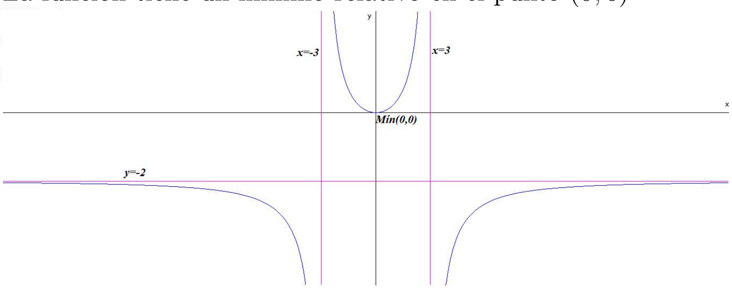
- ☛ Verticales:
  - En $x = -3$:
    $\displaystyle\lim_{x\to -3^-} \frac{2x^2}{9-x^2} = \left[\frac{18}{0^-}\right] = -\infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to -3^+} \frac{2x^2}{9-x^2} = \left[\frac{18}{0^+}\right] = +\infty$
  - En $x = 3$:
    $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{2x^2}{9-x^2} = \left[\frac{18}{0^+}\right] = \infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{2x^2}{9-x^2} = \left[\frac{18}{0^-}\right] = -\infty$
- ☛ Horizontales: $y = -2$
  $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2}{9-x^2} = \lim_{x\to \infty} \frac{2x^2}{9-x^2} = -2$
- ☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

c) $f'(x) = \dfrac{36x}{(9-x^2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(0,3)\cup(3,\infty)$ y decreciente en el $(-\infty,-3)\cup(-3,0)$

d) La función tiene un mínimo relativo en el punto $(0,0)$



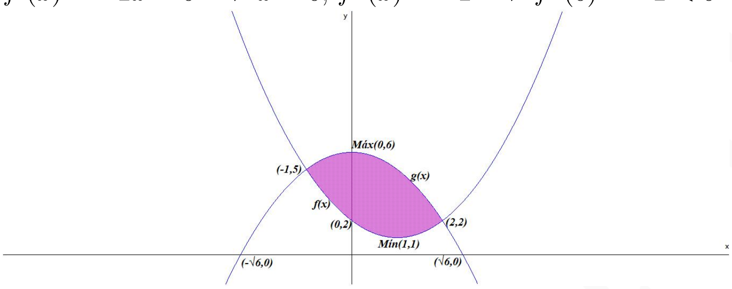
Problema 15.1.6 (2,5 puntos) Representar la región del plano limitado por las parábolas $f(x) = x^2 - 2x + 2$ y $g(x) = -x^2 + 6$. Calcular su área.

Solución:

Los puntos de corte entre las dos gráficas son:

$$x^2 - 2x + 2 = -x^2 + 6 \Longrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Longrightarrow x = -1 \Longrightarrow (-1, 5), \quad x = 2 \Longrightarrow (2, 2)$$

Para $f(x) = x^2 - 2x + 2$ tenemos corte con el eje OY el $(0, 4)$ y con el OX hacemos $f(x) = x^2 - 2x + 2 \neq 0$ no corta al eje OX pero si al eje OY en $(0, 2)$
$f'(x) = 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$, $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(1) = 2 > 0 \Longrightarrow (1, 1)$ es un mínimo.
Para $g(x) = x^2 - 4x + 4$ tenemos corte con el eje OY el $(0, 4)$ y con el OX hacemos $f(x) = -x^2 + 6 = 0 \Longrightarrow (\sqrt{6}, 0)$ y $(-\sqrt{6}, 0)$ con OX y en $(0, 6)$ con OY.
$f'(x) = -2x = 0 \Longrightarrow x = 0$, $f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(0) = -2 < 0 \Longrightarrow (0, 6)$ es un máximo.



$$S_1 = \int_{-1}^{2} (x^2 - 2x + 2 - (-x^2 + 6))\, dx = \int_{-1}^{2} (2x^2 - 2x - 4)\, dx = \left.\frac{2x^3}{3} - x^2 - 4x\right]_{-1}^{2} = -9$$

$$S = |S_1| = 9 \ u^2$$

Problema 15.1.7 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$

a) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int f(x)\, dx$.

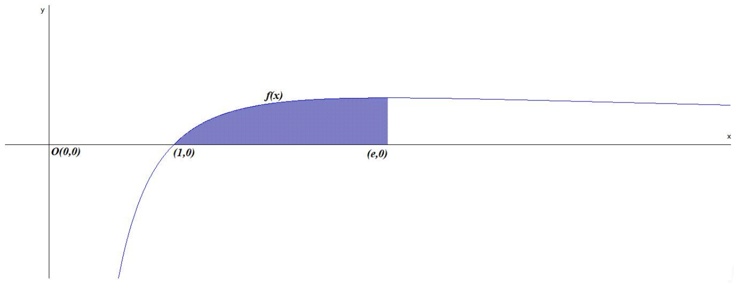
b) (1,5 puntos) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisa y las rectas $x = 1$ y $x = e$.

Solución:

a) $$\int \frac{2\ln x}{x}\, dx = \left[\begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \dfrac{1}{x} dx \\ dx = x dt \end{array}\right] = \int \frac{2t}{x}\, x dt = 2\int t\, dt = t^2 + C = (\ln x)^2 + C$$

b) La función no corta al eje de abscisas en el intervalo $[1, e]$, y $F(x) = (\ln x)^2$.

$$S_1 = \int_1^e f(x)\, dx = F(e) - F(1) = 1 - 0 = 1 \ S = |S_1| = 1 \ u^2$$



Problema 15.1.8 (2,5 puntos)

a) La Dirección General de Tráfico ha realizado un estudio estadístico en la Región de Murcia sobre el uso del casco de protección por parte de los usuarios de patinetes eléctricos. El estudio estima que el 60 % de los usuarios de estos patinetes son hombres y, de estos, el 30 % usa el casco; mientras que, entre las mujeres que usan este medio para desplazarse, son el 40 % las que usan casco de protección. Si elegimos un usuario de patinete eléctrico al azar.

(I) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que use casco de protección.

(II) (1 punto) Sabiendo que el usuario de patinete eléctrico usa casco de protección, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

b) (1 punto) El gasto medio por cliente, en euros, en la lotería de las pasadas Navidades se distribuye según una variable Normal de media desconocida y desviación típica igual de 10 euros. Se elige una muestra aleatoria de 225 clientes, resultando que han tenido un gasto medio de 65 euros. Calcule un intervalo de confianza para el gasto medio de la lotería de Navidad de 2022 con un nivel de confianza del 97 %

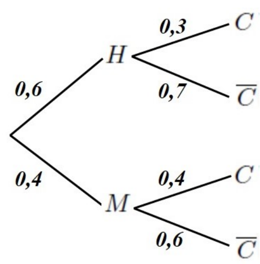
Solución:

a) Sean H hombre, M mujer, C usa casco y $\overline{C}$ no usa casco.

(I)

$$P(C) = P(C|H)P(H)+P(C|M)P(M) =$$

$$0,3 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,4 = 0,34$$



(II)

$$P(M|C) = \frac{P(C|M)P(M)}{P(C)} = \frac{0,4 \cdot 0,4}{0,34} = 0,4706$$

b) $N(\mu, 10)$, $n = 225$, $\overline{X} = 65$ y
$NC = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,985 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,17$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17\dfrac{10}{\sqrt{225}} = 1,4467$
$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (65 - 1,4467; 65 + 1,4467) = (63,5533; 66,4467)$

15.2. Extraordinaria

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

Problema 15.2.1 (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left\{\begin{array}{r} x+ay+z=1\\ 2y+az=2\\ x+y+z=1 \end{array}\right. \quad \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para $a=3$. (0,5 puntos)

Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1\\ 0 & 2 & a & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A|=a^2-a=0 \Longrightarrow a=0 \text{ y } a=1$$

- Si $a\in\mathbb{R}-\{0,1\} \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ número de incógnitas$\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (Solución única)

- Si $a=1$:
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \stackrel{F_1=F_3}{\Longrightarrow} \text{sistema compatible indeterminado}$$

- Si $a=0$:
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 2F_3-F_2 \end{array}\right]=$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema incompatible}$$

- Si $a=3$:
$$\left\{\begin{array}{l} x+3y+z=1\\ 2y+3z=2\\ x+y+z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3}\\ y=0\\ z=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Por Gauss:
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 2\\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$
$$\left\{\begin{array}{c} -2y=0 \Longrightarrow y=0\\ 0+3z=2 \Longrightarrow z=\dfrac{2}{3}\\ x+0+\dfrac{2}{3}=1 \Longrightarrow x=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Problema 15.2.2 (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y \geq 2 \\ x - y \leq 4 \\ x \geq 1 \\ y \leq 2 \end{array}\right\}$$

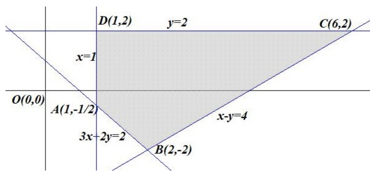
a) (2 puntos) Represente la región S y calcule sus vértices.

b) (0,5 puntos) Determine los puntos de la región factible dónde la función $f(x, y) = 4x - 5y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores.

Solución:

a) La región factible es:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y \geq 2 \\ x - y \leq 4 \\ x \geq 1 \\ y \leq 2 \end{array}\right.$$



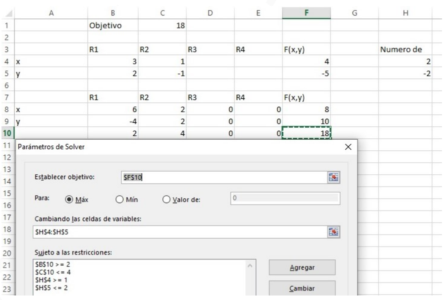
Los vértices son: $A\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$, $B(2, -2)$, $C(6, 2)$ y $D(1, 2)$

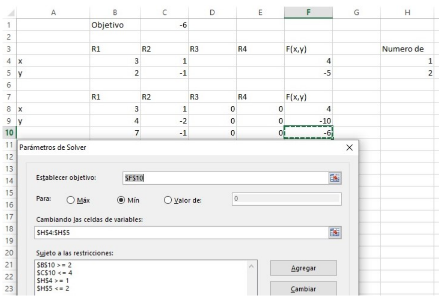
b) $f(x, y) = 4x - 5y$

$$\left\{\begin{array}{l} f\left(1, -\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{13}{2} \\ f(2, -2) = 18 \text{ Máximo} \\ f(6, 2) = 14 \\ f(1, 2) = -6 \text{ Mínimo} \end{array}\right.$$

El mínimo se encuentra en el punto $D(1, 2)$ con un valor de -6 y el máximo en el punto $B(2, -2)$ con un valor de 18.

Solución por solver :





Problema 15.2.3 (2,5 puntos) La función de costes de una empresa $C(q) = q^2 - 16q + 48$ donde q es el nivel de producción. Si la ecuación de demanda viene dada por la expresión $p = 12 - q$, dónde p es el precio unitario de venta. Determine:

a) (0,5 puntos) La función de beneficios de la empresa en función del nivel de producción.

b) (1 punto) El nivel de producción, q, para el que se maximiza la función de beneficios de la empresa.

c) (0,5 puntos) El precio para el que se obtendría el máximo beneficio.

d) (0,5 puntos) El valor del beneficio máximo.

Solución:

a) Ingresos: $I(q) = pq = q(12 - q)$
Costes: $C(q) = q^2 - 16q + 48$
Beneficio: $B(q) = I(q) - C(q) = q(12 - q) - (q^2 - 16q + 48) = -2q^2 + 28q - 48$

b) $B'(q) = -4q + 28 = 0 \Longrightarrow q = 7$ unidades
$B''(q) = -4 \Longrightarrow B''(7) = -4 < 0 \Longrightarrow q = 7$ es un Máximo relativo.
La producción se maximiza con 7 unidades.

c) El precio sería $p = 12 - q = 12 - 7 = 5$ cada unidad.

d) El beneficio máximo es de $B(7) = 50$

Problema 15.2.4 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax + 5 & \text{si} \quad x \le -1 \\ bx^2 - 2x + 1 & \text{si} \quad -1 < x \le 2 \\ \dfrac{3x-1}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

a) (1,5 puntos) Calcular el valor de los parámetros a y b para que la función sea continua en todo su dominio.

b) (1 punto) Determine la derivada $f'(x)$ para $x > 2$.

