Problemas de Matemáticas II
Ciencias y Tecnología

Todas las comunidades autónomas

(Selectividad 2023-Ordinaria y Extraordinaria)

Prof: **Isaac Musat Hervás**

última actualización:

1 de junio de 2024

Cuando las leyes de la matemática
se refieren a la realidad,
no son ciertas;
cuando son ciertas,
no se refieren a la realidad.
Albert Einstein

Índice general

Capítulo 1

Andalucía

1.1. Ordinaria

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.

c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.

d) Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

Problema 1.1.1 (2,5 puntos) Considera la función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$

a) (1,5 puntos) Estudia y halla los máximos y mínimos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

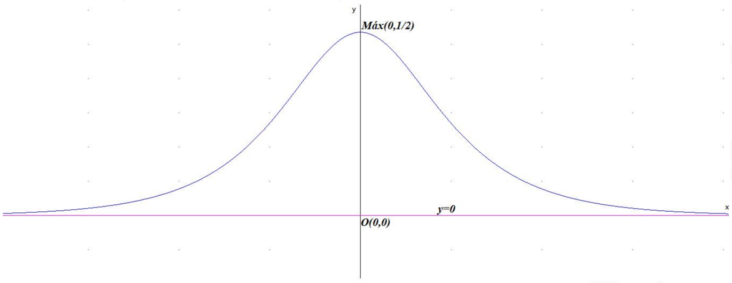
b) (1 punto) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 f(x)\right)$.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{-e^x + e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{-e^{2x} + 1}{e^x(e^x + e^{-x})^2} = 0 \Longrightarrow -e^{2x} + 1 = 0 \Longrightarrow x = 0$, el denominador no se anula nunca y es siempre positivo.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decreciente en el $(0, \infty)$ con un máximo relativo en $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.
El máximo calculado sería absoluto y no habría mínimos ni absolutos ni relativos. La función crece desde una asíntota horizontal en $y = 0$ y decrece hasta esta misma asíntota:
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} = 0 \Longrightarrow y = 0$



b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 f(x)\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x + e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x - e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{\infty + 0} = 0$

Problema 1.1.2 (2,5 puntos) Sea la función $f(x) = x^3 - 2x + 5$.

a) (1,5 puntos) Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, f(-2))$ y $(2, f(2))$.

b) (1 punto) Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.

Solución:

a) Calculamos la recta que pasa por los puntos: $A(-2, f(-2)) = A(-2, 1)$ y $B(2, f(2)) = B(2, 9)$
$\overrightarrow{AB} = (4, 8) = 4(1, 2) \Longrightarrow \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{2} \Longrightarrow 2x + 4 = y - 1 \Longrightarrow$
$y = 2x + 5 \Longrightarrow m = 2$
$f'(x) = 3x^2 - 2$ y tiene que ser $f'(a) = 3a^2 - 2 = 2 \Longrightarrow a = \pm\sqrt{\dfrac{4}{3}} = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $f''(x) = 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$, como $f'''(x) = 6 \Longrightarrow f'''(0) = 6 \neq 0 \Longrightarrow (0, 5)$ es un punto de inflexión.
La pendiente de la recta tangente en este punto $m_t = f'(0) = -2$, sustituyendo en la ecuación punto pendiente de la recta $y - f(0) = m_t(x - 0) \Longrightarrow y - 5 = -2x \Longrightarrow y = -2x + 5$
La pendiente de la recta normal en este punto $m_n = \dfrac{-1}{m_t} = \dfrac{1}{2}$, sustituyendo en la ecuación punto pendiente de la recta $y - f(0) = m_n(x - 0) \Longrightarrow y - 5 = \dfrac{1}{2}x \Longrightarrow y = \dfrac{1}{2}x + 5$

Problema 1.1.3 (2,5 puntos) Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x|x - 1|$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de dicha función y su recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$.
Solución:

$f(x) = \begin{cases} -x(x-1) & \text{si} \quad x-1<0 \\ x(x-1) & \text{si} \quad x-1 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2+x & \text{si} \quad x<1 \\ x^2-x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow$
$f'(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si} \quad x<1 \\ 2x-1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$
Tenemos $b = f(a) = f(0) = 0$ y $m = f'(0) = 1 \xrightarrow{y-b=m(x-a)} y-0 = 1(x-0) \Longrightarrow y = x$ es la recta tangente en $x = 0$.
Calculamos los puntos de corte de esta recta con $f(x) \Longrightarrow f(x) = x \Longrightarrow$
$\begin{cases} -x^2+x = x \Longrightarrow x = 0 & \text{si} \quad x<1 \\ x^2-x = x \Longrightarrow x = 0 \text{ (no válida) y } x = 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$
Habrá dos recintos de integración $S_1 : [0,1]$ y $S_2 : [1,2]$:

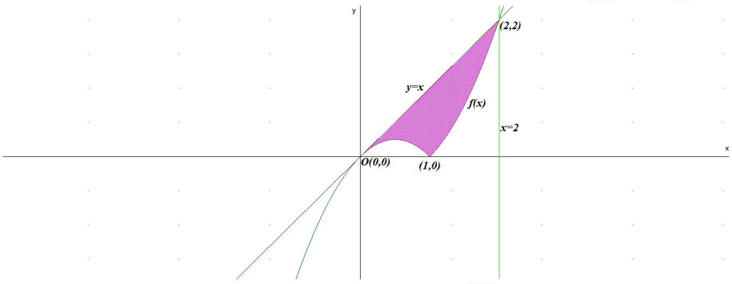
$$S_1 = \int_0^1 (f(x)-x)\,dx = \int_0^1 (-x^2+x-x)\,dx = \int_0^1 (-x^2)\,dx = \left.\frac{-x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{-1}{3}$$

Sale negativa por estar la tangente por encima de la función.

$$S_2 = \int_1^2 (f(x)-x)\,dx = \int_1^2 (x^2-x-x)\,dx = \int_1^2 (x^2-2x)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2\right]_1^2 = \frac{-2}{3}$$

Sale negativa por estar la tangente por encima de la función.

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1\ u^2$$



Problema 1.1.4 (2,5 puntos) Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(t^2)\,dt$.
Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{xF(x)}{\sin(x^2)}$.

Solución:

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{xF(x)}{\sin(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^x \sin(t^2)\,dt}{\sin(x^2)} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2)\,dt + x\sin(x^2)}{2x\cos(x^2)} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=}$
$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)+\sin(x^2)+2x^2\cos(x^2)}{2\cos(x^2)-4x^2\sin(x^2)} = \frac{0}{2} = 0$

BLOQUE B

Problema 1.1.5 (2,5 puntos) Una marca de vehículos ha vendido este mes coches de tres colores: blancos, negros y rojos. El 60 % de los coches blancos más el 50 % de los coches negros representan el 30 % de los coches vendidos. El 20 % de los coches blancos junto con el 60 % de los coches negros y el 60 % de los coches rojos representan la mitad de los coches vendidos. Se han vendido 100

coches negros más que blancos. Determina el número de coches vendidos de cada color.
Solución:
Sean x el númerro de coches blancos, y negros y z rojos.

$$\left\{\begin{array}{l} 0,6x+0,5y=0,3(x+y+z) \\ 0,2x+0,6y+0,6z=0,5(x+y+z) \\ y=100+x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6x+5y=3(x+y+z) \\ 2x+6y+6z=5(x+y+z) \\ y=100+x \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+2y-3z=0 \\ -3x+y+z=0 \\ x-y=-100 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=500 \text{ blancos} \\ y=600 \text{ negros} \\ z=900 \text{ rojos} \end{array}\right.$$

Problema 1.1.6 (2,5 puntos) Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) (0,5 puntos) Determina para qué valores de m tiene inversa de la matriz A.

b) (2 puntos) Para todo $m \neq -1$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX+X=B$.

Solución:

a) $|A|=m^3=0 \Longrightarrow m=0 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall m \in \mathbb{R}-\{0\}$

b) $AX+X=B \Longrightarrow (A+I)X=B \Longrightarrow X=(A+I)^{-1}B$
$|A+I|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{vmatrix}=m^3+1=0 \Longrightarrow m=-1 \Longrightarrow \exists (A+I)^{-1}\ \forall m \in \mathbb{R}-\{-1\}$
Como $m \neq -1$ podemos calcular su inversa:

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{m^3+1}\begin{pmatrix} 1 & m^2 & -m \\ -m & 1 & m^2 \\ m^2 & -m & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$X=\frac{1}{m^3+1}\begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ -m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & -m \end{pmatrix} \text{ con } m \neq -1$$

Problema 1.1.7 (2,5 puntos) El plano perpendicular al segmento de extremos $P(0,3,8)$ y $Q(2,1,6)$ que pasa por su punto medio corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C.

Solución:
Sea π el plano mediador del segmento $\overline{PQ}$, si $H(x,y,z) \in \pi \Longrightarrow d(H,P)=d(H,Q) \Longrightarrow$
$\left|\overrightarrow{PH}\right|=\left|\overrightarrow{QH}\right| \Longrightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2+(z-8)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z-6)^2} \Longrightarrow$
$4x-4y-4z+32=0 \Longrightarrow \pi: x-y-z+8=0$
El plano $\pi: x-y-z+8=0$ corta con los ejes coordenados en:

- ☛ Con OX hacemos $y=0$ y $z=0 \Longrightarrow A(-8,0,0)$
- ☛ Con OY hacemos $x=0$ y $z=0 \Longrightarrow B(0,8,0)$
- ☛ Con OZ hacemos $x=0$ y $y=0 \Longrightarrow C(0,0,8)$

☛ $\overrightarrow{AB} = (0,8,0) - (-8,0,0) = (8,8,0)$ y $\overrightarrow{AC} = (0,0,8) - (-8,0,0) = (8,0,8)$

$$S_t = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(64,-64,-64)| = 32\sqrt{3}\ u^2$$

Problema 1.1.8 (2,5 puntos) Considera el punto $A(-1,1,3)$ y la recta r determinada por los puntos $B(2,1,1)$ y $C(0,1,-1)$

a) (1,5 puntos) Halla la distancia del punto A a la recta r.

b) (1 punto) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B y C.

Solución:

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{CB} = (2,0,2) = 2(1,0,1) \\ P_r = C(0,1,-1) \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = -1+\lambda \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{P_rA} = (-1,0,4)$, $\left|\overrightarrow{P_rA}\times\overrightarrow{u_r}\right| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}| = |(0,-5,0)| = 5$ y $|\overrightarrow{u_r}| = \sqrt{2}$

$$d(A,r) = \frac{\left|\overrightarrow{P_rA}\times\overrightarrow{u_r}\right|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\ u$$

b) $\overrightarrow{AB} = (3,0,-2)$ y $\overrightarrow{AC} = (1,0,-4)$:

$$S_t = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(0,10,0)| = 5\ u^2$$

1.2. Extraordinaria

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.

c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.

d) Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

Problema 1.2.1 (2,5 puntos) Sea la función $f(x) = \begin{cases} 5x+1 & \text{si} \quad -2 \le x \le 0 \\ e^x \cos x & \text{si} \quad 0 < x \le 2\pi \end{cases}$

a) (2 puntos) Halla los extremos relativos y absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) (0,5 puntos) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Solución:

a) Estudiamos la continuidad de la función en $x = 0$. Las ramas son continuas en el dominio de la función.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(5x+1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(e^x \cos x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1 \Longrightarrow f$ continua en $x = 0$.

Luego f es continua en el dominio de la función $[-2, 2\pi]$. En el punto $x = 0$ la función pasa de crecer a crecer y no hay extremo en ese punto.

En la rama $-2 \le x \le 0$ la función $f(x) = 5x + 1$ es una recta que pasa por los puntos $(-2, -9)$ y $(0, 1)$ el valor máximo se alcanza en $x = 0$ y el mínimo en $x = -2$.

En la rama $0 < x \le 2\pi$ la función $f(x) = e^x \cos x$ es una curva entre los puntos $(0, 1)$ y $(2\pi, e^{2\pi}) \simeq (6,2832; 535,4917)$.

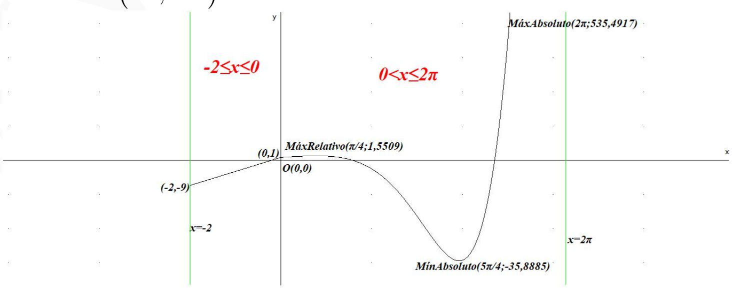
$f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x(\cos x - \sin x) = 0 \Longrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Longrightarrow \tan x = 1 \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$ y $x = \dfrac{5\pi}{4}$

$f''(x) = e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x) = -2e^x \sin x$

$f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -2e^{\pi/4}\dfrac{\sqrt{2}}{2} < 0 \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$ es un máximo relativo. Tenemos $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = e^{\pi/4}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \simeq 1,5509$

$f''\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -2e^{5\pi/4}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0 \Longrightarrow x = \dfrac{5\pi}{4}$ es un mínimo relativo. Tenemos $f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -e^{5\pi/4}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \simeq -35,88851136$

Con estos datos el mínimo absoluto estaría en el punto $\left(\dfrac{5\pi}{4}, -\dfrac{e^{5\pi/4}\sqrt{2}}{2}\right)$ y el máximo absoluto en $\left(2\pi, e^{2\pi}\right)$



b) $a = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow b = f(a) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ y

$$m = f'(a) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{\pi/2} \xrightarrow{y-b=m(x-a)}$$
$$y = -e^{\pi/2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow y = -e^{\pi/2}x + \frac{e^{\pi/2}\pi}{2}$$

Problema 1.2.2 (2,5 puntos) Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x(\ln x)^2$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

a) (1,25 puntos) Calcula, si existen, sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) (1,25 puntos) Calcula, si existen, sus extremos absolutos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución:

a) $f'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x = \ln x(\ln x + 2) = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ln x = 0 \Longrightarrow x = 1 \\ \ln x = -2 \Longrightarrow x = e^{-2} \end{array} \right.$

	$(0, e^{-2})$	$(e^{-2}, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(0, e^{-2}) \cup (1, \infty)$ y decreciente en el $(e^{-2}, 1)$ con un máximo relativo en $(e^{-2}, 4e^{-2})$ y un mínimo relativo en $(1, 0)$

b) El mínimo relativo $(1, 0)$ es también absoluto porque la función es siempre positiva. Para estudiar el máximo absoluto calculamos

$$\lim_{x \to +\infty} x(\ln x)^2 = [\infty \cdot \infty] = \infty$$

luego no hay máximo absoluto.

Problema 1.2.3 (2,5 puntos) Calcula a con $0 < a < 1$, tal que $\displaystyle\int_a^1 \frac{\ln x}{x}\,dx + 2 = 0$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

Solución:

$$F(x) = \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}dx \\ dx = xdt \end{array} \right] = \int \frac{t}{x}xdt = \int tdt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

$\displaystyle\int_a^1 \frac{\ln x}{x}\,dx + 2 = 0 \Longrightarrow F(1) - F(a) = -2 \Longrightarrow 0 - \frac{(\ln a)^2}{2} = -2 \Longrightarrow \ln a = \pm 2 \Longrightarrow a = e^2$ (no válida) y $a = e^{-2}$

Problema 1.2.4 (2,5 puntos) Considera las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 5 - x^2$ y $g(x) = \dfrac{4}{x^2}$.

a) (1,25 puntos) Esboza las gráficas de las dos funciones y calcula los puntos de corte entre ellas.

b) (1,25 puntos) Calcula la suma de las áreas de los recintos limitados por las gráficas de f y g.

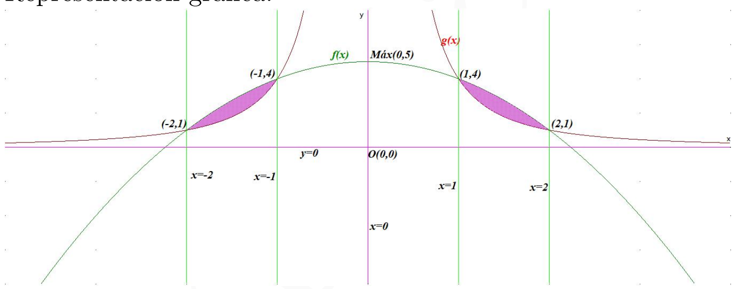
Solución:

a) ☛ $f(x) = 5 - x^2$ es una función PAR, corta con el eje de ordenadas en $(0,5)$ y con el eje de abscisas en los puntos $f(x) = 5 - x^2 = 0 \Longrightarrow (\pm\sqrt{5}, 0)$.
$f'(x) = -2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(0) = -2 < 0 \Longrightarrow (0,5)$ es un máximo relativo.

☛ $g(x) = \dfrac{4}{x^2}$ es una función PAR, que no tiene puntos de corte con los ejes coordenados. En $x = 0$ tiene una asíntota vertical, las ramas se acercan a $+\infty$ cuando $x \to 0^+$ y cuando $x \to 0^-$, tiene una asíntota horizontal en $y = 0$, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x^2} = 0$.
$f'(x) = -\dfrac{8}{x^3} \neq 0 \Longrightarrow$ la función no tiene extremos relativos.

☛ Puntos de corte entre las dos funciones:
$f(x) = g(x) \Longrightarrow 5 - x^2 = \dfrac{4}{x^2} \Longrightarrow -x^4 + 5x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = -2, x = 2, x = -1$ y $x = 1$
Los puntos serían: $(-2,1)$, $(-1,4)$, $(1,4)$ y $(2,1)$
Habrìa dos recintos de integración $S_1 : [-2,-1]$ y $S_2 : [1,2]$

☛ Representación gráfica:



b) $F(x) = \displaystyle\int (f(x) - g(x))\,dx = \int \left(5 - x^2 - \frac{4}{x^2}\right) dx = 5x - \frac{x^3}{3} + \frac{4}{x}$

$S_1 = \left|\displaystyle\int_{-2}^{-1} (f(x) - g(x))\,dx\right| = |F(-1) - F(-2)| = \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} \simeq 0,6667\ u^2$

El resultado de la integral es positivo por estar f por encima de g.

$S_2 = \left|\displaystyle\int_{1}^{2} (f(x) - g(x))\,dx\right| = |F(2) - F(1)| = \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} \simeq 0,6667\ u^2$

El resultado de la integral es positivo por estar f por encima de g.
Las dos áreas tienen que ser iguales por ser ambas funciones PAR.

$S = S_1 + S_2 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3} \simeq 1,3333\ u^2$

BLOQUE B

Problema 1.2.5 (2,5 puntos) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

a) (1 punto) Halla los valores de m para que la matriz $A - mI$ no tenga inversa.

b) (1,5 puntos) Halla x, distinto de cero, para que $A - xI$ sea la inversa de la matriz $\dfrac{1}{x}(A - I)$

Solución:

a) $|A-mI| = \begin{vmatrix} 1-m & 1 & 1 \\ 1 & 1-m & 1 \\ 1 & 1 & 1-m \end{vmatrix} = -m^2(m-3) = 0 \Longrightarrow m = 0$ y $m = 3$.

Si $m = 0$ o $m = 3 \Longrightarrow |A-mI| = 0 \Longrightarrow \nexists (A-mI)^{-1}$

b) Si $\dfrac{1}{x}(A-I) = \dfrac{1}{x}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\left[\frac{1}{x}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]^{-1} = x\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{x}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\frac{x}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = A - xI = \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = 1 \Longrightarrow x = 2 \\ -\dfrac{x}{2} = 1 - x \Longrightarrow x = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow x = 2$$

Problema 1.2.6 (2,5 puntos) El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por un importe de 500 euros sin incluir impuestos. El gasto en vino es 60 euros menos que los gastos en refrescos y cerveza conjuntamente, sin incluir impuestos. Teniendo en cuenta que los impuestos de los refrescos, la cerveza y el vino son el 6 %, el 12 % y el 30 %, respectivamente, entonces el importe total de la factura incluyendo impuestos ha ascendido a 592,4 euros. Calcula el importe, incluyendo impuestos, invertido en cada una de las bebidas.

Solución:

Sean x el precio de los refrescos, y de la cerveza y z del vino.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 500 \\ z = x + y - 60 \\ 0,06x + 0,12y + 0,3z = 592,4 - 500 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 500 \\ x + y - z = 60 \\ x + 2y + 5z = 1540 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 120 \\ y = 160 \\ z = 220 \end{array} \right.$$

Resolución del sistema por Gauss:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 1 & 1 & -1 & 60 \\ 1 & 2 & 5 & 1540 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 0 & -2 & -440 \\ 0 & 1 & 4 & 1040 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

sistema compatible determinado. $\left\{ \begin{array}{l} z = \dfrac{-440}{-2} = 220 \\ y + 880 = 1040 \Longrightarrow y = 160 \\ x + 160 + 220 = 500 \Longrightarrow x = 120 \end{array} \right.$

Incluyendo impuestos quedaría:

Refrescos $120 \cdot 1,06 = 127,2$€, cerveza $160 \cdot 1,12 = 179,2$€ y vino $220 \cdot 1,3 = 286$€

Problema 1.2.7 (2,5 puntos) Considera los planos $\pi_1 \equiv x - y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y = 2$

a) (1,5 puntos) Calcula la distancia entre la recta intersección de π_1 y π_2 y el punto $P(2, 6, -2)$.

b) (1 punto) Halla el ángulo que forman π_1 y π_2.

Solución:

a) $r:\left\{\begin{array}{l} x-y+z=0\\ x+y=2\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=2-\lambda\\ y=\lambda\\ z=-2+2\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-1,1,2)\\ P_r(2,0,-2)\end{array}\right.$ y $\overrightarrow{P_rP}=(0,6,0)$

$$\left|\overrightarrow{P_rP}\times\overrightarrow{u_r}\right| = |\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 0 & 6 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{array}\right|| = |(12,0,6)| = |6(2,0,1)| = 6\sqrt{5} \text{ y } |\overrightarrow{u_r}| = \sqrt{6}$$

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{P_rP}\times\overrightarrow{u_r}\right|}{|\overrightarrow{u_r}|}=\frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\sqrt{30}\ u$$

b) Tenemos: $\overrightarrow{u_{\pi_1}}=(1,-1,1)$ y $\overrightarrow{u_{\pi_2}}=(1,1,0)$

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}\cdot\overrightarrow{u_{\pi_2}}|}{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}|\cdot|\overrightarrow{u_{\pi_2}}|}=\frac{|1-1+0|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=0\Longrightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}=90^\circ$$

Problema 1.2.8 (2,5 puntos) Calcula el volumen del tetraedro que limita el plano determinado por los puntos $A(0,2,-2)$, $B(3,2,1)$ y $C(2,3,2)$ con los planos cartesianos.

Solución:

$$\pi:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(3,0,3)\\ \overrightarrow{AC}=(2,1,4)\\ A(0,2,-2)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc} x & y-2 & z+2\\ 3 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{array}\right| = x+2y-z-6=0$$

- Con OX hacemos $y=0$ y $z=0\Longrightarrow A'(6,0,0)$
- Con OY hacemos $x=0$ y $z=0\Longrightarrow B'(0,3,0)$
- Con OZ hacemos $x=0$ y $y=0\Longrightarrow C'(0,0,-6)$
- $\overrightarrow{OA'}=(6,0,0)$, $\overrightarrow{OB'}=(0,3,0)$ y $\overrightarrow{OC'}=(0,0,-6)$

$$V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'},\overrightarrow{OC'}\right]\right|=\frac{1}{6}|\left|\begin{array}{ccc} 6 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{array}\right||=\frac{1}{6}|-108|=18\ u^3$$

Capítulo 2

Aragón

2.1. Ordinaria

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

Problema 2.1.1 (2 puntos) Sea la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} ax - \dfrac{\sin x}{x} + 2 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 2 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a.

b) (1 punto) Calcula el valor de a para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = -\dfrac{\pi}{2}$ y di qué tipo de extremo es.

Solución:

a) f es continua en las dos ramas para $x \neq 0$, hay que estudiar la continuidad en $x = 0$:
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(ax - \dfrac{\sin x}{x} + 2\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ax^2 - \sin x + 2x}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=}$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2ax - \cos x + 2}{1} = 1 \neq f(0) \Longrightarrow f$ no es continua en $x = 0$ independientemente del valor de $a \Longrightarrow f$ continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
En $x = 0$ habría una discontinuidad evitable.

b) $f'(x) = \begin{cases} a - \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \Longrightarrow f'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = a - \dfrac{0+1}{(-\pi/2)^2} = a - \dfrac{4}{\pi^2} = 0 \Longrightarrow$
$a = \dfrac{4}{\pi^2}$
$f'(x) = \dfrac{4}{\pi^2} - \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2}$

Elijo dos valores próximos a $x = -\dfrac{\pi}{2} \simeq -1,5708$ por exceso $x = -1$ y por defecto $x = -2$ y por defecto:

	$(-2; -1,570)$	$(-1,570; -1)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

Luego $x = -\dfrac{\pi}{2}$ es un mínimo relativo.

Problema 2.1.2 (2 puntos) Calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln x}$$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln x} = \left[1^{+\infty}\right] = e^{\lambda}$$

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \ln x\left[\frac{x^2+2x+1}{x^2+3x+1} - 1\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x\ln x}{x^2+3x+1} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln x - 1}{2x+3} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1/x}{2} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln x} = \left[1^{+\infty}\right] = e^0 = 1$$

Problema 2.1.3 (2 puntos) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 4x$ y la recta de pendiente $\dfrac{1}{2}$ que corta a $f(x)$ en $x = \dfrac{7}{2}$

Solución:

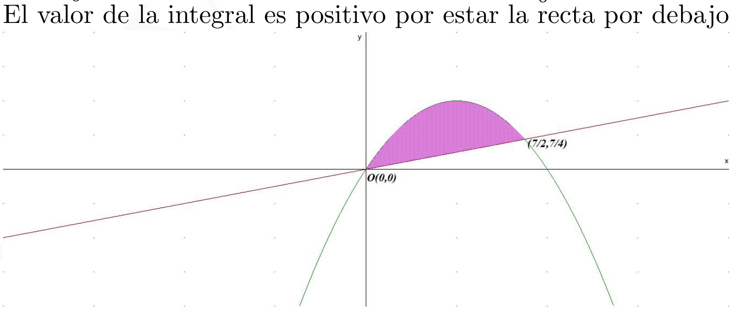
La recta pasa por el punto $\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{7}{4}\right)$ y con pendiente $m = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow y - \dfrac{7}{4} = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{7}{2}\right) \Longrightarrow y = \dfrac{x}{2}$

Buscamos los puntos de corte de la recta con $f(x) \Longrightarrow -x^2 + 4x = \dfrac{x}{2} \Longrightarrow 2x^2 - 7x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \dfrac{7}{2}$

El recinto de integración es $S : \left[0, \dfrac{7}{2}\right]$

$$S = \int_0^{7/2}\left(-x^2 + 4x - \frac{x}{2}\right)dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{4}\Big]_0^{7/2} = \frac{343}{48} \simeq 7,1458\ u^2$$

El valor de la integral es positivo por estar la recta por debajo de la función.



Problema 2.1.4 (2 puntos) Dada la siguiente función

$$f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}$$

a) (0,75 puntos) Estudia y escribe su dominio de definición.

b) (1,25 puntos) Estudia la existencia de asíntotas y ramas parabólicas, Determina las asíntotas caso de existir.

Solución:

a) $x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 2$. Como $x^2 - x - 2 > 0 \Longrightarrow (-\infty, -1) \cup (2, \infty) \Longrightarrow$ $\text{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$.

b) Asíntotas:

☛ Verticales:

- En $x = -1$:
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}} = \left[\frac{-3}{0^+}\right] = -\infty \text{ y } -1^+ \notin\text{Dom}(f)$$
- En $x = 2$:
$$2^- \notin\text{Dom}(f) \text{ y } \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ Horizontales: en $y = 2$ e $y = -2$
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2}} = -2$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2}} = 2$$

☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

No hay ramas parabólicas, los límites cuando x tiende a infinito son finitos.

Problema 2.1.5 (2 puntos) Sean las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ D = AB^T - 2I$$

donde B^T es la matriz traspuesta de B, e I es la matriz identidad de orden 3.

a) (1 punto) Estudia si la matriz D tiene inversa y, en caso afirmativo, calcúlala.

b) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial $CX = A^T B$, donde A^T es la matriz traspuesta de A.

Solución:

a) $D = AB^T - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$|D| = -4 \neq 0 \Longrightarrow \exists D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$

b) $CX = A^T B \Longrightarrow X = C^{-1} A^T B =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -8/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Problema 2.1.6 (2 puntos) Dado el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{c} -x+mz=0 \\ my+2z=2+m^2 \\ x+y=2m \end{array}\right.$$

a) (1,2 puntos) Discute según los valores de $m \in \mathbb{R}$, qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado o indeterminado, incompatible).

b) (0,8 puntos) Resuelve el sistema para el valor $m = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & m & 0 \\ 0 & m & 2 & 2+m^2 \\ 1 & 1 & 0 & 2m \end{array}\right); \quad |A| = 2 - m^2 = 0 \Longrightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

- Si $m \neq \pm\sqrt{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m = -\sqrt{2}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -2\sqrt{2} \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ \sqrt{2}F_3+F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

  Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)
- Si $m = \sqrt{2}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2\sqrt{2} \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ \sqrt{2}F_3-F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

  Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Si $m = 2$:

$$\left\{\begin{array}{c} -x+2z=0 \\ 2y+2z=6 \\ x+y=4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=2 \\ z=1 \end{array}\right.$$

Problema 2.1.7 (2 puntos) Sean las matrices

$$A = \left(\begin{array}{cc} \dfrac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{cc} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{array}\right)$$

a) (1 punto) Calcula la matriz A^n para $n \in \mathbb{N}$

b) (1 punto) Resuelve la ecuación $(A+2I)X = B$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a) $A^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}A,$

$$A^3 = \left(-\frac{3}{2}\right) A^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 A = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & \frac{9}{4} \\ -\frac{9}{4} & -\frac{9}{2} \end{pmatrix},$$

$$A^4 = \left(-\frac{3}{2}\right) A^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 A = \begin{pmatrix} -\frac{27}{16} & -\frac{27}{8} \\ \frac{27}{8} & \frac{27}{4} \end{pmatrix}$$

$$A^n = \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1} A = \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

b) $(A+2I)X = B \Longrightarrow X = (A+2I)^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & \frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

Problema 2.1.8 (2 puntos) El plano $\pi \equiv 2x + by - 2z + 4 = 0$, $b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$, corta a los ejes de coordenadas en tres puntos A, B y C. Calcula los valores de $b \in \mathbb{R}$ tal que el área del triángulo que determinan estos tres puntos A, B y C sea 6 u^2.