Solución:

a)
- ☛ Las dos primeras ramas son continuas por ser polinomios, en cuanto a la tercera el único punto de posible discontinuidad sería en $x = 1$ que no está en la rama. En conclusión la función es continua en las tres ramas y el estudio se limita a $x = -1$ y $x = 2$.
- ☛ Continuidad en $x = -1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (ax + 5) = -a + 5 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (bx^2 - 2x + 1) = b + 3 \\ f(-1) = -a + 5 \end{array} \right. \Longrightarrow -a + 5 = b + 3 \Longrightarrow a + b = 2$$

- ☛ Continuidad en $x = 2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (bx^2 - 2x + 1) = 4b - 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x-1}{(x-1)^2} = 5 \\ f(2) = 4b - 3 \end{array} \right. \Longrightarrow 4b - 3 = 5 \Longrightarrow b = 2$$

- ☛ $\left\{ \begin{array}{l} b = 2 \\ a + b = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 2 \end{array} \right.$

b) Si $x > 2 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{3x-1}{(x-1)^2} \Longrightarrow f'(x) = -\dfrac{3x+1}{(x-1)^3}$

Problema 15.2.5 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x}$, calcule:

a) (0,5 puntos) El dominio de definición de la función y el punto de corte con los ejes coordenados.

b) (0,5 puntos) Las asíntotas verticales y horizontales, si las hay.

c) (1 punto) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) (0,5 puntos) Máximos y mínimos locales.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ Puntos de corte:

- ☛ Con OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow$ No hay
- ☛ Con OX hacemos $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x} = 0 \Longrightarrow (2, 0)$

b) Asíntotas:

- ☛ Verticales: En $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 - 4x + 4}{x} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - 4x + 4}{x} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

- ☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x} = -\infty; \quad \lim_{x\to \infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x} = +\infty$$

- ☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x} - x\right) = -4$$

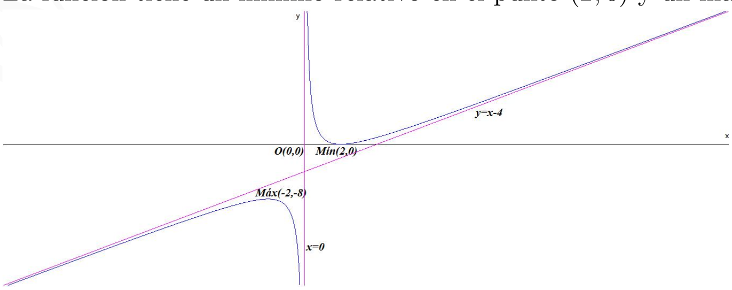
$$y = x - 4$$

c) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ y decreciente en el $(-2, 0) \cup (0, 2)$

d) La función tiene un mínimo relativo en el punto $(2, 0)$ y un máximo relativo en $(-2, -8)$



Problema 15.2.6 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = 3e^{x+2}$

a) (1,25 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 3e^{x+2}$ en el punto $x = -2$

b) (1,25 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la curva $f(x) = 3e^{x+2}$, el eje de abscisa y la recta $x = 1$

Solución:

a) $a = -2 \Longrightarrow b = f(-2) = 3$, $f'(x) = 3e^{x+2} \Longrightarrow m = f'(-2) = 3$
La ecuación punto pendiente de la recta es $y-b = m(x-a) \Longrightarrow y-3 = 3(x+2) \Longrightarrow y = 3x+9$

b) $f(x) = 3e^{x+2} > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ la función no corta el eje de abscisas. El intervalo de integración impropio es $S : (-\infty, 1)$

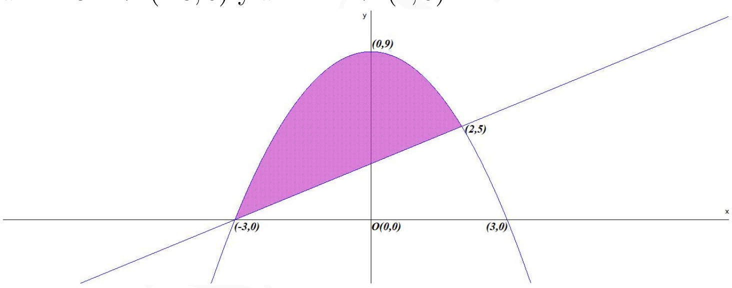
$$\int_t^1 3e^{x+2}\,dx = 3e^{x+2}\Big]_t^1 = 3e^3 - 3e^{t+2}$$

$$S = \lim_{t\to-\infty}(3e^3 - 3e^{t+2}) = 3e^3 - 3e^{-\infty} = 3e^3 \simeq 60,2566\ u^2$$

Problema 15.2.7 (2,5 puntos) Representar gráficamente la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = 9 - x^2$ y $g(x) = 3 + x$ calcular su área.

Solución:

- $f(x)$ es una parábola que pasa por los puntos $(3,0)$, $(-3,0)$ y $(0,9)$. $f'(x) = -2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(0) = -2 < 0 \Longrightarrow (0,9)$ es un máximo relativo.
  $g(x)$ es una recta que corta a $f(x)$ en $f(x) = g(x) \Longrightarrow 9 - x^2 = 3 + x \Longrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Longrightarrow x = -3 \Longrightarrow (-3,0)$ y $x = 2 \Longrightarrow (2,5)$



- $S = \displaystyle\int_{-3}^{2}(9-x^2-3-x)\,dx = \int_{-3}^{2}(-x^2-x+6)\,dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\Big]_{-3}^{2} = \frac{125}{6} \simeq 20,833\ u^2$

Problema 15.2.8 (2,5 puntos)

a) Sean A y B dos sucesos, tales que $P(A) = 0,3$, $P(B|A) = 0,6$ y $P(A|B) = 0,3$:

(I) (0,5 puntos) Calcular $P(A\cap B)$.

(II) (0,5 puntos) Calcular $P(B)$. ¿Son los sucesos A y B independientes?, razone su respuesta.

(III) (0,5 puntos) Calcular $P(A\cup \overline{B})$.

b) (1 punto) Las calificaciones de la asignatura de matemáticas de la población de una región española, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y varianza de $1,69$ puntos. Se toma una muestra aleatoria de 324 estudiantes de la región obteniendo una calificación media de 5,84 puntos. Halla un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 99 %.

Solución:

a) (I) $P(B|A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \Longrightarrow P(A\cap B) = P(B|A)P(A) = 0,6\cdot 0,3 = 0,18$

(II) $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A|B)} = \dfrac{0,18}{0,3} = 0,6$
$P(A)P(B) = 0,3\cdot 0,6 = 0,18 = P(A\cap B) \Longrightarrow A$ y B son independientes.

(III) $P(A\cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A\cap \overline{B}) = P(A) + 1 - P(B) - (P(A) - P(A\cap B)) = 1 - P(B) + P(A\cap B) = 1 - 0,6 + 0,18 = 0,58$

b) $N\left(\mu, \sqrt{1,69}\right) = N(\mu; 1,3)$, $n = 324$, $\overline{X} = 5,84$ y
$NC = 0,99 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\dfrac{1,3}{\sqrt{324}} = 0,186$
$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (5,84 - 0,186; 5,84 + 0,186) = (5,654; 6,026)$

Capítulo 16

Navarra

16.1. Ordinaria

Elija tres de los seis ejercicios siguientes

Problema 16.1.1 (10 puntos) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) (2 puntos) Razone qué dimensión debe tener una matriz D, para que $(B^t \cdot D)$ sea una matriz columna.

b) (2 puntos) Calcule $A \cdot B$.

c) (6 puntos) Despeje y calcule la matriz X que verifica la ecuación $ABX - C = I$, siendo I la matriz identidad.

Solución:

a) $\underset{2\times 3}{B^t} \cdot \underset{m\times n}{D} = \underset{p\times 1}{M} \Longrightarrow m = 3$, $n = 1$ y $p = 2$
Luego $\dim(D) = 3 \times 1$

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

c) $ABX - C = I \Longrightarrow ABX = I + C \Longrightarrow X = (AB)^{-1}(I + C) \Longrightarrow$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 16.1.2 (10 puntos) Una empresa produce un tipo de pintura que vende en el mercado nacional, con un beneficio unitario de 10.000 euros/tonelada. Esta empresa se está planteando introducir su producto en el mercado internacional, ya que el beneficio unitario se duplica en dicho mercado. La empresa no se plantea aumentar su capacidad actual de producción de 80 toneladas mensuales. Por temor a perder la clientela nacional, la empresa ha decidido destinar mensualmente a este mercado al menos el 75 % de la producción total. Además, un cliente del mercado internacional ha solicitado a la empresa un pedido de 10 toneladas mensuales, por lo que se ha decidido destinar mensualmente al mercado internacional al menos dicha cantidad. Determine la cantidad mensual que se deberá destinar a cada uno de los dos mercados, si la empresa desea maximizar el beneficio mensual.

a) (4 puntos) Plantee el problema.

b) (4 puntos) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema.

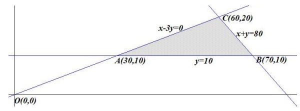
c) (2 puntos) Analice gráficamente qué ocurriría si el beneficio de la pintura en el mercado nacional se incrementa a 20.000 euros/tonelada.

Solución:

Sea x Tm en el mercado nacional e y Tm en el mercado internacional.

a) La región factible es

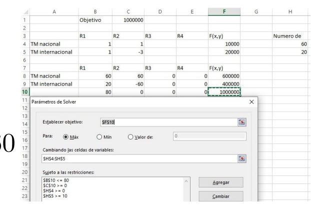
$$\begin{cases} x + y \le 80 \\ x \ge 0,75 \cdot (x+y) \\ y \ge 10 \\ x \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \le 80 \\ x - 3y \ge 0 \\ y \ge 10 \\ x \ge 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(30,10)$, $B(70,10)$ y $C(60,20)$.

$f(x,y) = 10000x + 20000y$

Solución por solver :



$$\begin{cases} f(30,10) = 500000 \\ f(70,10) = 900000 \\ f(60,20) = 1000000 \;\; \text{Máximo} \end{cases}$$

El máximo beneficio sería de 1000000€ con la venta de 60 Tm en el mercado nacional y 20 Tm en el internacional.

b) $f(x,y) = 20000x + 20000y$

$$\begin{cases} f(30,10) = 800000 \\ f(70,10) = 1600000 \;\; \text{Máximo} \\ f(60,20) = 1600000 \;\; \text{Máximo} \end{cases}$$

El máximo beneficio sería de 1600000€ con la venta de b Tm en el mercado nacional y c Tm en el internacional siendo (b,c) cualquier punto del segmento que une los puntos B y C.

Problema 16.1.3 (10 puntos) Considere la función $f(x) = \sqrt{5 + x^2}$.

a) (4 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = -2$.

b) (3 puntos) Calcule $\displaystyle\int x f(x)\, dx$.

c) (3 puntos) Calcule la derivada de la función $g(x) = 6\ln(5 - 3x) + 3x^2 \sin(7x - 5)$.

Solución:

a) $a = -2$ y $b = f(-2) = 3$. $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{5+x^2}} \Longrightarrow m = f'(-2) = -\dfrac{2}{3}$. La ecuación punto pendiente de una recta es $y - b = m(x-a) \Longrightarrow y - 3 = -\dfrac{2}{3}(x+2) \Longrightarrow y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}$

b) $\displaystyle\int xf(x)\,dx = \int x\sqrt{5+x^2}\,dx = \int x(5+x^2)^{1/2}\,dx = \begin{bmatrix} t = 5+x^2 \\ dt = 2xdx \\ dx = \dfrac{dt}{2x} \end{bmatrix} = \int xt^{1/2}\cdot\dfrac{dt}{2x} =$ $\displaystyle\frac{1}{2}\int t^{1/2}\,dt = \frac{t^{3/2}}{2\cdot 3/2} + C = \frac{(5+x^2)^{3/2}}{3} + C = \frac{(5+x^2)\sqrt{5+x^2}}{3} + C$

c) $g'(x) = 6\cdot\dfrac{-3}{5-3x} + 6x\sin(7x-5) + 3x^2\cdot 7\cos(7x+5) = \dfrac{-18}{5-3x} + 6x\sin(7x-5) + 21x^2\cos(7x+5)$

Problema 16.1.4 (10 puntos) Considere la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

a) (1 punto) Calcule los puntos de corte con los ejes.

b) (3 puntos) Calcule los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) (2 puntos) Dibuje el recinto limitado por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

d) (4 puntos) Calcule el área de dicho recinto.

Solución:

a) Puntos de corte

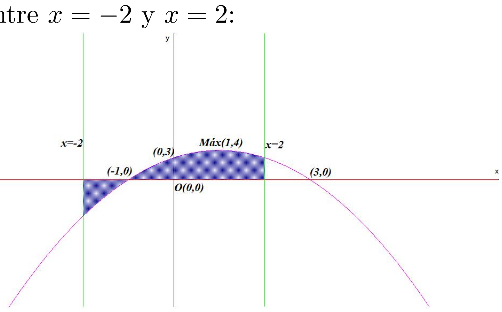
- Con OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0,3)$
- Con OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Longrightarrow (-1,0)$ y $(3,0)$

b) $f(x) = -x^2 + 2x + 3 \Longrightarrow f'(x) = -2x + 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$.

	$(-\infty,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,1)$ y decreciente en el $(1,\infty)$.
Hay un máximo relativo en el punto $(1,4)$.

c) El recinto estaría entre $x = -2$ y $x = 2$:



d) Hay dos recintos de integración, $S_1 : [-2, -1]$ y $S_2 : [-1, 2]$

$$F(x) = \int (-x^2 + 2x + 3)\, dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x$$

$$S_1 = \int_{-2}^{-1} (-x^2 + 2x + 3)\, dx = F(-1) - F(-2) = -\frac{5}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{7}{3}$$

$$S_2 = \int_{-1}^{2} (-x^2 + 2x + 3)\, dx = F(2) - F(-1) = \frac{22}{3} + \frac{5}{3} = \frac{27}{3} = 9$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{7}{3} + 9 = \frac{34}{3} \simeq 11,3333\ u^2$$

Problema 16.1.5 (10 puntos) En una prueba de evaluación sorpresa para 50 estudiantes, 20 de ellos hacen una prueba tipo test y 30 de ellos resuelven un problema. El 90 % de los estudiantes que hacen la prueba tipo test han aprobado y 24 estudiantes que resuelven un problema han aprobado.

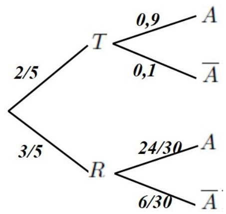
a) (2 puntos) Se elige al azar un estudiante. Calcule la probabilidad de que no haya aprobado.

b) (4 puntos) Se elige al azar un estudiante. Si el estudiante ha aprobado, ¿qué es más probable, que haya hecho un examen tipo test o un problema? Calcule dicha probabilidad.

c) (4 puntos) Se elige un estudiante de examen tipo test y otro estudiante de examen con problema. Calcule la probabilidad de que los dos hayan aprobado.

Solución:
Sean T prueba test, R resuelve un problema, A aprueba, $\overline{A}$ suspende.

a) $P(\overline{A}) = P(\overline{A}|T)P(T) + P(\overline{A}|R)P(R) = \dfrac{2}{5} \cdot 0,1 + \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{6}{30} = \dfrac{4}{25} = 0,16$



b)
- ☛ $P(T|A) = \dfrac{P(A|T)P(T)}{P(A)} = \dfrac{0,9 \cdot \frac{2}{5}}{1 - 0,16} = 0,4286$
- ☛ $P(R|A) = \dfrac{P(A|R)P(R)}{P(A)} = \dfrac{\frac{24}{30} \cdot \frac{3}{5}}{1 - 0,16} = 0,5714$
- ☛ Es más probable que haya resuelto el problema.

c) $P(\text{los dos han aprobado}) = P(A|T) \cdot P(A|R) = 0,9 \cdot \dfrac{24}{30} = 0,72$

Problema 16.1.6 A partir de una muestra de 200 jóvenes entre 18 y 25 años, se observó que 50 no usan transporte público.

a) (5 puntos) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que usan transporte público, con un nivel de confianza del 96 %. Interprete la solución en el contexto del problema.

b) (5 puntos) Calcule el tamaño muestral para que la amplitud del intervalo se reduzca a la tercera parte, con un nivel de confianza del 98 %.
(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

Solución:

a) $n = 200$; $\hat{p} = \dfrac{150}{200} = 0,75$; y $NC = 0,96$

$NC = 0,96 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,04 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,02$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,02 = 0,98 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,055$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,055\sqrt{\frac{0,75 \cdot 0,25}{200}} = 0,0629$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,75 - 0,0629, 0629; 0,75 + 0,0629) =$$

$$(0,6871; 0,8129) = (68,71\,\%; 81,29\,\%)$$

b) $NC = 0,98 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,02 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,01$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,01 = 0,99 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,325$

Amplitud$= 2E \Longrightarrow \dfrac{\text{Amplitud}}{3} = \dfrac{2E}{3} = \dfrac{2 \cdot 0,0629}{3} = 0,0419 \Longrightarrow$

El nuevo error sería $\dfrac{0,0419}{2} = 0,021$

$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,021 = 2,325\sqrt{\dfrac{0,75 \cdot 0,25}{n}} \Longrightarrow, n \ge 2298,31 \Longrightarrow$

$$n = 2299$$

16.2. Extraordinaria

Elija tres de los seis ejercicios siguientes

Problema 16.2.1 (10 puntos)

a) (7 puntos) Clasifique el siguiente sistema en función del número de soluciones y resuélvalo utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} x + y + 3z = 1 \\ 4x + 3y + 5z = 5 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

b) (3 puntos) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ k & -6 \end{pmatrix}$. Determine el valor que debe tomar el parámetro k para que el producto de ambas matrices conmute.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 4F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] =$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones)

$$\begin{cases} z = \lambda \\ -y - 7\lambda = 1 \Longrightarrow y = -1 - 7\lambda \\ x + (-1 - 7\lambda) + 3\lambda = 1 \Longrightarrow x = 2 + 4\lambda \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = -1 - 7\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) $AB = BA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ k & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ k & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} -k-12 & 0 \\ 2k-4 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 3k-6 & -k-12 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -k-12 = -14 \\ 2k-4 = 3k-6 \\ -14 = -k-12 \end{cases} \Longrightarrow k = 2$$

Problema 16.2.2 (10 puntos) Una empresa utiliza dos máquinas distintas ($M1$ y $M2$) para fabricar tres tipos de láminas de acero (rayada, lisa y doblemente rayada). Una hora de trabajo de la máquina $M1$ fabrica 10 metros de lámina rayada, 50 metros de lámina lisa y 10 metros de lámina doblemente rayada. Una hora de trabajo de la máquina $M2$ fabrica 40 metros de lámina rayada, 20 metros de lámina lisa y 10 metros de lámina doblemente rayada. Cada hora de trabajo de las máquinas $M1$ y $M2$ tiene un coste de 800 euros y 100 euros, respectivamente. Sabiendo que la empresa tiene una demanda diaria de al menos 240 metros de lámina rayada, 300 metros de lámina lisa y 120 metros de lámina doblemente rayada, calcule cuántas horas deberá trabajar al día cada máquina para minimizar el coste de fabricación.

a) (4 puntos) Plantee el problema.

b) (4 puntos) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema.

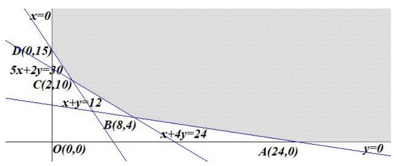
c) (2 puntos) Analice gráficamente qué ocurriría si la demanda diaria de la lámina de acero lisa aumenta en 100 metros más respecto de la demanda actual.

Solución:
Sea x número de horas de $M1$ e y número de horas de $M2$.

	rayada	lisa	doble rayada	coste
$M1$	10	50	10	800
$M2$	40	20	10	100
	≥ 240	≥ 300	≥ 120	

a) La región factible es

$$\begin{cases} 10x + 40y \geq 240 \\ 50x + 20y \geq 300 \\ 10x + 10y \geq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 4y \geq 24 \\ 5x + 2y \geq 30 \\ x + y \geq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

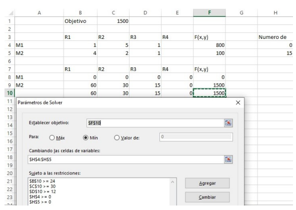


Los vértices son: $A(24,0)$, $B(8,4)$, $C(2,10)$ y $D(0,15)$.

$f(x,y) = 800x + 100y$

$$\begin{cases} f(24,0) = 19200 \\ f(8,4) = 6800 \\ f(2,10) = 2600 \\ f(0,15) = 1500 \text{ Mínimo} \end{cases}$$

Solución por solver :

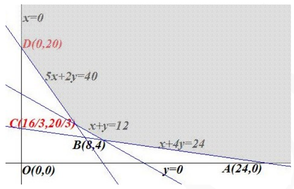


El mínimo coste sería de 1500€ con 0 horas de máquina $M1$ y 15 horas de máquina $M2$.

b) Cambiaría la segunda restricción: $50x + 20y \geq 400 \Longrightarrow 5x + 2y \geq 40$.

$$\begin{cases} x + 4y \geq 24 \\ 5x + 2y \geq 40 \\ x + y \geq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

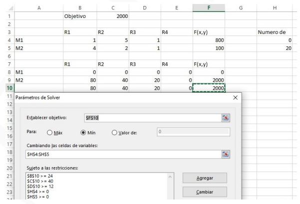
Los vértices serían: $A(24, 0)$, $B\,(8, 4)$, $C(16/3, 20/3)$ y $D(0, 20)$.



$f(x, y) = 800x + 100y$

$$\begin{cases} f(24, 0) = 19200 \\ f\,(8, 4) = 6800 \\ f(16/3, 20/3) = 14800/3 \simeq 4933, 33 \\ f(0, 20) = 2000 \;\; \text{Mínimo} \end{cases}$$

Solución por solver :



El mínimo coste sería de 2000€ con 0 horas de máquina $M1$ y 20 horas de máquina $M2$.

Problema 16.2.3 (10 puntos) Considere las funciones $f(x) = x + 3$ y $g(x) = -x^2 + 4x + 3$

a) (3 puntos) Calcule la derivada de la función $g(x)$ en el punto $x = 1$, aplicando la definición de derivada.

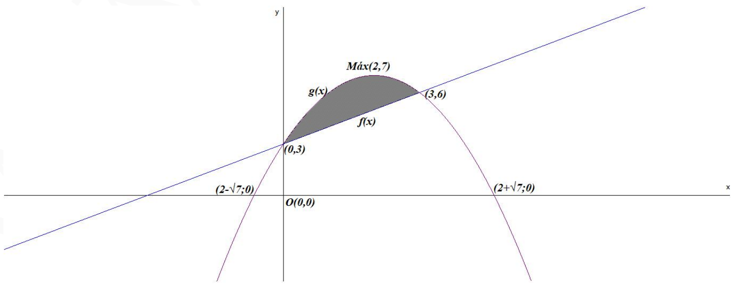
b) (7 puntos) Dibuje el recinto del plano comprendido entre las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Calcule el área de dicho recinto.

Solución:

a) $g'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-(1+h)^2 + 4(1+h) + 3 - 6}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h - h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(2-h)}{h} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{h\to 0}(2 - h) = 2$

b) La función g es una parábola que corta al eje OY en el punto $(0, 3)$ y al OX en los puntos $-x^2 + 4x + 3 = 0 \Longrightarrow (2 \pm \sqrt{7}, 0)$. $g'(x) = -2x + 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$ y como $g''(x) = -2$ es $g''(2) = -2 < 0 \Longrightarrow (2, 7)$ es un máximo relativo.
La función f es una recta que corta con g en los puntos en los que $f(x) = g(x) \Longrightarrow x + 3 = -x^2 + 4x + 3 \Longrightarrow x^2 - 3x = 0 \Longrightarrow (0, 3)$ y $(3, 6)$
El área encerrada $S : [0, 3]$

$$S \int_0^3 (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x)\,dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\bigg]_0^3 = \frac{9}{2} \simeq 4,5\ u^2$$



Problema 16.2.4 (10 puntos) El beneficio (en miles de euros) de una pequeña empresa de Navarra varía según la función:
$B(t) = \begin{cases} -t^2 + 8t + 4 & \text{si} \quad 0 \le t \le 7 \\ 2t - 3 & \text{si} \quad 7 < t \le 10 \end{cases}$, siendo t el tiempo transcurrido en meses.

a) (1 punto) ¿Cuál es el beneficio inicial de la empresa?

b) (3 puntos) Estudie la continuidad de $B(t)$, clasificando en su caso los puntos de discontinuidad.

c) (3 puntos) ¿En qué mes se alcanza el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio máximo?

d) (3 puntos) Represente la gráfica de la evolución del beneficio de esta empresa.

Solución:

a) $B(0) = 4 \Longrightarrow$ el beneficio inicial de la empresa es de 4000€

b) Las dos ramas son polinomios y, por tanto, continuas en el dominio de la función. Hay que estudiar su continuidad en $t = 7$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 7^-} B(t) = \lim\limits_{t\to 7^-} (-t^2 + 8t + 4) = 11 \\ \lim\limits_{t\to 7^+} B(t) = \lim\limits_{t\to 7^+} (2t - 3) = 11 \\ B(7) = 11 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{t\to 7^-} B(t) = \lim_{t\to 7^+} B(t) = B(7) \Longrightarrow$$

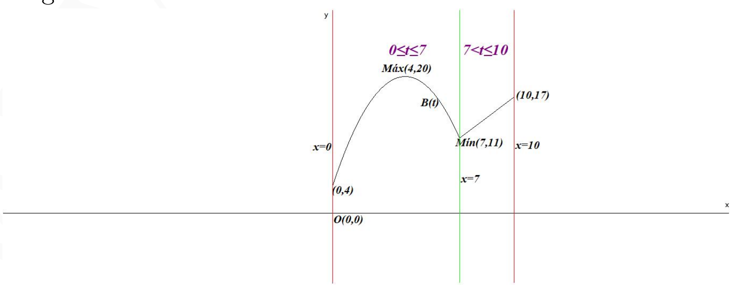
B es continua en $t = 7$ y, por tanto, en el dominio de la función.

c) Tenemos $B'(t) = \begin{cases} -2t + 8 = 0 \Longrightarrow t = 4 \in (0, 7) \\ 2 > 0 \ \ \forall t \in (7, 10) \end{cases}$

	$(0,4)$	$(4,7)$	$(7,10)$
$B'(t)$	$+$	$-$	$+$
$B(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(0, 4) \cup (7, 10)$ y decreciente en el $(4, 7)$, tiene un máximo relativo en $(4, 20)$ y un mínimo relativo en $(7, 11)$
Tenemos $B(0) = 4$ y $B(10) = 17$, luego el beneficio máximo es de 20000€ cuando transcurren 4 meses.

d) La gráfica sería:



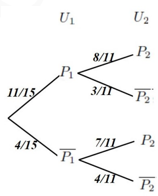
Problema 16.2.5 (10 puntos)

a) (5 puntos) En un concurso se dispone de dos urnas. En la primera urna hay 15 bolas, 6 de ellas premiadas con un viaje, 5 bolas con un premio de 1.000 euros y 4 bolas sin premio. La segunda urna tiene 10 bolas (3 con viaje, 4 con 1.000 euros y 3 sin premio). Un concursante tiene que seleccionar al azar una bola de la primera urna e introducirla en la segunda urna. Tras esto, el concursante tiene que elegir una bola al azar de la segunda urna. Calcule la probabilidad de que la bola seleccionada no tenga premio.

b) (5 puntos) En una universidad se realizó una encuesta a los estudiantes acerca de sus hábitos de alimentación y ejercicio físico. El 40 % realizaban 5 comidas al día y el 70 % de los estudiantes hacían ejercicio físico regularmente. El 80 % de los estudiantes que realizaban 5 comidas al día hacían ejercicio físico regularmente.
Se selecciona un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de que ni realice 5 comidas al día ni haga ejercicio físico regularmente. (3 puntos)
Compruebe si los sucesos "comer 5 comidas al día" y "hacer ejercicio físico regularmente" son o no sucesos independientes. (2 puntos)

Solución:

a) Sean:
P_1 premio en la urna U_1, $\overline{P_1}$ no premio en la urna U_1, P_2 premio en la urna U_2, $\overline{P_2}$ no premio en la urna U_2.