Solución:

Tenemos $\pi : 2x + by - 2z + 4 = 0$

- ☛ Con OX hacemos $y = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow A(-2, 0, 0)$
- ☛ Con OY hacemos $x = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow B(0, -4/b, 0)$
- ☛ Con OZ hacemos $x = 0$ y $y = 0 \Longrightarrow C(0, 0, 2)$
- ☛ $\overrightarrow{AB} = (2, -4/b, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (2, 0, 2)$.

$$S_t = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -4/b & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}\left|\left(-\frac{8}{b}, -4, \frac{8}{b}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|-\frac{4}{b}(2, b, -2)\right| =$$

$$\frac{2}{b}\sqrt{b^2+8} = 6 \Longrightarrow \sqrt{b^2+8} = 3b \Longleftarrow b^2 + 8 = 9b^2 \Longrightarrow b^2 = 1 \Longrightarrow b = \pm 1$$

Problema 2.1.9 (2 puntos) Si los vectores $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1 punto) Comprueba si los vectores $\{\overrightarrow{r}, \overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo
$$\overrightarrow{r} = 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}, \quad \overrightarrow{s} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}, \quad \overrightarrow{t} = -3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$$

b) (1 punto) Si además, los vectores $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ son ortogonales y unitarios, calcula razonadamente $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{r} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{s} + \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{t}$ donde $\cdot$ representa el producto escalar de dos vectores.

Solución:

a) Como $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ forman una base por ser linealmente independientes.
Tenemos $[\overrightarrow{r}, \overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow$
$\{\overrightarrow{r}, \overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}\}$ son linealmente independientes.

b) Tenemos $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w} = 1$ por ser vectores unitarios y $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0$ por ser perpendiculares
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{r} = \overrightarrow{u} \cdot (2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) = 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = 2$
$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{s} = \overrightarrow{v} \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 1$
$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{t} = \overrightarrow{w} \cdot (-3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = -3\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u} - \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w} = 1$
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{r} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{s} + \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{t} = 2 + 1 + 1 = 4$

Problema 2.1.10 (2 puntos) El contenido total en sulfitos (medido en mg/l) del vino que se produce en una bodega, sigue una distribución normal de media 150 mg/l y desviación típica 30 mg/l. La bodega se compromete a vender solamente vinos con un contenido total en sulfitos inferior a 200 mg/l, por lo que se desechan para la venta aquellos que superen esta cantidad. Se pide,

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un vino producido en la bodega se deseche por la elevada cantidad total de sulfitos?

b) (1 punto) ¿Qué porcentaje de los vinos producidos en esta bodega tienen un contenido total en sulfitos entre 110 y 150 mg/l?

Solución:

$$N(150; 30)$$

a) $P(X \geq 200) = P\left(Z \geq \dfrac{200 - 150}{30}\right) = P(Z \geq 1,67) = 1 - P(Z \leq 1,67) =$
$1 - 0,9525 = 0,0475$

b) $P(110 \leq X \leq 150) = P\left(\dfrac{110 - 150}{30} \leq Z \leq \dfrac{150 - 150}{30}\right) =$
$P(-1,33 \leq Z \leq 0) = P(Z \leq 0) - P(Z \leq -1,33) =$
$0,5 - (1 - P(Z \leq 1,33) = 0,5 - 1 + 0,9082 = 0,4082 \Longrightarrow 40,82\,\%$

2.2. Extraordinaria

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

Problema 2.2.1 (2 puntos) Sea la siguiente función $f(x) = (e^{ax} + b)x - e,\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$

a) (1 punto) Calcula los valores de a y b, sabiendo que dicha función tiene un extremo relativo en $x = 0$ y un punto de inflexión en $x = 2$.

b) (1 punto) Para los valores $a = 1$ y $b = 2$, calcula $\displaystyle\int xf(x)\,dx$

Solución:

a) $f(x) = (e^{ax} + b)x - e \Longrightarrow f'(x) = e^{ax}(ax + 1) + b \Longrightarrow f''(x) = ae^{ax}(ax + 2)$

$$\left\{\begin{array}{l} f'(0) = 0 \Longrightarrow b = -1 \\ f''(2) = 0 \Longrightarrow ae^{2a}(2a + 2) = 0 \Longrightarrow a = 0,\ a = -1 \end{array}\right. \stackrel{a\neq 0}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ b = -1 \end{array}\right.$$

Luego:
$f(x) = xe^{-x} - x - e \Longrightarrow f'(x) = e^{-x}(1 - x) - 1 \Longrightarrow f''(x) = e^{-x}(x - 2) \Longrightarrow f'''(x) = e^{-x}(3 - x)$
Como $f''(0) = -2 < 0 \Longrightarrow x = 0$ es un máximo relativo y como $f'''(2) = e^{-2} \neq 0 \Longrightarrow x = 2$ es un punto de inflexión.

b) $$\int xf(x)\,dx = \int x((e^x + 2)x - e)\,dx = \int ((e^x + 2)x^2 - ex)\,dx = -\frac{ex^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \int x^2e^x\,dx =$$
$$\left[\begin{array}{c} u = x^2 \Longrightarrow du = 2xdx \\ dv = e^x dx \Longrightarrow v = e^x \\ \displaystyle\int udv = uv - \int vdu \end{array}\right] = \frac{2x^3}{3} - \frac{ex^2}{2} + x^2e^x - 2\int xe^x\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Longrightarrow v = e^x \\ \displaystyle\int udv = uv - \int vdu \end{array}\right] =$$
$$\frac{2x^3}{3} - \frac{ex^2}{2} + x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\,dx\right) + C = \frac{2x^3}{3} - \frac{ex^2}{2} + x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C =$$
$$\frac{2x^3}{3} - \frac{ex^2}{2} + e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

Problema 2.2.2 (2 puntos) Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que el siguiente límite sea finito y calcula el valor de dicho límite

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x + 1) - a\sin x + 3x\cos 2x}{x^2}$$

Solución:
$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x + 1) - a\sin x + 3x\cos 2x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - a\cos x + 3\cos 2x - 6x\sin 2x}{2x} \stackrel{a=4}{=} \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{(x+1)^2} + 4\sin x - 6\sin 2x - 6\sin 2x - 12x\cos 2x}{2} = -\frac{1}{2}$$
Luego $a = 4$ y $L = -\dfrac{1}{2}$

Problema 2.2.3 (2 puntos) Descompón el número $\sqrt{3}$ en dos sumandos positivos, de forma que la suma de sus respectivos logaritmos en base 3 sea máxima y calcula esta suma de forma exacta.
Solución:
$x + y = \sqrt{3} \Longrightarrow y = \sqrt{3} - x$
$f(x, y) = \log_3 x + \log_3 y \Longrightarrow f(x) = \log_3 x + \log_3(\sqrt{3} - x)$

$$f'(x)=\frac{1}{x\ln 3}-\frac{1}{(\sqrt{3}-x)\ln 3}=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{\sqrt{3}-2x}{x(\sqrt{3}-x)}=0\Longrightarrow \sqrt{3}-2x=0\Longrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

	$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

Luego $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ es un máximo. Los números buscados son $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
La suma de sus logaritmos es
$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\log_3\frac{\sqrt{3}}{2}+\log_3\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\log_3\frac{\sqrt{3}}{2}+\log_3\frac{\sqrt{3}}{2}=2\log_3\frac{\sqrt{3}}{2}=$
$2(\log_3\sqrt{3}-\log_3 2)=1-2\log_3 2$

Problema 2.2.4 (2 puntos) Para la siguiente función $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-2x+1}$

a) (1 punto) Indica el dominio de definición y estudia su monotonía.

b) (1 punto) Estudia la curvatura de la función (concavidad $\cap$ y convexidad $\cup$) y la existencia de puntos de inflexión, y calcúlalos si existen.

Solución:

a) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{1\}$ $(x^2-2x+1=0\Longrightarrow x=1)$
$f'(x)=-\dfrac{2x}{(x-1)^3}=0\Longrightarrow x=0$

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$ y creciente en el $(0,1)$.
Tiene un mínimo relativo en el punto $(0,0)$. En $x=1$ hay una asíntota vertical.

b) $f''(x)=\dfrac{2(2x+1)}{(x-1)^4}=0\Longrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

	$(-\infty,-1/2)$	$(-1/2,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	cóncava $\cap$	convexa $\cup$	convexa $\cup$

La función es convexa $\cup$ en $\left(-\frac{1}{2},1\right)\cup(1,\infty)$ y cóncava $\cap$ en $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$. Con un punto de inflexión en el punto $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{9}\right)$

Problema 2.2.5 (2 puntos) Dada la siguiente matriz: $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & m\\ 2 & m & m+2\\ m-1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

a) (1 punto) Discute el rango de la matriz A según los valores de $m\in\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Calcula la inversa de la matriz A para el valor $m = 1$.

Solución:

a) $|A| = -m^3 + 2m = 0 \Longrightarrow m = 0$ y $m = \pm\sqrt{2}$

- ☛ Si $m \in \mathbb{R} - \{0, \pm\sqrt{2}\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.
- ☛ Si $m = 0 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ con $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.
- ☛ Si $m = \sqrt{2} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2}+2 \\ \sqrt{2}-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ con $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2} + 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.
- ☛ Si $m = -\sqrt{2} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ 2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2}+2 \\ -\sqrt{2}-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ con $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = -\sqrt{2} + 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.
- ☛ Si $m = 0$ o $m = \pm\sqrt{2} \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.
  Si $m \in \mathbb{R} - \{0, \pm\sqrt{2}\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

b) Si $m = 1$ tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Problema 2.2.6 (2 puntos) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}$, calcula razonadamente el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ 3a & 3b & 3c \\ a+4 & b & c+5 \end{pmatrix}^2$

Solución:

$$|B| = \begin{vmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ 3a & 3b & 3c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ a+4 & b & c+5 \\ a & b & c \end{vmatrix} =$$

$$-3\left[\begin{vmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ 4 & 0 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix}\right] = -3\begin{vmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ 4 & 0 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix} =$$

$$-3\left[\begin{vmatrix} 4a & 4b & 4c \\ 4 & 0 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix}\right] = -3\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$|A| = |B^2| = |B|^2 = (-3)^2 = 9$$

Problema 2.2.7 (2 puntos) Una ONG aragonesa de reciente creación tiene tres sedes, una en Huesca, otra en Zaragoza y otra en Teruel. El número total de voluntarios es de 31. Para que Huesca y Zaragoza tuvieran el mismo número de voluntarios tendrían que trasladarse 3 de Huesca

a Zaragoza. Además, el número de los voluntarios de la sede de Huesca excede en 1 a la suma de los voluntarios de las otras dos sedes. ¿Cuántos voluntarios hay en cada una de las tres sedes?
Solución:
Sean x el número de voluntarios de la sede de Huesca, y de Zaragoza y z de Teruel.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=31 \\ x-3=y+3 \\ x-1=y+z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=31 \\ x-y=6 \\ x-y-z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=16 \text{ voluntarios} \\ y=10 \text{ voluntarios} \\ z=5 \text{ voluntarios} \end{array}\right.$$

Problema 2.2.8 (2 puntos) Si los vectores $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1,2 puntos) Comprueba si los vectores $\{\overrightarrow{r}, \overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\overrightarrow{r}=\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}-2\overrightarrow{w}, \quad \overrightarrow{s}=\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{w}, \quad \overrightarrow{t}=2\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$$

b) (0,8 puntos) Calcula razonadamente $3\overrightarrow{s}\times\left(\overrightarrow{t}-\overrightarrow{r}\right)$ donde $\times$ representa el producto vectorial de dos vectores.

Solución:

a) Tenemos que $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ forman una base por ser linealmente independientes.
$[\overrightarrow{r}, \overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}]=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow \{\overrightarrow{r}, \overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}\}$ son linealmente dependientes. Uno de los vectores se podría poner como combinación lineal de los otros dos.

b) $3\overrightarrow{s}=3\overrightarrow{u}+9\overrightarrow{w}$
$\overrightarrow{t}-\overrightarrow{r}=\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{w}$
$3\overrightarrow{s}\times\left(\overrightarrow{t}-\overrightarrow{r}\right)=\begin{vmatrix} \overrightarrow{u} & \overrightarrow{v} & \overrightarrow{w} \\ 3 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=\overrightarrow{0}$

Problema 2.2.9 (2 puntos) De los turistas que llegaron a España el mes pasado, el 35 % visitaron Aragón. Si seleccionamos al azar y de manera independiente 7 turistas que llegaron a España el mes pasado

a) (1 punto) Razona, sin hacer uso de la calculadora: ¿Qué es más probable, que 2 de estos turistas visitaran Aragón, o que sean 5 los que visitaron nuestra Comunidad Autónoma?

b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que alguno de los 7 turistas haya visitado Aragón.

Solución:

$$B(7; 0,35)$$

a) $P(X=2)=\binom{7}{2}\cdot 0,35^2\cdot 0,65^5$
$P(X=5)=\binom{7}{5}\cdot 0,35^5\cdot 0,65^2$
$\binom{7}{2}=\dfrac{7!}{2!5!}=\dfrac{7\cdot 6}{2}=21$
$\binom{7}{5}=\dfrac{7!}{5!2!}=\dfrac{7\cdot 6}{2}=21$
$0,35^2\cdot 0,65^5>0,35^5\cdot 0,65^2 \Longrightarrow P(X=2)>P(X=5)$

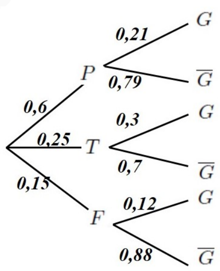
b) $P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{7}{0} \cdot 0,35^0 \cdot 0,65^7 = 1 - 0,049 = 0,951$

Problema 2.2.10 (2 puntos) En el club deportivo Ares, se juegan tres modalidades de raqueta: pádel, tenis y frontón-tenis. Cada socio del club sólo puede apuntarse a una única modalidad. El 60 % se apuntó a pádel, el 25 % a tenis y el 15 % a frontón-tenis. En los campeonatos anuales entre clubes deportivos, participaron todos los socios del club Ares, de los cuales han conseguido medalla el 21 % de los jugadores de pádel, el 30 % de los jugadores de tenis y el 12 % de los jugadores de frontón-tenis.

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un jugador de raqueta del club, seleccionado al azar, haya obtenido una medalla.

b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un jugador con medalla, seleccionado al azar, sea jugador de la modalidad tenis.

Solución:
Sean P juegan al pádel, T juegan al tenis, F juegan al frontón-tenis, G ganan una medalla y $\overline{G}$ no ganan medalla.



a) $P(G) = P(G|P)P(P) + P(G|T)P(T) + P(G|F)P(F) =$
$0,21 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,25 + 0,12 \cdot 0,15 = 0,219$

b) $P(T|G) = \dfrac{P(G|T)P(T)}{P(G)} = \dfrac{0,3 \cdot 0,25}{0,219} = 0,3425$

Capítulo 3

Asturias

3.1. Ordinaria

☛ Responde en el pliego del examen a cuatro preguntas cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de 2,5 puntos.

☛ Indique en el pliego del examen la agrupación de preguntas que responderá: agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la anulación de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Problema 3.1.1 (2,5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

a) (1,25 puntos) Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot X = 2X$.

b) (1,25 puntos) Calcula todas las matrices M que cumplen $M(B + I) = 2I$. (I es la matriz identidad 2×2)

Solución:

a) $A \cdot X = 2X \Longrightarrow AX - 2X = O \Longrightarrow (A - 2I)X = O \Longrightarrow$ sistema homogéneo.

$$(A-2I)X = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz asociada a este sistema es $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ cuyo determinante es cero y tiene rango 2. Luego se trata de un sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

$$\left\{ \begin{array}{l} -x+y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{array} \right. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

b) $M(B+I)=2I \Longrightarrow \dfrac{1}{2}M(B+I)=I \Longrightarrow \dfrac{1}{2}M=(B+I)^{-1} \Longrightarrow M=2(B+I)^{-1}=$
$2\left[\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}=2\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}^{-1}=2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3/2 & -5/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

Problema 3.1.2 (2,5 puntos) Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcula, en caso de que sea posible, las dimensiones de una matriz D tal que se pueda realizar el producto $A\cdot D\cdot B$.

b) (0,5 puntos) Estudia si puede existir una matriz M tal que $M\cdot A=B$.

c) (1,25 puntos) Estudia si existe $(B\cdot A)^{-1}$ y calcúlala en caso de que sea posible.

Solución:

a) $\underset{3\times 2}{A}\cdot \underset{m\times n}{D}\cdot \underset{2\times 3}{B} \Longrightarrow m=2$ y $n=2 \Longrightarrow \dim(D)=2\times 2$

b) $\underset{m\times n}{M}\cdot \underset{3\times 2}{A}=\underset{2\times 3}{B}$ Para que M se pueda multiplicar con A tiene que ser $n=3$, y para obtener una matriz de dos filas tiene que ser $m=2$, pero el resultado sería una matriz de dimensión 2×2, luego no coincidiría con B.

c) $|B\cdot A|=\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=9\neq 0 \Longrightarrow \exists (B\cdot A)^{-1}=\begin{pmatrix} 1/9 & -4/9 \\ 2/9 & 1/9 \end{pmatrix}$

Problema 3.1.3 (2,5 puntos) Dadas las funciones $f(x)=-x^2$ y $g(x)=x^2+x-1$, se pide:

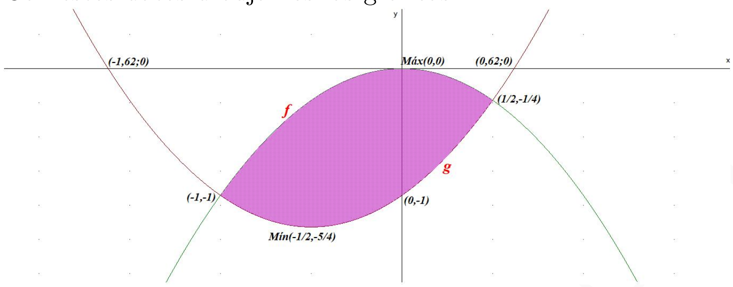
a) (1,25 puntos) Calcula los puntos de corte de ambas curvas y dibuja el recinto limitado por ambas funciones

b) (1,25 puntos) Calcula el área de dicho recinto.

Solución:

a)
- ☛ La función f es una función PAR con un único punto de corte en $(0,0)$ con $f'(x)=-2x=0 \Longrightarrow x=0$ y $f''(x)=-2 \Longrightarrow f''(0)=-2<0 \Longrightarrow (0,0)$ es un máximo.
- ☛ La función g es una función con puntos de corte en $(0,-1)$, $x^2+x-1=0 \Longrightarrow (0,62;0)$ y $(-1,62;0)$ con $f'(x)=2x+1=0 \Longrightarrow x=-1/2$ y $f''(x)=2 \Longrightarrow f''(-1/2)=2>0 \Longrightarrow (-1/2,-5/4)$ es un mínimo.

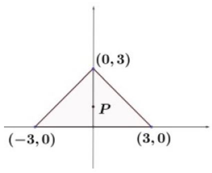
- ☛ Los puntos de corte de las dos gráficas serán $f(x) = g(x) \Longrightarrow -x^2 = x^2 + x - 1 \Longrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow (-1, -1)$ y $(1/2, -1/4)$
- ☛ Con estos datos dibujamos las gráficas:



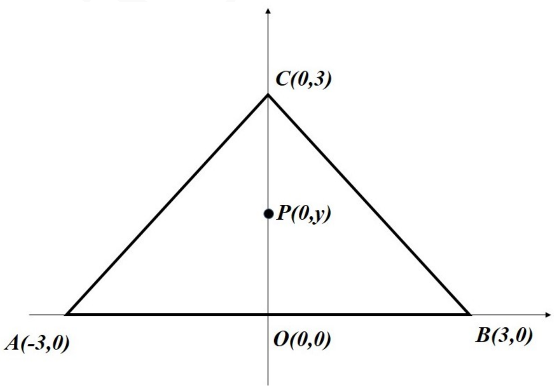
b) El recinto de integración es $S : [-1, 1/2]$:
$$S = \int_{-1}^{1/2} (f(x) - g(x))\, dx \int_{-1}^{1/2} (-2x^2 - x + 1)\, dx = -\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\Big]_{-1}^{1/2} = \frac{9}{8} \simeq 1,125\ u^2$$
El resultado de la integral es positivo por estar la función f por encima de la g.

Problema 3.1.4 (2,5 puntos)

Calcula las coordenadas del punto P interior al triángulo y situado sobre la altura, tal que la suma de las distancias de P a los tres vértices sea mínima.



Solución:



Sea $P(0, y)$, $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$ y $C(0, 3)$ tenemos:
$d(A, P) = |\overrightarrow{AP}| = |(0, y) - (-3, 0)| = |(3, y)| = \sqrt{3^2 + y^2}$
$d(B, P) = |\overrightarrow{BP}| = |(0, y) - (3, 0)| = |(-3, y)| = \sqrt{(-3)^2 + y^2}$
$d(P, C) = |\overrightarrow{CP}| = 3 - y$
$f(y) = d(A, P) + d(B, P) + d(C, P) = 2\sqrt{9 + y^2} - y + 3$

$$f'(y) = \frac{2y}{\sqrt{9+y^2}} - 1 = \frac{2y - \sqrt{9+y^2}}{\sqrt{9+y^2}} = 0 \Longrightarrow y = \sqrt{3}$$

	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, 3)$
$f'(y)$	$-$	$+$
$f(y)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

Luego $y = \sqrt{3}$ es un mínimo y el punto buscado es $P(0, \sqrt{3})$

Problema 3.1.5 (2,5 puntos) Dada la recta $r \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 \end{array}\right.$ y el plano $\pi \equiv ax + 2y + (a-3)z = 4$,

a) (1,25 puntos) Calcula a para que r y π sean paralelos y en ese caso, calcula distancia de r a π.

b) (1,25 puntos) Para $a = 1$, calcula el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

Solución:

a) Sustituyendo r en $\pi \Longrightarrow a(2+\lambda) + 2(-1-\lambda) + (a-3) = 4 \Longrightarrow 2a + a\lambda - 2 - 2\lambda + a = 7 \Longrightarrow$ $(a-2)\lambda = 9 - 3a \Longrightarrow \lambda = \dfrac{9-3a}{a-2} \Longrightarrow r \parallel \pi$ si $a = 2$.
Luego $\pi : 2x + 2y - z - 4 = 0$
$r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, -1, 0) \\ P_r(2, -1, 1) \end{array}\right.$ y $d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \dfrac{|4 - 2 - 1 - 4|}{\sqrt{9}} = \dfrac{|-3|}{3} = 1\ u$

b) Si $a = 1 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{9-3a}{a-2} = -6 \Longrightarrow r$ y π se cortan en un punto y $\pi : x + 2y - 2z - 4 = 0$.

$$\pi' : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (1, 2, -2) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, -1, 0) \\ P_r(2, -1, 1) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi' : \left|\begin{array}{ccc} x-2 & y+1 & z-1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right| = 2x + 2y + 3z - 5 = 0$$

$$\pi' : 2x + 2y + 3z - 5 = 0$$

Problema 3.1.6 (2,5 puntos) Dados los puntos $A = (1, 0, 0)$ y $B = (-1, 4, -4)$,

a) (1,5 puntos) Calcula el plano π que hace que A y B sean simétricos

b) (0,5 puntos) Calcula la distancia de A a π.

c) (0,5 puntos) Calcula una ecuación continua de la recta que pasa por A y B.

Solución:

a) Sea $P(x, y, z)$ tenemos:
$d(A, P) = d(B, P) \Longrightarrow |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \Longrightarrow$
$\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z+4)^2} \Longrightarrow$
$\pi : x - 2y + 2z + 8 = 0$

b) $d(A, \pi) = \dfrac{|1 + 0 + 0 + 8|}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{9}{3} = 3\ u$

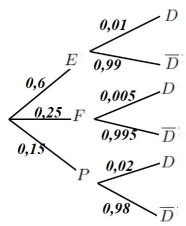
c) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (-2, 4, -4) = -2(1, -2, 2) \\ P_r = A(1, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow r : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{2}$

Problema 3.1.7 (2,5 puntos) Una compañía tiene tres centrales en Europa en la que se fabrica el mismo producto. El 60 % de las unidades de dicho producto se fabrica en España, el 25 % en Francia y el resto en Portugal. Se observa que de las unidades fabricadas tienen algún defecto el 1 % de los fabricados en España, el 0,5 % de los fabricados en Francia y el 2 % de los fabricados en Portugal. El departamento de control de calidad central toma una de las unidades fabricadas al azar.

a) (1,25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la unidad seleccionada tenga algún defecto?

b) (1,25 puntos) Si la unidad seleccionada es defectuosa ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en Portugal?

Solución:
Sean E fabricado en España, F fabricado en Francia, P fabricado en Portugal, D presenta algún defecto y $\overline{D}$ sin defectos



a) $P(D) = P(D|E)P(E) + P(D|F)P(F) + P(D|P)P(P) =$
$0,01 \cdot 0,6 + 0,005 \cdot 0,25 + 0,02 \cdot 0,15 = 0,01025$

b) $P(P|D) = \dfrac{P(D|P)P(P)}{P(D)} = \dfrac{0,02 \cdot 0,15}{0,01025} = 0,2927$

Problema 3.1.8 (2,5 puntos) En un examen de acceso a Médico Interno Residente se realiza un test y se supera la prueba si se obtiene al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones de los candidatos sigue una distribución normal de media 70 y desviación típica 10, calcule:

a) (1,25 puntos) La probabilidad de que la calificación de una persona esté en el intervalo $[75, 85]$.

b) (1,25 puntos) Tras resolver las reclamaciones realizadas por los candidatos se observa que la desviación típica se mantiene, pero la probabilidad de obtener más de 90 puntos es 0,05. Decide si la media de calificaciones ha aumentado, ha disminuido o se ha mantenido.

Algunos valores de la función de distribución $N(0,1)$ son: $F(x) = P(Z \le x)$, $F(0) = 0,5$, $F(0,5) = 0,6915$, $F(0,95) = 0,8289$, $F(1,5) = 0,9332$, $F(1,645) = 0,95$, $F(1,8) = 0,9641$.

Solución:

$$N(70; 10)$$

a) $P(75 \le X \le 85) = P\left(\dfrac{75-70}{10} \le Z \le \dfrac{85-70}{10}\right) = P(0,5 \le Z \le 1,5) =$
$P(Z \le 1,5) - P(Z \le 0,5) = 0,9332 - 0,6915 = 0,2417$

b) Ahora tenemos $N(\mu; 10)$ y $P(X \ge 90) = 0,05 \Longrightarrow P\left(Z \ge \dfrac{90-\mu}{10}\right) = 0,05 \Longrightarrow$
$P\left(Z \le \dfrac{90-\mu}{10}\right) = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow \dfrac{90-\mu}{10} = 1,645 \Longrightarrow \mu = 73,55$
La media ha aumentado $73,55 - 70 = 3,55$ puntos.

3.2. Extraordinaria

- ☛ Responde en el pliego del examen a cuatro preguntas cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de 2,5 puntos.
- ☛ Indique en el pliego del examen la agrupación de preguntas que responderá: agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la anulación de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Problema 3.2.1 (2,5 puntos) Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

a) (0,75 puntos) Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.

b) (1 punto) Para $a = 1$ ¿existe P^{-1}? En caso afirmativo calcúlala.

c) (0,75 puntos) Para $a = 1$, calcula $det(M)$ sabiendo que $PM = M^2$.

Solución:

a) $|P| = 2a - 4$; $|P| = 0 \Longrightarrow a = 2$

- ☛ Si $a \neq 2 \Longrightarrow |P| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(P) = 3$
- ☛ Si $a = 2 \Longrightarrow |P| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(P) = 2$

b) Si $a = 1 \Longrightarrow |P| = -2 \Longrightarrow \exists P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1/2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $|PM| = |P||M|$ y $|M^2| = |M|^2 = |M||M| \Longrightarrow |P||M| = |M||M| \Longrightarrow \begin{cases} |M| = 0 \\ |P| = |M| = -2 \end{cases}$

Problema 3.2.2 (2,5 puntos) Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} x - y + az = -1 \\ 2x + y = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discute el sistema según los valores de a

b) (0,75 puntos) Resuelve el sistema para el caso $a = -3$ si es posible.

c) (0,75 puntos) Encuentra, en caso de que exista, un valor de a que verifique $x = 1$. Calcula la solución en ese caso.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 2a + 6 = 0 \Longrightarrow a = -3$

- ☛ Si $a \neq -3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ = número de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)
- ☛ Si $a = -3$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) =$
$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$
Sistema compatible indeterminado. (Infinitas soluciones)

b) Si $a = -3 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y - 3z = -1 \\ 3y + 6z = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y = -1 + 3\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$

c) Si $a = -3$ y $x = 1$ sustituimos en las soluciones del apartado anterior y queda:

$$(x, y, z) = (1, -1, 1)$$

Problema 3.2.3 (2,5 puntos) Sean A, $B \in \mathbb{R}$ y $f(x) = \dfrac{x^2 + A}{Bx - 1}$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular A y B para que la gráfica de la función pase por el punto $(0, -3)$ y tenga un extremo relativo en $x = -1$.

b) (1,25 puntos) Para los valores de $A = 3$ y $B = 1$, estudia si la función tiene asíntotas y extremos relativos.

c) (0,5 puntos) Para los valores $A = 3$ y $B = 1$, y basándose en los resultados obtenidos en el apartado anterior, realice un esbozo de la función.

Solución:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + A}{Bx - 1} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{Bx^2 - 2x - AB}{(Bx - 1)^2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = -3 \Longrightarrow -A = -3 \\ \\ f'(-1) = 0 \Longrightarrow \dfrac{B + 2 - AB}{(-B - 1)^2} = 0 \Longrightarrow B + 2 - AB = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 3 \\ B = 1 \end{array} \right.$$

b) Tenemos $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$ con $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

- ☛ Asíntotas:
  - Verticales: $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \left[\frac{4}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \left[\frac{4}{0^+} \right] = +\infty$$

  - Horizontales: No hay.
  $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = -\infty$ y $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = +\infty$

- Oblicuas: $y = mx + n$
  $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3}{x^2-x} = 1$
  $n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+3}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3+x}{x-1} = 1$

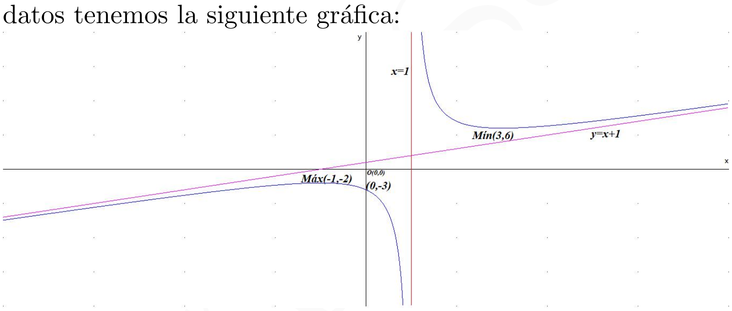
$$y = x + 1$$

☛ Monotonía: $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 3$.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-1) \cup (3,\infty)$ y decreciente en el $(-1,1) \cup (1,3)$. La función tiene un máximo relativo en el punto $(-1,-2)$ y un mínimo relativo en $(3,6)$.

c) La función tiene un punto de corte con el eje OY en $(0,-3)$ y no corta al eje OX. Con estos datos tenemos la siguiente gráfica:



Problema 3.2.4 (2,5 puntos) Se considera la función $f(x) = xe^{2x^2}$. Se pide:

a) (1,5 puntos) Calcula una primitiva de $f(x)$, que pase por el punto $(0,-1)$. (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 2x^2$)

b) (1 punto) Calcula el área encerrada por la gráfica de f, las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

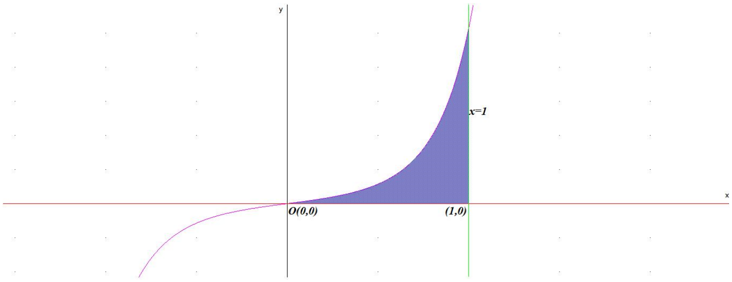
Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int (xe^{2x^2})\,dx = \left[\begin{array}{c} t = 2x^2 \\ dt = 4xdx \\ dx = \dfrac{dt}{4x} \end{array}\right] = \int (xe^t)\,\dfrac{dt}{4x} = \dfrac{1}{4}\int e^t\,dt = \dfrac{e^t}{4} + C = \dfrac{e^{2x^2}}{4} + C$

$F(0) = \dfrac{1}{4} + C = -1 \Longrightarrow C = -\dfrac{5}{4} \Longrightarrow F(x) = \dfrac{e^{2x^2}-5}{4}$

b) $f(x) = xe^{2x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0 \notin (0,1) \Longrightarrow$ sólo hay un recinto de integración $S : [0,1]$

$$S = \int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{e^2-1}{4} \simeq 1,5973\ u^2$$



Problema 3.2.5 (2,5 puntos) Sea s la recta de ecuación $x-2=\dfrac{y-2}{-1}=z$ y r la recta que pasa por los puntos $A=(1,0,1)$ y $B=(2,1,2)$.

a) (1 punto) Indica la posición relativa de r y s.

b) (0,75 puntos) Calcula el plano paralelo a r y que contiene a s.

c) (0,75 puntos) Calcula la distancia entre las rectas r y s.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{AB}=(1,1,1)\\ P_r=A(1,0,1)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right.$$

$$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(1,-1,1)\\ P_s(2,2,0)\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=2+\lambda\\ y=2-\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

a) $\overrightarrow{P_rP_s}=(1,2,-1)$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=-4\neq 0\Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan } (\not\parallel).$$

b) $$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,1,1)\\ \overrightarrow{u_s}=(1,-1,1)\\ P_s(2,2,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-2&y-2&z\\1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=2x-2z-4=0\Longrightarrow \pi: x-z-2=0$$

c) $$|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=|\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}|=|(2,0,-2)|=2\sqrt{2}$$

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{|-4|}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}\ u$$

Problema 3.2.6 (2,5 puntos) Dados los planos $\pi\equiv x+y+z=3$, $\pi'\equiv x+y=3$ y el punto $A=(2,1,6)$

a) (0,75 puntos) Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π'.

b) (1 punto) Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π.

c) (0,75 puntos) Calcula el punto A' simétrico de A respecto del plano π.