$P(\overline{P_2}) = P(\overline{P_2}|P_1)P(P_1) + P(\overline{P_2}|\overline{P_1})P(\overline{P_1}) =$
$\frac{3}{11} \cdot \frac{11}{15} + \frac{4}{11} \cdot \frac{4}{15} = \frac{49}{165} = 0,297$

b) Sean C hacen 5 comidas al día, $\overline{C}$ no hacen 5 comidas al día, F hacen ejercicio físico y $\overline{F}$ no hacen ejercicio físico. Tenemos $P(C) = 0,4$, $P(F) = 0,7$ y $P(F|C) = 0,8$
$P(F|C) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} \Longrightarrow P(F \cap C) = P(F|C)P(C) = 0,8 \cdot 0,4 = 0,32$
$P(\overline{C} \cap \overline{F}) = P(\overline{C \cup F}) = 1 - P(C \cup F) = 1 - (P(C) + P(F) - P(C \cap F)) =$
$1 - (0,4 + 0,7 - 0,32) = 0,22$

$P(C) \cdot P(F) = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28 \neq P(C \cap F) \Longrightarrow C$ y F no son independientes.

Problema 16.2.6 (10 puntos) El salario mensual (en euros) de los jóvenes de un país A sigue una distribución normal con varianza 40.000 euros^2, mientras que el salario mensual de los jóvenes de un país B sigue una distribución normal con desviación típica 300 euros. Se tomó una muestra de 169 jóvenes del país A y se obtuvo un salario mensual medio de 1.200 euros. A partir de una muestra de 49 jóvenes del país B, se calculó un salario mensual medio de 1.600 euros.

a) (5 puntos) Calcule un intervalo de confianza para el salario mensual medio de los jóvenes del país A y otro para el salario mensual medio de los jóvenes del país B, ambos con un nivel de confianza del 88 %. Interprete las soluciones en el contexto del problema.

b) (5 puntos) Con los datos de la muestra del país B se ha calculado otro intervalo de confianza para el salario mensual medio: $[1,525; 1,675]$. Determine el nivel de confianza de este intervalo, justificando su respuesta.
(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

Solución:

a) $NC = 0,88$
$NC = 0,88 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,12 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,06$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,06 = 0,94 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,555$

- ☛ $N\left(\mu_A;\sqrt{40000}\right)=N\left(\mu_A;200\right)$, $n_A=169$ y $\overline{X_A}=1200$

$$E_A=Z_{\alpha/2}\frac{\sigma_A}{\sqrt{n_A}}=1,555\frac{200}{\sqrt{169}}=23,9231$$

$$IC_A=\left(\overline{X_A}-E_A;\overline{X_A}-E_A\right)=(1200-23,9231;1200+23,9231)=(1176,0769;1223,9231)$$

- ☛ $N\left(\mu_B;300\right)$, $n_B=49$ y $\overline{X_B}=1600$

$$E_B=Z_{\alpha/2}\frac{\sigma_B}{\sqrt{n_B}}=1,555\frac{300}{\sqrt{49}}=66,6429$$

$$IC_B=\left(\overline{X_B}-E_B;\overline{X_B}-E_B\right)=(1600-66,6429;1600+66,6429)=(1533,3571;1666,6429)$$

- ☛ El error del intervalo de confianza en el país A es menor que el de B. El motivo es una mayor dispersión $\sigma_B>\sigma_A$ y por el tamaño muestral $n_A>n_B$.

b) Ahora $E_B=\dfrac{1675-1525}{2}=75$:
$75=Z_{\alpha/2}\dfrac{300}{\sqrt{49}}\Longrightarrow Z_{\alpha/2}=1,75\Longrightarrow P(Z\le 1,75)=0,9599=1-\dfrac{\alpha}{2}\Longrightarrow \alpha=0,0802\Longrightarrow$
$1-\alpha=0,9198\Longrightarrow NC=91,98\,\%$

Capítulo 17

País Vasco

17.1. Ordinaria

☛ **Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.**

☛ En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

☛ Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de trasmitir de datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes
- derivadas e integrales
- almacenamiento de datos alfanuméricos

Álgebra

Problema 17.1.1 (2,5 puntos) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Razona qué dimensión deben tener las matrices P y Q para que los productos $(A \cdot P \cdot B^t)$ y $(Q \cdot A \cdot C)$ den como resultado una matriz cuadrada.

b) (1,5 puntos) Resuelve la ecuación matricial: $A \cdot X - 2B \cdot C^t = A^t$

Solución:

a) $(\underset{2\times 2}{A} \cdot \underset{m\times n}{P} \cdot \underset{3\times 2}{B^t}) = \underset{2\times 2}{H} \Longrightarrow m = 2$ y $n = 3$
$(\underset{p\times q}{Q} \cdot \underset{2\times 2}{A} \cdot \underset{2\times 3}{C}) = \underset{p\times 3}{T} \Longrightarrow q = 2$ y $p = 3$ (para que T sea cuadrada)
Luego $\dim(P) = 2\times 3 \Longrightarrow \dim(A\cdot P\cdot B^t) = 2\times 2$ y $\dim(Q) = 3\times 3 \Longrightarrow \dim(Q\cdot A\cdot C) = 3\times 3$.

b) $A\cdot X - 2B\cdot C^t = A^t \Longrightarrow A\cdot X = A^t + 2B\cdot C^t \Longrightarrow X = A^{-1}(A^t + 2B\cdot C^t) =$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 16 & 16 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & -13 \\ 18 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 & -46 \\ -33/2 & -59/2 \end{pmatrix}$$

Problema 17.1.2 (2,5 puntos) Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casas de muñecas produce mesas y sillas que vende a 20€ y 30€, respectivamente. La empresa quiere saber cuántas unidades de cada artículo debe fabricar diariamente para maximizar los ingresos, teniendo en cuenta las siguientes restricciones:

- ☛ El número total de unidades producidas de ambos artículos no podrá exceder de 4, por día.
- ☛ Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación y cada silla 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas.
- ☛ El material utilizado en cada mesa cuesta 4€, y el utilizado en cada silla 2€. El presupuesto para material es de 12€ diarios.

	PRECIO	MATERIAL	TIEMPO	UNIDADES
MESA	20€	4€	2 horas	x
SILLA	30€	2€	3 horas	y

a) (2,1 puntos) Plantea y resuelve el problema de maximización.

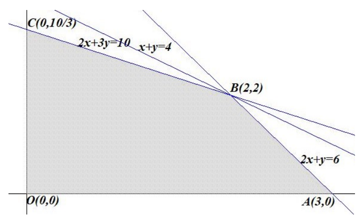
b) (0,4 puntos) Razona si con estas restricciones se pueden fabricar diariamente 1 mesa y 1 silla, y si esto le conviene a la empresa.

Solución:
Sean x número de mesas, y número de sillas.

	PRECIO	MATERIAL	TIEMPO	UNIDADES
MESA	20€	4€	2 horas	x
SILLA	30€	2€	3 horas	y
TOTAL		$\leq$ 12€	$\leq$ 10 horas	≤ 4

a) La región factible es

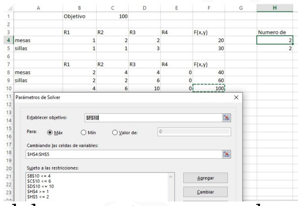
$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 4x + 2y \leq 12 \\ 2x + 3y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x + y \leq 6 \\ 2x + 3y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $O(0,0)$, $A(3,0)$, $B(2,2)$ y $C\left(0, \dfrac{10}{3}\right)$.

$f(x,y) = 20x + 30y$

Solución por solver :



$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(3,0) = 60 \\ f(2,2) = 100 \ \text{Máximo} \\ f\left(0, \dfrac{10}{3}\right) = 100 \ \text{Máximo} \end{cases}$$

El beneficio máximo, de 100€ se consigue en cualquier punto del segmento que une los puntos B y C.
Como en resultado tiene que ser entero buscamos algún punto de ese segmento que cumpla esta condición:
Si $x = 0$ tenemos $3y = 10 \Longrightarrow y = \dfrac{10}{3} \Longrightarrow$ no es válido.
Si $x = 1$ tenemos $2 + 3y = 10 \Longrightarrow y = \dfrac{8}{3} \Longrightarrow$ no es válido.
Si $x = 2$ tenemos $4 + 3y = 10 \Longrightarrow y = 2 \Longrightarrow$ si es válido.
Luego tienen que fabricar 2 mesas y 2 sillas con un beneficio máximo de 100€.

b) Como $(1,1)$ es un punto interior de la región factible la solución es posible aunque no sea la óptima para la empresa.

Análisis

Problema 17.1.3 (2,5 puntos)

a) (0,8 puntos) La gráfica de la función $g(x) = ax^3 + bx + c$ tiene las siguientes características:

- ☛ Pasa por el punto $(0,0)$
- ☛ Tiene un mínimo relativo en $(1,-1)$

Obtén el valor de los parámetros a, b y c.

b) (1 punto) Determina los máximos relativos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{3}{2}x$, y realiza su representación gráfica.

c) (0,7 puntos) Halla el área de la región limitada por el eje de abscisas OX, la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{3}{2}x$, y las rectas $x = 3$ y $x = 4$

Solución:

a) $g(x) = ax^3 + bx + c \Longrightarrow g'(x) = 3ax^2 + b$

$$\begin{cases} g(0) = 0 \Longrightarrow c = 0 \\ g(1) = -1 \Longrightarrow a + b + c = -1 \\ g'(1) = 0 \Longrightarrow 3a + b = 0 \end{cases} \Longrightarrow a = \frac{1}{2}, \ \ b = -\frac{3}{2} \ \text{y} \ c = 0 \Longrightarrow$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

Habría que comprobar si el punto $(1,-1)$ es verdaderamente un mínimo local:
$g''(x) = 6ax = 3x \Longrightarrow g''(1) = 3 > 0$, luego el punto estudiado es un mínimo local.

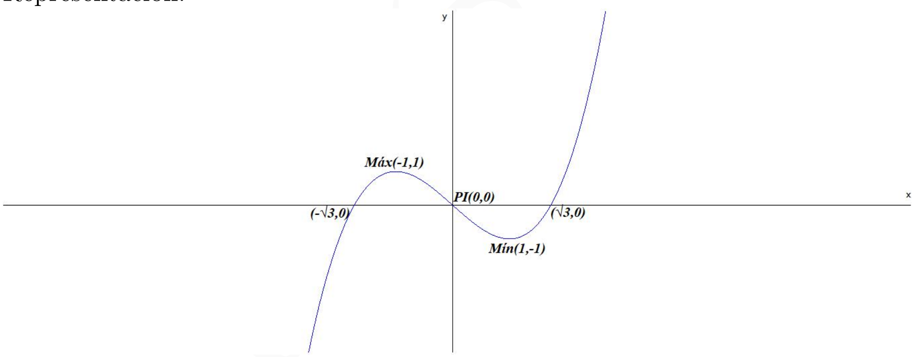
b) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{3}{2}x \Longrightarrow f'(x)=\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{3}{2}=0 \Longrightarrow x=\pm 1.$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ y decreciente en el $(-1,1)$. Tiene un máximo relativo en el punto $(-1,1)$ y un mínimo relativo en el $(1,-1)$.
$f''(x)=3x=0 \Longrightarrow x=0$

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

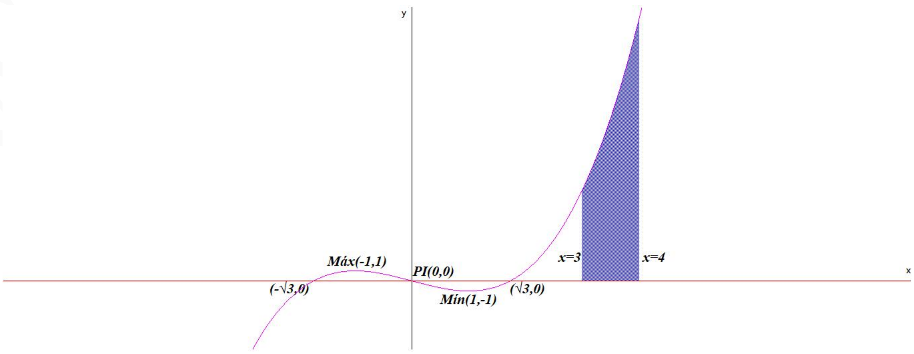
La función es cóncava ($\smile$) en el intervalo $(0,\infty)$ y es convexa ($\frown$) en el intervalo $(-\infty,0)$ con un punto de inflexión en $(0,0)$.
Otra forma de comprobar si era punto de inflexión sería por la tercera derivada $f'''(x)=3 \Longrightarrow f'''(0)=3\neq 0 \Longrightarrow x=0$ es un punto de inflexión.
Los puntos de corte con el eje de abscisas son:
$f(x)=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{3}{2}x=0 \Longrightarrow (0,0)$, $(-\sqrt{3},0)$ y $(\sqrt{3},0)$
Representación:



c) En el intervalo $(3,4)$ la función no corta el eje de abscisas por lo que hay un recinto $S_1:[3,4]$

$$S_1=\int_3^4\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)\,dx=\left.\frac{x^4}{8}-3x^2\right]_3^4=\frac{133}{8}$$

$$S=|S_1|=\frac{133}{8}\simeq 16,625\ u^2$$



Problema 17.1.4 (2,5 puntos) Se considera la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 6 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -2x^2 + 8x - 6 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) (1,7 puntos) Estudia la continuidad y derivabilidad de la función.

b) (0,4 puntos) Determina los extremos relativos de la función.

c) (0,4 puntos) Representa la gráfica de la función.