Solución:

a) $r : \begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y=3 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x=\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=0 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(1,-1,0) \\ P_r(0,3,0) \end{cases}$

b) Sea $P(a,b,c) \Longrightarrow \overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow (a-2,b-1,c-6)=k(1,1,1) \Longrightarrow \Longrightarrow \begin{cases} a-2=k \\ b-1=k \\ c-6=k \end{cases} \Longrightarrow$
$P(k+2,k+1,k+6)$ como $P \in \pi \Longrightarrow (k+2)+(k+1)+(k+6)=3 \Longrightarrow k=-2 \Longrightarrow P(0,-1,4)$

c) Seguimos el siguiente método:

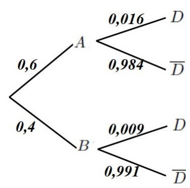
- ☛ calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $A \in t$:
  $t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_\pi}=(1,1,1) \\ P_t=A(2,1,6) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=6+\lambda \end{cases}$
- ☛ Calculamos el punto A'' de corte de r con π:
  $(2+\lambda)+(1+\lambda)+(6+\lambda)=3 \Longrightarrow \lambda=-2 \Longrightarrow A''(0,-1,4)$
- ☛ $\dfrac{A+A'}{2}=A'' \Longrightarrow A'=2A''-A=(0,-2,8)-(2,1,6)=(-2,-3,2)$

Problema 3.2.7 (2,5 puntos) Una imprenta compra la tinta a dos empresas distintas. En la empresa A compra el 60 % de sus pedidos, y el resto a la empresa B. Se observa que el 1,6 % de las cajas de tinta de la empresa A llegan con defecto, mientras que de la empresa B sólo el 0,9 % son defectuosas. Se toma una caja al azar:

a) (1,25 punto) Calcula la probabilidad de que la caja sea defectuosa.

b) (1,25 puntos) Si la caja seleccionada no es defectuosa, calcule la probabilidad de que se haya comprado a la empresa A.

Solución:
Sean los sucesos A empresa A, B empresa B, D defectuoso y $\overline{D}$ no defectuoso.



a) $P(D)=P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)=$
$0,016 \cdot 0,6+0,009 \cdot 0,4=0,0132$

b) $P(A|\overline{D})=\dfrac{P(\overline{D}|A)P(A)}{P(\overline{D})}=\dfrac{0,984 \cdot 0,6}{1-0,0132}=0,5983$

Problema 3.2.8 (2,5 puntos) Las calificaciones de la asignatura Análisis Matemático I de la Facultad de Matemáticas siguen una distribución $N(5,2)$.

a) (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota mayor o igual que 7,5.

b) (0,75 puntos) Calcula la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota entre 3 y 5.

c) (1 punto) Se modifica sistema de enseñanza de forma que la desviación típica ahora es 1,5 y la probabilidad de obtener una nota menor o igual que 6, sea 0,52. ¿Cuál sería la nueva media? ¿Ha funcionado el sistema aplicado?

(Algunos valores de la función de distribución $N(0,1)$ son: $F(x) = P(Z \le x)$, $F(0) = 0,5$, $F(1,25) = 0,8944$, $F(0,05) = 0,52$, $F(0,52) = 0,6985$, $F(0,8944) = 0,8133$, $F(1) = 0,8413$.)

Solución:

$$N(5;2)$$

a) $P(X \ge 7,5) = P\left(Z \ge \dfrac{7,5-5}{2}\right) = P(Z \ge 1,25) =$
$1 - P(Z \le 1,25) = 1 - 0,8944 = 0,1056$

b) $P(3 \le X \le 5) = P\left(\dfrac{3-5}{2} \le Z \le \dfrac{5-5}{2}\right) = P(-1 \le Z \le 0) = P(Z \le 0) - P(Z \le -1) =$
$P(Z \le 0) - (1 - P(Z \le 1)) = 0,5 - (1 - 0,8413) = 0,3413$

c) $N(\mu; 1,5)$ y $P(X \le 6) = 0,52$
$P(X \le 6) = P\left(Z \le \dfrac{6-\mu}{1,5}\right) = 0,52 \Longrightarrow \dfrac{6-\mu}{1,5} = 0,05 \Longrightarrow \mu = 5,925$
La media ha subido y la dispersión ha descendido, luego el sistema ha funcionado.

Capítulo 4

Cantabria

4.1. Ordinaria

INDICACIONES

a) Debe escogerse sólo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen.

b) Si realizan más de cuatro ejercicios sólo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.

c) Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.

d) Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.

e) No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

Problema 4.1.1 (2,5 puntos) Considere el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{r} 2x+3y+z=-1\\ x-y+z=a\\ -x+y-2z=-3 \end{array}\right.$$

dado en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

a) (1,25 puntos) Determine para qué valores de a el sistema es incompatible.

b) (1,25 puntos) Dado $a = 4$, resuelva el sistema anterior si es posible.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & a\\ -1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right); \quad |A| = 5 \neq 0 \Longrightarrow$$

$\forall a \in \mathbb{R}$ es $|A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
El sistema no puede ser incompatible $\forall a \in \mathbb{R}$.

b) Si $a = 4$ el sistema tiene solución única es SCD:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y + z = -1 \\ x - y + z = 4 \\ -x + y - 2z = -3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

Resuelto por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 + F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & 9 \\ 0 & 5 & -3 & -7 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible determinado

$$\left\{\begin{array}{l} -2z = 2 \Longrightarrow z = -1 \\ -5y - 1 = 9 \Longrightarrow y = -2 \\ 2x - 6 - 1 = -1 \Longrightarrow x = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

Problema 4.1.2 (2,5 puntos) Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x}$.

a) (0,5 puntos) Determine el conjunto de puntos de discontinuidad de $f(x)$.

b) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

c) (1 punto) Determine si $f(x)$ tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. En $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{0^+} = +\infty; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{0^-} = -\infty$$

En $x = 0$ hay un salto infinito de la función y la función es discontinua. Como el numerador y el denominador son polinomios podemos concluir que la función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

c) Monotonía:

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$ y decreciente en el $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$.
Tiene un máximo relativo en $(-\sqrt{2}, -1 - 2\sqrt{2})$ y un mínimo relativo en $(\sqrt{2}, -1 + 2\sqrt{2})$

d) Asíntotas:

- Verticales: En $x=0$ se analizó en el apartado a.
- Horizontales: No hay.

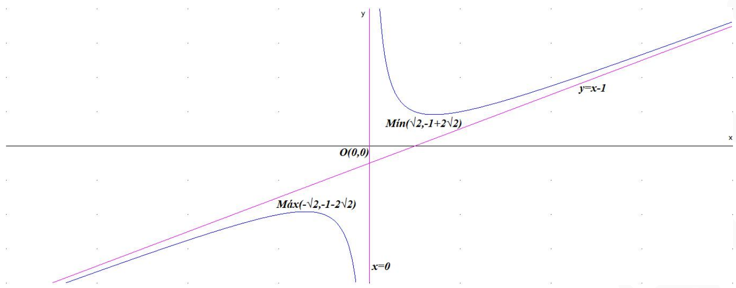
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+2}{x} = -\infty \text{ y } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+2}{x} = +\infty$$

- Oblicuas: $y = mx+n$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-x+2}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x+2}{x} = -1 \Longrightarrow$$

$y = x-1$.



Problema 4.1.3 (2,5 puntos) Calcule las ecuaciones de las rectas de los lados de un triángulo que tiene como vértices a los puntos $A=(0,0,1)$, $B=(4,1,2)$ y $C=(3,4,3)$.

Solución:

- Sea r la recta que une A y B: $r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (4,1,2)-(0,0,1) = (4,1,1) \\ P_r = A(0,0,1) \end{cases} \Longrightarrow$

$$r: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

- Sea s la recta que une A y C: $s: \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{AC} = (3,4,3)-(0,0,1) = (3,4,2) \\ P_s = A(0,0,1) \end{cases} \Longrightarrow$

$$s: \begin{cases} x = 3\mu \\ y = 4\mu \\ z = 1+2\mu \end{cases} \quad \forall\mu\in\mathbb{R}$$

- Sea t la recta que une B y C: $t: \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{BC} = (3,4,3)-(4,1,2) = (-1,3,1) \\ P_t = B(4,1,2) \end{cases} \Longrightarrow$

$$t: \begin{cases} x = 4-\theta \\ y = 1+3\theta \\ z = 2+\theta \end{cases} \quad \forall\theta\in\mathbb{R}$$

Problema 4.1.4 (2,5 puntos) En cierta región, el 72 % de las mujeres vive al menos 71 años y el 52 % vive al menos 80 años. Si una mujer determinada de esa región tiene 71 años, ¿cuál es la probabilidad de que vaya a vivir al menos hasta los 80 años?
Solución:
Sean A vive más de 71 años y B vive más de 80.
$P(A) = 0,72$, $P(B) = 0,52$

$A \cap B = \{$ vive más de 71 años$\} \cap \{$ vive más de 80 años $\} = \{$ vive más de 80 años $\} = B$
Se pide: $P(B|A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(B)}{P(A)} = \dfrac{0,52}{0,72} = 0,7222$

Problema 4.1.5 (2,5 puntos) Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

a) (0,5 puntos) Calcule el determinante de A en función del parámetro a.

b) (0,75 puntos) Calcule el rango de A en función del parámetro a.

c) (0,5 puntos) Determine para qué valores de a la matriz A tiene inversa.

d) (0,75 puntos) Sea B el conjunto de los $a \in \mathbb{R}$ tales que A tiene inversa. Calcule la inversa de A para los diferentes valores del parámetro $a \in B$.

Solución:

a) $|A| = 2a - 11$

b) $2a - 11 = 0 \Longrightarrow a = \dfrac{11}{2}.$

- Si $a \neq \dfrac{11}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$
- Si $a = \dfrac{11}{2} \Longrightarrow |A| = 0$ y el menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$

c) $\exists A^{-1} \;\; \forall a \in \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{11}{2} \right\}$

d) Si $a \neq \dfrac{11}{2} \Longrightarrow \exists A^{-1} = \dfrac{1}{2a-11} \begin{pmatrix} -3 & a-1 & -3 \\ 8 & -1-2a & 2a-3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

Problema 4.1.6 (2,5 puntos) Considere la función $f(x) = x^3 + 1$

a) (0,5 puntos) Calcule una primitiva de $f(x)$.

b) (1 punto) Calcule los puntos de inflexión de $f(x)$ si los hubiera.

c) (1 punto) Calcule el área del recinto limitado por $f(x)$, el eje OX de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

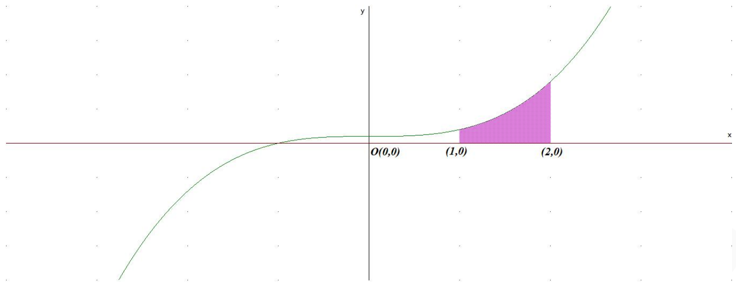
Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx = \int (x^3+1)\,dx = \frac{x^4}{4} + x + C$

b) $f'(x) = 3x^2 \Longrightarrow f''(x) = 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$ como $f'''(x) = 6 \Longrightarrow f'''(0) = 6 \neq 0 \Longrightarrow (0,1)$ es un punto de inflexión.

c) $x^3 + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$ luego la función no corta al eje OX en el intervalo $(1, 2)$. El recinto de integración es $S : [1, 2]$

$$S = \int_1^2 (x^3 + 1)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} + x\right]_1^2 = \frac{19}{4} \simeq 4,75\ u^2$$



Problema 4.1.7 (2,5 puntos) Considere los planos

$$\pi_1 : 2x - 3y + 5z = a$$

$$\pi_2 : bx + 3y - 5z = 4$$

en función de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$. Determine si es posible asignar algún valor a los parámetros a y b para que los planos π_1 y π_2:

a) (0,5 puntos) Sean coincidentes. En caso afirmativo dé un valor para a y b.

b) (1 punto) Sean paralelos. En caso afirmativo dé un valor para a y b.

c) (1 punto) Se corten en una recta. En caso afirmativo dé un valor para a y b.

Solución:

a) $\dfrac{2}{b} = \dfrac{-3}{3} = \dfrac{5}{-5} = \dfrac{a}{4} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{a}{4} = -1 \Longrightarrow a = -4 \\ \dfrac{2}{b} = -1 \Longrightarrow b = -2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \pi_1 : 2x - 3y + 5z = -4 \\ \\ \pi_2 : -2x + 3y - 5z = 4 \end{array}\right.$

b) Para que sean paralelos es necesario que $b = -2$ y que $a \neq -4$ podemos elegir $a = 0$:
$\left\{\begin{array}{l} \pi_1 : 2x - 3y + 5z = 0 \\ \\ \pi_2 : -2x + 3y - 5z = 4 \end{array}\right.$

c) Para que sean secantes es necesario que $b \neq -2$ por ejemplo $b = 1$; a puede tener cualquier valor real ($\forall a \in \mathbb{R}$) podemos elegir $a = 0$:
$\left\{\begin{array}{l} \pi_1 : 2x - 3y + 5z = 0 \\ \\ \pi_2 : x + 3y - 5z = 4 \end{array}\right. \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Problema 4.1.8 (2,5 puntos) Sean A y B dos sucesos independientes asociados a un experimento aleatorio con $P(A) = 0,5$ y $P(B) = 0,25$

a) (0,5 puntos) Calcule $P(A \cup B)$.

b) (0,5 puntos) Calcule $P(A^c)$ y $P(B^c)$, donde A^c y B^c denotan el suceso contrario de A y de B respectivamente.

c) (1 punto) Razone si A^c y B^c son independientes.

d) (0,5 puntos) Calcule $P(A^c \cup B^c)$.

Solución:
Por comodidad utilizo $X^c = \overline{X}$

a) A y B independientes: $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,25 - 0,125 = 0,625$

b) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,5 = 0,5$
$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,25 = 0,75$

c) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,625 = 0,375$
$P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0,5 \cdot 0,75 = 0,375$
Luego $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \Longrightarrow \overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes.

d) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,125 = 0,875$

4.2. Extraordinaria

INDICACIONES

a) Debe escogerse sólo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen.

b) Si realizan más de cuatro ejercicios sólo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.

c) Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.

d) Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.

e) No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

Problema 4.2.1 (2,5 puntos) Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) (0,5 puntos) Calcule A^t, donde A^t denota la traspuesta de la matriz A.

b) (2 puntos) Calcule $(3B - 2C)(A^t - I)$, donde I es la matriz identidad de dimensión 3×3

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $(3B-2C)(A^t-I)=$

$$\left[3\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}\right]\cdot\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]=$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -2\\ -9 & 8 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 11 & 19\\ -8 & -29 & -8\end{pmatrix}$$

Problema 4.2.2 (2,5 puntos) Considere la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$

a) (0,5 puntos) Calcule el dominio de definición de $f(x)$.

b) (0,75 puntos) Determine si hay intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$. En caso afirmativo, calcúlelos.

c) (0,5 puntos) Calcule los cortes de $f(x)$ con los ejes.

d) (0,75 puntos) Determine los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{2\}$.

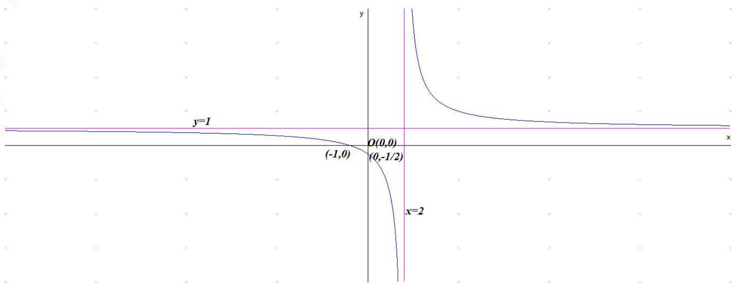
b) $f'(x)=-\dfrac{3}{(x-2)^2}\neq 0\Longrightarrow f(x)$ no tiene extremos relativos. Como $f'(x)<0$ en el dominio de la función, será decreciente en el intervalo $(-\infty,2)\cup(2,\infty)$.

c) El punto de corte con el eje de ordenadas, haciendo $x=0\Longrightarrow\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$
El punto de corte con el eje de abscisa, haciendo $f(x)=0\Longrightarrow(-1,0)$

d) $f''(x)=\dfrac{6}{(x-2)^3}\neq 0\Longrightarrow f(x)$ no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty,2)$	$(2,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa ($\frown$) en el intervalo $(-\infty,2)$ y cóncava ($\smile$) en el $(2,\infty)$



Problema 4.2.3 (2,5 puntos)

a) (1,5 puntos) Escriba las ecuaciones paramétricas de las rectas que pasan por el punto $(2, -1, 0)$. Es decir, de aquellas que tienen vector director (v_1, v_2, v_3) , donde v_1, v_2, v_3 son parámetros.

b) (1 punto) De las rectas anteriores, escriba las ecuaciones paramétricas de la recta que tiene vector director $(-1, 4, 1)$.

Solución:

a) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (v_1, v_2, v_3) \\ P_r(2, -1, 0) \end{cases} \quad r : \begin{cases} x = 2 + v_1\lambda \\ y = -1 + v_2\lambda \\ z = v_3\lambda \end{cases}$

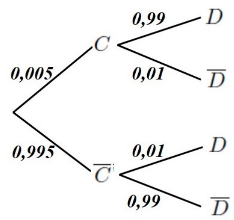
b) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 4, 1) \\ P_r(2, -1, 0) \end{cases} \quad r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -1 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Problema 4.2.4 (2,5 puntos) Cierto test determina si una persona consume cierto tipo de droga. En el 99 % de los casos, el test clasifica como usuario de la droga a aquellos que la han consumido y también en el 99 % de los casos, el test clasifica como no usuarios de la droga a aquellos que no la han consumido. Además, el 0,5 % de las personas a las que se les va a pasar el test consumen la droga.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que las personas a las que se les va a pasar el test no consuman la droga?

b) (1,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona consuma la droga si ha dado positivo en el test?

Solución:
Sean C consumen droga, $\overline{C}$ no consumen droga, D detecta el consumo y $\overline{D}$ no detecta el consumo.



a) $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 0,995$

b) $P(D) = P(D|C)P(C) + P(D|\overline{C})P(\overline{C}) =$
$0,99 \cdot 0,005 + 0,01 \cdot 0,995 = 0,0149$

$$P(C|D) = \frac{P(D|C)P(C)}{P(D)} = \frac{0,99 \cdot 0,005}{0,0149} = 0,3322$$

Problema 4.2.5 (2,5 puntos) Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$$

en función del parámetro $b \in \mathbb{R}$.

a) (0,75 puntos) Calcule el rango de A para los distintos valores del parámetro $b \in \mathbb{R}$.

b) (0,75 puntos) Determine para qué valores de $b \in \mathbb{R}$ la matriz A tiene inversa.

c) (1 punto) Sea B el conjunto formado por los $b \in \mathbb{R}$ tales que A tiene inversa. Calcule la inversa de A para los diferentes valores del parámetro $b \in \mathbb{R}$.

Solución:

a) $|A| = b - 4 = 0 \Longrightarrow b = 4$

- ☛ Si $b \neq 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$
- ☛ Si $b = 4 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 1$

b) El único valor que anula el determinante de A es $b = 4 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \ \forall b \in \mathbb{R} - \{4\}$

c) $B = \mathbb{R} - \{4\} \Longrightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{b-4}\begin{pmatrix} b & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\ \ \forall b \in B$

Problema 4.2.6 (2,5 puntos) Considere la función $f(x) = \sin x$

a) (0,75 puntos) Calcule una primitiva de $f(x)$.

b) (1,75 puntos) Calcule el área del recinto del plano limitado por $f(x)$ y el eje OX de abscisas para $x \in [0, 2\pi]$.

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

b) Hacemos $f(x) = \sin x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pi \Longrightarrow f(x)$ tiene un punto de corte con el eje de abscisas en el intervalo $(0, 2\pi)$ y habrá dos recintos de integración $S_1 : [0, \pi]$ y $S_2 : [\pi, 2\pi]$

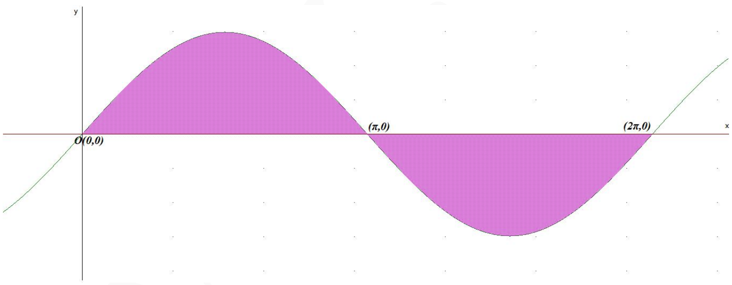
$$S_1 = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = F(\pi) - F(0) = 2$$

Es positivo por estar la función por encima del eje OX.

$$S_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx = F(2\pi) - F(\pi) = -2$$

Es negativo por estar la función por debajo del eje OX.

$$S = |S_1| + |S_2| = 2 + 2 = 4\ u^2$$



Problema 4.2.7 (2,5 puntos) Considere el par de rectas

$$r : \begin{cases} 3x - 5 = y \\ z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 6x - 2y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

.

a) (1 punto) Calcule la posición relativa de las dos rectas.

b) (0,5 puntos) Dé la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

c) (1 punto) Dé la ecuación de un plano ortogonal a la recta r.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} 3x-5=y \\ z=0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x=\lambda \\ y=-5+3\lambda \\ z=0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,3,0) \\ P_r(0,-5,0) \end{array} \right.$$

$$s : \left\{ \begin{array}{l} 6x-2y=1 \\ z=0 \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x=\lambda \\ y=-\dfrac{1}{2}+3\lambda \\ z=0 \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(1,3,0) \\ P_s(0,-1/2,0) \end{array} \right.$$

a) $\overrightarrow{P_rP_s}=(0,9/2,0)=\dfrac{9}{2}(0,1,0)$

$\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow r$ y s no se cruzan y están en el mismo plano.

Rango$\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix}$=rango$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}=1 \Longrightarrow r$ y s o son paralelas o coincidentes.

Rango$\begin{pmatrix} \overrightarrow{P_rP_s} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix}$=rango$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}=2 \Longrightarrow r$ y s son paralelas.

b) $\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_rP_s}=(0,1,0) \\ \overrightarrow{u_r}=(1,3,0) \\ P_r(0,-5,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y+5 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=-z=0 \Longrightarrow \pi : z=0$

c) Planos perpendiculares a una recta dada hay infinitos, voy a calcular el que contiene al origen de coordenadas.
$\overrightarrow{u_{\pi'}}=\overrightarrow{u_r}=(1,3,0) \Longrightarrow \pi' : x+3y+\lambda=0 \overset{O(0,0,0)}{\Longrightarrow} \lambda=0 \Longrightarrow \pi' : x+3y=0$

Problema 4.2.8 (2,5 puntos) En una población determinada la altura de los niños de 17 años sigue una distribución normal de media 175 cm y desviación típica 7,41.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que en dicha población la altura de un niño de 17 años esté entre 170 cm y 180 cm.

b) (1,5 puntos) ¿A partir de qué altura un niño de 17 años de dicha población se encontraría dentro del 5 % de niños de 17 años más altos de dicha población?

Solución:

$$N(175; 7,41)$$

a) $P(170 \le X \le 180)=P\left(\dfrac{170-175}{7,41} \le Z \le \dfrac{180-175}{7,41}\right)=P(-0,67 \le Z \le 0,67)=$
$P(Z \le 0,67)-P(Z \le -0,67)=P(Z \le 0,67)-(1-P(Z \le 0,67))=2P(Z \le 0,67)-1=$
$2 \cdot 0,7486-1=0,4972$

b) $P(X \ge a)=0,05 \Longrightarrow P\left(Z \ge \dfrac{a-175}{7,41}\right)=1-P\left(Z \ge \dfrac{a-175}{7,41}\right) \Longrightarrow P\left(Z \le \dfrac{a-175}{7,41}\right)=$
$0,95 \Longrightarrow \dfrac{a-175}{7,41}=1,645 \Longrightarrow a=187,19$ cm.

Capítulo 5

Castilla-La Mancha

5.1. Ordinaria

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

Problema 5.1.1 (2,5 puntos) Sean las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) (1,5 puntos) Determina las condiciones que tienen que cumplir los valores a, b, c para que $A \cdot X = B$

b) (1 punto) Si además queremos que X sea simétrica, ¿qué se debe cumplir? ¿Cómo es la matriz X resultante?

Solución:

a) $A \cdot X = B \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$\begin{pmatrix} 2a+c & 2b \\ 4a+2c & 4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2a+c=1 \\ 2b=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c=1-2a \\ b=0 \end{cases} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1-2a & 0 \end{pmatrix}$
Luego $\forall a \in \mathbb{R} \Longrightarrow b = 0$ y $c = 1 - 2a$ se cumple $A \cdot X = B$.

b) Si además X tiene que ser simétrica $1 - 2a = 0 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow b = 0$ y $c = 0 \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Problema 5.1.2 (2,5 puntos)

a) (0,5 puntos) Enuncia el teorema de Bolzano.

b) (1 punto) Sea la función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$. Utiliza el teorema de Bolzano para justificar que esta función tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, 2]$.

c) (1 punto) ¿Podría $f(x)$ tener más de una raíz en el intervalo $[0,2]$? Justifica tu respuesta

Solución:

a) Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ donde $a,b \in \mathbb{R}$ que cumplen: signo($f(a)$) $\neq$signo($f(b)$), entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(c)=0$.

b) f es una función continua por ser un polinomio, $f(0)=-10$ y $f(2)=28 \Longrightarrow f$ cumple las condiciones del teorema de Bolzano y $\exists c \in (0,2)$ que cumple $f(c)=0$. (c es raíz del polinomio)

c) $f'(x)=3x^2+12x+3=0 \Longrightarrow x=-3,73$ y $x=-0,27$

	$(-\infty;-3,73)$	$(-3,73;-0,27)$	$(-0,27;\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

El intervalo $(0,2) \subset (-0,27;\infty) \Longrightarrow f$ es creciente en todo el intervalo y solo puede haber un punto de corte con el eje OX. Luego sólo hay una raiz en el intervalo $(0,2)$

Problema 5.1.3 (2,5 puntos) Sea el punto $A(1,1,a)$ y el plano $\pi \equiv bx+y+z=1$, con , $a,b \in \mathbb{R}$.

a) (1,5 puntos) ¿Qué deben cumplir los valores a, b para que el punto A esté contenido en el plano π y éste tenga como vector normal a uno que es perpendicular al vector $\overrightarrow{u}=(1,2,0)$?

b) (1 punto) Con los valores de a, b del apartado anterior, obtén la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto A.

Solución:

a) Sustituimos A en $\pi \Longrightarrow b+1+a=1 \Longrightarrow a+b=0$
$\overrightarrow{u_\pi} \perp \overrightarrow{u} \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} \cdot \overrightarrow{u}=0 \Longrightarrow (b,1,1)\cdot(1,2,0)=b+2+0=0 \Longrightarrow b=-2$
$$\left\{\begin{array}{l} a+b=0 \\ b=-2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=-2 \end{array}\right.$$

b) Tenemos: $A(1,1,2)$ y $\pi: -2x+y+z=1 \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi}=(-2,1,1)$
$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{u_\pi}=(-2,1,1) \\ P_r=A(1,1,2) \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=1-2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2+\lambda \end{array}\right.$$

Problema 5.1.4 (2,5 puntos)

a) Una empresa de mantenimiento da servicio a empresas de dos polígonos industriales (el polígono Campo y el polígono Llano). El 30 % de las reparaciones se realizan en el polígono Campo mientras que el 70 % se realiza en el polígono Llano. Además, en el polígono Campo el 10 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el 90 % de tipo eléctrico. En el polígono Llano el 30 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el resto de tipo eléctrico.

a.1 (0,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un momento dado se realice una reparación de tipo mecánico?

a.2 (0,75 puntos) Si se ha realizado una reparación de tipo eléctrico, ¿qué probabilidad hay de que se haya realizado en el polígono Llano?

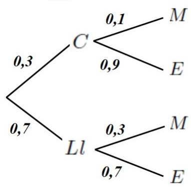
b) El famoso piloto de carreras Fernando Osnola es capaz de completar una vuelta a un circuito en un tiempo que sigue una distribución normal de media 1,5 minutos y desviación típica 0,15 minutos.

b.1 (0,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que complete una vuelta en menos de 1,35 minutos?

b.2 (0,75 puntos) ¿Cuál sería el tiempo exacto que es mayor que el 85,08 % de los tiempos realizados al completar una vuelta al circuito?