Solución:

a) Las dos ramas son continuas por ser polinomios, hay que estudiar la continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2x^2 - 8x + 6) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (-2x^2 + 8x - 6) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Longrightarrow$$

f es continua en $x = 1$ y, por tanto, en $\mathbb{R}$
Las dos ramas son derivables por ser polinomios, hay que estudiar la derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 8 & \text{si} \quad x < 1 \\ -4x + 8 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = -4 \\ f'(1^+) = 4 \end{cases} \Longrightarrow f'(1^-) \ne f'(1^+) \Longrightarrow$$

f no es derivable en $x = 1$ y, por tanto, si lo es en $\mathbb{R} - \{1\}$

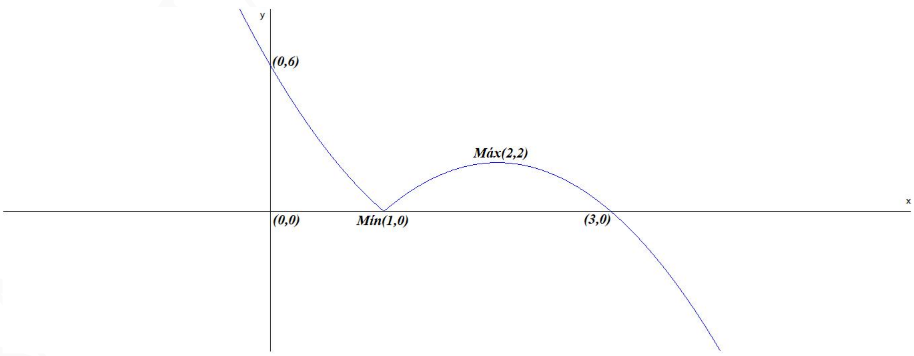
b)

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 8 = 0 \Longrightarrow x = 2 \ \text{fuera de la rama } x < 1 \\ -4x + 8 = 0 \Longrightarrow x = 2 \ \text{dentro de la rama } x > 1 \end{cases}$$

En la rama $x > 1 \Longrightarrow f''(x) = -4 \Longrightarrow f''(2) = -4 < 0 \Longrightarrow (2, 2)$ es un máximo relativo y tendrá un mínimo relativo en $(1, 0)$

c) Calculamos los puntos de corte:

- Con $OX \Longrightarrow -2x^2 + 8x - 6 = 0 \Longrightarrow (1, 0)$ y $(3, 0)$, la otra rama $2x^2 - 8x + 6 = 0 \Longrightarrow (1, 0)$ y $(3, 0)$ fuera de esta rama.
- Con OY solo corta la rama $x \le 1$, haciendo $x = 0 \Longrightarrow (0, 6)$



Probabilidad

Problema 17.1.5 (2,5 puntos) De una baraja, Lucía y Carlos han extraído 8 cartas: los cuatro ases y los cuatro reyes. De esas 8 cartas, Lucía le ha dado dos cartas a Carlos y, posteriormente, ha cogido una carta para ella.
Calcula:

a) (0,4 puntos) La probabilidad de que Carlos tenga dos ases

b) (0,6 puntos) La probabilidad de que Carlos tenga un as y un rey.

c) (0,7 puntos) La probabilidad de que Lucía tenga un as y Carlos no tenga dos reyes.

d) (0,8 puntos) La probabilidad de que Lucía tenga un rey.

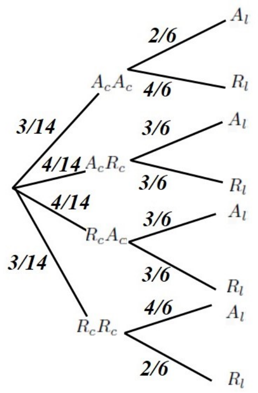
Solución:
Sean A_c as de Carlos, A_cA_c ases de Carlos, R_c rey de Carlos, R_cR_c reyes de Carlos, A_cR_c as y rey de Carlos, R_cA_c rey y as de Carlos, A_l as de Lucía y R_l rey de Lucía.
$P(A_cA_c) = P(R_cR_c) = \dfrac{4}{8} \cdot \dfrac{3}{7} = \dfrac{3}{14}$ y $P(A_cR_c) = P(R_cA_c) = \dfrac{4}{8} \cdot \dfrac{4}{7} = \dfrac{4}{14}$
$P(A_l|A_cA_c) = \dfrac{2}{6}$, $P(A_l|R_cR_c) = \dfrac{4}{6}$, $P(A_l|A_cR_c) = \dfrac{3}{6}$ y $P(A_l|R_cA_c) = \dfrac{3}{6}$

a) $P(A_cA_c) = P(R_cR_c) = \dfrac{4}{8} \cdot \dfrac{3}{7} = \dfrac{3}{14}$

b) $P(A_cR_c) + P(R_cA_c) = \dfrac{4}{14} + \dfrac{4}{14} = \dfrac{4}{7}$

c) $P(A_l\overline{R_cR_c}) = \dfrac{3}{14} \cdot \dfrac{2}{6} + \dfrac{4}{14} \cdot \dfrac{3}{6} + \dfrac{4}{14} \cdot \dfrac{3}{6} = \dfrac{5}{14}$

d) $P(R_l) = \dfrac{3}{14} \cdot \dfrac{4}{6} + \dfrac{4}{14} \cdot \dfrac{3}{6} + \dfrac{4}{14} \cdot \dfrac{3}{6} + \dfrac{3}{14} \cdot \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{2}$



Problema 17.1.6 (2,5 puntos) Jimena tiene dos trajes rojos, un traje azul y uno blanco. Además, tiene un par de zapatos de color rojo, otro par de color azul y dos pares blancos. Si decide aleatoriamente qué ponerse, determina las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) (0,3 puntos) Llevar traje rojo y zapatos blancos.

b) (0,4 puntos) No ir vestida totalmente de blanco.

c) (0,4 puntos) Llevar zapatos azules.

d) (0,5 puntos) Llevar zapatos azules o blancos.

e) (0,4 puntos) Ir vestida totalmente del mismo color.

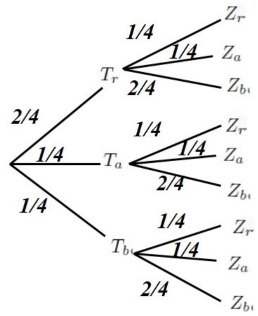
f) (0,5 puntos) Llevar zapatos rojos, sabiendo que no está vestida totalmente del mismo color.

Solución:
Sean T_r traje rojo, T_a traje azul, T_b traje blanco, Z_r zapatos rojos, Z_a zapatos azules y Z_b zapatos blancos.

a) $P(T_r \cap Z_b) = \dfrac{2}{4} \cdot \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{4}$

b) $P($ no ir de blanco$) = 1 - P($ir de blanco$) = 1 - P(T_b \cap Z_b) =$
$1 - \dfrac{2}{4} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{8}$

c) $P(Z_a) = P(Z_a|T_r)P(T_r) + P(Z_a|T_r)P(T_r) + P(Z_a|T_r)P(T_r) =$
$\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$



d) $P(Z_a \cup Z_b) = P(Z_a) + P(Z_b) - P(Z_a \cap Z_b) = P(Z_a) + P(Z_b) =$
$\dfrac{1}{4} + P(Z_b|T_r)P(T_r) + P(Z_b|T_r)P(T_r) + P(Z_b|T_r)P(T_r) =$
$\dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{4} \cdot \dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{4}$

e) $P($del mismo color$) = P(T_rZ_r) + P(T_bZ_b) + P(T_aZ_a) =$
$\dfrac{2}{4} \cdot \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{16}$

f) $P(Z_r|\text{no mismo color}) = \dfrac{P(Z_r \cap \text{no mismo color})}{P(\text{no mismo color})} =$
$\dfrac{P(Z_r \cap T_a) + P(Z_r \cap T_b)}{1 - P(\text{mismo color})} = \dfrac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}}{1 - \frac{5}{16}} = \dfrac{2}{11}$

Inferencia estadística

Problema 17.1.7 (2,5 puntos) El número de horas semanales que las y los estudiantes de bachillerato de una determinada ciudad dedican al deporte es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media 8 y varianza 7,29. Se elige una muestra aleatoria simple de tamaño 36.

a) (0,75 puntos) Indica cuál es la distribución de la media muestral, $\overline{X}$.

b) (1 punto)¿Cuál es la probabilidad de que el número medio de horas semanales que dedican al deporte esté entre 7,82 y 8,36?

c) (0,75 puntos) En la distribución de la media muestral $\overline{X}$, obtén el intervalo característico para el 99 %

Solución:

$$N(8; \sqrt{7,29})$$

a) $\overline{X} \overset{N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}{\approx} N\left(8; \dfrac{\sqrt{7,29}}{\sqrt{36}}\right) = N(8; 0,45)$

b) $P(7,82 \le \overline{X} \le 8,36) = P\left(\dfrac{7,82-8}{0,45} \le Z \le \dfrac{8,36-8}{0,45}\right) = P\left(-0,4 \le Z \le 0,8\right) =$
$P(Z \le 0,8) - P(Z \le -0,4) = P(Z \le 0,8) - 1 + P(Z \le 0,4) = 0,7881 - 1 + 0,6554 = 0,4435$

c) $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575 \cdot 0,45 = 1,15875$
El intervalo característico es $(\mu - E, \mu + E) = (8 - 1,15875; 8 + 1,15875) = (6,84125; 9,15875)$

Problema 17.1.8 (2,5 puntos) En una cierta universidad se ha tomado una muestra aleatoria simple de 400 estudiantes, y se ha observado que de ellos 160 han aprobado todas las asignaturas.

a) (1,25 puntos) Estima el porcentaje de estudiantes de esa universidad que aprueban todas las asignaturas, con un nivel de confianza del 97 %.

b) (0,5 puntos) Calcula el error máximo admisible, con el nivel de confianza indicado.

c) (0,75 puntos) A la vista del resultado anterior, se quiere repetir la experiencia para conseguir que el error máximo admisible no sea superior a 0,04, con el mismo nivel de confianza. ¿Cuántos estudiantes, como mínimo, ha de tener la muestra?

Solución:

a) $n = 400$, $\hat{p} = \dfrac{160}{400} = 0,4$,$\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,6$ y $NC = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,015 = 0,985 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,17$
$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,17\sqrt{\dfrac{0,4 \cdot 0,6}{400}} = 0,0532$
$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,4 - 0,0532; 0,4 + 0,0532) = (0,3468; 0,4532) = (34,68\,\%; 45,32\,\%)$
El porcentaje de aprobados se encuentra entre el 34,68 % y el 45,32 % con una confianza del 97 %.

b) $E = 0,0532 \Longrightarrow 5,32\,\%$

c) $0,04 = 2,17\sqrt{\dfrac{0,4 \cdot 0,6}{n}} \Longrightarrow n \geq 706,335 \Longrightarrow n = 707$ alumnos.

17.2. Extraordinaria

- **Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques.**
  De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.

- En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

- Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:
  - pantalla gráfica
  - posibilidad de trasmitir de datos
  - programable
  - resolución de ecuaciones
  - operaciones con matrices
  - cálculo de determinantes
  - derivadas e integrales
  - almacenamiento de datos alfanuméricos

Álgebra

Problema 17.2.1 (2,5 puntos) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) (0,75 punto) Comprueba que la matriz B es la inversa de la matriz A.

b) (0,75 punto) Calcula la matriz $(A - 2I_2)^2$, donde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) (1 punto) Calcula la matriz X tal que $A \cdot X = B$

Solución:

a) $|A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = B$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow B = A^{-1}$$

b) $(A - 2I_2)^2 = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_2$

c) $A \cdot X = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = B \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$

Problema 17.2.2 (2,5 puntos) En un examen de matemáticas se propone el siguiente problema: Indica dónde alcanza el mínimo la función $F(x, y) = 6x + 3y - 2$, en la región determinada por las siguientes restricciones:

$$2x + y \geq 6; \quad 2x + 5y \leq 30; \quad 2x - y \leq 6$$

a) (2,2 puntos) Jimena responde que el mínimo de la función se alcanza en el punto $(1, 2)$ e Iván, por el contrario, que lo hace en el punto $(3, 0)$.

- ☛ ¿Es cierto que el mínimo de la función se alcanza en el punto $(1, 2)$?
- ☛ ¿Es exacta la respuesta de Iván?

Razona tus respuestas

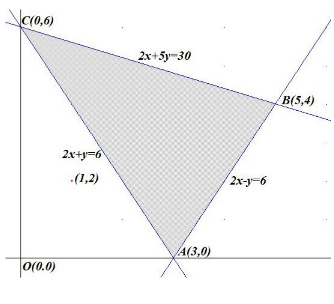
b) (0,3 puntos) ¿Cuánto vale dicho mínimo?

Solución:

a) La región factible es

$$\begin{cases} 2x + y \geq 6 \\ 2x + 5y \leq 30 \\ 2x - y \leq 6 \end{cases}$$

Los vértices son: $A(3, 0)$, $B(5, 4)$ y $C\,(0, 6)$.



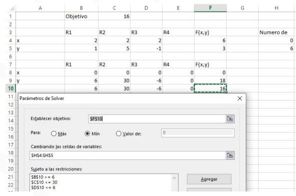
$F(x, y) = 6x + 3y - 2$

$$\begin{cases} F(3,0) = 16 \ \text{Mínimo} \\ F(5,4) = 40 \ \text{Máximo} \\ F(0,6) = 16 \ \text{Mínimo} \end{cases}$$

El mínimo se alcanza en cualquier punto del segmento $\overline{AC}$. El conjunto de soluciones posibles sería $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = -2x + 6, \ \forall x \in [0, 3]\}$. Por lo tanto:

- ☛ El mínimo no se encuentra en el punto $(1, 2)$ por no pertenecer al segmento $\overline{AC}$, ni siquiera a la región factible.
- ☛ La respuesta de Iván es un mínimo por pertenecer al segmento $\overline{AC}$, pero no sería la solución exacta al haber infinitas soluciones posibles que darían 16.

Solución por solver :



b) El mínimo vale 16.

Análisis

Problema 17.2.3 (2,5 puntos) La siguiente función $I(t)$ representa las ganancias/pérdidas (en miles de euros) de una empresa desde que se fundó:

$$I(t) = \frac{8t - 16}{t + 1}, \quad t \geq 0$$

donde t es el tiempo pasado (en años), e $I(t)$ son las ganancias/pérdidas.

a) (0,4 puntos) Realiza la representación gráfica de la función $I(t)$

b) (0,3 puntos) ¿Cuánto fue la inversión inicial (capital inicial)?

c) (0,3 puntos) ¿En qué año ganó 5600€?

d) (0,5 puntos) ¿A partir de qué año la empresa empieza a obtener ganancias?

e) (0,3 puntos) Analiza la evolución de la función (intervalos de crecimiento y decrecimiento)

f) (0,7 puntos) En caso de seguir así ¿cuál es la tendencia de la evolución de las ganancias/pérdidas? ¿La relacionas con alguna característica de la función?

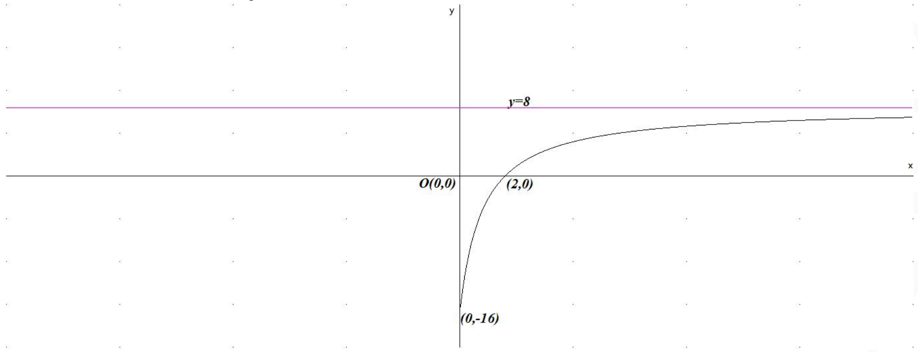
Solución:

a) **Tenemos:** $\text{Dom}(I) = [0, \infty)$, corta al eje de abscisas en $(2, 0)$ y el de ordenadas en el $(0, -16)$. No tiene asíntotas verticales, la única posible $t = -1$ no está en el dominio de la función. Sí tiene asíntota horizontal en $y = 8$, $\lim\limits_{t \to \infty} I(t) = 8$ y, por tanto, no tiene oblicuas.

$I'(t) = \dfrac{24}{(t + 1)^2} > 0 \Longrightarrow I$ no tiene extremos relativos y es creciente en todo el dominio de la función.

$I''(t) = -\dfrac{48}{(t + 1)^3} < 0 \Longrightarrow I$ es convexa $\frown$ en todo el dominio de la función.

Con estos datos dibujamos:



b) $I(0) = -16 \Longrightarrow$ se invirtieron 16000€.

c) $I(t) = 5,6 \Longrightarrow \dfrac{8t-16}{t+1} = 5,6 \Longrightarrow t = 9$ a los 9 años la empresa, en ese año, tiene unas ganancias de 5600€.

d) A partir del segundo año, como se ha visto en la representación gráfica.

e) La función es siempre creciente por ser $f'(x) > 0 \ \forall x \in [0, \infty)$

f) La función tiende a estabilizarse en 8000€, se aproxima a la asíntota horizontal $y = 8$.

Problema 17.2.4 (2,5 puntos) Sea la función $f(x) = \begin{cases} -2x - a & \text{si} & x \le 0 \\ x - 1 & \text{si} & 0 < x < 2 \\ bx - 5 & \text{si} & x \ge 2 \end{cases}$

a) (1,2 puntos) Halla los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua en el conjunto de todos los números reales.

b) (0,5 puntos) Representa la gráfica de la función $f(x)$ para los valores de los parámetros $a = 0$ y $b = 3$.

c) (0,8 puntos) Para los valores de $a = 0$ y $b = 3$, calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas OX, y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

a) Las tres ramas son continuas por ser polinomios, hay que estudiar la continuidad en $x = 0$ y $x = 2$.

- ☛ Continuidad en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(-2x - a) = -a \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x - 1) = -1 \\ f(0) = -a \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Longrightarrow$$

$$-a = -1 \Longrightarrow a = 1$$

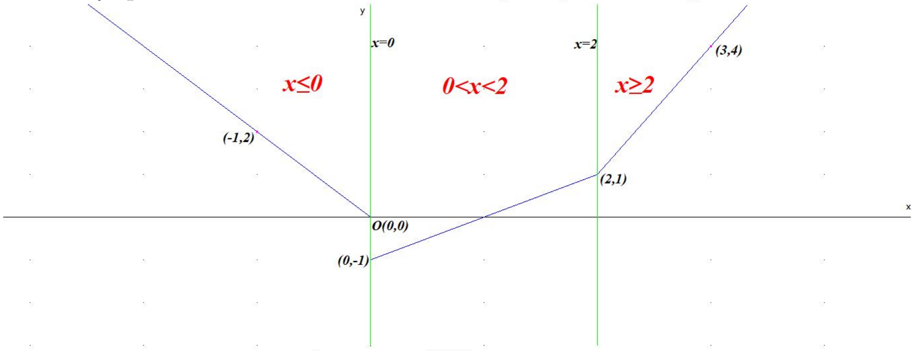
☛ Continuidad en $x = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x-1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(bx-5) = 2b-5 \\ f(2) = 2b-5 \end{array}\right. \Longrightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Longrightarrow$$

$$2b - 5 = 1 \Longrightarrow b = 3$$

b) Si $a = 0$ y $b = 3 \Longrightarrow f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} -2x & \text{si} & x \le 0 \\ x-1 & \text{si} & 0 < x < 2 \\ 3x-5 & \text{si} & x \ge 2 \end{array}\right.$

Como las tres ramas son tres rectas, con dos valores en cada una se puede representar la función y queda:



c) $x = 1$ está en la segunda rama, hay que comprobar si la gráfica de la función corta al eje de abscisas en el intervalo $(1,2)$. Tenemos $x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$, luego la función no corta al eje de abscisas en el interior del intervalo $(1,2)$. Tendremos dos recintos $S_1 : [1,2]$ en la rama $0 < x < 2$ y $S_2 : [2,3]$ en la rama $x \ge 2$. Podemos resolver por figuras geométricas dos triángulos rectángulos y un cuadrado:

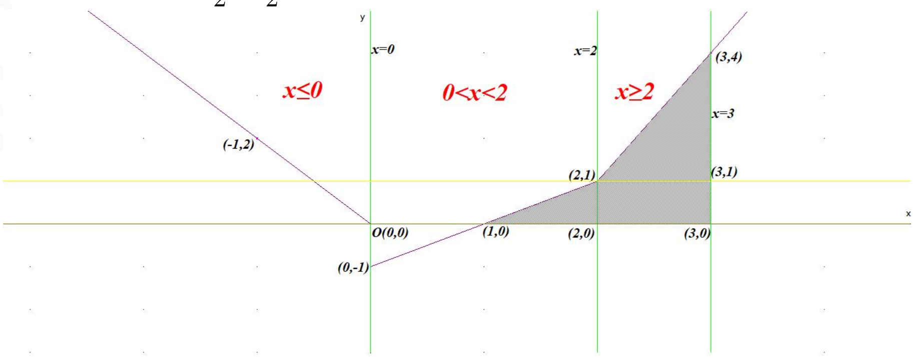
$S_1 = \dfrac{1\cdot 1}{2} = \dfrac{1}{2}$ y $S_2 = \dfrac{1\cdot 3}{2} + 1\cdot 1 = \dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{5}{2} \Longrightarrow S = S_1 + S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2} = 3\ u^2$

Por integrales:

$S_1 = \displaystyle\int_1^2 (x-1)\,dx = \left.\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 = \frac{1}{2}$

$S_2 = \displaystyle\int_2^3 (3x-5)\,dx = \left.\frac{3x^2}{2} - 5x\right]_2^3 = \frac{5}{2}$

$S = |S_1| + |S_2| = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2} = 3\ u^2$.



Probabilidad

Problema 17.2.5 (2,5 puntos) Gorka, jugador de un equipo de fútbol, ha sido titular el 80 % de los partidos de liga. Su equipo ha ganado un 40 % de los partidos en los que Gorka ha sido titular; y cuando no lo ha sido, su equipo ha ganado el 45 % de los partidos.

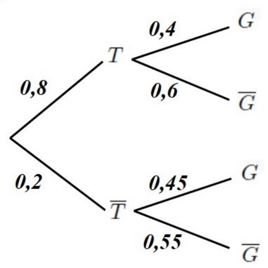
a) (0,8 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo gane un partido?

b) (0,6 puntos) Sabiendo que su equipo ha ganado, ¿Cuál es la probabilidad de que Gorka haya sido titular?

c) (0,6 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Gorka no sea titular y que su equipo gane el partido?

d) (0,5 puntos) ¿Los sucesos "ser titular" y "ganar el partido" son sucesos independientes? Razona tu respuesta.

Solución:
Sean T es titular, $\overline{T}$ no es titular, G gana el partido y $\overline{G}$ pierde el partido.



a) $P(G) = P(G|T)P(T) + P(G|\overline{T})P(\overline{T}) = 0,4 \cdot 0,8 + 0,45 \cdot 0,2 = 0,41$

b) $P(T|G) = \dfrac{P(G|T)P(T)}{P(G)} = \dfrac{0,4 \cdot 0,8}{0,41} = 0,7805$

c) $P(\overline{T} \cap G) = P(G|\overline{T})P(\overline{T}) = 0,45 \cdot 0,2 = 0,09$

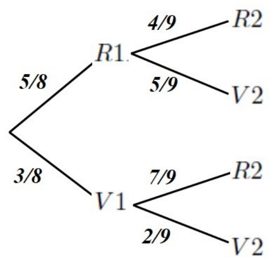
d) $P(T \cap G) = P(G|T)P(T) = 0,4 \cdot 0,8 = 0,32$ y $P(T) \cdot P(G) = 0,8 \cdot 0,41 = 0,328 \Longrightarrow P(T \cap G) \neq P(T) \cdot P(G) \Longrightarrow T$ y G no son independientes.

Problema 17.2.6 (2,5 puntos) Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por dos bolas del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola.
Calcula:

a) (1,4 puntos) La probabilidad de que la segunda bola extraída sea verde.

b) (1,1 puntos) La probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja, sabiendo que la segunda bola ha sido roja.

Solución:
Sean $R1$ bola roja en la primera extracción, $V1$ bola verde en la primera extracción, $R2$ bola roja en la segunda extracción y $V2$ bola verde en la segunda extracción.



a) $P(V2) = P(V2|R1)P(R1) + P(V2|V1)P(V1) = \dfrac{5}{9} \cdot \dfrac{5}{8} + \dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{3}{8} = \dfrac{31}{72} \simeq 0,4306$

b) $P(R1|R2) = \dfrac{P(R2|R1)P(R1)}{P(R2)} = \dfrac{\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8}}{1 - \frac{31}{72}} = \dfrac{20}{41} \simeq 0,4878$

Inferencia estadística

Problema 17.2.7 (2,5 puntos) El peso neto de las tabletas de chocolate de una determinada marca es una variable aleatoria normal de media desconocida μ y desviación típica 7 gramos. Sabemos que 36 tabletas de chocolate, elegidas al azar, han dado un peso total de 5274 gramos.

a) (1,7 puntos) Calcula un intervalo de confianza para la media μ con un nivel de confianza del 94 %.

b) (0,8 puntos) Con el mismo nivel de confianza ¿cuántas tabletas, como mínimo, habrá que tomar en la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza que se obtenga sea, como máximo, de 3 gramos?

Solución:

$$N(\mu; 7)$$

a) $\overline{X} = \dfrac{5274}{36} = 146,5$ y $NC = 0,94 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,06 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,03$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,03 = 0,97 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,885$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,885\dfrac{7}{\sqrt{36}} \simeq 2,2$
$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (146,5 - 2,2; 146,5 + 2,2) = (144,3; 148,7)$

b) $3 = 2E \Longrightarrow E = 1,5$
$1,5 = 1,885\dfrac{7}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 77,38 \Longrightarrow n = 78$ tabletas de chocolate.

Problema 17.2.8 (2,5 puntos) Un jugador A realiza lanzamientos con una moneda equilibrada, mientras que otro jugador B lo hace con una moneda trucada. La probabilidad de obtener cara con la moneda trucada es 0,4. Asociadas a dichos lanzamientos se definen las variables que siguen las siguientes distribuciones binomiales:

☛ X número de caras que obtiene el jugador A en n lanzamientos, $X \equiv B(n, p)$

- $n =$ número de lanzamientos con la moneda equilibrada.
- $p =$ probabilidad de obtener cara con la moneda equilibrada.