Solución:

a) Sean C polígono Campo, Ll polígono Llano, M reparaciones mecánicas y E reparaciones eléctricas.



a.1 $P(M) = P(M|C)P(C) + P(M|Ll)P(Ll) =$
$0,1 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,7 = 0,24$

a.2 $P(Ll|E) = \dfrac{P(E|Ll)P(Ll)}{P(E)} = \dfrac{0,7 \cdot 0,7}{1 - 0,24} = 0,6447$

b) $N(1,5; 0,15)$

b.1 $P(X \le 1,35) = P\left(Z \le \dfrac{1,35 - 1,5}{0,15}\right) = P(Z \le -1) = 1 - P(Z \le 1) =$
$1 - 0,8413 = 0,1587$

b.2 $P(X \le a) = 0,8508 \Longrightarrow P\left(Z \le \dfrac{a - 1,5}{0,15}\right) = 0,8508 \Longrightarrow \dfrac{a - 1,5}{0,15} = 1,04 \Longrightarrow$
$a = 1,656$ minutos.

Problema 5.1.5 (2,5 puntos)

a) (1 punto) Calcula la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2} - (1-3x)^{2/3}}$

Puedes utilizar el cambio de variable $1 - 3x = t^6$

b) (1,5 puntos) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sin calcular A^{-1}, razona por qué A^{-1} existe y discute si la matriz $A^{-1} \cdot B$ tiene inversa.

Solución:

a) $$\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2} - (1-3x)^{2/3}} = \left[\begin{array}{c} 1 - 3x = t^6 \\ -3dx = 6t^5 dt \\ dx = -2t^5 dt \end{array}\right] = \int \frac{-2t^5 dt}{(t^6)^{1/2} - (t^6)^{2/3}} = \int \frac{-2t^5 dt}{t^3 - t^4} =$$

$$-2\int \frac{t^5 dt}{t^3(1-t)} = 2\int \frac{t^2}{t-1}\, dt = \left[\begin{array}{l} (\quad t^2) : (t-1) = t + 1 + \dfrac{1}{t-1} \\ \underline{\;-t^2 + t\;} \\ \qquad t \\ \quad \underline{\;-t + 1\;} \\ \qquad 1 \end{array}\right] = 2\int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right) dt =$$

$$2\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C=\left[\begin{array}{c} 1-3x=t^6 \\ (1-3x)^{1/3}=t^2 \\ (1-3x)^{1/6}=t \end{array}\right]=$$
$$2\left(\frac{(1-3x)^{1/3}}{2}+(1-3x)^{1/6}+\ln\left|(1-3x)^{1/6}-1\right|\right)+C=$$
$$(1-3x)^{1/3}+2(1-3x)^{1/6}+2\ln\left|(1-3x)^{1/6}-1\right|+C=$$
$$\sqrt[3]{1-3x}+2\sqrt[6]{1-3x}+\ln\left(\sqrt[6]{1-3x}-1\right)^2+C$$

b) $|A|=-2\neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$
$|A^{-1}\cdot B|=|A^{-1}|\cdot|B|=\dfrac{1}{|A|}\cdot 0=0 \Longrightarrow \nexists (A^{-1}\cdot B)^{-1}$.

Problema 5.1.6 (2,5 puntos)

a) (1 punto) Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x+1}{5x}\right)^{x^2}$

b) (1,5 puntos) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2,1,3)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores $\overrightarrow{u}=(2,2,0)$ y $\overrightarrow{v}=(0,0,-1)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x+1}{5x}\right)^{x^2}=[1^\infty]=e^\lambda$

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{5x+1}{5x}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{5x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{5}=\infty$$

Luego:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{x^2}=e^{+\infty}=+\infty$$

b) $\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=(-2,2,0)=-2(1,-1,0)$

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,-1,0)\\ P_r=A(2,1,3)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=2+\lambda\\ y=1-\lambda \quad \lambda\in\mathbb{R}\\ z=3\end{array}\right.$$

Problema 5.1.7 (2,5 puntos)

a) (1 punto) Sea la función $f(x)=x^3+3x^2+x+3$. Obtén sus máximos y mínimos relativos.

b) (1,5 puntos) Una urna contiene cuatro bolas numeradas del 1 al 4. Se extraen al azar dos bolas sin reemplazamiento y se obtiene una puntuación igual a la suma de los valores correspondientes.

b.1 (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación obtenida sea de 3?

b.2 (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación sea mayor de 3?

Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 + 6x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1 \pm \dfrac{\sqrt{6}}{3} \Longrightarrow x = -1,82$ y $x = -0,18$

$$f''(x) = 6x + 6 \Longrightarrow \begin{cases} f''(-1,82) = -4,9 < 0 \Longrightarrow x = -1 - \dfrac{\sqrt{6}}{3} \text{ es un máximo relativo.} \\ f''(-0,18) = 4,9 > 0 \Longrightarrow x = -1 + \dfrac{\sqrt{6}}{3} \text{ es un mínimo relativo.} \end{cases}$$

b) El espacio muestral es
$\Omega = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$

b.1 $P(\text{suma } 3) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6} = 0,1667$

b.2 $P(\text{mayor } 3) = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6} = 0,8333$

Problema 5.1.8 (2,5 puntos)

a) (1,25 puntos) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula el rango de A.

b) (1,25 puntos) Sea la recta r definida por la intersección de los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = 1$ y $\pi_2 \equiv y + 2z = 1$. Por otro lado, consideraremos el plano $\pi_3 \equiv 2x + y = 1$. Determina la posición relativa de la recta r y el plano π_3. El resultado del apartado anterior te puede ayudar.

Solución:

a) Se ve claramente que dos columnas iguales y el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.
También se ve claramente $F_3 = 2F_1 - F_2$.

b) $r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$
Sustituimos r en $\pi_3 \Longrightarrow 2\lambda + 1 - 2\lambda = 1 \Longrightarrow 0 = 0 \Longrightarrow r \subset \pi_3$

5.2. Extraordinaria

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

Problema 5.2.1 (2,5 puntos) Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} -2x + y - z = -1 \\ -x + ay + z = 2 \\ 2x + y + az = 3 \end{cases}$ con $a \in \mathbb{R}$

a) (1,75 punto) Discute cómo es el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) (0,75 puntos) Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 3 \end{array}\right)$; $|A| = -2a^2 + 3a + 5 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

- Si $a \in \mathbb{R} - \left\{-1, \dfrac{5}{2}\right\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 + 2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

- Si $a = \dfrac{5}{2}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 5/2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5/2 & 3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3/2 & 2 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $a = 2$:

$$\begin{cases} -2x + y - z = -1 \\ -x + 2y + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{3} \\ z = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

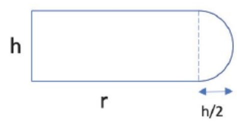
Por Gauss sería:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 - 2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} -3z = -4 \Longrightarrow z = \dfrac{4}{3} \\ 3y + 4 = 5 \Longrightarrow y = \dfrac{1}{3} \\ -2x + \dfrac{1}{3} + \dfrac{8}{3} = 3 \Longrightarrow x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{3} \\ z = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Problema 5.2.2 (2,5 puntos) Una empresa desea construir un aparcamiento para sus empleados y necesita vallarlo de manera que la región resultante sea un rectángulo más medio círculo, tal y como se ve en la figura adjunta. El rectángulo tiene de lados $h, r \in \mathbb{R}$, de manera que el radio del semicírculo es $h/2$. La empresa tiene solamente presupuesto para comprar una valla de 80 metros de longitud, que ha de ser el perímetro del aparcamiento. La empresa desea construir un aparcamiento con el mayor área posible con ese perímetro de 80 metros.



a) (1 punto) Escribe el área del aparcamiento en función del valor h.

b) (1,5 puntos) ¿Cuánto deben valer h y r para que el área del aparcamiento sea lo mayor posible?

Solución:

a) El perímetro es $2r + h + \dfrac{h\pi}{2} = 80 \Longrightarrow 2r = 80 - h - \dfrac{h\pi}{2} = \dfrac{160 - 2h - h\pi}{2} \Longrightarrow$
$r = \dfrac{160 - 2h - h\pi}{4}$
$S(h, r) = rh + \dfrac{\frac{h^2}{4}\pi}{2} \Longrightarrow S(h) = \dfrac{160h - 2h^2 - h^2\pi}{4} + \dfrac{h^2\pi}{8} = \dfrac{320h - 4h^2 - 2h^2\pi + h^2\pi}{8} = \dfrac{320h - 4h^2 - h^2\pi}{8} = \dfrac{320h - (4+\pi)h^2}{8}$

b) $S'(h) = \dfrac{160 - (4+\pi)h}{4} = 0 \Longrightarrow h = \dfrac{160}{4+\pi} \simeq 22,404$ m.

	$(0; 22,404)$	$(22,404; \infty)$
$S'(h)$	$+$	$-$
$S(h)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función $S(h)$ es creciente en el intervalo $(0; 22,404)$ y decreciente en el $(22,404; \infty)$, luego $h = \dfrac{160}{4+\pi} \simeq 22,404$ m es un máximo.
El valor de $r = \dfrac{160 - 2\frac{160}{4+\pi} - \frac{160}{4+\pi}\pi}{4} = \dfrac{80}{4+\pi} \simeq 11{,}202$ m.

Problema 5.2.3 (2,5 puntos)

a) Tenemos dos urnas con bolas. La urna A tiene 6 bolas rojas y 8 negras y la urna B tiene 8 bolas rojas y 10 bolas negras. Disponemos de un dado de 12 caras numeradas del 1 al 12. Lanzamos el dado y si sale un número múltiplo de 4 se extrae una bola de la urna A. Si sale otro número se extrae una bola de la urna B. Calcula razonadamente:

a.1 (0,5 puntos) La probabilidad de obtener una bola roja.

a.2 (0,75 puntos) Sabiendo que la bola extraída es roja, la probabilidad de que haya sido extraída de la urna A.

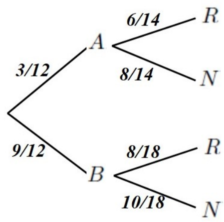
b) Una empresa de mensajería sabe que la probabilidad de que el destinatario esté ausente (y no se pueda hacer la entrega) durante el reparto es del 25 %. Un repartidor de esta empresa ha de entregar 6 paquetes.

b.1 (0,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que no pueda entregar uno de ellos porque el destinatario esté ausente?

b.2 (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que pueda entregar al menos uno de los paquetes?

Solución:

a) Sean A urna A, B urna B, R bola roja y N bola negra.



a.1 $P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) =$
$\dfrac{6}{14} \cdot \dfrac{3}{12} + \dfrac{8}{18} \cdot \dfrac{9}{12} = \dfrac{37}{84} \simeq 0,4405$

a.2 $P(A|R) = \dfrac{P(R|A)P(A)}{P(R)} = \dfrac{\frac{6}{14} \cdot \frac{3}{12}}{\frac{37}{84}} = \dfrac{9}{37} \simeq 0,2432$

b) $B(6; 0,25)$

b.1 $P(X = 1) = \binom{6}{1} \cdot 0,25^1 \cdot 0,75^5 = 0,356$

b.2 $P(X \leq 5) = 1 - P(X = 6) = 1 - \binom{6}{6} \cdot 0,25^6 \cdot 0,75^0 = 0,9998$

Problema 5.2.4 (2,5 puntos) Sean el plano $\pi \equiv ax + y - z = 1$, con $a \in \mathbb{R}$, y los puntos $A(1, 0, 0)$ y $B(b, 1, -1)$, con $b \in \mathbb{R}$.

a) (1,5 puntos) Determina el valor de a, b para que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular al plano π y el punto A esté contenido en el plano π.

b) (1 puntos) Con los valores de a, b obtenidos en el apartado anterior, escribe la ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular al plano π.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (b, 1, -1) - (1, 0, 0) = (b - 1, 1, -1)$
$\overrightarrow{AB} \perp \pi \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow (b - 1, 1, -1) = k(a, 1, -1) \Longrightarrow k = 1$ y $b - 1 = a \Longrightarrow a - b = -1$
$A \in \pi \Longrightarrow a + 0 - 0 = 1 \Longrightarrow a = 1$

$$\left\{\begin{array}{l} a - b = -1 \\ a = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \end{array}\right.$$

b) $r \perp \pi$ tal que $A \in r$:

$$r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, 1, -1) \\ P_r = A(1, 0, 0) \end{array}\right. \Longrightarrow r : \left\{\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{array}\right. \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 5.2.5 (2,5 puntos)

a) (1 punto) Encontrar el área encerrada por la recta $x = -1$ y las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$

b) (1,5 puntos) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & a \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$. Estudia el rango de A en función de los valores de a.

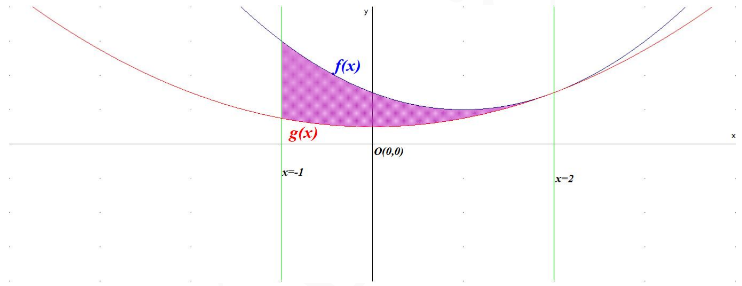
Solución:

a) $f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 - 2x + 3 = \dfrac{1}{2}x^2 + 1 \Longrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$
El recinto es $S : [-1, 2]$.

$$S = \left| \int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))\, dx \right| = \left| \int_{-1}^{2} \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 2 \right) dx \right| = \left| \frac{x^3}{6} - x^2 + 2x \right]_{-1}^{2} \Bigg| =$$

$$\left| \frac{4}{3} + \frac{19}{6} \right| = \frac{9}{2} \simeq 4,5\ u^2$$

El valor de la integral es positivo por estar la función f por encima de la g.



b) $|A| = 1 - a^2 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$

- ☛ Si $a \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.
- ☛ Si $a = -1$ o $a = 1 \Longrightarrow |A| = 0$, como el menor $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

Problema 5.2.6 (2,5 puntos)

a) (1 punto) Calcula el límite siguiente:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 9}{3x - 9}$$

b) (1,5 puntos) Sean el punto $A(1, 2, 1)$ y el plano $\pi \equiv x - y = 1$. Calcula la distancia del punto A al plano π.

Solución:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 9}{3x - 9} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 3} \frac{3x^2 - 6x + 3}{3} = 4$

b) $d(A, \pi) = \dfrac{|1 - 2 + 0 - 1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ u$

Problema 5.2.7 (2,5 puntos)

a) (1 punto) Resuelve la siguiente integral:

$$\int (x+3)e^{-2x}\, dx$$

b) En un juego de azar cada jugador tira un dado de seis caras. Si sale un 1 vuelve a tirar. Si sale otro resultado deja de tirar y la puntuación obtenida es el número de unos obtenidos durante las tiradas.

b.1 (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de no obtener ningún uno? ¿Cuál es la probabilidad de obtener una puntuación de uno? ¿Y la de obtener una puntuación de tres?

b.2 (0,75 puntos) ¿Podrías dar la probabilidad de obtener una puntuación de $n \in \mathbb{N}$?

Solución:

a) $\displaystyle\int (x+3)e^{-2x}\, dx = \left[\begin{array}{c} u = x+3 \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{-2x}\, dx \Longrightarrow v = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} \end{array}\right] =$

$\displaystyle -\frac{(x+3)e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\, dx = -\frac{(x+3)e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C = -\frac{(2x+7)e^{-2x}}{4} + C$

b) $P(1) = \dfrac{1}{6}$ y $P(\neq 1) = \dfrac{5}{6}$ en cada tirada.

b.1 $P(\text{ningún } 1) = P(\neq 1) = \dfrac{5}{6} \simeq 0,8333$

$P(\text{solo } 1) = P(1 \text{ en primera tirada}) \cdot P(\neq 1 \text{ en segunda tirada}) = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{36} \simeq 0,1389$

$P(3) = P(1 \text{ en primera tirada}) \cdot P(1 \text{ en segunda tirada}) \cdot P(1 \text{ en tercera tirada}) \cdot P(\neq 1$ en cuarta tirada$) = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{6^4} = \dfrac{5}{1296} \simeq 0,0039$

b.2 $P(n) = \overbrace{\dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \cdots \cdot \dfrac{1}{6}}^{(n)} \cdot \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{6^{n+1}}$

Problema 5.2.8 (2,5 puntos)

a) (1,25 puntos) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6$ con $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$ calcula el valor de $\begin{vmatrix} 1/2 & 3/2 & 5/2 \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix}$ e indica en cada paso las propiedades que utilizas.

b) (1,25 puntos) Calcula el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$ y $\overrightarrow{v} = (3,2,3)$.

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 1/2 & 3/2 & 5/2 \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix} = 4 \cdot \dfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ x & y & z \end{vmatrix} =$

$2\left(\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ x & y & z \end{vmatrix} \right) = 2(6+0) = 12$ (El segundo determinate es cero por tener dos filas proporcionales)

b) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} = \dfrac{3+2+3}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{22}} = \dfrac{8}{\sqrt{66}} \Longrightarrow \alpha = 10^\circ 1' 30''$

Capítulo 6

Castilla-León

6.1. Ordinaria

INDICACIONES:

a) **OPTATIVIDAD:** El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

b) **CALCULADORA:** Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN:
Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

Álgebra

Problema 6.1.1 (2 puntos) Calcular λ y μ para que el sistema de ecuaciones lineales
$\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=\mu \\ \lambda x+y=1 \\ y+\lambda z=-1 \end{array}\right.$ tenga infinitas soluciones.

Solución:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & \mu \\ \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & -1 \end{array}\right),\ |A|=-2\lambda(\lambda-1)=0 \Longrightarrow \lambda=0 \text{ y } \lambda=1.$$

- Si $\lambda\neq 0$ y $\lambda\neq 1 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A})=3=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

☛ Si $\lambda = 0$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & \mu \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & \mu \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

☛ Si $\lambda = 1$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & \mu \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & \mu \\ 0 & -1 & -1 & 1-\mu \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & \mu \\ 0 & -1 & -1 & 1-\mu \\ 0 & 0 & 0 & -\mu \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Si $\mu = 0 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado y si $\mu \neq 0 \Longrightarrow$ sistema incompatible.

☛ En conclusión el sistema tendrá infinitas soluciones cuando $\lambda = 1$ y $\mu = 0$.

Problema 6.1.2 (2 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ z & x+y \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular los valores de $x, y, z \in \mathbb{R}$ para que AB sea igual a la inversa C^{-1} de C.

Solución:

☛ $|C| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

☛ $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ z & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & x+y \\ y-x & 1 \end{pmatrix}$

☛ $AB = C^{-1} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x+z & x+y \\ y-x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+z=2 \\ x+y=1 \\ y-x=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \\ z=2 \end{array}\right.$

Geometría

Problema 6.1.3 (2 puntos) Calcular la ecuación del plano π que es perpendicular al plano $\sigma \equiv x + 2y + 3z = 0$ y pasa por los puntos $P = (0, 0, 0)$ y $Q = (0, 1, 1)$.

Solución:

$$\pi : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_\sigma} = (1, 2, 3) \\ \overrightarrow{PQ} = (0, 1, 1) \\ P(0, 0, 0) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -x - y + z = 0$$

$$x + y - z = 0$$

Problema 6.1.4 (2 puntos) Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - 2z = 0$ y la recta $r \equiv \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z-1}{1}$, se pide:

a) (1 punto) Comprobar que r es paralela a π.

b) (1 punto) Hallar el plano σ, distinto de π y paralelo a π, cuya distancia a r coincide con la de π.

Solución:

a) $r \parallel \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = (-2, 2, 1) \cdot (1, 2, -2) = -2 + 4 - 2 = 0$
Hay que comprobar si $P_r(0, 4, 1)$ pertenece al plano $\pi \Longrightarrow 0+8-2 \neq 0 \Longrightarrow P_r \notin \pi \Longrightarrow r \parallel \pi$.

b) $\sigma \parallel \pi \Longrightarrow \sigma : x + 2y - 2z + \lambda = 0$
Tomamos un punto de $r \Longrightarrow P_r(0, 4, 1)$ y tenemos que $d(P_r, \pi) = d(P_r, \sigma)$:

$$\frac{|0+8-2+0|}{\sqrt{9}} = 2 = \frac{|0+8-2+\lambda|}{\sqrt{9}} \Longrightarrow |6+\lambda| = 6 \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 6+\lambda = 6 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \pi = \sigma \\ 6+\lambda = -6 \Longrightarrow \lambda = -12 \Longrightarrow \sigma : x + 2y - 2z - 12 = 0 \end{cases}$$

Análisis

Problema 6.1.5 (2 puntos)

a) (1 punto) Determinar a y b de modo que las funciones $f(x) = x^2 - a$ y $g(x) = (x - b)e^x$ tomen el mismo valor en un punto en el que ambas tengan un extremo relativo.

b) (1 punto) Demostrar que la función $f(x) = 2x + \sin x$ solo se anula en el punto $x = 0$.

Solución:

a) Sea $x = c$ el punto en el que ambas funciones tienen un extremo.

$$\begin{cases} f'(x) = 2x \Longrightarrow f'(c) = 2c = 0 \Longrightarrow c = 0 \\ g'(x) = (x - b + 1)e^x \Longrightarrow g'(c) = (c - b + 1)e^c = 0 \Longrightarrow -b + 1 = 0 \Longrightarrow b = 1 \end{cases}$$

Además $f(c) = g(c) \Longrightarrow f(0) = g(0) \Longrightarrow -a = -b \Longrightarrow a = 1$

b) La función $f(x) = 2x + \sin x$ es continua, $f'(x) = 2 + \cos x > 0 \Longrightarrow f$ es siempre creciente. La función cambia de signo entre cualquier intervalo entre $x < 0$ y $x > 0$ Por el teorema de Bolzano la función corta en el punto $x = 0$ y por ser la función siempre creciente, este punto es único.

Problema 6.1.6 (2 puntos)

a) (1 punto) Determínense el dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen, de la función $f(x) = x(\ln x - 1)$.

b) (1 punto) Calcúlese $\displaystyle\int x(\ln x - 1)\, dx$

Solución:

a) ☛ $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$

☛ $f'(x) = \ln x = 0 \Longrightarrow x = 1$

	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función decrece en el intervalo $(0,1)$ y crece en $(1,+\infty)$. Tiene un mínimo relativo en $(1,-1)$.

b) $\displaystyle\int x(\ln x-1)\,dx = \left[\begin{array}{c} u=\ln x-1 \Longrightarrow du=\frac{1}{x}dx \\ dv = xdx \Longrightarrow v=\frac{x^2}{2} \end{array}\right] = \frac{x^2(\ln x-1)}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx =$
$\displaystyle\frac{x^2(\ln x-1)}{2} - \frac{x^2}{4} + C = \frac{2x^2(\ln x-1)-x^2}{4} + C = \frac{2x^2\ln x - 3x^2}{4} + C$

Problema 6.1.7 (2 puntos)
Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x^3+1}}{x-2}$

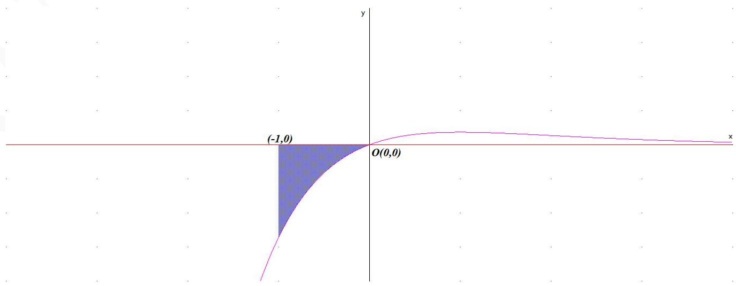
Solución:
$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x^3+1}}{x-2} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 2}\frac{\frac{3x^2+1}{2\sqrt{x^3+x-1}} - \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}}{1} = \frac{13}{6} - \frac{12}{6} = \frac{1}{6}$$

Problema 6.1.8 (2 puntos)
Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = xe^{-x}$ y el eje de abscisas cuando x varía en el intervalo $[-1,0]$.
Solución:
$f(x) = xe^{-x} = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow f(x)$ no corta al eje de abscisas en el intervalo $(-1,0)$. Habrá un único intervalo de integración, será el recinto $S : [-1,0]$.

$$F(x) = \int xe^{-x}\,dx = \left[\begin{array}{c} u=x \Longrightarrow du=dx \\ dv=e^{-x}dx \Longrightarrow v=-e^{-x} \end{array}\right] = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} \Longrightarrow$$

$$F(x) = -e^{-x}(x+1)$$

$S = \left|\displaystyle\int_{-1}^{0} xe^{-x}\,dx\right| = |F(0)-F(-1)| = |-1-0| = 1\ u^2$
El resultado de la integral es negativo por estar la función por debajo del eje de abscisas.



Probabilidad y estadística

Problema 6.1.9 (2 puntos) Un 50 % de los participantes en un torneo abierto de ajedrez celebrado en Salamanca son españoles, un 30 % son europeos no españoles y los demás proceden del resto del mundo. De ellos, dos tercios de los españoles, la mitad de los europeos no españoles y un tercio de los no europeos no pasan de los 40 años.

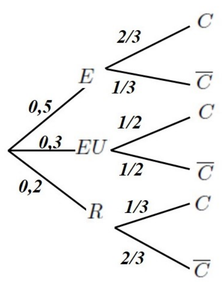
a) (0,6 puntos) Indicar las 6 probabilidades que aparecen en el enunciado

b) (0,7 puntos) Si se selecciona un participante al azar ¿Calcular la probabilidad de que no tenga más de 40 años?

c) (0,7 puntos) Si se elige al azar un participante del torneo y no tiene más de 40 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea español?

Solución:
Sean E español, EU europeo no español, R resto del mundo, C no pasan de los 40 años y $\overline{C}$ pasan de los 40 años.

a) $P(E) = 0,5$, $P(EU) = 0,3$, $P(R) = 1-(0,5+0,3) = 0,2$, $P(C|E) = \frac{2}{3}$, $P(C|EU) = \frac{1}{2}$ y $P(C|R) = \frac{1}{3}$. Todas las probabilidades están reflejadas en el árbol adjunto.



b) $P(C) = P(C|E)P(E) + P(C|EU)P(EU) + P(C|R)P(R) = \frac{2}{3}\cdot 0,5 + \frac{1}{2}\cdot 0,3 + \frac{1}{3}\cdot 0,2 = 0,55$

c) $P(E|C) = \dfrac{P(C|E)P(E)}{P(C)} = \dfrac{\frac{2}{3}\cdot 0,5}{0,55} = 0,6061$

Problema 6.1.10 (2 puntos) Si lanzamos al mismo tiempo dos dados idénticos y del tipo usual (es decir, que sean cúbicos, que todas sus caras tengan la misma probabilidad de quedar hacia arriba y que en cada una de ellas aparezca un número de puntos que varíe desde el uno hasta el seis), ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las puntuaciones obtenidas en los dos dados coincida con la suma más frecuente?
Solución:
La suma de los dos dados variará entre suman 2 y suman 12.
Podemos organizar estas sumas en una tabla:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

La suma más probable es 7 con 6 casos favorables y como hay 36 casos posibles:

$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0,1667$$

6.2. Extraordinaria

INDICACIONES:

a) **OPTATIVIDAD:** El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

b) **CALCULADORA:** Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN:
Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

Álgebra

Problema 6.2.1 (2 puntos)

a) (1 punto) Obtener todas las soluciones del sistema $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \end{array}\right.$

b) (1 punto) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{R}$ para que $x=5$, $y=-2$ y $z=-2$ sea solución del sistema $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \\ ax+2ay+bz=b \end{array}\right.$

Solución:

a) $$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=1-z \\ x+2y=3+z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1-3\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

b) Si $x=5$, $y=-2$ y $z=-2$ es solución del sistema tienen que cumplir las tres ecuaciones. Las dos primeras las cumplen y la tercera queda $5a-4a-2b=b \Longrightarrow a=3b$. Nos queda el sistema:
$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \\ 3bx+6by+bz=b \end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3b & 6b & b & b \end{array}\right),\ |A|=4b=0 \Longrightarrow b=0.$$

- Si $b \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $b=0 \Longrightarrow a=0$ y la última ecuación quedaría $0=0 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones), calculadas en el apartado anterior.

- En conclusión: el sistema tiene solución única para cualquier valor real $b \neq 0$ y $a=3b$.

Problema 6.2.2 (2 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ a & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

a) (1 punto) Calcular la matriz C, siendo $c_{11} = 2$, tal que $AC = B$.

b) (1 punto) Si $D = B^t A$ siendo B^t la traspuesta de B, determinar los valores de a para los que D tiene matriz inversa.

Solución:

a) $\underset{3\times 2}{A} \cdot \underset{m\times n}{C} = \underset{3\times 2}{B} \Longrightarrow m = n = 2$

Si $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{AC=B} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ a & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 + c_{21} & c_{12} + c_{22} \\ ac_{21} & ac_{22} \\ 2 + c_{21} & c_{12} + c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ a & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 + c_{21} = 3 \Longrightarrow c_{21} = 1 \\ c_{12} + c_{22} = -1 \overset{c_{22}=0}{\Longrightarrow} c_{12} = -1 \\ ac_{21} = a \overset{a\neq 0}{\Longrightarrow} c_{21} = 1 \\ ac_{22} = 0 \overset{a\neq 0}{\Longrightarrow} c_{22} = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $D = B^t A = \begin{pmatrix} 3 & a & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & a^2 + 6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |D| = 2a^2 = 0 \Longrightarrow a = 0 \Longrightarrow$ $\exists D^{-1} \ \ \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$

Geometría

Problema 6.2.3 (2 puntos) Dadas las rectas $r_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{array} \right. \quad t \in \mathbb{R}$ y $r_2 \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{2}$

a) (1 punto) Razonar si existe un plano perpendicular a r_2 que contenga a r_1.

b) (1 punto) Calcular la recta con vector director perpendicular a los de las rectas r_1 y r_2 y que contiene al punto $(1, 0, 0)$.

Solución:

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{array} \right. \Longrightarrow r_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1, 2, 1) \\ P_{r_1}(1, 0, -1) \end{array} \right.$$

$$r_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2} \Longrightarrow r_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_2}} = (3, 2, 2) \\ P_{r_2}(1, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow r_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 3t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{array} \right.$$

a) Para que este plano exista los vectores de ambas rectas deben ser perpendiculares, independientemente de su posición en el espacio. Para que esto ocurra se tiene que cumplir $\overrightarrow{u_{r_1}} \cdot \overrightarrow{u_{r_2}} = 0$:
$\overrightarrow{u_{r_1}} \cdot \overrightarrow{u_{r_2}} = (1, 2, 1) \cdot (3, 2, 2) = 3 + 4 + 2 = 9 \neq 0 \Longrightarrow$ los vectores no son perpendiculares y, por tanto, no existe un plano perpendicular a r_2 que contenga a r_1.

b) La recta r vendrá determinada por $r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (2, 1, -4) \\ P_r(1, 0, 0) \end{array}\right. \Longrightarrow$

$$r: \left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -4t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$$

Problema 6.2.4 (2 puntos) Sea r la recta que pasa por los puntos $(1, 0, -1)$ y $(0, 1, 1)$.

a) (1 punto) Determinar el plano que contiene a la recta r y al punto $P = (0, 0, 1)$.

b) (1 punto) Calcular la distancia de la recta r al punto $P = (0, 0, 1)$.