☛ Y número de cruces que obtiene el jugador B en n' lanzamientos, $X \equiv B(n', p')$

- $n' =$ número de lanzamientos con la moneda trucada.
- $p' =$ probabilidad de obtener cruz con la moneda trucada.

a) (0,6 puntos) Calcula la probabilidad de que el jugador A obtenga 3 caras en tres lanzamientos con su moneda equilibrada.

b) (0,6 puntos) Calcula la probabilidad de que el jugador B obtenga 2 cruces en 2 lanzamientos con la moneda trucada.

c) (1,3 puntos) ¿Qué es más probable, que el jugador A obtenga menos de 190 caras en 400 lanzamientos con su moneda equilibrada o que el jugador B obtenga menos de 110 cruces en 200 lanzamientos con su moneda trucada? **Justifica la respuesta.**

Solución:

a) $B(3; 0,5) \Longrightarrow P(X = 3) = \binom{3}{3} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^0 = 0,125$

b) $B(2;0,6) \Longrightarrow P(Y=2)=\binom{2}{2}\cdot 0,6^2\cdot 0,4^0=0,36$

c) El jugador A:
$B(400;0,5)$ se cumple: $n=400>10$, $np=400\cdot 0,5=200>5$, $nq=400\cdot 0,5=200>5 \Longrightarrow$
$B(400;0,5) \overset{N(np,\sqrt{npq})}{\approx} N(200;10)$
$P(X<190)=P\left(Z\le \dfrac{189,5-200}{10}\right)=P(Z\le -1,05)=1-P(Z\le 1,05)=1-0,8531=0,1469$
El jugador B:
$B(200;0,6)$ se cumple: $n=200>10$, $np=200\cdot 0,6=120>5$, $nq=200\cdot 0,4=80>5 \Longrightarrow$
$B(200;0,6) \overset{N(np,\sqrt{npq})}{\approx} N(120;6,9282)$
$P(Y<110)=P\left(Z\le \dfrac{109,5-120}{6,9282}\right)=P(Z\le -1,52)=1-P(Z\le 1,52)=1-0,9357=0,0643$
La probabilidad de que A obtenga menos de 190 caras en 400 lanzamientos, con la moneda equilibrada, es mayor de la que tiene el jugador B para obtener 110 cruces en 200 lanzamientos con la moneda trucada.

Capítulo 18

Resúmenes teóricos

18.1. Álgebra

Matrices

matriz A	dimensión	Transpuesta A^T	dimensión
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$m \times n$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$	$n \times m$
matriz cuadrada	orden	identidad	matriz triangular
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$	n	$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

- **Suma:** Tienen que tener la misma dimensión y se suman término a término.
- **Producto de una matriz por un número real:** Se multiplican todos los términos de la matriz por ese número.
- **Producto de dos matrices:** Se desarrolla multiplicando matriz fila por matriz columna de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

El número de columnas de la primera matriz tiene que ser igual al número de filas de la segunda.

Determinante de una matriz

- La matriz tiene que ser cuadrada

  a) De orden dos: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

b) De orden tres: (Regla de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

☛ Propiedades:

a) $\begin{vmatrix} a+m & b+n & c+p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n & p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

b) $|A^T| = |A|$

c) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

d) Si cambiamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo.

e) Si una fila o una columna tiene todos sus elementos igual a cero el determinante vale cero.

f) Si dos filas o dos columnas son iguales el determinante vale cero.

g) Si dos filas o dos columnas son proporcionales el determinante vale cero.

h) Si una fila o columna es combinación lineal de las otras el determinante vale cero.

i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+a & h+b & i+c \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

j) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ xa & xb & xc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+xa & h+xb & i+xc \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila multiplicada por un número (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

Matriz Adjunta:

☛ Adjunto del elemento a_{ij} de una matriz es el valor del determinante resultante de eliminar la fila i y la columna j multiplicado por $(-1)^{i+j}$ y se le denomina A_{ij}.

☛ Matriz adjunta. $Adj(A) = (A_{ij})$

Cálculo del determinate de una matriz por adjuntos:
Se elige una fila o una columna (cualquiera es válida, siempre será mejor aquella que tenga más ceros), escojo la primera fila para el ejemplo:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Inversa de una matriz:

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^T}{|A|}$$

Una matriz tiene inversa si, y sólo si, $|A| \neq 0$.
A las matrices que tienen inversa se la llama **Regulares** y a las que no la tienen se las llama **Singulares**.

Rango de una matriz
Es el número de filas linealmente independientes.
De forma práctica se calcula por determinantes. Si tenemos una matriz de dimensión 3×4 cogemos matrices cuadradas que tengan el mayor orden posible, tendremos cuatro de orden 3, si el determinante de alguna de ellas es distinto de cero el rango es 3 y habremos terminado, si por el contrario todas son cero el rango ya no puede ser 3 y buscaremos menores de orden 2. Si alguno de estos menores es distinto de cero ya habremos terminado, y el rango será 2, si por el contrario todos son cero tendremos que buscar menores de orden 1, y en el momento que encontremos alguno distinto de cero el rango será 1.

Sistema de Ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \cdots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \quad = & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \cdots & +a_{mn}x_n = & b_m \end{array}\right.$$

Matriz del sistema: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

Matriz de variables: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$,

Matriz de términos independientes: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Se trata de una ecuación matricial: $AX = B$.
Si $|A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$ y en este caso el sistema se podrá resolver de la siguiente manera $X = A^{-1}B$

Antes de resolver un sistema estudiar si hay ecuaciones nulas, iguales o proporcionales, para el estudio del rango.

Teorema de Rouché

- Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) = nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Determinado (SCD). Y tiene solución única.
- Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) $<$ nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Indeterminado (SCI). Y tiene infinitas soluciones.
- Si Rango($\overline{A}$) $\neq$Rango(A) se trata de un Sistema Incompatible. Y no tiene solución.

Sistema homogéneos Son aquellos en los que $b_i = 0$, estos siempre tienen solución $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ solución trivial, pero en el caso de que de que Rango(A) $< m$ (nº de incógnitas) estaríamos ante infinitas soluciones, es decir:

- ☛ Si Rango$(A) = m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCD $\Longrightarrow$ $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ solución trivial.
- ☛ Si Rango$(A) < m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCI $\Longrightarrow$ infinitas soluciones.

Regla de Cramer
Sea $\overline{A} = (C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n, B)$, entoces sustituimos la columna B en la matriz $\overline{A}$ por cada una de las columnas y tendremos:

$$x_1 = \frac{|B, C_2, C_3, \cdots, C_n|}{|A|},\ \ x_2 = \frac{|C_1, B, C_3, \cdots, C_n|}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{|C_1, C_2, \cdots, B|}{|A|}$$

18.2. Análisis

Tabla de Derivadas

función	derivada	función	derivada
$y = k$	$y' = 0$	$y = x$	$y' = 1$
$y = ax^n$	$y' = nax^{n-1}$	$y = au^n$	$y' = nau^{n-1}u'$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	$y = uv$	$y' = u'v + uv'$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y = \dfrac{u}{v}$	$y = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$	$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
$y = u^v$	$y' = u^v(v' \ln u) + vu^{v-1}u'$	$y = a^u$	$y' = u'a^u \ln a$
$y = e^u$	$y' = u'e^u$	$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$	$y = \tan u$	$y' = u' \sec^2 u$
$y = \cot u$	$y' = -u' \csc^2 u$	$y = \csc u$	$y' = -u' \csc u \cot u$
$y = \sec u$	$y' = u' \sec u \tan u$	$y = \arcsin u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \arccos u$	$y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \arctan u$	$y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
	Regla de la Cadena	$y = f(g(x))$	$y' = g'(x)f'(g(x))$

Representación gráfica de funciones

Hay que seguir los siguientes pasos:

1 Dominio	Buscar Puntos Singulares	2 Signo	$f(x) > 0$ *o* $f(x) < 0$
3 Ptos. Corte	Corte con OX : $f(x) = 0$ Corte con OY : $x = 0$	4 Simetría :	Par : $f(-x) = f(x)$ con OY Impar : $f(-x) = -f(x)$ con O
5 Asíntotas :	Verticales : $x = p$ $\lim\limits_{x\longrightarrow p} f(x) = \pm\infty$ Horizontales : $y = p$ $\lim\limits_{x\longrightarrow \pm\infty} f(x) = p$ Si $\exists\, y = p \Longrightarrow$ No Oblicuas Oblicuas : $y = mx + n$ $m = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $n = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx)$	6 Monotonía :	Creciente : $f'(x) > 0 \nearrow$ Decreciente : $f'(x) < 0 \searrow$ Si $f'(p) = 0$ Punto Crítico : Máximo si $f''(p) < 0$ Mínimo si $f''(p) > 0$ Pto. Inflexión si $f''(p) = 0$ y $f'''(p) \neq 0$
7 Máximos y Mínimos	Máximo : $\nearrow\searrow$ de creciente a decreciente Mínimo : $\searrow\nearrow$ de decreciente a creciente	8 Curvatura :	Cóncava : $f''(x) > 0 \cup$ Convexa : $f''(x) < 0 \cap$ Si $f''(p) = 0$ Punto Crítico : Pto. Inflexión si de Cóncava a Convexa de Convexa a Cóncava
9 Periodo :	$f(x + T) = f(x)$		

Tabla de Integrales Inmediatas

Tipo	Simple	Compuesta
Potencial $a \neq -1$	$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int f^a \cdot f'\,dx = \frac{f^{a+1}}{a+1}$
Logarítmica	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert$	$\int \frac{f'}{f}\,dx = \ln\lvert f\rvert$
Exponencial	$\int e^x\,dx = e^x$	$\int e^f \cdot f'\,dx = e^f$
Exponencial	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int a^f \cdot f'\,dx = \frac{a^f}{\ln a}$
Seno	$\int \cos x\,dx = \sin x$	$\int f' \cdot \cos f\,dx = \sin f$
Coseno	$\int \sin x\,dx = -\cos x$	$\int f' \cdot \sin f\,dx = -\cos f$
Tangente	$\int \sec^2\,dx = \tan x$	$\int f' \cdot \sec^2 f\,dx = \tan f$
	$\int (1+\tan^2 x)\,dx = \tan x$	$\int f' \cdot (1+\tan^2 f)\,dx = \tan f$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x$	$\int \frac{f'}{\cos^2 f}\,dx = \tan f$
Cotangente	$\int \csc^2\,dx = -\cot x$	$\int f' \cdot \csc^2 f\,dx = -\cot f$
	$\int (1+\cot^2 x)\,dx = -\cot x$	$\int f' \cdot (1+\cot^2 f)\,dx = -\cot f$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x$	$\int \frac{f'}{\sin^2 f}\,dx = -\cot f$
Arco seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}\,dx = \arcsin f$
	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{\sqrt{a^2-f^2}}\,dx = \arcsin \frac{f}{a}$
Arco coseno	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}\,dx = \arccos f$
	$\int \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arccos \frac{x}{a}$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{a^2-f^2}}\,dx = \arccos \frac{f}{a}$
Arco tangente	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$	$\int \frac{f'}{1+f^2}\,dx = \arctan f$
	$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \arctan \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{a^2+f^2}\,dx = \arctan \frac{f}{a}$
Neperiano − Arcotangente	$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx = \ln \pm \arctan x$	Si $M \neq 0$, ax^2+bx+c irreducible

Definición de Derivada

$$f'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad f'(a) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Continuidad: Una función f es continua en un punto a si

$$\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

- Si $\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) \Longrightarrow$ Discontinua no evitable. (La función pega un salto en ese punto)
- Si $\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) \neq f(a) \Longrightarrow$ Discontinua evitable. (La función tiene un agujero en ese punto)

Derivabilidad
Una función f es derivable en un punto a si $f'(a^-) = f'(a^+)$.

$$f'(a^-) = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'(a^+) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si f es una función derivable en un punto a, entonces f tiene que ser continua en a.

Teorema de Weierstrass
Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces f alcanza un máximo y un mínimo en este intervalo.

Teorema de Darboux
Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces f toma en dicho intervalo todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo.

Teorema de Bolzano
Si f es una función continua en el intervalo cerrado y no nulo $[a, b]$ $(a < b)$ y la función toma valores de distinto signo en los extremos de este intervalo (Si signo de $f(a)$ es positivo entonces signo de $f(b)$ es negativo o viceversa). Entonces la función pasa necesariamente por un punto que corta al eje de abscisas, es decir, $\exists c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema de Rolle
Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). Si además cumple que $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema del Valor Medio de Lagrange
Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Primer Teorema Fundamental del Cálculo
Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Definimos en este intervalo la función

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, dt \text{ donde } c \in [a, b]$$

En estas condiciones, si f es continua en c se cumple que F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.

Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (Regla de Barrow)
Dada una función f continua en el intervalo $[a, b]$ y sea F cualquier función primitiva de f, es decir $F'(x) = f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema de integración por partes
Sean f y g dos funciones reales derivables en el intervalo $[a,b]$. En estas condiciones se cumple

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (sentado un día vi un valiente soldado vestido de uniforme)

Teorema del cambio de variable
Sea g una función con derivada g' continua en $[a,b]$, y sea f una función real y continua en el mismo intervalo. SI hacemos el cambio de variable $t = g(x)$ se cumple que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

Límites cuando $x \longrightarrow \pm\infty$
Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que Grado$(P(x)) = n$ y Grado$(Q(x)) = m$. Sea A el coeficiente del monomio de mayor grado de $P(x)$ y sea B el coeficiente del monomio de mayor grado de $Q(x)$

$$L = \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- ☛ $\lim_{x\longrightarrow\infty} P(x) = \pm\infty$ el signo depende del signo del coeficiente de mayor grado de este polinomio.
- ☛ Si $n > m \Longrightarrow L =$Signo$\left(\frac{A}{B}\right)\cdot\infty$
- ☛ Si $n < m \Longrightarrow L = 0$
- ☛ Si $n = m \Longrightarrow L = \frac{A}{B}$

Si $\lim_{x\longrightarrow\infty} P(x)^{Q(x)} = [1^\infty] = e^\lambda$, donde

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} Q(x)(P(x)-1)$$

Regla de L'Hôpital Sean f y g dos funciones reales y derivables, entonces si

$$\lim_{x\longrightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \ o \ \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right] \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\longrightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aproximaciones cuando $x \longrightarrow 0$

$\sin x \approx x$	$\tan x \approx x$	$e^x \approx 1 + x$	$\log(1+x) \approx x$
$a^x \approx 1 + x\ln a$	$\arcsin x \approx x$	$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$	$\arccos \approx \frac{\pi}{2} - x$

18.3. Probabilidad

Frecuencia absoluta de un suceso A es el número de veces que se repite dicho suceso $\Longrightarrow f(A)$

Frecuencia relativa de un suceso A es la proporción de veces que ha sucedido A de N experiencias $\Longrightarrow f_r(A) = \dfrac{f(A)}{N}$

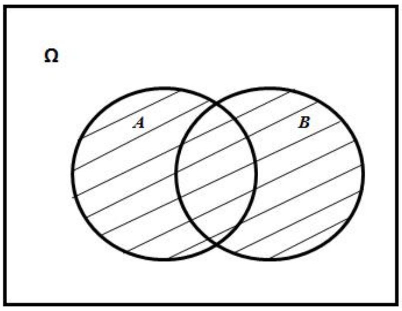
Ley de los grandes números: $\lim\limits_{N \longrightarrow \infty} f_r(A) = P(A)$

Ley de Laplace: $P(A) = \dfrac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$

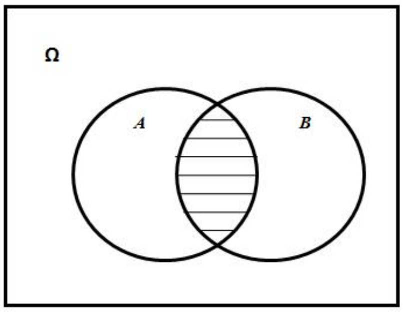
$\Omega \equiv$ **Espacio muestral** es el de todos los sucesos, sería el suceso seguro: $P(\Omega) = 1$.

$\emptyset \equiv$ **Espacio vacio** es el de ningún suceso, sería el suceso imposible: $P(\emptyset) = 0$.

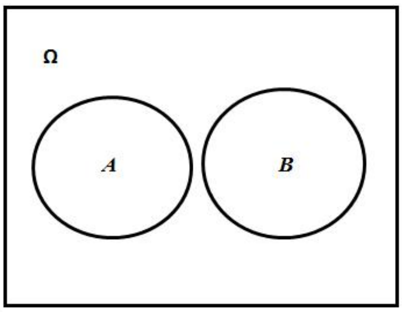
Diagramas de Venn: (esquemas usados en la teoría de conjuntos)



Unión de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos del conjunto A con todos los de B: $A \cup B$



Intersección de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos comunes entre los conjuntos A y B: $A \cap B$



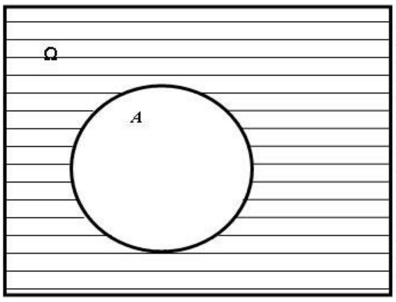
Sucesos Incompatibles: Dos sucesos son incompatibles si su intersección es vacía. $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cap B) = 0$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

En el caso de que los dos sucesos sean incompatibles la fórmula quedaría:

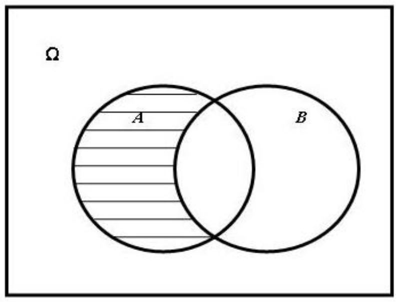
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Sucesos independientes: Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.



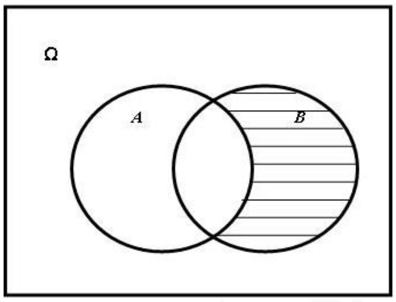
$\overline{A}$ es el suceso contrario o complementario de A:

$$\overline{A} = \Omega - A \Longrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$



$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$



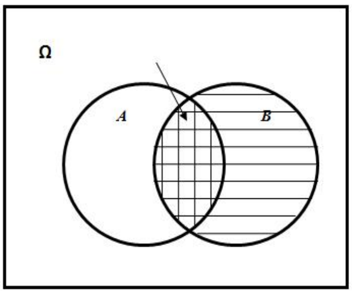
Leyes de Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Probabilidad condicionada: es la probabilidad de que ocurra un suceso A sabiendo que ha ocurrido el suceso B: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Teorema de Bayes: $P(A|B) = \dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

Teorema de la probabilidad total: Si $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \Omega$ y los sucesos A_i con $i = 1, ..., 5$ son incompatibles dos a dos (intersección vacía), entonces:

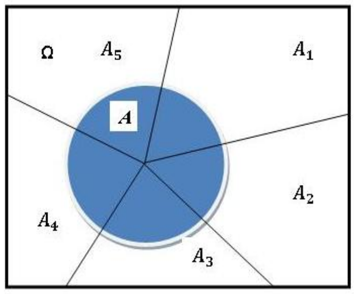
$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) + P(A_4)P(A|A_4) + P(A_5)P(A|A_5)$$



Probabilidad condicionada:

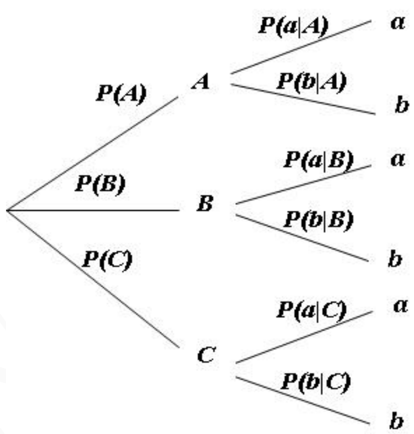
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

probabilidad total



$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1)+P(A_2)P(A|A_2)+P(A_3)P(A|A_3)+P(A_4)P(A|A_4)+P(A_5)P(A|A_5)$$

Organización por árboles:



Organización por tablas de contingencia:

	Renault	Seat	Mercedes	Totales
Blanco	15	20	10	45
Negro	300	455	200	955
	315	475	210	1000

$$P(B|S) = \frac{20}{475}, \;\; P(N|M) = \frac{200}{210}, \;\; P(B) = \frac{45}{1000}, \;\; P(M) = \frac{210}{1000}$$

18.4. Estadística

Gráficos:

☛ Varable discreta: con diagrama de barras.

$$x_i, \;\; p(x_i) = p_i, \;\; \sum p_i = 1$$

$$\text{Media} = \mu = \sum x_i p_i, \quad \text{Varianza} = \sigma^2 = \sum p_i(x_i - \mu)^2 = \sum p_i x_i - \mu^2$$

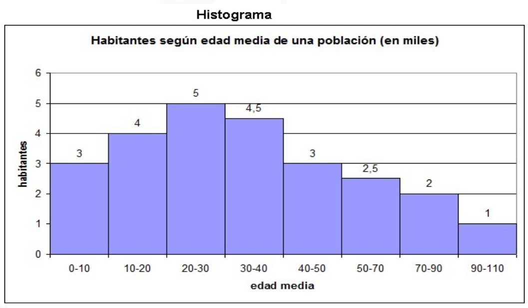
$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$

☛ Variable continua: histogramas (intervalos)

$$x_i, \;\; f_i,$$

$$\text{Media} = \overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum x_i}, \quad \text{Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i(x_i - \overline{X})^2}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \overline{X}^2$$

$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$



Distribución Binomial B(n, p):

$$P(X = a) = \binom{n}{a} p^a q^{n-a}$$

p es la probabilidad de éxito y $q = 1 - p$ la probabilidad de fracaso. Por ejemplo, si B$(7, 0, 4) \Longrightarrow$ $n = 7$, $p = 0, 4$ y $q = 0, 6$:

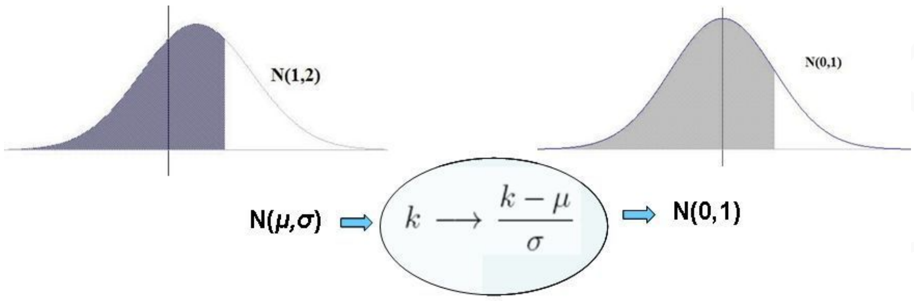
$$P(X = 2) = \binom{7}{2} 0,4^2 0,6^5 = 0,261$$

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3), \text{ ó}$$

$$P(X \leq 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - (P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7))$$

Su Media= $\mu = np$, su Varianza= $\sigma^2 = npq$ y su Desviación Típica= $\sqrt{\text{Varianza}}$.
Distribución Normal N(μ, σ):

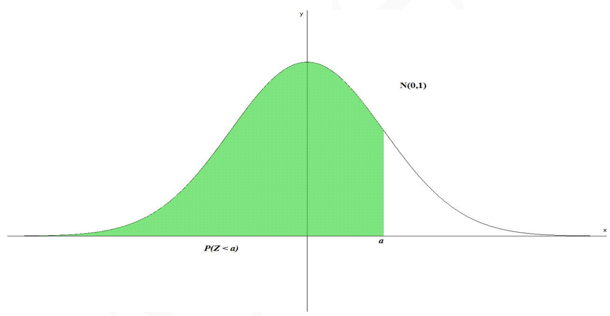
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Tipificación Paso de una normal N(μ, σ) a otra N$(0,1)$: $k \longrightarrow \dfrac{k-\mu}{\sigma}$, si queremos calcular $P(a < X < b)$ y X es de una normal N(μ, σ) entoces Z seguirá una normal N$(0,1)$

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Cuando una distribución binmial $B(n,p)$ cumple $np > 3$ y $nq > 3$, se aproxima a una normal $N(np, \sqrt{npq})$, si son mayores de 5 la aproximación es perfecta.



$$P(Z > a) = 1 - P(Z < a), \quad P(Z < -a) = 1 - P(Z < a)$$

$$P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$$

La corrección por continuidad de Yate seguirá las siguientes reglas:
$P(x = a) = P(a - 0,5 \le X \le a + 0,5)$
$P(X \le a) = P(X \le a + 0,5)$
$P(X < a) = P(X \le a - 0,5)$
$P(X > a) = P(X \ge a + 0,5)$
$P(X \ge a) = P(X \ge a - 0,5)$
Cálculo de $z_{\alpha/2}$ con un **Nivel de confianza** del 95 %: $NC = 0,95 = 1 - \alpha$ ($\alpha =$**Nivel de significación**)$\Longrightarrow$ $\alpha = 0,05$. Para una distribución bilateral tendremos $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025 \Longrightarrow P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975$ se busca en la tabla $N(0,1)$ y obtenemos $z_{\alpha/2} = 1,96$
Para muestras aleatorias de tamaño n con media $\overline{X}$ de una $N(\mu, \sigma)$ la media $\overline{X}$ se distribuye como una normal $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
Error: $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Intervalo de Confianza: $(\overline{X}-E,\overline{X}+E)=\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de medias.

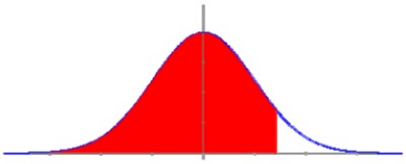
Proporciones: Sea $\hat{p}$ proporción de la muestra de tamaño n, se distribuye como una $N\left(p,\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$

Error: $E=z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

Intervalo de Confianza: $(\hat{p}-E,\hat{p}+E)=\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}},\hat{p}+z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de proporciones.

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

$$P(Z \leq z) = F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Agradecimientos

- ✎ A las Universidades por la publicación de los exámenes oficiales.
- ✎ A Íñigo Zunzunegui Monterrubio (https://aprendeconmigomelon.com) por sus correcciones.
- ✎ A Juan Antonio Martínez (https://www.ebaumatematicas.com) por el contenido de su página, me ha servido para contrastar resultados.
- ✎ A Paula Cabildo por el diseño de la portada y contraportada.

Prof: **Isaac Musat Hervás**

Profesor de Matemáticas en el colegio Villaeuropa de Móstoles

Bachillerato y Selectividad en las dos opciones

Ferroviario en la Dirección de Cercanías de Madrid

Diferentes estudios y trabajos

Jubilado en la actualidad

La educación ha sido mi pasión, el recuerdo del aula, el olor a tiza
y el pantalón manchado de polvo blanco lo llevo siempre conmigo.
Las voces con las preguntas de mis alumnos y mis respuestas,
acertadas o no, quedan en nuestros recuerdos valiosos.
He sido un afortunado, mi trabajo ha sido mi diversión favorita.