Solución:

Sean $A(1, 0, -1)$ y $B(0, 1, 1) \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 2) \\ P_r = A(1, 0, -1) \end{array}\right. \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{array}\right. \quad \lambda \in \mathbb{R}$

a) $\pi: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 2) \\ \overrightarrow{PP_r} = (1, 0, -2) \\ P(0, 0, 1) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2x - z + 1 = 0$

$$\pi: 2x + z - 1 = 0$$

b) Sea $\overrightarrow{PP_r} = (1, 0, -2)$, $\left|\overrightarrow{PP_r} \times \overrightarrow{u_r}\right| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}| = |(-2, 0, -1)| = \sqrt{5}$ y

$|\overrightarrow{u_r}| = |(-1, 1, 2)| = \sqrt{6}$

$$d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{PP_r} \times \overrightarrow{u_r}\right|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}\ u$$

Análisis

Problema 6.2.5 (2 puntos) Sea $f(x) = \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{1}{2-x} & \text{si} & x < 1 \\ \ln x & \text{si} & x \ge 1 \end{array}\right.$

a) (1 punto) Estudiar su continuidad y derivabilidad en $x = 1$.

b) (1 punto) Estudiar sus asíntotas verticales y horizontales.

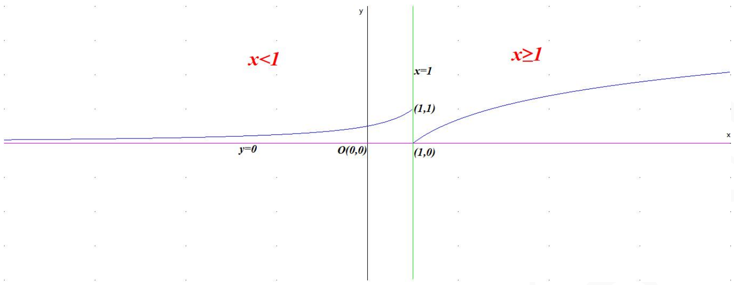
Solución:

a) Continuidad en $x = 1$: $\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2-x} = 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} \ln x = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) \ne \lim_{x\to 1^+} f(x) \Longrightarrow f$ no es continua en $x = 1$ donde hay un salto, una discontinuidad no evitable.
Derivabilidad en $x = 1$: La función no es derivable en este punto al no ser continua.

b) Asíntotas:

- Verticales: No hay
  En la rama $x < 1$ la función es $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ y el denominador se anula para $x = 2$ que no está en la rama, luego no puede haber asíntota vertical.
  En la rama $x \geq 1$ la función es $f(x) = \ln x$ en este caso el único valor sería $x = 0$ que no está en la rama, luego no puede haber asíntota vertical.

- Horizontales:
  En la rama $x < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{2-x} = 0 \Longrightarrow y = 0$
  En la rama $x \geq 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = \infty \Longrightarrow$ No hay



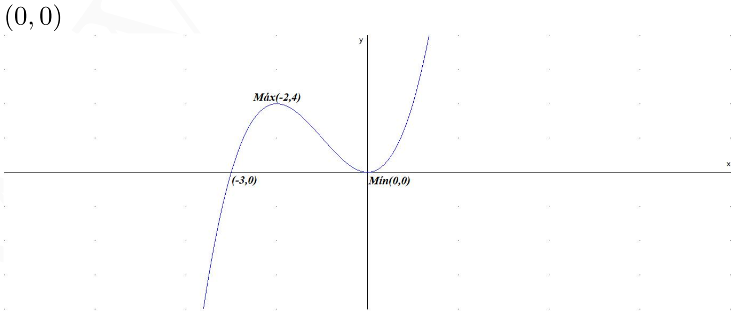
Problema 6.2.6 (2 puntos) Dada la función $f(x) = x^2(x+3)$, determinar su dominio de definición, puntos de corte de su gráfica con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.
Solución:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ por ser un polinomio.
- Puntos de corte:
  - Con OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0,0)$
  - Con OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (0,0)$ y $(-3{,}0)$
- Monotonía: $f'(x) = 3x(x+2) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -2$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

  La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$ y decreciente en el $(-2,0)$

- Extremos relativos: La función tiene un máximo relativo en $(-2,4)$ y un mínimo relativo en $(0,0)$



Problema 6.2.7 (2 puntos) Calcular:

a) (1 punto) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{x^3 - 4x^2}$.

b) (1 punto) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x\, dx$.

Solución:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^3 + 4x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos x^2}{3x^2 + 8x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x^2 - 4x^2 \sin x^2}{6x + 8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

b) $\displaystyle F(x) = \int \sin x \cos^3 x\, dx = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x\, dx \\ dx = -\dfrac{dt}{\sin x} \end{bmatrix} = -\int \sin x \cdot t^3 \cdot \frac{dt}{\sin x} = -\int t^3\, dt = -\frac{t^4}{4} + C = -\frac{\cos^4 x}{4} + C$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x\, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{1}{4}$

Problema 6.2.8 (2 puntos) Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^3$

a) (1 punto) Comprobar que las gráficas de dichas funciones en $[-1, 0]$ solo se cortan para $x = -1$ y $x = 0$. Demostrar que en $[-1, 0]$ $g(x) \geq f(x)$.

b) (1 punto) Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de dichas funciones.

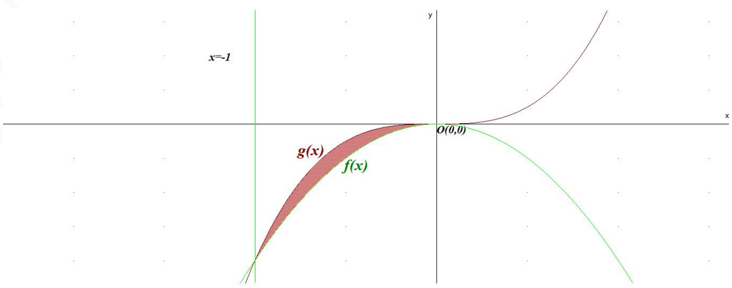
Solución:

a) $-x^2 = x^3 \Longrightarrow x^3 + x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -1$.
Hay que demostrar que $g(x) - f(x) \geq 0 \Longrightarrow x^3 + x^2 \geq 0$ resolvemos la inecuación:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
$g(x) - f(x)$	$-$	$+$	$+$

Luego en el intervalo $[-1, 0]$ es $g(x) - f(x) \geq 0 \Longrightarrow g(x) \geq f(x)$.

b) $\displaystyle S = \int_{-1}^{0} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{-1}^{0} (x^3 + x^2)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \simeq 0{,}0833\ u^2$



Probabilidad y estadística

Problema 6.2.9 (2 puntos) Sean A, B y C sucesos de un experimento aleatorio con probabilidades $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,4$ y $P(C) = 0,5$ tales que A y B son independientes y A y C son incompatibles. Calcular las probabilidades $P(A\cap B)$, $P(A\cap C)$, $P(A\cap \overline{C})$, $P(A\cup B)$, $P(\overline{A}\cup \overline{B})$ siendo, $\overline{A}$, $\overline{B}$ y $\overline{C}$ los sucesos complementarios de A, B y C respectivamente.
Solución:

- Si A y B son independientes $P(A\cap B) = P(A)P(B) = 0,3\cdot 0,4 = 0,12$
- Si A y C son incompatibles $P(A\cap B) = 0$
- $P(A\cap \overline{C}) = P(A) - P(A\cap C) = P(A) = 0,3$
- $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0,3 + 0,4 - 0,12 = 0,58$
- $P(\overline{A}\cup \overline{B}) = P(\overline{A\cap B}) = 1 - P(A\cap B) = 1 - 0,12 = 0,88$

Problema 6.2.10 (2 puntos) De las camionetas que recogen los envases reciclados de una localidad el 45 % son de la marca $C1$, el 30 % de la marca $C2$ y el 25 % de la marca $C3$. La probabilidad de que una camioneta se averíe es: 0,02 si es de la marca $C1$, 0,05 si es de la marca $C2$ y 0,04 si es de la marca $C3$.

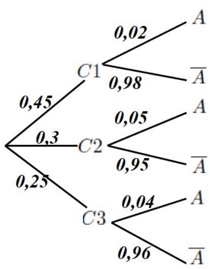
a) Indicar las 6 probabilidades que aparecen en el enunciado

b) Si se selecciona una de esas camionetas al azar ¿qué probabilidad tiene de averiarse?

c) Suponiendo que una de esas camionetas se ha averiado, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido una camioneta de la marca $C3$?

Solución:
Sean $C1$ marca $C1$, $C2$ marca $C2$, $C3$ marca $C3$, A averiado y $\overline{A}$ no averiado.

a) $P(C1) = 0,45$, $P(C2) = 0,3$, $P(C3) = 0,25$, $P(A|C1) = 0,02$, $P(A|C2) = 0,05$ y $P(A|C3) = 0,04$. Todas las probabilidades están reflejadas en el árbol adjunto.



b) $P(A) = P(A|C1)P(C1) + P(A|C2)P(C2) + P(A|C3)P(C3) =$
$0,02\cdot 0,45 + 0,05\cdot 0,3 + 0,04\cdot 0,25 = 0,034$

c) $P(C3|A) = \dfrac{P(A|C3)P(C3)}{P(A)} = \dfrac{0,04\cdot 0,25}{0,034} = 0,2941$

Capítulo 7

Cataluña

7.1. Ordinaria

Responda a **CUATRO** de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.
Cada cuestión vale 2,5 puntos.
Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.
Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

Problema 7.1.1 (2,5 puntos) Calcule los coeficientes a, b, c y d de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ si sabemos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de inflexión $(1, 0)$ es $y = -3x+3$ y que la función tiene un extremo relativo en el punto de la gráfica de abscisa $x = 0$.

Solución:
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Longrightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Longrightarrow f''(x) = 6ax + 2b$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \Longrightarrow a + b + c + d = 0 \\ f''(1) = 0 \Longrightarrow 6a + 2b = 0 \\ f'(1) = -3 \Longrightarrow 3a + 2b + c = -3 \\ f'(0) = 0 \Longrightarrow c = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases} \Longrightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

Problema 7.1.2 (2,5 puntos) Considere las dos matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1,5 puntos) Calcule las matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$.

b) (1 punto) Sean C y D dos matrices cuadradas del mismo orden que satisfacen $C \cdot D = C$ y $D \cdot C = D$. Compruebe que las dos matrices son idempotentes.
Nota: Una matriz cuadrada se denomina "*idempotente*" si coincide con su cuadrado.

Solución:

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2&0\\-1&-1&0\\1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}=A$

$B\cdot A=\begin{pmatrix}2&2&0\\-1&-1&0\\1&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&0\\-1&-1&0\\1&2&1\end{pmatrix}=B$

b) $C=C\cdot D\Longrightarrow C^2=C\cdot(D\cdot C)\overset{D\cdot C=D}{=}C\cdot D=C\Longrightarrow C^2=C$ luego C es *idempotente*
$D=D\cdot C\Longrightarrow D^2=D\cdot(C\cdot D)\overset{C\cdot D=C}{=}D\cdot C=D\Longrightarrow D^2=D$ luego D es *idempotente*

Problema 7.1.3 (2,5 puntos) Sea $f'(x)=\begin{cases}x-1 & \text{si}\quad x\le 2\\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si}\quad x>2\end{cases}$ la derivada de una función derivable $f(x)$ que pasa por el punto $A=(0,3)$.

a) (1,5 puntos) Calcule la función $f(x)$.

b) (1 punto) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $f'(x)$ en el punto de abscisa $x=3$.

Solución:

a) Si $x\le 2\Longrightarrow f'(x)=x-1\Longrightarrow f(x)=\displaystyle\int(x-1)\,dx=\frac{x^2}{2}-x+C'$. Como pasa por el punto $A=(0,3)\Longrightarrow f(0)=0-0+C'=3\Longrightarrow C'=3\Longrightarrow f(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+3$
Si $x>2\Longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x-1}\Longrightarrow f(x)=\displaystyle\int\frac{1}{x-1}\,dx=\ln|x-1|+C$. El punto $A=(0,3)$ no está en la rama y no podemos calcular la constante de integración.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-x+3 & \text{si}\quad x\le 2\\ \ln|x-1|+C & \text{si}\quad x>2\end{cases}$$

Como la función es derivable tiene que ser continua en $x=2$:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2}{2}-x+3\right)=3\\ \lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(\ln|x-1|+C)=C\\ f(2)=3\end{array}\right.\Longrightarrow C=3.$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-x+3 & \text{si}\quad x\le 2\\ \ln|x-1|+3 & \text{si}\quad x>2\end{cases}$$

b) Sea $g(x)=f'(x)=\dfrac{1}{x-1}\Longrightarrow g'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$ ($x=3$ se ecuentra en la rama $x>2$)
Tenemos $a=3$, $b=g(3)=\dfrac{1}{2}$ y $m=g'(3)=-\dfrac{1}{4}\overset{y-b=m(x-a)}{\Longrightarrow}y-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}(x-3)\Longrightarrow$

$$y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$$

Problema 7.1.4 (2,5 puntos) Sea el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real λ:

$$\begin{cases} x + 2\lambda y + (2+\lambda)z = 0 \\ (2+\lambda)x + y + 2\lambda z = 3 \\ 2\lambda x + (2+\lambda)y + z = -3 \end{cases}$$

a) (1,25 puntos) Discute el sistema para los diferentes valores del parámetro λ.

b) (1,25 puntos) Para el caso $\lambda = -1$, resuelve el sistema, interprétalo geométricamente e identifica su solución.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda & 3 \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 9\lambda^3 + 9 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$

- Si $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)
- Si $\lambda = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)}$$

b) Si $\lambda = -1$:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3y - 3z = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - 2y = -\mu \\ y = 1 + \mu \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = 1 + \mu \\ z = \mu \end{cases} \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

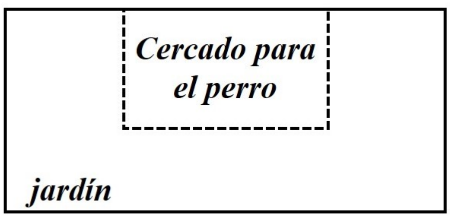
Los tres planos se cortan en la recta que hemos calculado.
Para descartar la coincidencia de dos de ellos comprobamos que se cortan dos a dos:

$$\text{Sean} \begin{cases} \pi_1 : x - 2y + z = 0 \\ \pi_2 : x + y + -2z = 3 \\ \pi_3 : -2x + y + z = -3 \end{cases}, \text{comparamos:} \begin{cases} \pi_1 \text{ con } \pi_2 : \dfrac{1}{1} \neq \dfrac{-2}{1} \Longrightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ se cortan} \\ \pi_1 \text{ con } \pi_3 : \dfrac{1}{-2} \neq \dfrac{-2}{1} \Longrightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_3 \text{ se cortan} \\ \pi_2 \text{ con } \pi_3 : \dfrac{1}{-2} \neq \dfrac{1}{1} \Longrightarrow \pi_2 \text{ y } \pi_3 \text{ se cortan} \end{cases}$$

Luego los planos se cortan dos a dos y, en conjunto, en una recta, como un libro de tres hojas.

Problema 7.1.5 (2,5 puntos)

Nuria tiene un jardín rectangular y quiere hacer un cercado (rectangular o cuadrado) de 8 m^2 para su perro. Ha pensado en poner el cercado junto al muro del jardín, tal y como se muestra en la figura de la derecha, para ahorrarse así uno de los cuatro lados. El precio de la valla que desea utilizar es de 2,5€/m.

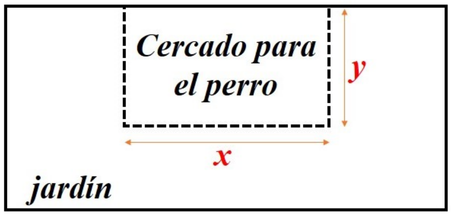


a) (1,75 puntos) ¿Qué dimensiones debe tener el cercado para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es ese coste mínimo?

b) (0,75 puntos) Si mantiene la forma rectangular o cuadrada del cercado y hace que uno de los vértices del jardín coincida con un vértice del cercado, ¿cuántos euros se puede ahorrar? Razone cómo pondría el cercado y justifique con cálculos matemáticos las dimensiones de su propuesta.

Solución:

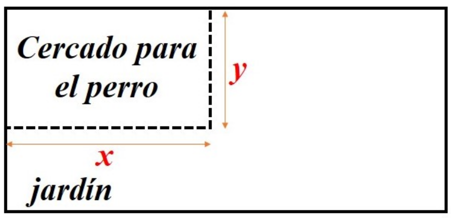
a) Tenemos:
$x \cdot y = 8 \Longrightarrow y = \dfrac{8}{x}$
$P(x,y) = x + 2y \Longrightarrow P(x) = x + \dfrac{16}{x} = \dfrac{x^2+16}{x}$
$P'(x) = \dfrac{x^2-16}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 4$, la solución negativa es irrelevante.



	$(0,4)$	$(4,\infty)$
$P'(x)$	$-$	$+$
$P(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

Luego $x = 4$ m es un mínimo e $y = \dfrac{8}{4} = 2$ m con una longitud de valla de $x+2y = 8$ m y un coste mínimo de $8 \cdot 2,5 = 20$€

b) Tenemos:
$x \cdot y = 8 \Longrightarrow y = \dfrac{8}{x}$
$P(x,y) = x + y \Longrightarrow P(x) = x + \dfrac{8}{x} = \dfrac{x^2+8}{x}$
$P'(x) = \dfrac{x^2-8}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$, la solución negativa es irrelevante.



	$(0,2\sqrt{2})$	$(2\sqrt{2},\infty)$
$P'(x)$	$-$	$+$
$P(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

Luego $x = 2\sqrt{2}$ m es un mínimo e $y = \dfrac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ m con una longitud de valla de $x+y = 4\sqrt{2}$ m y un coste mínimo de $2\sqrt{2} \cdot 2,5 = 10\sqrt{2} \simeq 14,1421$€
El ahorro sería de $20 - 14,1421 = 5,8579$€

Problema 7.1.6 (2,5 puntos) Sean los planos π_1 y π_2, determinados por las ecuaciones $\pi_1 : x+y = 3$ y $\pi_2 : x - z = -2$.

a) (0,75 puntos) Encuentre la ecuación general $(Ax + By + Cz + D = 0)$ del plano π_3 que es perpendicular a π_1 y π_2, y que pasa por el punto $P = (4,1,2)$.

b) (0,75 puntos) Sea r la recta de intersección de π_1 y π_2. Calcule la ecuación vectorial de la recta r.

c) (1 punto) Calcule el punto Q de la recta r que está más cerca del punto P.

Solución:

a) $\overrightarrow{u_{\pi_3}} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 1, -1) \Longrightarrow \pi_3 : -x + y - z + \lambda = 0 \stackrel{P\in\pi_3}{\Longrightarrow}$
$-4 + 1 - 2 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 5 \Longrightarrow \pi_3 : -x + y - z + 5 = 0$

b) $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x - z = -2 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \quad \forall\lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, -1, 1) \\ P_r(-2, 5, 0) \end{array} \right.$

$$r : (x, y, z) = (-2, 5, 0) + \lambda(1, -1, 1) \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

c) El punto Q es la proyección de P sobre r:

- ☛ Calculamos un plano $\pi \perp r$ tal que $P \in \pi$:
  $\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} = (1, -1, 1) \Longrightarrow \pi : x - y + z + \lambda = 0 \stackrel{P\in\pi}{\Longrightarrow} \pi : 4 - 1 + 2 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -5 \Longrightarrow$
  $\pi : x - y + z - 5 = 0$
- ☛ Calculamos el punto Q de corte de r con π:
  $(-2 + \lambda) - (5 - \lambda) + \lambda - 5 = 0 \Longrightarrow \lambda = 4 \Longrightarrow Q(2, 1, 4)$

7.2. Extraordinaria

Responda a **CUATRO** de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.
Cada cuestión vale 2,5 puntos.
Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.
Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

Problema 7.2.1 (2,5 puntos) Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad de orden dos $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (0,5 puntos) Compruebe que $(A - 2I)^2 = 3I$.

b) (1,25 puntos) Utilizando la igualdad del apartado anterior, encuentre la matriz inversa de la matriz A en función de las matrices A e I, y compruebe que coincide con la matriz B.

c) (0,75 punto) Calcule la matriz X que satisface la igualdad $AX = B$.

Solución:

a) $(A-2I)^2 = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$

b) $(A-2I)^2 = (A-2I)(A-2I) = A^2 - 2AI - 2IA + 4I^2 = A^2 - 4A + 4I = 3I \Longrightarrow$
$A^2 - 4A = -I \Longrightarrow 4A - A^2 = I \Longrightarrow (4I - A)A = I \Longrightarrow A^{-1} = 4I - A =$
$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = B$

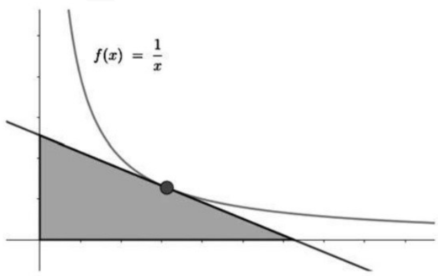
c) $AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B \overset{A^{-1}=B}{=} B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$

Problema 7.2.2 (2,5 puntos) Considere la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$

a) (0,75 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 2$.

b) (0,75 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = k$, donde k es un número real positivo.

c) (1 punto) Compruebe que, tal y como puede verse en la figura de abajo, la recta del apartado b) determina un triángulo de área constante con los semiejes positivos de coordenadas. Calcule este área.



Solución:

a) $a = 2 \Longrightarrow b = f(2) = \dfrac{1}{2}$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \Longrightarrow m = f'(2) = -\dfrac{1}{4} \overset{y-b=m(x-a)}{\Longrightarrow}$
$y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}(x-2) \Longrightarrow y = -\dfrac{1}{4}x + 1$

b) $a = k \Longrightarrow b = f(k) = \dfrac{1}{k}$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \Longrightarrow m = f'(k) = -\dfrac{1}{k^2} \overset{y-b=m(x-a)}{\Longrightarrow}$
$y - \dfrac{1}{k} = -\dfrac{1}{k^2}(x-k) \Longrightarrow y = -\dfrac{1}{k^2}x + \dfrac{2}{k}$

c) Calculamos los puntos de corte de la recta $y = -\dfrac{1}{k^2}x + \dfrac{2}{k}$ con los ejes coordenados:

- ☛ Con el eje de ordenadas hacemos $x = 0 \Longrightarrow \left(0, \dfrac{2}{k}\right)$
- ☛ Con el eje de abscisas hacemos $y = 0 \Longrightarrow -\dfrac{1}{k^2}x + \dfrac{2}{k} = 0 \Longrightarrow x = 2k \Longrightarrow (2k, 0)$

La recta forma con los ejes coordenados un triángulo de altura $\dfrac{2}{k}$ y base $2k$, luego el área $S = \dfrac{\frac{2}{k}\cdot 2k}{2} = 2\ u^2$ independientemente del valor de k.

Problema 7.2.3 (2,5 puntos) Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x + y = 1 + z \\ my + z = 2 - x \\ mz + 3 = 3x + y \end{cases}$, donde m es un número real.

a) (1,25 puntos) Discute el sistema según los valores del parámetro m.

b) (1,25 puntos) Resuelve el sistema, si tiene solución, para el caso $m = 1$.

Solución:

Tenemos $\begin{cases} 2x + y = 1 + z \\ my + z = 2 - x \\ mz + 3 = 3x + y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + my + z = 2 \\ 3x + y - mz = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + my + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x + y - mz = 3 \end{cases}$

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -m & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 2m^2 - 4m = 2m(m-2) = 0 \Longrightarrow m = 0$ y $m = 2$.

- Si $m \in \mathbb{R} - \{0, 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)
- Si $m = 0$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] =$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)
- Si $m = 2$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 - 5F_2 \end{array}\right] =$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema incompatible (no tiene solución)

b) Si $m = 1$ resolvemos por Gauss:

$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array}\right] =$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} 2z = 3 \Longrightarrow z = \dfrac{3}{2} \\ -y - \dfrac{9}{2} = -3 \Longrightarrow y = -\dfrac{3}{2} \\ x - \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2} = 2 \Longrightarrow x = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -\dfrac{3}{2} \\ z = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Problema 7.2.4 (2,5 puntos) Considere la función $f(x)$ definida por $f(x) = -3x + e^{2x^3-1}$.

a) (1,25 puntos) Justifique que $f(x) = 2$ tiene una solución en el intervalo $(-1, 0)$.

b) (1,25 puntos) Sea la función $h(x) = -3x^2 + e^{2x^3-1}$. Calcule el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x)$ y $h(x)$.

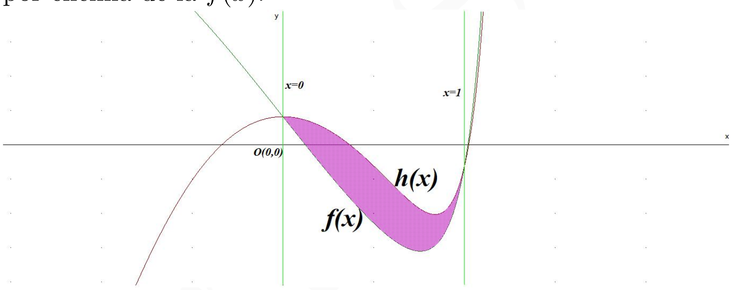
Solución:

a) Sea $g(x) = f(x) - 2 = -3x + e^{2x^3-1} - 2$ función continua en $\mathbb{R}$ por ser composición de funciones continuas y, por tanto, continua el intervalo $(-1, 0)$. Tenemos: $g(-1) = 1 + e^{-3} > 0$ y $g(0) = -2 + e^{-1} < 0$, es decir, la función g cambia de signo en los extremos del intervalo. Luego la función cumple las condiciones del teorema de Bolzano que nos afirma: $\exists c \in (-1, 0)$ tal que $g(c) = 0 \Longrightarrow f(c) - 2 = 0 \Longrightarrow f(c) = 2$

b) Calculamos los puntos de corte entre ambas gráficas:
$f(x) = h(x) \Longrightarrow -3x + e^{2x^3-1} = -3x^2 + e^{2x^3-1} \Longrightarrow -3x = -3x^2$ y tenemos $3x^2 - 3x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 1$. Luego el recinto de integración es $S : [0, 1]$.

$$S = \left| \int_0^1 (3x^2 - 3x)\, dx \right| = \left| x^3 - \frac{3x^2}{2} \right]_0^1 \right| = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} = 0,5\ u^2$$

La integral sale negativa porque hemos calculado $\int (f(x) - h(x))dx$ y la función $h(x)$ está por encima de la $f(x)$.



Problema 7.2.5 (2,5 puntos) Sean r_1 y r_2, las rectas definidas por $r_1 : x - 1 = y = -z$ y por $r_2 : x = y = z$, respectivamente.

a) (1,75 puntos) Calcule la ecuación paramétrica de la recta que corta perpendicularmente las rectas r_1 y r_2.

b) (0,75 puntos) Calcule la distancia entre r_1 y r_2.

Solución:

$$r_1 : x - 1 = y = -z \Longrightarrow r_1 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \forall \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow r_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1, 1, -1) \\ P_{r_1}(1, 0, 0) \end{cases}$$

$$r_2 : x = y = z \Longrightarrow r_2 : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \forall \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow r_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_2}} = (1, 1, 1) \\ P_{r_2}(0, 0, 0) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2, -2, 0) = 2(1, -1, 0)$

Calculamos la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1:\begin{cases}\overrightarrow{u_t}=(1,-1,0)\\ \overrightarrow{u_{r_1}}=(1,1,-1)\\ P_{r_1}(1,0,0)\end{cases}\Longrightarrow \pi_1:\begin{vmatrix}x-1 & y & z\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=x+y+2z-1=0$$

$$\pi_2:\begin{cases}\overrightarrow{u_t}=(1,-1,0)\\ \overrightarrow{u_{r_2}}=(1,1,1)\\ P_{r_2}(0,0,0)\end{cases}\Longrightarrow \pi_2:\begin{vmatrix}x & y & z\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-x-y+2z=0$$

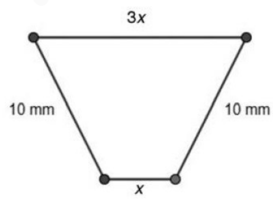
$$t:\begin{cases}x+y+2z-1=0\\ -x-y+2z=0\end{cases}\Longrightarrow t:\begin{cases}x=\lambda\\ y=\dfrac{1}{2}-\lambda\\ z=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

b) Sea $\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}}=(1,0,0)$ y $\left|\left[\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}},\overrightarrow{u_{r_1}},\overrightarrow{u_{r_2}}\right]\right|=|\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}|=|2|=2.$

Por otro lado $|\overrightarrow{u_{r_1}}\times\overrightarrow{u_{r_2}}|=|(2,-2,0)|=2\sqrt{2}$

$$d(r_1,r_2)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}},\overrightarrow{u_{r_1}},\overrightarrow{u_{r_2}}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_{r_1}}\times\overrightarrow{u_{r_2}}|}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ u$$

Problema 7.2.6 (2,5 puntos) Queremos construir una pieza metálica que tenga por sección un trapecio isósceles con la base superior tres veces más larga que la base inferior. Los otros lados del trapecio miden 10 mm, tal y como se puede observar en la siguiente figura:



a) (0,5 puntos) Exprese la altura del trapecio en función de la longitud x de la base inferior.

b) (2 puntos) Calcule la longitud de la base inferior del trapecio de forma que el área de la pieza sea máxima y encuentre el valor de esa área máxima.

Solución:

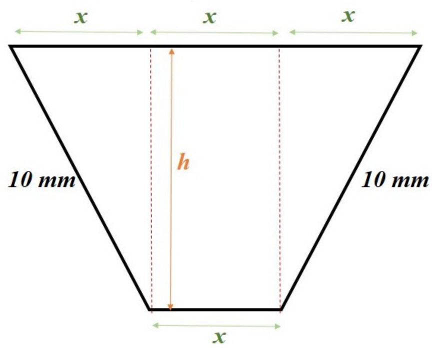
a) $10^2 = x^2 + h^2 \Longrightarrow h = \sqrt{100 - x^2}$

b) $S(x,h) = \dfrac{3x + x}{2} \cdot h = 2x \cdot h \Longrightarrow S(x) = 2x\sqrt{100 - x^2}$

$S'(x) = \dfrac{200 - 4x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Longrightarrow x = \pm 5\sqrt{2}$, la solución negativa es irrelevante.

	$(0, 5\sqrt{2})$	$(5\sqrt{2}, \infty)$
$S'(x)$	$+$	$-$
$S(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

Luego $x = 5\sqrt{2}$ mm es un máximo y $h = \sqrt{100 - 50} = 5\sqrt{2}$ mm con un área máxima de 100 mm^2



Capítulo 8

Comunidad Valenciana

8.1. Ordinaria

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 8.1.1 (10 puntos) Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$:

a) (4 puntos) Estudiar cuándo la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene solución en función del parámetro real $m \in \mathbb{R}$.

b) (6 puntos) Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando éstas existan.

Solución:

a) $|A| = -3 \Longrightarrow |A^2| = |A|^2 = (-3)^2 = 9 \Longrightarrow \exists (A^2)^{-1} \quad \forall m \in \mathbb{R} \Longrightarrow X = (A^2)^{-1}B \quad \forall m \in \mathbb{R}$. El sistema es compatible determinado (solución única) para cualquier m real.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2m+2 & 2 \\ 0 & m^2+3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$(A^2)^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & -6 & 2(m-3) \\ 0 & 3 & -m \\ 0 & -3m & m^2+3 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^2)^{-1}B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & -6 & 2(m-3) \\ 0 & 3 & -m \\ 0 & -3m & m^2+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m-6 \\ -m \\ m^2+3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3m-6 \\ y = -m \\ z = m^2+3 \end{cases}$$

Problema 8.1.2 (10 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$

a) (6 puntos) Obtener la matriz $(AB^T + I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas para realizar la operación.

b) (4 puntos) Comprobar que $C^2 = -\alpha^3 I$, donde I es la matriz identidad, y calcular C^{13}.

Solución:

a) $(AB^T+I)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & -3/4 \end{pmatrix}$

b) $C^1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$,

$C^2 = \alpha^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} = -\alpha^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\alpha^3 I$

$C^{13} = (C^2)^6 C = (-\alpha^3 I)^6 C = \alpha^{18} I \cdot \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} = \alpha^{19}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{19} \\ -\alpha^{20} & 0 \end{pmatrix}$

Problema 8.1.3 (10 puntos) Dada la recta $r : \left\{ \begin{array}{c} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{array} \right.$ y los puntos $P = (0, 0, 3)$ y $Q = (2, 2, a)$, obtener:

a) (6 puntos) Los valores del parámetro real a, si existen, para los que son paralelas la recta r y la recta que pasa por los puntos P y Q.

b) (4 puntos) La ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por P.

Solución:

a) $r : \left\{ \begin{array}{c} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, -3) \\ P_r(1, 0, -1) \end{array} \right.$

$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{PQ} = (2, 2, a-3) \\ P_s = P(0, 0, 3) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3 + (a-3)\lambda \end{array} \right.$

$r \parallel s \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} = k\overrightarrow{u_s} \Longrightarrow (1, 1, -3) = k(2, 2, a-3) \Longrightarrow k = \frac{1}{2}$ y $-3 = \frac{1}{2}(a-3) \Longrightarrow -6 = a - 3 \Longrightarrow a = -3$.

Para que las dos rectas sean paralelas es necesario que $a = -3$. Hay que comprobar si son coincidentes. Cogemos el punto $P_s(0, 0, 3)$ de s y sustituimos en la recta r:

$\left\{ \begin{array}{l} x - y = 1 \Longrightarrow !0 - 0 = 1! \\ x + 2y + z = 0 \Longrightarrow !0 + 0 + 3 = 0! \end{array} \right. \Longrightarrow P_s \notin r \Longrightarrow r \parallel s$

b) $\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} = (1, 1, -3) \Longrightarrow \pi : x + y - 3z + \lambda = 0 \overset{P\in\pi}{\Longrightarrow} 0 + 0 - 9 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 9 \Longrightarrow$

$$\pi : x + y - 3z + 9 = 0$$

Problema 8.1.4 (10 puntos) Dada la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} 5x + y + 7z = 16 \\ 9x - y + 7z = 12 \end{array} \right.$ y el punto $P = (0, 5, 2)$ se pide:

a) (2 puntos) Comprobar que el punto $Q = (2, 6, 0)$ pertenece a la recta r y encontrar la recta s que pasa por los puntos P y Q.

b) (3 puntos) Obtener el ángulo que forman la recta r y la recta s.

c) (5 puntos) Obtener la proyección ortogonal del punto P en la recta r.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}5x+y+7z=16\\9x-y+7z=12\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=2-\lambda\\y=6-2\lambda\\z=\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-1,-2,1)\\P_r(2,6,0)\end{array}\right.$$

a) Sustituimos $Q=(2,6,0)$ en r:

$$\left\{\begin{array}{l}5x+y+7z=16\Longrightarrow 10+6+0=16\\9x-y+7z=12\Longrightarrow 18-6+0=12\end{array}\right. \Longrightarrow Q\in r$$

$$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{PQ}=(2,1,-2)\\P_s=P(0,5,2)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=2\lambda\\y=5+\lambda\\z=2-2\lambda\end{array}\right.$$

b) $\cos\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r}|\cdot|\overrightarrow{u_s}|}=\dfrac{|-2-2-2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}=\dfrac{6}{3\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\Longrightarrow \alpha=35^\circ 15'52''$

c) Seguimos los siguientes pasos:

- ☛ Calculamos un plano $\pi\perp r$ tal que $P\in\pi$:
  $\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_r}=(-1,-2,1)\Longrightarrow \pi:-x-2y+z+\lambda=0\overset{P\in\pi}{\Longrightarrow}0-10+2+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=8\Longrightarrow\pi:-x-2y+z+8=0$
- ☛ Calculamos el punto de corte P' de r con π que será el punto buscado:
  $-x-2y+z+8=0\Longrightarrow -(2-\lambda)-2(6-2\lambda)+\lambda+8=0\Longrightarrow\lambda=1\Longrightarrow P'(1,4,1)$

Problema 8.1.5 (10 puntos) Considerar la función $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln(x+1)$. Obtener:

a) (2 puntos) El dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) (4 puntos) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos.

c) (4 puntos) El área comprendida entre la curva $y=f(x)$ y las rectas $y=0$, $x=1$ y $x=2$.

Solución:

a) $\mathrm{Dom}(f)=(-1,0)\cup(0,\infty)$, en $x=0$ anula el denominador y $x+1>0$ por no existir logaritmos de números negativos.

Tiene una asíntota vertical en $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}+\ln(x+1)\right)=\left[\frac{1}{0^-}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+\ln(x+1)\right)=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty$$

Tiene una asíntota vertical en $x=-1$:

$$\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{1}{x}+\ln(x+1)\right)\text{ No existe}$$

$$\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{1}{x}+\ln(x+1)\right)=[-1-\infty]=-\infty$$

No hay asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln(x+1)\right)\text{ no existe.}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln(x+1)\right)=\infty.$$

No hay asíntotas oblicuas: ($y=mx+n$)

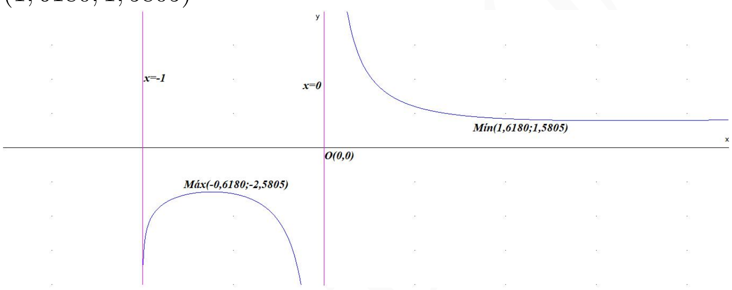
$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln(x+1)}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{L'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}}{1}=0$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln(x+1)\right)=\infty$$

b) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2(x+1)} = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

	$\left(-1, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $\left(-1, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$ y decreciente en el intervalo $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. La función presenta un máximo relativo en el punto $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; -2,5805\right) = (-0,6180; -2,5805)$ y un mínimo relativo en $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; 1,5805\right) = (1,6180; 1,5805)$



c) Como se ha visto en la representación gráfica la función no corta al eje de abscisas en el intervalo $[1,2]$. Sólo habrá un recinto de integración.

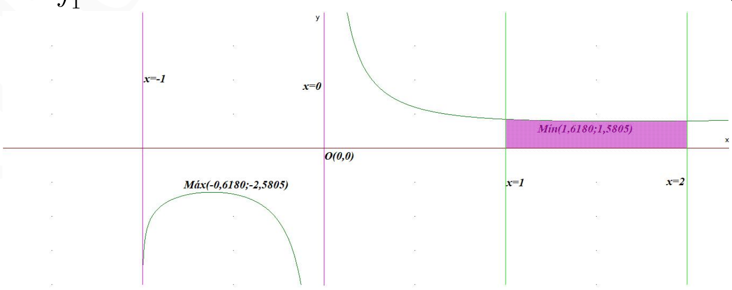
$F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \ln(x+1)\right) dx = \ln|x| + \int \ln(x+1)\,dx =$

$\left[\begin{array}{c} u = \ln(x+1) \Longrightarrow du = \dfrac{dx}{x+1} \\ dv = dx \Longrightarrow v = x \end{array}\right] =$

$\ln|x| + x\ln|x+1| - \displaystyle\int \frac{x}{x+1}\,dx = \ln|x| + x\ln|x+1| - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx =$

$\ln|x| + x\ln|x+1| - x + \ln|x+1| + C = (x+1)\ln|x+1| + \ln|x| - x + C$

$S = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = F(2) - F(1) = \ln 54 - 2 - (2\ln 2 - 1) = \ln\left(\frac{27}{2}\right) - 1 \simeq 1,6027\ u^2$

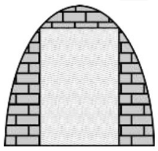


Problema 8.1.6 (10 puntos) El corte vertical de la entrada a la plaza amurallada de cierto pueblo

tiene forma de parábola con ecuación $y = -x^2 + 12$, donde x e y se miden en metros e $y = 0$ representa el suelo. Se desea poner una puerta rectangular de modo que las dos esquinas superiores estén en la parábola y las inferiores en el suelo. El resto de la entrada va cerrado con piedra. Calcular:

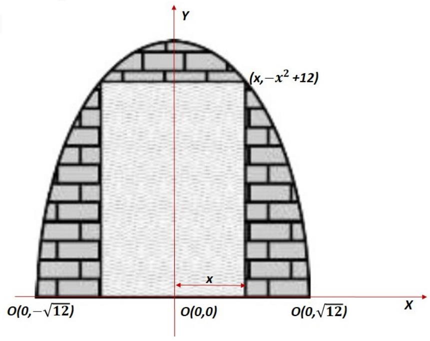
a) (6 puntos) Las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible.

b) (4 puntos) Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra.



Solución:

a) $S(x) = 2x(-x^2 + 12) = -2x^3 + 24x$ tal que $x \in [-\sqrt{12}, \sqrt{12}]$.
$S'(x) = -6x^2 + 24 = 0 \Longrightarrow x = 2$
$S''(x) = -12x \Longrightarrow S''(2) = -24 < 0 \Longrightarrow x = 2$ es un máximo.
La puerta tiene de ancho $2x \Longrightarrow 4$ m y de alto $-x^2 + 12 \Longrightarrow 8$ m



b) El área de la puerta es $S(2) = -16 + 48 = 32$ m^2

El área encerrada por la parábola es $S_p = 2\int_0^{\sqrt{12}} (-x^2 + 12)\, dx =$

$$2\left(-\frac{x^3}{3} + 12x\right)\Bigg]_0^{\sqrt{12}} = 32\sqrt{3} \simeq 55,42562584 \text{ m}^2$$

El área empedrada será: $32\sqrt{3} - 32 = 23,42562584$ m^2

Problema 8.1.7 (10 puntos) Tenemos dos monedas distintas M_1 y M_2. La probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_1 es x y la probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_2 es y.

a) (3 puntos) Si lanzamos las dos monedas al mismo tiempo, calcular las probabilidades de no obtener ninguna cara, de obtener solo una cara y de obtener dos caras.

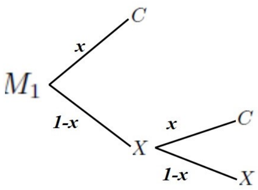
b) (7 puntos) Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara. Calcular las probabilidades de que el resultado final haya sido obtener ninguna cara, obtener solo una cara y obtener dos caras.

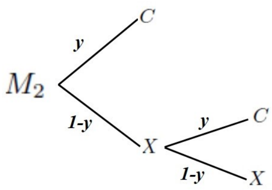
Solución:

Sean C cara y X cruz.

a) $P(M_1 = X \cap M_2 = X) = P(M_1 = X)P(M_1 = X) = (1 - x)(1 - y)$
$P(\text{una sola cara}) = P(M_1 = C \cap M_2 = X) + P(M_1 = X \cap M_2 = C) = x(1 - y) + (1 - x)y$
$P(M_1 = C \cap M_2 = C) = xy$

b) Tenemos:





$P(\text{ninguna cara}) = (1 - x)^2(1 - y)^2$
$P(\text{una sola cara}) = x(1 - y)^2 + x(1 - x)(1 - y)^2 + y(1 - x)^2 + y(1 - y)(1 - x)^2$
$P(\text{dos caras}) = xy + xy(1 - x) + xy(1 - y) + x(1 - x)y(1 - y)$

Problema 8.1.8 (10 puntos) Cada fin de semana llegan al aeropuerto de Alicante 161 vuelos. De estos 161 vuelos, 95 proceden del territorio nacional, 50 proceden de la Unión Europea y 16 proceden de países de fuera de la Unión Europea. Sabiendo que el 5 % de los vuelos con procedencia nacional, el 4 % de los vuelos con procedencia de la Unión Europea y el 6,25 % del resto de vuelos se retrasan:

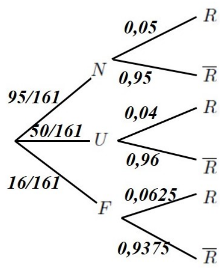
a) (5 puntos) Calcular la probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase.

b) (5 puntos) Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea.

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:

Sean N vuelo nacional, U Unión Europea, F fuera de la Unión Europea, R se retrasan y $\overline{R}$ no se retrasan.



a) $P(R) = P(R|N)P(N) + P(R|U)P(U) + P(R|F)P(F) =$
$0,05 \cdot \dfrac{95}{161} + 0,04 \cdot \dfrac{50}{161} + 0,0625 \cdot \dfrac{16}{161} = 0,048137$

b) $P(U|R) = \dfrac{P(R|U)P(U)}{P(R)} = \dfrac{0,04 \cdot \frac{50}{161}}{0,048137} = 0,258065$

8.2. Extraordinaria

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 8.2.1 (10 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real:

a) (6 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro real a.

b) (4 puntos) Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a+1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 & 2 \end{array}\right)$, $|A| = a^2 + 2a - 3 = 0 \Longrightarrow a = 1$ y $a = -3$.

- ☛ Si $a \neq 1$ o $a \neq -3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $a=-3$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 2\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ 2F_2-F_1\\ 2F_3-F_1\end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 1 & -1\\ 0 & -4 & 3 & 3\\ 0 & 4 & -3 & 5\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 1 & -1\\ 0 & -4 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 8\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

☛ Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 2\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ 2F_2-F_1\\ 2F_3-F_1\end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 5 & 5\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 3F_3-5F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

b) Si $a=1$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+2y+z=-1\\ z=1\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=-1-\lambda\\ y=\lambda\\ z=1\end{array}\right.\quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

Problema 8.2.2 (10 puntos) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, obtener:

a) (6 puntos) La matriz $M=(A-\alpha I)^2$, donde α es un parámetro real.

b) (4 puntos) El valor de α, si existe, para el cual la matriz M es la matriz nula.

Solución:

a) $$M=(A-\alpha I)^2=\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}-\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2\\ -1 & -\alpha & -2\\ 1 & 1 & 3-\alpha\end{pmatrix}^2=$$

$$\begin{pmatrix} \alpha^2-1 & 2\alpha-2 & 4(\alpha-1)\\ 2\alpha-2 & \alpha^2-1 & 4(\alpha-1)\\ 2-2\alpha & 2-2\alpha & \alpha^2-6\alpha+5\end{pmatrix}$$

b) $2\alpha-2=0\Longrightarrow \alpha=1\Longrightarrow M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Problema 8.2.3 (10 puntos) Dados los puntos $A=(2,-1,0)$, $B=(1,2,3)$ y $C=(-1,0,0)$:

a) (3 puntos) Hallar la ecuación implícita de la recta r que contiene a los puntos A y B.

b) (4 puntos) Hallar la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta anterior r y que contiene al punto C.

c) (3 puntos) Calcular la distancia del punto A al plano π.

Solución:

a) $r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{AB}=(-1,3,3)\\ P_r=B(1,2,3)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1-\lambda\\ y=2+3\lambda\\ z=3+3\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{3}\Longrightarrow$

$r:\left\{\begin{array}{l}3x+y-5=0\\ 3x+z-6=0\end{array}\right.$

b) $\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_r}=(-1,3,3)\Longrightarrow \pi:-x+3y+3z+\lambda=0\overset{C\in\pi}{\Longrightarrow}1+0+0+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=-1\Longrightarrow$

$$\pi:-x+3y+3z-1=0$$

c) $D(A,\pi)=\dfrac{|-2-3+0-1|}{\sqrt{1+9+9}}=\dfrac{6}{\sqrt{19}}\ u$

Problema 8.2.4 (10 puntos) Dada la recta $r:(x,y,z)=(1,1,0)+\lambda(-1,-1,2)$ y el plano $\pi:$ $5x+my+z=2$:

a) (6 puntos) Obtener la posición relativa de r y π en función de m.

b) (4 puntos) Para $m=1$, calcular el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

Solución:

a) $r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-1,-1,2)\\ P_r(1,1,0)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1-\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=2\lambda\end{array}\right.$

Sustituimos en $\pi\Longrightarrow 5(1-\lambda)+m(1-\lambda)+2\lambda=2\Longrightarrow(1-\lambda)(m+3)=0\Longrightarrow$ Si $m=-3\Longrightarrow r\subset\pi$ y si $m\neq-3\Longrightarrow r$ y π se cortan en un punto.

b) $\pi':\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_\pi}=(5,1,1)\\ \overrightarrow{u_r}=(-1,-1,2)\\ P_r(1,1,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi':\begin{vmatrix}x-1&y-1&z\\5&1&1\\-1&-1&2\end{vmatrix}=3x-11y-4z+8=0$

Problema 8.2.5 (10 puntos) Consideramos la función $f(x)=\dfrac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}$

a) (2 puntos) Comprobar que $x=-\dfrac{1}{2}$ es una discontinuidad evitable.

b) (4 puntos) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) (4 puntos) Obtener $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

Solución:

a) $\lim_{x\to -1/2} \dfrac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to -1/2} \dfrac{-4x+1}{4x+5} = \dfrac{3}{3} = 1$. Luego:

$$\lim_{x\to(-1/2)^-} \frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2} = \lim_{x\to(-1/2)^+} \frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2} = 1 \neq f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

La función es discontinua evitable en $x = -\dfrac{1}{2}$, habría un agujero. Para que la función fuese continua hay que imponer $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1$.

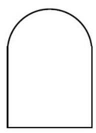
Otra forma de resolver el límite sería: $\lim_{x\to -1/2} \dfrac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -1/2} \dfrac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)(1-x)}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+2)} =$
$\lim_{x\to -1/2} \dfrac{1-x}{x+2} = \dfrac{3/2}{3/2} = 1$

b) $f'(x) = \dfrac{-3}{(x+2)^2} \neq 0 \Longrightarrow f$ no tiene extremos relativos. Además $f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ es decreciente en todo el dominio de la función: $(-\infty, -2) \cup \left(-2, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}, \infty\right)$

c) $\displaystyle\int \frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}\,dx = \int \frac{1-x}{x+2}\,dx = \int \left(-1 + \frac{3}{x+2}\right) dx = -x + 3\ln|x+2| + C.$

$$\begin{array}{l} (\,-x+1\,) : (x+2) = -1 + \dfrac{3}{x+2} \\ \quad\ \underline{\ \ x+2\ \ } \\ \qquad\quad 3 \end{array}$$

Problema 8.2.6 (10 puntos) Una ventana rectangular está coronada por un semicírculo tal y como se indica en la siguiente figura.



Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 20 metros calcular:

a) (3 puntos) El área de la ventana en función de su anchura x.

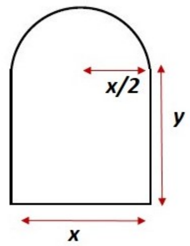
b) (5 puntos) Calcular las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz.

c) (2 puntos) El valor de dicha área máxima.

Solución:

a) $P(x,y)=x+2y+\dfrac{2\pi\frac{x}{2}}{2}=20\Longrightarrow y=\dfrac{40-(\pi+2)x}{4}$

$S(x,y)=xy+\dfrac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}\Longrightarrow S(x)=x\dfrac{40-(\pi+2)x}{4}+\dfrac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}=$
$\dfrac{80x-(\pi+4)x^2}{8}$



b) $S'(x)=10-\dfrac{(\pi+4)x}{4}=0\Longrightarrow x=\dfrac{40}{\pi+4}\simeq 5,601 \text{ m}\Longrightarrow y=\dfrac{20}{\pi+4}\simeq 2,8005 \text{ m}$
$S''(x)=-\dfrac{\pi+4}{4}\Longrightarrow S''\left(\dfrac{40}{\pi+4}\right)=-\dfrac{\pi+4}{4}<0\Longrightarrow x=\dfrac{40}{\pi+4}$ es un máximo.

c) El área máxima será: $S(x)=\dfrac{200}{\pi+4}\simeq 28,005 \text{ m}^2$

Problema 8.2.7 (10 puntos) Una urna tiene tres bolas verdes, cuatro rojas y cinco amarillas. Todas de igual tamaño.

a) (5 puntos) Se extrae una bola de la urna, se mira su color y se devuelve a la urna. Se repite de nuevo, una vez más, esta operación. ¿Cuál es la probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean el mismo? ¿Y la probabilidad de que sean distintos?

b) (5 puntos) Se extraen al mismo tiempo tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean de distinto color?

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.
Solución:
Sean V bola verde, R bola roja y A bola amarilla.

a) $P(\text{mismo color})=P(VV)+P(RR)+P(AA)=\dfrac{3}{12}\cdot\dfrac{3}{12}+\dfrac{4}{12}\cdot\dfrac{4}{12}+\dfrac{5}{12}\cdot\dfrac{5}{12}=\dfrac{25}{72}\simeq 0,3472$
$P(\text{distinto color})=1-P(\text{mismo color})=1-\dfrac{25}{72}=\dfrac{47}{72}\simeq 0,6528$

b) $P(\text{ tres de distinto color})=P(VRA)+P(RVA)+P(RAV)+P(VAR)+P(ARV)+P(AVR)=$
$\dfrac{3}{12}\cdot\dfrac{4}{11}\cdot\dfrac{5}{10}+\dfrac{4}{12}\cdot\dfrac{3}{11}\cdot\dfrac{5}{10}+\dfrac{3}{12}\cdot\dfrac{5}{11}\cdot\dfrac{4}{10}+\dfrac{3}{12}\cdot\dfrac{5}{11}\cdot\dfrac{4}{10}+\dfrac{5}{12}\cdot\dfrac{4}{11}\cdot\dfrac{3}{10}+\dfrac{5}{12}\cdot\dfrac{3}{11}\cdot\dfrac{4}{10}=$
$6\cdot\dfrac{3}{12}\cdot\dfrac{4}{11}\cdot\dfrac{5}{10}=\dfrac{3}{11}\simeq 0,2727$

Problema 8.2.8 (10 puntos) Una empresa tiene dos plantas de producción de teléfonos móviles. La primera planta produce móviles defectuosos con probabilidad 0,02 y la segunda planta con probabilidad 0,06. Al comprar un móvil de esa empresa, la probabilidad de que sea de la primera planta es de 0,7. Compramos un móvil. Se pide determinar:

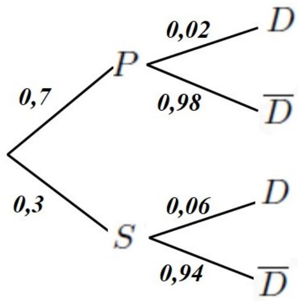
a) (4 puntos) La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso.

b) (6 puntos) Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción.

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:

Sean P primera planta, S segunda planta, D defectuoso y $\overline{D}$ no defectuoso.



a) $P(S \cap D) = P(D|S)P(S) = 0,06 \cdot 0,3 = 0,018$

b) $P(D) = P(D|P)P(P) + P(D|S)P(S) =$
$0,02 \cdot 0,7 + 0,06 \cdot 0,3 = 0,032$
$P(P|D) = \dfrac{P(D|P)P(P)}{P(D)} = \dfrac{0,02 \cdot 0,7}{0,032} = 0,4375$

Capítulo 9

Extremadura

9.1. Ordinaria

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de 10 preguntas, cuyo valor es de 2 puntos. El estudiante ha de elegir 5 preguntas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo se tendrán en cuenta las cinco primeras cuestiones/preguntas respondidas. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el sexto lugar. Se deben justificar todas las respuestas y soluciones.

Problema 9.1.1 (2 puntos) Encontrar la matriz X que verifica $(A-3I)X = 2I$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e I es la matriz identidad de orden 3.

Solución:

$$A-3I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A-3I| = 3 \Longrightarrow \exists (A-3I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-3I)X = 2I \Longrightarrow X = (A-3I)^{-1}2I = 2(A-3I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 9.1.2 (2 puntos) Determinar todos los números $x \in \mathbb{R}$ para los que el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

es mayor o igual que cero.
Solución:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^2+4x-3 \geq 0$. Tenemos $-x^2+4x-3=0 \Longrightarrow x=1$ y $x=3$

$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$-$	$+$	$-$

Luego $x \in [1,3]$

Problema 9.1.3 (2 puntos) Estudiar la posición relativa de los siguientes planos en función del parámetro b

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y-z=2 \\ x+(1+b)y-bz=2b \\ x+by+(1+b)z=1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1+b & -b & 2b \\ 1 & b & 1+b & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 2b^2-2b=0 \Longrightarrow b=1 \text{ y } b=0$$

- ☛ Si $b \in \mathbb{R}-\{0,1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$número de incógnitas$\Longrightarrow$ sistema compatible determinado, los tres planos se cortan en un punto.

- ☛ Si $b=0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-2F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

Los planos se cortan dos a dos $\dfrac{1}{1} \neq \dfrac{2}{1}$, $\dfrac{1}{1} \neq \dfrac{2}{0}$ y $\dfrac{1}{1} \neq \dfrac{1}{0}$ en forma de prisma triangular.

- ☛ Si $b=1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2=F_1 \\ F_3 \end{array}\right] \Longrightarrow$$ Sistema compatible indeterminado. Dos planos coinciden y el tercero les corta $\dfrac{1}{1} \neq \dfrac{2}{1}$

Problema 9.1.4 (2 puntos) Hallar un vector de módulo 5 que sea ortogonal a los vectores $\overrightarrow{u}=(1,2,0)$ y $\overrightarrow{v}=(-1,0,1)$

Solución:

$$\overrightarrow{t} \perp \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \Longrightarrow \overrightarrow{t} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2,-1,2) \Longrightarrow |\overrightarrow{t}| = \sqrt{4+1+4} = 3$$

$$\overrightarrow{w} = \frac{5\overrightarrow{t}}{|\overrightarrow{t}|} = \frac{5}{3}(2,-1,2) = \left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

También lo cumpliría el opuesto $-\overrightarrow{w}$

Problema 9.1.5 (2 puntos)

a) (1,5 puntos) Comprobar que hay alguna solución positiva y alguna negativa de la ecuación

$$x\cos 2x = x^2-1$$

b) (0,5 puntos) Aproximar la solución positiva encontrada con un error menor que una décima.

Solución:

a) Sea $f(x) = x^2 - x\cos 2x - 1$, función continua como composición de funciones continuas.

Tenemos $f(0) = -1 < 0$ y $f(2) = 3 - 2\cos 4 \simeq 1,0049 > 0 \xrightarrow{Bolzano} \exists c \in (0,2)$ tal que $f(c) = 0 \Longrightarrow$ existe una solución positiva.

Y tenemos $f(0) = -1 < 0$ y $f(-2) = 3 + 2\cos 4 \simeq 4,995 > 0 \xrightarrow{Bolzano} \exists c \in (-2,0)$ tal que $f(c) = 0 \Longrightarrow$ existe una solución negativa.

b) Tenemos $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 0,4161 \xrightarrow{Bolzano} \exists c \in (0;1)$ tal que $f(c) = 0$ con un error $\varepsilon = 1 - 0 = 1$

Tenemos $f(0,5) = -1,0201 < 0$ y $f(0,9) = 0,0145 \xrightarrow{Bolzano} \exists c \in (0,5;0,9)$ tal que $f(c) = 0$ con un error $\varepsilon = 0,9 - 0,5 = 0,4$

Tenemos $f(0,8) = -0,3366 < 0$ y $f(0,9) = 0,0145 \xrightarrow{Bolzano} \exists c \in (0,8;0,9)$ tal que $f(c) = 0$ con un error $\varepsilon = 0,9 - 0,8 = 0,1$

Tenemos $f(0,89) = -0,0231 < 0$ y $f(0,9) = 0,0145 \xrightarrow{Bolzano} \exists c \in (0,89;0,9)$ tal que $f(c) = 0$ con un error $\varepsilon = 0,9 - 0,89 = 0,01 \Longrightarrow c = 0,895$

Problema 9.1.6 (2 puntos) Calcular a, b y c para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ cx & \text{si} \quad 1 \le x \le 4 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0,4]$.

Solución:

- ☛ f continua en $[0,4]$. La ramas son continuas, hay que estudiar la continuidad en $x = 1$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x^2 + ax + b) = a + b + 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} cx = c \\ f(1) = c \end{cases} \Longrightarrow a + b + 1 = c \Longrightarrow a + b - c = -1.$

- ☛ f derivable en $(0,4)$. La ramas son derivables, hay que estudiar la derivabilidad en $x = 1$: $f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ c & \text{si} \quad 1 < x < 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 2 + a \\ f'(1^+) = c \end{cases} \Longrightarrow 2 + a = c \Longrightarrow a - c = -2.$

- ☛ $f(0) = f(4) \Longrightarrow b = 4c \Longrightarrow b - 4c = 0$

- ☛ $\begin{cases} a + b - c = -1 \\ a - c = -2 \\ b - 4c = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{7}{4} \\ b = 1 \\ c = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

Problema 9.1.7 (2 puntos) Calcula la integral $\displaystyle\int \frac{17 - x}{x^2 + x - 6}\,dx$

Solución:

$$\int \frac{17 - x}{x^2 + x - 6}\,dx = \left[\begin{array}{c} x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2) \\ \dfrac{17 - x}{x^2 + x - 6} = \dfrac{A}{x+3} + \dfrac{B}{x-2} = \dfrac{A(x-2) + B(x+3)}{(x+3)(x-2)} \\ x = 2 \Longrightarrow 15 = 5B \Longrightarrow B = 3 \\ x = -3 \Longrightarrow 20 = -5A \Longrightarrow A = -4 \\ \dfrac{17 - x}{x^2 + x - 6} = \dfrac{-4}{x+3} + \dfrac{3}{x-2} \end{array} \right] =$$

$$\int \left(\frac{-4}{x+3} + \frac{3}{x-2} \right) dx = -4\ln|x+3| + 3\ln|x-2| + C$$

Problema 9.1.8 (2 puntos) Hallar el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas.

Solución:
$f(x) = x^3 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pm 2$. Hay dos áreas: $S_1 : [-2, 0]$ y $S_2 : [0, 2]$

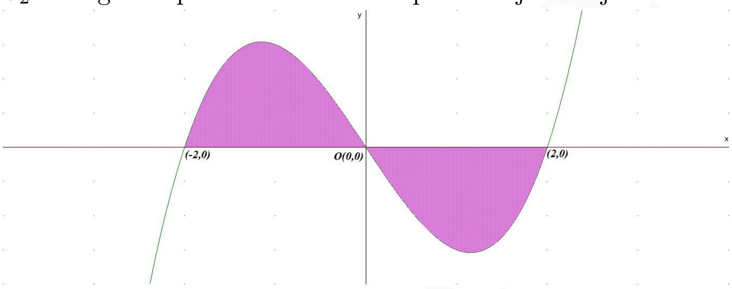
$$F(x) = \int (x^3 - 4x)\, dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + C$$

$$S_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\, dx = F(0) - F(-2) = 0 + 4 = 4$$

$$S_2 = \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\, dx = F(2) - F(0) = -4$$

$S = |S_1| + |S_2| = 4 + 4 = 8\ u^2$

S_2 es negativa por estar la función por debajo del eje de abscisas en el intervalo $[0, 2]$



Problema 9.1.9 (2 puntos) Al 80 % de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40 % les gusta el balonmano y al 30 % les gustan ambos deportes. Si se elige un alumno al azar,

a) (0,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)?

b) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste solo el fútbol?

c) (0,75 puntos) Si sabemos que no le gusta el fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el balonmano?

Solución:
Sean F le gusta el futbol y B le gusta balonmano.
$P(F) = 0,8$, $P(B) = 0,4$ y $P(F \cap B) = 0,3$

a) $P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B) = 0,8 + 0,4 - 0,3 = 0,9$

b) $P(F \cap \overline{B}) = P(F) - P(F \cap B) = 0,8 - 0,3 = 0,5$

c) $P(B|\overline{F}) = \dfrac{P(B \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{P(B) - P(F \cap B)}{1 - P(F)} = \dfrac{0,4 - 0,3}{1 - 0,8} = 0,5$

Problema 9.1.10 (2 puntos) Durante el día de hoy una persona va a escribir 15 mensajes en Facebook. Cada mensaje que escribe tiene errores ortográficos con una probabilidad de 0,3. Calcular:

a) (0,75 puntos) La probabilidad de que escriba exactamente 5 mensajes con errores ortográficos.

b) (0,75 puntos) La probabilidad de que escriba 4 ó más mensajes con errores.

c) (0,5 puntos) La media y la desviación típica de la distribución.

Solución:

$$B(15; 0,3)$$

a) $P(X=5)=\binom{15}{5}0,3^5\cdot 0,7^{10}=0,206131$

b) $P(X\geq 4)=1-P(X<4)=1-[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)]=1-\left[\binom{15}{0}0,3^0\cdot 0,7^{15}+\binom{15}{1}0,3^1\cdot 0,7^{14}+\binom{15}{2}0,3^2\cdot 0,7^{13}+\binom{15}{3}0,3^3\cdot 0,7^{12}\right]=0,703132$

c) $\mu=np=15\cdot 0,3=4,5$ y $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{15\cdot 0,3\cdot 0,7}=1,774824$

9.2. Extraordinaria

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de 10 preguntas, cuyo valor es de 2 puntos. El estudiante ha de elegir 5 preguntas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo se tendrán en cuenta las cinco primeras cuestiones/preguntas respondidas. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el sexto lugar. Se deben justificar todas las respuestas y soluciones.

Problema 9.2.1 (2 puntos) Estudiar el rango de la matriz $A-\lambda I$ según los valores de $\lambda\in\mathbb{R}$, donde $A=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&1\\-1&0&3\end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden 3.

Solución:

$$B=A-\lambda I=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&1\\-1&0&3\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda&0&2\\1&-\lambda&1\\-1&0&3-\lambda\end{pmatrix}$$

$|B|=-\lambda(\lambda^2-3\lambda+2)=0\Longrightarrow\lambda=0$, $\lambda=1$ y $\lambda=2$.

- Si $\lambda\in\mathbb{R}-\{0,1,2\}\Longrightarrow |B|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A-\lambda I)=3$.

- Si $\lambda=0\Longrightarrow B=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&1\\-1&0&3\end{pmatrix}\Longrightarrow |B|=0$ y $\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}=-2\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A-0\cdot I)=2$.

- Si $\lambda=1\Longrightarrow B=\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&-1&1\\-1&0&2\end{pmatrix}\Longrightarrow |B|=0$ y $\begin{vmatrix}-1&0\\1&-1\end{vmatrix}=1\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A-I)=2$.

- Si $\lambda=2\Longrightarrow B=\begin{pmatrix}-2&0&2\\1&-2&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\Longrightarrow |B|=0$ y $\begin{vmatrix}-2&0\\1&-2\end{vmatrix}=4\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A-2I)=2$.

Problema 9.2.2 (2 puntos) Discutir el sistema para los distintos valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ (1,5 puntos)

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=2a-1\\ 2x+y+az=a\\ x+ay+z=1\end{array}\right.$$

(0,5 puntos) Resolver el sistema en el caso $a=1$.

Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a-1\\ 2 & 1 & a & a\\ 1 & a & 1 & 1\end{array}\right),\ |A|=-a^2+3a-2=0\Longrightarrow a=1 \text{ y } a=2.$$

- Si $a\neq 1$ y $a\neq 2\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$ Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $a=1$:
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3=F_1\end{array}\right]\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$$

- Si $a=2$:
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-2F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 0 & -2\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2\end{array}\right]=$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 0 & -6\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

Si $a=1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1\\ 2x+y+z=1\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=t\\ z=1-t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}$$

Problema 9.2.3 (2 puntos) Sean los vectores $\overrightarrow{u}=(0,0,2)$, $\overrightarrow{v}=(1,1,0)$, $\overrightarrow{w}=(2,-1,1)$

a) (0,5 puntos) ¿Son, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ linealmente independientes?

b) (0,75 puntos) Calcular el área del triángulo formado por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

c) (0,75 puntos) Calcular un vector de módulo uno perpendicular a los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$.

Solución:

a) $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=\left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{array}\right|=-6\neq 0\Longrightarrow \overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente independientes.

b) $S_t=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|=\dfrac{1}{2}|\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{array}\right||=\dfrac{1}{2}|(-2,2,0)|=\sqrt{2}\ u^2$

c) Sea $\overrightarrow{t} \perp \overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w} \Longrightarrow \overrightarrow{t} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -3) \Longrightarrow |\overrightarrow{t}| = \sqrt{11}$

El vector buscado es $\overrightarrow{s} = \dfrac{1 \cdot \overrightarrow{t}}{|\overrightarrow{t}|} = \dfrac{(1, -1, -3)}{\sqrt{11}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{11}}, -\dfrac{1}{\sqrt{11}}, -\dfrac{3}{\sqrt{11}}\right)$

También valdría su opuesto $-\overrightarrow{s} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{11}}, \dfrac{1}{\sqrt{11}}, \dfrac{3}{\sqrt{11}}\right)$

Problema 9.2.4 (2 puntos) Dados los puntos $A = (0, 0, 2)$ y $B = (1, 1, 0)$ y la recta $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$.

a) (1,25 puntos) Hallar el plano que contiene a r y es paralelo al vector $\overrightarrow{AB}$.

b) (0,75 puntos) Hallar la distancia del punto A a la recta r.

Solución:

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (0, 1, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases}$$

a) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 1, -2) \\ \overrightarrow{u_r} = (0, 1, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3x - y + z - 3 = 0$

b) $\overrightarrow{P_rA} = (-1, 0, 2)$ y $|\overrightarrow{P_rA} \times \overrightarrow{u_r}| = \left| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = |(-2, 1, -1)| = \sqrt{6}$

$$d(A, r) = \frac{|\overrightarrow{P_rA} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}\ u$$

Problema 9.2.5 (2 puntos) Calcular los coeficientes a, b, c y d del polinomio $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, sabiendo que cumple todas las condiciones siguientes:

- ☛ $p(x)$ tiene un máximo relativo en $x = -1$, y
- ☛ la gráfica de $p(x)$ tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$, y
- ☛ la recta tangente a la gráfica de $p(x)$ en $x = 2$ tiene pendiente 3.

Solución:

$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \Longrightarrow p'(x) = b + 2cx + 3dx^2 \Longrightarrow p''(x) = 2c + 6dx$

$$\begin{cases} p'(-1) = 0 \Longrightarrow b - 2c + 3d = 0 \\ p(0) = 0 \Longrightarrow a = 0 \\ p''(0) = 0 \Longrightarrow 2c = 0 \\ p'(2) = 3 \Longrightarrow b + 4c + 12d = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 0 \\ d = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Longrightarrow p(x) = -x + \frac{1}{3}x^3$$

$p'(x) = -1 + x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$
$p''(x) = 2x \Longrightarrow p''(-1) = -2 < 0 \Longrightarrow x = -1$ es un máximo.
$p'''(x) = 2 \Longrightarrow p'''(0) = 2 \neq 0 \Longrightarrow x = 0$ es un punto de inflexión.

Problema 9.2.6 (2 puntos) Encontrar los valores de a y b para que la función
$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b & \text{si} \quad x \le 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ sea continua en $x = 1$ y su gráfica pase por el punto $(-1, 5)$

Solución:

- ☛ Tenemos $f(-1) = 5 \Longrightarrow 2 - a + b = 5 \Longrightarrow a - b = -3$

- ☛ f continua en $x = 1$: $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(2x^2 + ax + b) = 2 + a + b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0 \\ f(1) = 2 + a + b \end{array}\right. \Longrightarrow 2 + a + b = 0 \Longrightarrow$

  $a + b = -2$

- ☛ $\left\{\begin{array}{l} a - b = -3 \\ a + b = -2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -\dfrac{5}{2} \\ b = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Problema 9.2.7 (2 puntos) Determinar la primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = (x + 1)e^{x+1}$ que cumple $F(0) = -1$.

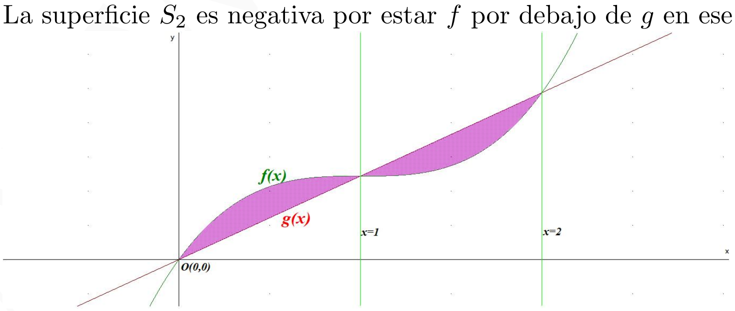
Solución:

$F(x) = \displaystyle\int (x + 1)e^{x+1}\,dx \left[\begin{array}{c} u = x + 1 \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{x+1}\,dx \Longrightarrow v = e^{x+1} \end{array}\right] = (x + 1)e^{x+1} - \int e^{x+1}\,dx =$
$(x + 1)e^{x+1} - e^{x+1} + C = xe^{x+1} + C$
$F(0) = 0 + C = -1 \Longrightarrow C = -1 \Longrightarrow F(x) = xe^{x+1} - 1$

Problema 9.2.8 (2 puntos) Calcular el área de la región encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ y $g(x) = x$.
Solución:
$f(x) = g(x) \Longrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x = x \Longrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$ luego tenemos dos recintos: $S_1 : [0, 1]$ y $S_2 : [1, 2]$

$$S_1 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$
$$S_2 = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_1^2 = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$
$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0,5\ u^2$$

La superficie S_2 es negativa por estar f por debajo de g en ese intervalo.



Problema 9.2.9 (2 puntos) Un club de montaña organiza dos tipos de actividades para sus afiliados. El 70 % de ellos se apuntan a escalada, el 60 % a barranquismo y el 45 % de ellos practica las dos. Si se elige al azar un afiliado,

a) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que practique sólo una de las dos actividades.

b) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que no practique ninguna.

c) (0,75 puntos) Sabiendo que hace barranquismo, calcular la probabilidad de que no haga escalada.

Solución:
Sean E escalada y B barranquismo.
$P(E) = 0,7$, $P(B) = 0,6$ y $P(E \cap B) = 0,45$

a) $P(E\cap\overline{B})+P(\overline{E}\cap B) = P(E)-P(E\cap B)+P(B)-P(E\cap B) = 0,7-0,45+0,6-0,45 = 0,4$

b) $P(\overline{E}\cap\overline{B}) = P(\overline{E\cup B}) = 1-P(E\cup B) = 1-(P(E)+P(B)-P(E\cap B)) = 1-(0,7+0,6-0,45) = 0,15$

c) $P(\overline{E}|B) = \dfrac{P(\overline{E}\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)-P(E\cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,6-0,45}{0,6} = 0,25$

Problema 9.2.10 (2 puntos) Los relojes de cierta marca tienen una vida útil que se ajusta a una distribución normal de media 10 años y desviación típica de 2 años. Si compramos un reloj de esta marca:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que dure entre 9 y 12 años.

b) (1 punto) ¿Cuánto tiempo tendrá que durar el reloj si queremos que el 90 % de los relojes de esa marca duren menos que el nuestro?

Solución:

$$N(10; 2)$$

a) $P(9 \le X \le 12) = P\left(\dfrac{9-10}{2} \le Z \le \dfrac{12-10}{2}\right) =$
$P(-0,5 \le Z \le 1) = P(Z \le 1) - P(Z \le -0,5) = P(Z \le 1) - (1 - P(Z \le 0,5)) =$
$0,8413 - (1 - 0,6915) = 0,5328$

b) $P(X \le a) = P\left(Z \le \dfrac{a-10}{2}\right) = 0,9 \Longrightarrow \dfrac{a-10}{2} = 1,28 \Longrightarrow a = 12,56$ años.

Capítulo 10

Galicia

10.1. Ordinaria

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un MÁXIMO DE 5, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, solo serán corregidas las 5 primeras respondidas.

Números y Álgebra:

Problema 10.1.1 (2 puntos) Despeje la matriz X de la ecuación $XA = A + XB$, si A y B son matrices cuadradas tales que $A - B$ es invertible. Luego, calcule X si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = (A^2 - A - I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Solución:
$XA = A + XB \Longrightarrow XA - XB = A \Longrightarrow X(A - B) = A \Longrightarrow X = A(A - B)^{-1}$

$B = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} =$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$(A - B)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$X = A(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Problema 10.1.2 (2 puntos) Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} mx + (2 + m^2)y = 1 + m \\ my - z = 1 \\ mx + 2y + (2m - 4)z = 5 \end{array}\right.$$

Solución:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 + m^2 & 0 & 1 + m \\ 0 & m & -1 & 1 \\ m & 2 & 2m - 4 & 5 \end{array}\right)$, $|A| = m^2(m - 4) = 0 \Longrightarrow m = 0$ y $m = 4$.

- Si $m \in \mathbb{R} - \{0, 4\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = $ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $m = 4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 18 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 18 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -16 & 4 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 4F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 18 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

- Si $m = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 4F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2y = 1 \\ -z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = -1 \end{array}\right. \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Análisis

Problema 10.1.3 (2 puntos)

a) Si $f(x) = ae^x + b$, diga qué valores deben tener a y b para que se cumplan $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 3$.

b) Estudie si la función $f(x) = x + \sin x$ tiene extremos o puntos de inflexión en el intervalo $(0, 2\pi)$, diga dónde están en caso de que existan y esboce la gráfica de f en ese intervalo.

Solución:

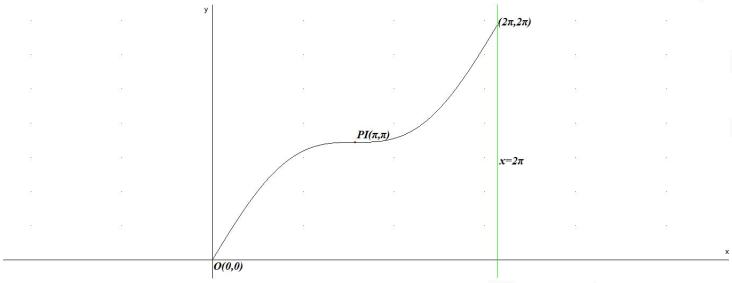
a)
- $f(0) = a + b = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ae^x + b}{x} \overset{a=-b}{=} \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ae^x}{1} = a = 3 \Longrightarrow b = -3$
- Se cumple $a + b = 3 - 3 = 0 \Longrightarrow a = 3$ y $b = -3$.

b) $f'(x) = 1 + \cos x = 0 \Longrightarrow \cos x = -1 \Longrightarrow x = \pi$
$f''(x) = -\sin x \Longrightarrow f''(\pi) = -\sin \pi = 0 \Longrightarrow x = \pi$ no es un extremo relativo, es un posible punto de inflexión.
$f'''(x) = -\cos x \Longrightarrow f'''(\pi) = 1 \neq 0 \Longrightarrow x = \pi$ es un punto de inflexión.

	$(0, \pi)$	$(\pi, 2\pi)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

Tenemos los puntos $O(0,0)$, $(2\pi, 2\pi)$ y el punto de inflexión (π, π)

Gráfica:

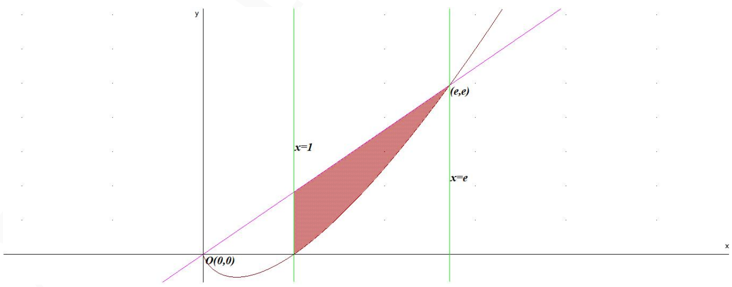


Problema 10.1.4 (2 puntos) Calcule el área de la región determinada por las desigualdades $x \geq 1$, $y \leq x$ e $y \geq f(x)$, con $f(x) = x \ln x$. Haga un esbozo gráfico de la región. **Nota**: $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x.

Solución:
Calculamos los puntos de corte de $f(x)$ con $y = x \Longrightarrow x \ln x = x \Longrightarrow x(1 - \ln x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = e$. Como $x \geq 1 \Longrightarrow$ el recinto de integración es $S : [1, e]$

$$F(x) = \int x(1 - \ln x)\, dx = \left[\begin{array}{c} u = 1 - \ln x \Longrightarrow du = -\dfrac{1}{x} dx \\ dv = xdx \Longrightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{x^2(1 - \ln x)}{2} + \frac{1}{2} \int x\, dx =$$
$$\frac{x^2(1 - \ln x)}{2} + \frac{x^2}{4}$$

$$S = \int_1^e x(1 - \ln x)\, dx = F(e) - F(1) = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{e^2 - 3}{4} \simeq 1{,}0973\ u^2$$



Geometría:

Problema 10.1.5 (2 puntos)

a) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(2, -1, 0)$ y $Q(3, 0, 0)$ y la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $R(0, 4, -2)$ y es paralelo a los vectores $\overrightarrow{u} = (1, 0, -1)$ y $\overrightarrow{v} = (2, 1, -2)$

b) Calcule el ángulo agudo que forma la recta $r : \dfrac{x - 2}{1} = \dfrac{y + 1}{1} = \dfrac{z}{0}$ con el plano $\pi : x+z+2 = 0$.

Solución:

a) $r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{PQ}=(1,1,0)\\ P_r=Q(3,0,0)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=3+\lambda\\ y=\lambda\\ z=0\end{cases}\quad\lambda\in\mathbb{R}$

$\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\1&0&-1\\2&1&-2\end{vmatrix}=(1,0,1)\Longrightarrow\pi:x+z+\lambda=0\overset{R\in\pi}{\Longrightarrow}0+0-2+\lambda=0\Longrightarrow$

$\lambda=2\Longrightarrow\pi:x+z+2=0$

b) $r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(1,1,0)\\ P_r(2,-1,0)\end{cases}$ y $\overrightarrow{u_\pi}=(1,0,1)$

$\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_\pi}|}{|\overrightarrow{u_r}|\cdot|\overrightarrow{u_\pi}|}=\dfrac{|1+0+0|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\Longrightarrow\alpha=30^\circ$

Problema 10.1.6 (2 puntos)

a) Calcule el punto simétrico de $P(2,-1,0)$ con respecto al plano $\pi:x+z+2=0$.

b) Estudie la posición relativa de las rectas $r:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{0}$ y $s:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

Solución:

a) Seguimos el siguiente procedimiento:

☛ Calculamos la recta $t\perp\pi$ tal que $P\in t$:

$$t:\begin{cases}\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_\pi}=(1,0,1)\\ P_t=P(2,-1,0)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=-1\\ z=\lambda\end{cases}\quad\lambda\in\mathbb{R}$$

☛ Calculamos el punto P' de corte de t con π

$$(2+\lambda)+0+\lambda+2=0\Longrightarrow\lambda=-2\Longrightarrow P'(0,-1,-2)$$

☛ El punto P' calculado es el punto medio entre P y el punto simétrico buscado P''

$$\frac{P+P''}{2}=P'\Longrightarrow P''=2P'-P=(0,-2,-4)-(2,-1,0)=(-2,-1,-4)$$

b) $r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(1,1,0)\\ P_r(2,-1,0)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=-1+\lambda\\ z=0\end{cases}\quad\lambda\in\mathbb{R}$

$s:\begin{cases}\overrightarrow{u_s}=(2,1,-1)\\ P_s(2,-2,-1)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=2+2\mu\\ y=-2+\mu\\ z=-1-\mu\end{cases}\quad\mu\in\mathbb{R}$

$\overrightarrow{P_rP_s}=(2,-2,-1)-(2,-1,0)=(0,-1,-1)$

$\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\begin{vmatrix}0&-1&-1\\1&1&0\\2&1&-1\end{vmatrix}=0$ y Rango$\begin{pmatrix}\overrightarrow{u_r}\\ \overrightarrow{u_s}\end{pmatrix}$=Rango$\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&-1\end{pmatrix}=2\Longrightarrow$

r y s se cortan.

$$\begin{cases}x=2+\lambda=2+2\mu\\ y=-1+\lambda=-2+\mu\\ z=0=-1-\mu\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\lambda=-2\\ \mu=-1\end{cases}\Longrightarrow P(0,-3,0)$$

Probabilidad y estadística

Problema 10.1.7 (2 puntos)

a) Calcule las cuatro probabilidades $P(A)$, $P(A\cap\overline{B})$, $P(A|B)$ y $P(B|A)$ sabiendo que $P(A\cup B) = 0,8$, $P(A\cap B) = 0,2$ y $P(A) = 2P(B)$. **Nota:** $\overline{B}$ es el suceso contrario o complementario de B.

b) En un conocido congreso, el 60 % de los científicos inscritos participan online y el resto asisten en persona. Además, el 65 % de los inscritos son europeos y el 80 % de los que asisten en persona también lo son. Si se elige al azar a uno de los inscritos, calcule la probabilidad de que sea europeo y, a la vez, participe online; luego, la de que participe online si se sabe que es europeo.

Solución:

a)

- ☛ $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \overset{P(A)=2P(B)}{=} 3P(B) - P(A\cap B) \Longrightarrow$
  $3P(B) = P(A\cup B) + P(A\cap B) = 0,8 + 0,2 = 1 \Longrightarrow P(B) = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow P(A) = \dfrac{2}{3}$
- ☛ $P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B) = \dfrac{2}{3} - 0,2 = \dfrac{7}{15}$
- ☛ $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,2}{1/3} = \dfrac{3}{5} = 0,6$
- ☛ $P(B|A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,2}{2/3} = \dfrac{3}{10} = 0,3$

b) Sean O on line, P presencial, E europeo y $\overline{E}$ no europeo.

Tenemos $P(O) = 0,6$, $P(P) = 0,4$, $P(E) = 0,65$ y $P(E|P) = 0,8 \Longrightarrow 0,8 = \dfrac{P(E\cap P)}{P(P)} = \dfrac{P(E\cap P)}{0,4} \Longrightarrow P(E\cap P) = 0,32$

	E	$\overline{E}$	total
O			$0,6$
P	$0,32$		$0,4$
	$0,65$		1

$\Longrightarrow$

	E	$\overline{E}$	total
O	$0,33$	$0,27$	$0,6$
P	$0,32$	$0,08$	$0,4$
	$0,65$	$0,35$	1

- ☛ $P(E\cap O) = 0,33$
- ☛ $P(O|E) = \dfrac{P(O\cap E)}{P(E)} = \dfrac{0,33}{0,65} = 0,5077$

Problema 10.1.8 (2 puntos)

a) En un cierto humedal, la probabilidad de que un renacuajo llegue a rana adulta es del 2 %. Si se escogen al azar 2500 de esos renacuajos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 55 de ellos lleguen a ranas adultas?

b) Para conceder becas de estudio, un organismo valora los méritos presentados y asigna a cada candidato una puntuación que indica más méritos cuanto mayor es su valor. Este año, la puntuación sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20, y se toma la decisión de conceder la beca al 5 % mejor del conjunto de solicitantes. ¿Qué puntuación es preciso alcanzar para obtener la beca?

Solución:

a) $B(2500;0,02)$, como $n > 10$, $np = 50 > 5$ y $nq = 2450 > 5 \Longrightarrow$
$B(2500;0,02) \overset{N(np,\sqrt{npq})}{\approx} N(50;7)$
$P(X \geq 55) = P\left(Z \geq \dfrac{54,5-50}{7}\right) = P(Z \geq 0,64) = 1-P(Z \leq 0,64) = 1-0,7389 = 0,2611$

b) $N(100;20)$, $P(X \geq a) = 0,05 \Longrightarrow P\left(Z \geq \dfrac{a-100}{20}\right) = 1 - P\left(Z \leq \dfrac{a-100}{20}\right) = 0,05 \Longrightarrow$
$P\left(Z \leq \dfrac{a-100}{20}\right) = 0,95 \Longrightarrow \dfrac{a-100}{20} = 1,645 \Longrightarrow a = 132,9.$
El candidato tiene que superar los 132,9 puntos.

10.2. Extraordinaria

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un MÁXIMO DE 5, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, solo serán corregidas las 5 primeras respondidas.

Números y Álgebra:

Problema 10.2.1 (2 puntos)

a) Calcule A si $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de x, y y z sabiendo que $det(A-3I) = 0$ que $y \neq 0$ y que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Entiéndase que I es la matriz identidad.

Solución:

a) $((AB)^T)^T = AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, como $|B| = 2 \Longrightarrow \exists B^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

b) Tenemos $A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z-3 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A-3I| = -xy = 0 \overset{y\neq 0}{\Longrightarrow} x = 0$
Tenemos $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow (3z)A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
Multiplicando por A:
$3zI = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3z & 0 \\ 0 & 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3y-3 & 3z \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 3z = 3 \Longrightarrow z = 1 \\ 3y - 3 = 0 \Longrightarrow y = 1 \end{cases}$
En conclusión $x = 0$, $y = 1$ y $z = 1$.

Problema 10.2.2 Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema:

$$\begin{cases} (m+1)x + z = 1 \\ (m+1)x + y + z = m+1 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m \end{cases}$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m+1 & 0 & 1 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 & m+1 \\ m+1 & m & m-1 & m \end{array}\right), \ |A| = m^2 - m - 2 = 0 \Longrightarrow m = -1 \text{ y } m = 2.$$

- Si $m \in \mathbb{R} - \{-1, 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $m = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{array}\right.$$

- Si $m = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

Análisis

Problema 10.2.3 (2 puntos)

a) Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial.

b) Explique si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor c para el cual se cumpla la tesis de ese teorema.

Solución:

a)
- **Teorema de Rolle:** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en el (a,b) cumpliendo $f(a) = f(b)$. Entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.
- **Teorema del Valor Medio:** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en el (a,b). Entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

b) f es continua en el intervalo $[0,1]$ y derivable en el $(0,1)$, luego cumple las condiciones del teorema de valor medio. Por tanto, $\exists c \in (0,1)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{0 - 1}{1 - 0} = -1$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} \Longrightarrow f'(c) = \frac{-c}{\sqrt{1 - c^2}} = -1 \Longrightarrow c = \sqrt{1 - c^2} \Longrightarrow$$

$$c^2 = 1 - c^2 \Longrightarrow c = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

La solución negativa no es válida (no pertenece al intervalo) $c = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Problema 10.2.4 (2 puntos)

a) Calcule mediante cambio de variable las integrales $\displaystyle\int (\sin x)^5 \cos x\, dx$ y $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\, dx$.

b) Calcule $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\, dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de B tal que $\displaystyle\int_e^B \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{3}{2}$

Solución:

a) ☛ $\displaystyle\int (\sin x)^5 \cos x\, dx = \left[\begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \\ dx = \dfrac{dt}{\cos x} \end{array}\right] = \int t^5 \cos x \frac{dt}{\cos x} = \int t^5\, dt =$

$\displaystyle\frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^6 x}{6} + C$

☛ $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \left[\begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \dfrac{dx}{x} \\ dx = x dt \end{array}\right] = \int \frac{t}{x} \cdot x dt = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$

b) $\displaystyle I(x) = \int \frac{\ln x}{x}\, dx = \left[\begin{array}{c} u = \ln x \Longrightarrow du = \dfrac{1}{x} dx \\ dv = \dfrac{1}{x}\, dx \Longrightarrow v = \ln x \end{array}\right] = (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x}\, dx = (\ln x)^2 - I(x) \Longrightarrow$

$\displaystyle 2I(x) = (\ln x)^2 \Longrightarrow I(x) = \int \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$

$\displaystyle\int_e^B \frac{\ln x}{x}\, dx = I(B) - I(e) = \frac{(\ln B)^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Longrightarrow (\ln B)^2 - 1 = 3 \Longrightarrow (\ln B)^2 = 4 \Longrightarrow$
$\ln B = \pm 2 \Longrightarrow B = e^2$
Como $B \geq e$ la solución $B = e^{-2}$ no es válida.

Geometría:

Problema 10.2.5 (2 puntos)

a) Considérense el plano $\pi : ax + y + z = 1$, donde a es un parámetro real, y la recta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{3}$ Estudie la posición relativa de π y r en función de a y obtenga el valor de a que hace que π y r sean perpendiculares. Por último, razone si r puede estar contenida en π o no.

b) Si $\pi : -3x + y + z = 1$, diga qué valor tiene que tomar b para que $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-b}{3} = \dfrac{z+1}{3}$ esté contenida en π.

Solución:

a) $r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,3,3) \\ P_r(1,0,-1) \end{array}\right. \Longrightarrow r : \left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{array}\right. \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Sustituyendo r en $\pi \Longrightarrow a(1 + 2\lambda) + 3\lambda + (-1 + +3\lambda) = 1 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{2-a}{2(a+3)}$

Si $a=-3 \Longrightarrow r \parallel \pi$, si $a \neq -3 \Longrightarrow r$ y π son secantes. La recta r no puede estar contenida en π

$r \perp \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} = k\overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow (2,3,3) = k(a,1,1) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 = ka \\ 3 = k \end{array} \right. \Longrightarrow a = \dfrac{2}{3}$

b) $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,3,3) \\ P_r(1,b,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1+2\lambda \\ y = b+3\lambda \\ z = -1+3\lambda \end{array} \right. \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Sustituyendo r en $\pi \Longrightarrow -3(1+2\lambda)+(b+3\lambda)+(-1+3\lambda) = 1 \Longrightarrow -4+b = 1$

Si $b = 5 \Longrightarrow 1 = 1 \Longrightarrow r \subset \pi$

Problema 10.2.6 (2 puntos) Considérese el plano $\pi : 2x-y+z = 1$. Se pide:

a) Calcular la distancia de π al punto de corte de las rectas $r_1 : \left\{ \begin{array}{l} x = 2+\lambda \\ y = 0 \\ z = -1-\lambda \end{array} \right.$ y

$r_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = \mu \\ y = -1+\mu \\ z = 0 \end{array} \right. \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

b) Obtener el punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π.

Solución:

a) $\left\{ \begin{array}{l} x = 2+\lambda = \mu \\ y = 0 = -1+\mu \\ z = -1-\lambda = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow P(1,0,0)$

$d(P,\pi) = \dfrac{|2-0+0-1|}{\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}\ u$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

☛ Calculamos la recta $t \perp \pi$ tal que $P \in t$:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (2,-1,1) \\ P_t = P(1,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1+2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

☛ Calculamos el punto P' de corte de t con π

$$2(1+2\lambda)+\lambda+\lambda-1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{6} \Longrightarrow P'\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$$

☛ El punto P' calculado es el punto medio entre P y el punto simétrico buscado P''

$$\frac{P+P''}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P'-P = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) - (1,0,0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Probabilidad y estadística

Problema 10.2.7 (2 puntos)

a) Calcule $P(A|B)$ si $B \subset A$. Luego, si $P(C) = 0,5$ y $P(D) = 0,6$, explique si C y D pueden ser incompatibles. Por último, obtenga $P(E \cup F)$ y $P(E \cap \overline{F})$ si E y F son independientes, $P(E) = 0,3$ y $P(F) = 0,2$.

b) Se tira un dado siete veces. Calcule la probabilidad de que salgan exactamente dos seises.

Solución:

a) ☛ $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \overset{B\subseteq A}{=} \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$

☛ Suponemos C y D incompatibles, entonces $P(C\cap D) = 0$.
$P(C\cup D) = P(C) + P(D) - P(C\cap D) = 0,5 + 0,6 - 0 = 1,1$ lo cual es absurdo, por tanto, $P(C\cap D) \geq 0,1 \Longrightarrow C$ y D no son incompatibles.

☛ Si E y F son independientes tenemos $P(E\cap F) = P(E)\cdot P(F) = 0,3\cdot 0,2 = 0,06$.

- $P(E\cup F) = P(E) + P(F) - P(E\cap F) = 0,3 + 0,2 - 0,06 = 0,44$
- $P(E\cap \overline{F}) = P(E) - P(E\cap F) = 0,3 - 0,06 = 0,24$

b) La probabilidad de que salga un seis es $p = \dfrac{1}{6}$, si lanzamos el dado siete veces tenemos una distribución binomial $B\left(7, \dfrac{1}{6}\right)$.
$P(X = 2) = \dbinom{7}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^5 = 0,23443$

Problema 10.2.8 (2 puntos) Para un determinado grupo de pacientes, la tensión arterial sistólica (medida en mmHg) sigue una distribución normal de media 123,6 y desviación típica 17,8. Calcule la probabilidad de que un paciente elegido al azar tenga una tensión comprendida entre 100 y 120 mmHg. Luego, obtenga el valor de la tensión que es superado por el 67 % de los pacientes.

Solución:

$$N(123,6; 17,8)$$

☛ $P(100 \leq X \leq 120) = P\left(\dfrac{100-123,6}{17,8} \leq Z \leq \dfrac{120-123,6}{17,8}\right) = P(-1,33 \leq Z \leq -0,2) = P(0,2 \leq Z \leq 1,33) = P(Z \leq 1,33) - P(Z\leq 0,2) = 0,9082 - 0,5793 = 0,3289$

☛ Tenemos $P(X \geq a) = 0,67$
$P(X \geq a) = P\left(Z \geq \dfrac{a-123,6}{17,8}\right) = P\left(Z \leq -\dfrac{a-123,6}{17,8}\right) = 0,67 \Longrightarrow$
$-\dfrac{a-123,6}{17,8} = 0,44 \Longrightarrow a = 115,768$ mmHg.

Capítulo 11

Islas Baleares

11.1. Ordinaria

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos entre 4.
Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

Problema 11.1.1 (10 puntos) Considera la matriz M y el vector b,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ a+1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Respectivamente.

a) (3 puntos) Indica para qué valores de a la matriz M es invertible.

b) (3 puntos) Calcula, para todos los valores de a que sea posible, la inversa de M.

c) (4 puntos) Calcula, para el caso $a = 0$, el vector x tal que $Mx = b$.

Solución:

a) $|M| = a^2 - 2 = 0 \Longrightarrow a = \pm\sqrt{2} \Longrightarrow \exists M^{-1} \;\; a \in \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{2}\}$

b) $M^{-1} = \dfrac{Adj(M))^t}{|M|} = \dfrac{1}{a^2-2}\begin{pmatrix} -1 & a-1 & 1 \\ -a & -a+2 & a^2+a-2 \\ a+1 & -1 & -a-1 \end{pmatrix}$

c) Si $a = 0 \Longrightarrow M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$Mx = b \Longrightarrow x = M^{-1}b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema 11.1.2 (10 puntos) Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Y sea O la matriz nula de orden 2×2.

a) (4 puntos) Calcula todas las matrices X tales que $AX - X = B$.

b) (3 puntos) Encuentra una matriz Y diferente de O tal que $(A - B)Y = O$.

c) (3 puntos) Indica todas las matrices que cumplen la igualdad $AZ = O$.

Solución:

a) $AX - X = B \Longrightarrow (A - I)X = B \Longrightarrow X = (A - I)^{-1}B =$
$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) Sea $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $A - B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a - 2c & b - 2d \\ 2c - a & 2d - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$
$$\left\{\begin{array}{l} a - 2c = 0 \\ b - 2d = 0 \\ 2c - a = 0 \\ 2d - b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2c \\ b = 2d \end{array}\right. \Longrightarrow Y = \begin{pmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{pmatrix}$$
Tomamos $c = d = 2 \Longrightarrow Y = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

c) Sea $Z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $AZ = O \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - c & 3b - d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$$\left\{\begin{array}{l} 3a - c = 0 \\ 3b - d = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow a = b = c = d = 0 \Longrightarrow Z = O$$

Problema 11.1.3 (10 puntos) Considera el plano $\pi : 2x + 3y + z - 6 = 0$.

a) (3 puntos) Determina los vértices del triángulo determinado por la intersección del plano con los ejes de coordenadas.

b) (3 puntos) Calcula el área del triángulo anterior.

c) (4 puntos) Sea A el vértice del triángulo sobre el eje de abscisas (eje OX). Calcula la recta perpendicular al plano que pasa por A.

Solución:

a) Punto de corte con el eje OX: hacemos $y = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow 2x - 6 = 0 \Longrightarrow A(3, 0, 0)$
Punto de corte con el eje OY: hacemos $x = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow 3y - 6 = 0 \Longrightarrow B(0, 2, 0)$
Punto de corte con el eje OZ: hacemos $x = 0$ e $y = 0 \Longrightarrow z - 6 = 0 \Longrightarrow C(0, 0, 6)$

b) $\overrightarrow{AB} = (-3, 2, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-3, 0, 6)$

$$S_t = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(12, 18, 6)| = 3|(2, 3, 1)| = 3\sqrt{14}\ u^2$$

c) $$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (2, 3, 1) \\ P_r = A(3, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 11.1.4 (10 puntos) Sean a y b dos constantes reales no nulas.
Consideremos el plano $\pi : x + ay - 2z = 3$ y la recta

$$r : \begin{cases} x + bz = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

a) (4 puntos) ¿Para qué valores de a y b la recta r es perpendicular al plano π? Para estos casos concretos, calcula el punto de corte entre r y π, y calcula o justifica cuál es la distancia de la recta al plano.

b) (3 puntos) ¿Para qué valores de a y b la recta r es paralela al plano π?

c) (3 puntos) ¿Existen algunos valores de a y b para los cuales la recta r está contenida en el plano π?

Solución:

$$r : \begin{cases} x + bz = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 - b\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-b, 0, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases}$$

a) $$r \perp \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} = k\overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow (-b, 0, 1) = k(1, a, -2) \Longrightarrow \begin{cases} -b = k \\ 0 = ka \\ 1 = -2k \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \dfrac{1}{2} \\ k = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Luego si $a = 0$ y $b = \frac{1}{2} \Longrightarrow r \perp \pi$ y tenemos:

$$r : \begin{cases} x = 1 - \dfrac{1}{2}\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} , \quad \pi : x - 2z = 3$$

Calculamos el punto de corte:

$$1 - \frac{1}{2}\lambda - 2\lambda = 3 \Longrightarrow \lambda = -\frac{4}{5} \Longrightarrow P\left(\frac{7}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right)$$

r y π se cortan en el punto P.

b) $r \parallel \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = 0 \Longrightarrow (-b, 0, 1) \cdot (1, a, -2) = -b + 0 - 2 = 0 \Longrightarrow b = -2$ y a puede ser cualquier valor real.
Existe la posibilidad de que $r \subset \pi$: Sustiyuimos P_r en $\pi \Longrightarrow 1 + 0 - 0 = 3$ absurdo, luego $P_r \notin \pi \Longrightarrow r \not\subset \pi \Longrightarrow r \parallel \pi$

c) Sustituimos r y π:

$$(1 - b\lambda) + a \cdot 0 - 2\lambda = 3 \Longrightarrow (b+2)\lambda = -2 \Longrightarrow$$

Si $b = -2 \Longrightarrow r \parallel \pi$ y si $b \neq -2 \Longrightarrow r$ y π se cortan, luego no hay valores a y b que hagan que $r \subset \pi$.

Problema 11.1.5 (10 puntos) La cantidad de agua infectada por una bacteria se espera que siga la función $f(x) = e^{-x} + 0,15x + 1$ siendo $x \geq 0$ los días de infección y $f(x)$ las toneladas de agua infectada.

a) (4 puntos) ¿Cuántas toneladas de agua había inicialmente infectadas por la bacteria? ¿Hacia qué valor tiende la cantidad de agua infectada? Interpreta los resultados.

b) (4 puntos) ¿En qué momento hay menos cantidad de agua infectada? ¿Cuántas toneladas hay en ese momento?

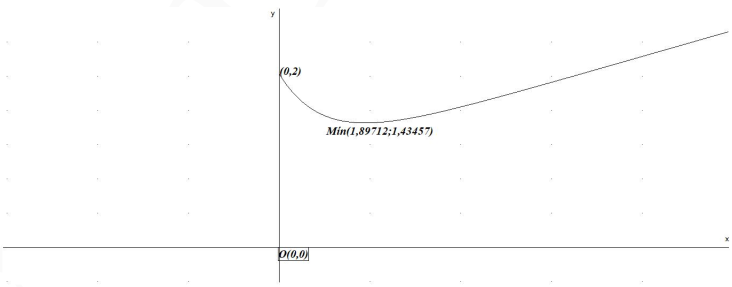
c) (2 puntos) ¿Hay algún momento en el que el agua no esté infectada? Justifica la respuesta.

Solución:

a) $f(0) = 2$ Tm de agua infectada.
$\lim\limits_{x\to\infty}(e^{-x} + 0,15x + 1) = \infty \Longrightarrow$ la cantidad de agua infectada irá aumentando a medida que pase el tiempo hasta infectarla en su totalidad.

b) $f'(x) = -e^{-x} + 0,15 = 0 \Longrightarrow e^{-x} = 0,15 \Longrightarrow e^{x} = \dfrac{1}{0,15} \Longrightarrow x = -\ln 0,15 = 1,89712$
$f''(x) = e^{-x} \Longrightarrow f''(1,897) = 0,15 > 0 \Longrightarrow x = 1,89712 \Longrightarrow f(x) = 1,43457$ Tm es un mínimo relativo y además es absoluto (es menor a las 2 Tm iniciales)

c) No hay ningún momento en el que las aguas no estén infectadas, la función $f(x) > 0 \ \ \forall x \in [0, \infty)$



Problema 11.1.6 (10 puntos) Representa la región comprendida entre la curva $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, el eje de abscisas (eje OX) y las rectas $x = 0$ y $x = 7$. Calcula su área.
Solución:
$f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow f$ no corta el eje de abscisas en el intervalo $(0, 7)$ y, por tanto, hay un sólo recinto de integración $S_1 : [0, 7]$.
Para dibujar la curva:

- El $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, tiene un único punto de corte con los ejes en $(0, 0)$, es una función IMPAR, positiva en el intervalo $(0, \infty)$ y negativa en el $(-\infty, 0)$.

☛ No tiene asíntotas verticales, el denominador no se anula nunca. Sí tiene asíntota horizontal en $y = 0$:
$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0$

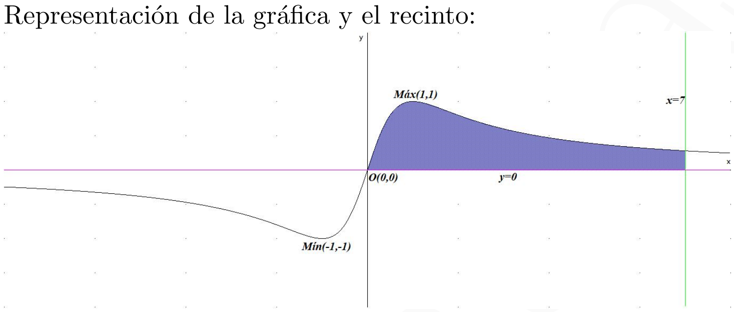
☛ No tiene oblicuas por haber horizontales.

☛ $f'(x) = -\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ y creciente en el $(-1,1)$. Tiene un mínimo relativo en el punto $(-1,-1)$ y un máximo relativo en el $(1,1)$

☛ Representación de la gráfica y el recinto:



$$F(x) = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \begin{bmatrix} t = x^2+1 \\ dt = 2xdx \\ dx = \dfrac{dt}{2x} \end{bmatrix} = \int \frac{2x}{t}\cdot\frac{dt}{2x} = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| = \ln|x^2+1| + C$$

$$S = \int_0^7 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = F(7) - F(0) = \ln 50 \simeq 3,9120\ u^2$$

Bloque IV.- Probabilidad y estadística

Problema 11.1.7 (10 puntos) Un espacio muestral contiene dos sucesos A y B. Sabiendo que $P(A\cap B) = 0,3$, $P(A|B) = P(B|A)$ y $P(A^c) = 0,4$. Siendo A^c el suceso complementario), calcula:

a) (2 puntos) $P(B|A)$.

b) (3 puntos) $P(B)$

c) (3 puntos) $P(A^c\cap B^c)$

d) (2 puntos) ¿Son A y B sucesos independientes?

Solución:
Por comodidad $A^c = \overline{A}$

a) $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0,3}{1-0,4} = 0,5$

b) $P(B|A) = P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A|B)} = \dfrac{0,3}{0,5} = 0,6$

c) $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A\cap B)) =$
$1 - (0,6 + 0,6 - 0,3) = 0,1$

d) $P(A)\cdot P(B) = 0,6\cdot 0,6 = 0,36 \neq P(A\cap B) = 0,3 \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

Problema 11.1.8 (10 puntos) El peso de los recién nacidos sigue una distribución normal de media $\mu = 3,1$ kg y desviación típica σ desconocida. Se sabe que solo el 30,5 % de los recién nacidos pesa más de 3,8 kg. Calcula, redondeando los resultados a 4 decimales,

a) (4 puntos) ¿Cuál es la desviación típica?

b) (3 puntos) Suponiendo que $\sigma = 1,3725$, ¿cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2,7 kg?

c) (3 puntos) Suponiendo que $\sigma = 1,3725$, ¿cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese entre 2,7 y 3,5 kg?

Solución:

$$N(3,1;\sigma)$$

a) $P(X\ge 3,8) = P\left(Z \ge \dfrac{3,8-3,1}{\sigma}\right) = 0,305 \Longrightarrow P\left(Z \le \dfrac{3,8-3,1}{\sigma}\right) = 0,695 \Longrightarrow$
$\dfrac{3,8-3,1}{\sigma} = 0,51 \Longrightarrow \sigma = 1,3725$

b) $N(3,1;1,3725)$
$P\left(X\le 2,7\right) = P\left(Z\le \dfrac{2,7-3,1}{1,3725}\right) = P(Z\le -0,29) = 1 - P(Z\le 0,29) =$
$1 - 0,6141 = 0,3859$

c) $N(3,1;1,3725)$
$P\left(2,7\le X\le 3,5\right) = P\left(\dfrac{2,7-3,1}{1,3725}\le Z\le \dfrac{3,5-3,1}{1,3725}\right) = P(-0,29\le Z\le 0,29) =$
$P(Z\le 0,29) - P(Z\le -0,29) = P(Z\le 0,29) - (1 - P(Z\le 0,29)) =$
$0,6141 - (1 - 0,6141) = 0,2282$

11.2. Extraordinaria

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos entre 4.
Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

Problema 11.2.1 (10 puntos) Sea el sistema

$$\begin{cases} mx + y - z = 1\\ 2x + my = 1\\ x + mz = 0 \end{cases}$$

a) (7 puntos) Discute el número de soluciones que tiene el sistema según el parámetro m.

b) (3 puntos) Resuelve el sistema en el caso $m = 1$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & -1 & 1 \\ 2 & m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = m^3 - m = 0 \Longrightarrow m = 0$ y $m = \pm 1$.

- Si $m \in \mathbb{R} - \{0, -1, 1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ número de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m = 0$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_3 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$
Sistema incompatible (no tiene solución)
- Si $m = -1$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) =$
$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema incompatible (no tiene solución)
- Si $m = 1$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] =$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Si $m = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ -y + 2z = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 11.2.2 (10 puntos) Sea A una matriz invertible $n \times n$ con coeficientes reales que satisface la igualdad $A^2 + A = I$. Entonces,

a) (3 puntos) ¿Satisface la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

las condiciones del enunciado? Es decir, ¿cumple M la igualdad del enunciado y, además, es invertible?

Volviendo a considerar que A es una matriz cualquiera que satisface las condiciones del enunciado,

b) (3 puntos) Calcula la inversa de A.

c) (4 puntos) Comprueba que se cumple la igualdad $A(B+A)-I=A(B-I)$, siendo B una matriz cuadrada cualquiera $n\times n$ coeficientes reales.

Solución:

a) $|M|=-1\neq 0\Longrightarrow \exists M^{-1}$
$M^2+M=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I\Longrightarrow M$ cumple la igualdad del enunciado.

b) $A^2+A=I\Longrightarrow A(A+I)=I\Longrightarrow A^{-1}=A+I$

c) $A(B+A)-I=A(B-I)\Longrightarrow AB+A^2-I=AB-A\Longrightarrow AB+A^2-I-AB+A=O\Longrightarrow A^2+A=I$

Problema 11.2.3 (10 puntos) Sean los puntos $A=(1,2,0)$, $B=(-1,0,1)$, $C=(0,0,1)$ y $D=(3,1,2)$.

a) (4 puntos) Determina la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene los puntos A, B y C.

b) (4 puntos) Determina si los puntos A, B, C y D son coplanarios.

c) (2 puntos) ¿Es D el punto de corte de la recta con el plano del apartado (a)? Justifica la respuesta.

Solución:

a) $$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-2,-2,1)\\ \overrightarrow{AC}=(-1,-2,1)\\ A(1,2,0)\end{array}\right.\Longrightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-1 & y-2 & z\\ -2 & -2 & 1\\ -1 & -2 & 1\end{vmatrix}=y+2z-2=0$$

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{u_\pi}=(0,1,2)\\ D(3,1,2)\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=3\\ y=1+\lambda\\ z=2+2\lambda\end{array}\right.\quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

b) Sustituimos D en $\pi\Longrightarrow 3\cdot 0+1+2\cdot 2-2=3\neq 0\Longrightarrow D\notin\pi\Longrightarrow A$, B, C y D no son coplanarios.

c) Calculamos el punto de corte de r con π:

$$3\cdot 9+(1+\lambda)+2(2+2\lambda)-2=0\Longrightarrow \lambda=-\frac{3}{5}\Longrightarrow P\left(3,\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$$

Luego D no es el punto de corte de r con π. Era de esperar ya que $D\notin\pi$.

Problema 11.2.4 (10 puntos) Sea el plano $\pi: 3x+y+z=2$ los puntos $P=(0,1,1)$ y $Q=(2,-1,-3)$.

a) (2 puntos) ¿Son P y Q puntos del plano π? Justifica la respuesta.

b) (4 puntos) Calcula el punto S situado sobre la recta PQ que se encuentra a $3/4$ partes de P y a $1/4$ parte de Q.

c) (4 puntos) Determina la ecuación implícita (también llamada cartesiana) de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano π.

Solución:

a) Sustituimos P en $\pi \Longrightarrow 0+1+1=2 \Longrightarrow P \in \pi$
Sustituimos Q en $\pi \Longrightarrow 6-1-3=2 \Longrightarrow Q \in \pi$

b) Dividimos el segmento $\overline{PQ}$ en 4 partes:
Sea $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PQ} = (2,-2,-4) \Longrightarrow \dfrac{1}{4}\overrightarrow{u} = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, -1\right)$
$P_1 = P + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{u} = (0,1,1) + \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, -1\right) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right)$
$P_2 = P_1 + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{u} = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right) + \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, -1\right) = (1,0,-1)$
$P_3 = P_2 + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{u} = (1,0,-1) + \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, -1\right) = \left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}, -2\right)$
$Q = P_3 + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{u} = \left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}, -2\right) + \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, -1\right) = (2,-1,-3)$
El punto $S = P_3\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}, -2\right)$

c) $r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (3,1,1) \\ P_r = P(0,1,1) \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda = \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1} \Longrightarrow$
$r: \begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{1} \\ \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1} \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

Problema 11.2.5 (10 puntos) La reproducción de un insecto a lo largo del tiempo sigue la función $f(x) = e^{-x}(2x+1)$ siendo $x \geq 0$ el tiempo en meses y $f(x)$ el número de insectos en millones.

a) (4 puntos) ¿Cuántos millones de insectos había en el instante inicial? ¿Hacia dónde tiende la cantidad de insectos a lo largo de los años? Interpreta los resultados.

b) (4 puntos) ¿Cuál es el máximo número de insectos que puede llegar a haber? ¿En qué instante de tiempo se consigue este valor?

c) (2 puntos) ¿Hay algún momento en el que la población supere los 2 millones de insectos? Justifica la respuesta.

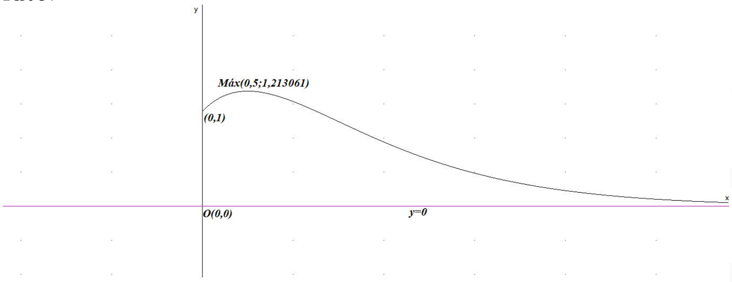
Solución:

a) $f(0) = 1$ millón de ejemplares.
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{e^x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0 \Longrightarrow$ la población de insectos tiende a desaparecer a lo largo de los años.

b) $f'(x) = e^{-x}(1-2x) = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{2}$
$f''(x) = e^{-x}(2x-3) \Longrightarrow f''(1/2) = -2e^{-1/2} < 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ (medio mes) es un máximo relativo con una población de $f(1/2) = 2e^{-1/2} \simeq 1213061$ insectos.

c) La función parte con un millón de insectos y crece medio mes hasta llegar en ese momento a un máximo de 1213061 insectos. A partir de ese momento la función es siempre decreciente

hasta la práctica desaparición de la población en la asíntota $y = 0$
No hay ningún momento en el que la población supere 1213061 insectos, el máximo es absoluto.



Problema 11.2.6 (10 puntos) Calcula la integral de la función $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x - 6}{x^2 + x - 2}$.
Solución:

$$\begin{array}{rrrrrl}
(& x^4 & & & +2x-6\,) : (x^2+x-2) = x^2 - x + 3 + \dfrac{-3x}{x^2+x-2} \\
 & -x^4 & -x^3 & +2x^2 & \\ \hline
 & & -x^3 & +2x^2 & +2x \\
 & & x^3 & +x^2 & -2x \\ \hline
 & & & 3x^2 & -6 \\
 & & & -3x^2 & -3x+6 \\ \hline
 & & & & -3x
\end{array}$$

$$\int \frac{x^4 + 2x - 6}{x^2 + x - 2}\,dx = \int \left(x^2 - x + 3 - \frac{3x}{x^2 + x - 2}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - \int \frac{3x}{x^2 + x - 2}\,dx =$$

$$\left[\begin{array}{c}
x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) \\
\dfrac{3x}{x^2+x-2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2} = \dfrac{A(x+2) + B(x-1)}{x^2+x-2} \\
3x = A(x+2) + B(x-1) \\
x = -2 \Longrightarrow -6 = -3B \Longrightarrow B = 2 \\
x = 1 \Longrightarrow 3 = 3A \Longrightarrow A = 1 \\
\dfrac{3x}{x^2+x-2} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x+2}
\end{array}\right] =$$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - \ln|x-1| - 2\ln|x+2| + C$$

Problema 11.2.7 (10 puntos) En una clase donde todos los alumnos practican algún deporte, el 60 % de los alumnos juega a fútbol o básquet y el 10 % practica los dos. Por otra parte, se sabe que hay un 60 % de alumnos que no juega al fútbol.

a) (3 puntos) Sea $F =$ "juega a fútbol" y sea $B =$ "juega a básquet", escribe, en términos de uniones, intersecciones y complementarios de estos dos sucesos, las tres probabilidades que indica el enunciado.

b) Calcula la probabilidad de que, escogiendo al azar un alumno de la clase,

   b.1) (1 punto) Juegue a fútbol.

   b.2) (2 puntos) Juegue a básquet.

   b.3) (2 puntos) Juegue a básquet y no a fútbol (es decir, solo juega a básquet) b.4) (2 puntos) No juegue ni a fútbol ni a básquet.

Solución:

a) $P(F\cup B)=0,6$, $P(F\cap B)=0,1$ y $P(\overline{F})=0,6$

b) b.1) $P(\overline{F})=1-P(F)=0,6\Longrightarrow P(F)=0,4$

b.2) $P(F\cup B)=P(F)+P(B)-P(F\cap B)\Longrightarrow 0,6=0,4+P(B)-0,1\Longrightarrow P(B)=0,3$

b.3) $P(B\cap\overline{F})=P(B)-P(F\cap B)=0,3-0,1=0,2$

b.4) $P(\overline{B}\cap\overline{F})=P(\overline{A\cup B})=1-P(F\cup B)=1-0,6=0,4$

Problema 11.2.8 (10 puntos)

a) (5 puntos) En un examen de tecnología, ¿cuál es la probabilidad de sacar una nota entre 5 y 7 si se sabe que las notas siguen una distribución normal de media 6 y desviación típica 2?

b) (5 puntos) En un examen de filosofía, el 35 % de los alumnos presentados obtuvieron una nota mayor que 6 mientras que el 51 % la obtuvo menor que 4. Suponiendo que las notas siguen una distribución normal, determina cuál es su media μ y su desviación típica σ.

Solución:

a) $N(6;2)$

$P(5\le X\le 7)=P\left(\frac{5-6}{2}\le Z\le\frac{7-6}{2}\right)=P(-0,5\le Z\le 0,5)=$

$P(Z\le 0,5)-P(Z\le -0,5)=2P(Z\le 0,5)-1=2\cdot 0,6915-1=0,383$

b) $N(\mu;\sigma)$

$P(X\ge 6)=P\left(Z\ge\frac{6-\mu}{\sigma}\right)=0,35\Longrightarrow P\left(Z\le\frac{6-\mu}{\sigma}\right)=1-0,35=0,65\Longrightarrow$

$\frac{6-\mu}{\sigma}=0,385\Longrightarrow \mu+0,385\sigma=6$

$P(X\le 4)=P\left(Z\le\frac{4-\mu}{\sigma}\right)=0,51\Longrightarrow\frac{4-\mu}{\sigma}=0,025\Longrightarrow\mu+0,025\sigma=4$

$$\left\{\begin{array}{l}\mu+0,385\sigma=6\\ \mu+0,025\sigma=4\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\mu=3,861111111\\ \sigma=5,555555555\end{array}\right.$$

Capítulo 12

Islas Canarias

12.1. Ordinaria

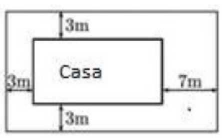
Instrucciones:

- ☛ Debe responder sólo una pregunta de cada bloque de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque, se considerará sólo la primera pregunta respondida.
- ☛ En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- ☛ Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

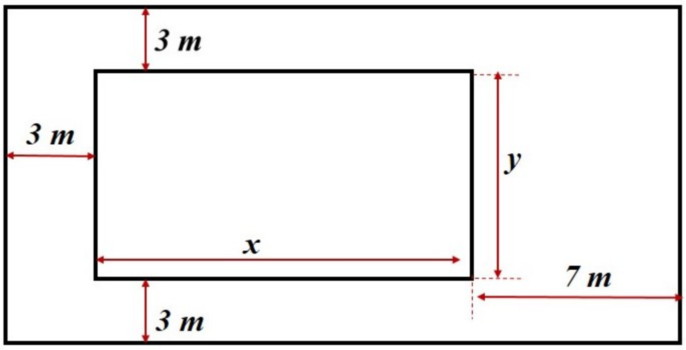
Bloque I.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

Problema 12.1.1 (2,5 puntos) Hallar la función polinómica $f(x)$ que verifica que tiene un punto mínimo en $M(1,2)$ y su segunda derivada es: $f''(x) = 2x+3$. Dar la expresión de $f(x)$.
Solución:
$f'(x) = \int (2x+3)\,dx = x^2+3x+C$ y como $f'(1) = 0 \Longrightarrow 1+3+C = 0 \Longrightarrow C = -4 \Longrightarrow f'(x) = x^2+3x-4$
$f(x) = \int (x^2+3x-4)\,dx = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} - 4x + K$ y como $f(1) = 2 \Longrightarrow \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{2} - 4 + K = 2 \Longrightarrow K = \dfrac{25}{6} \Longrightarrow f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} - 4x + \dfrac{25}{6}$
habría que comprobar que $M(1,2)$ es un mínimo. Como $f''(1) = 5 > 0 \Longrightarrow M(1,2)$ es un mínimo.

Problema 12.1.2 (2,5 puntos) Se quiere construir una Casa de la Juventud de 240 m^2 de superficie, que estará rodeada por una zona ajardinada con las dimensiones de la imagen.



Si se quiere minimizar la superficie total de la zona ajardinada, ¿qué dimensiones debe tener la Casa de la Juventud? ¿Cuál es el área de la zona ajardinada?
Solución:



La superficie de la casa: $A(x,y) = xy = 240 \Longrightarrow y = \dfrac{240}{x}$
La superficie de la zona ajardinada: $S(x,y) = (10+x)(6+y) - 240 \Longrightarrow$
$S(x) = (10+x)\left(6+\dfrac{240}{x}\right) - 240 = \dfrac{6(x^2+10x+400)}{x}$
$S'(x) = \dfrac{6(x^2-400)}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 20$ la solución negativa es irrelevante.

	$(0,20)$	$(20,\infty)$
$S'(x)$	$-$	$+$
$S(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

Luego $x = 20$ m es un mínimo con $y = \dfrac{240}{20} = 12$ m. Las dimensiones de la casa son 20×12 m. Las dimensiones de la zona ajardinada son $x+10 = 20+10 = 30$ e $y+6 = 12+6 = 18$, es decir, 30×18 m con un área ajardinada de $S(20) = 300$ m^2.

Bloque II.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

Problema 12.1.3 (2,5 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

a) (0,75 puntos) Comprobar si la matriz $M = 2I_3 + B^t$ tiene inversa.
Donde I_3 es la matriz identidad de orden 3.

b) (1,75 puntos) Justificar que existe la matriz que verifica la ecuación siguiente:

$$2X + C = A - X \cdot B^t$$

Calcular razonadamente dicha matriz X.

Solución:

a) $M = 2I_3 + B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |M| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists M^{-1}$

b) $2X + C = A - X \cdot B^t \Longrightarrow 2X + XB^t = A - C \Longrightarrow X(2I + B^t) = A - C \Longrightarrow$
$X = (A - C)(2I + B^t)^{-1} = (A - C)M^{-1} =$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 12.1.4 (2,5 puntos) Un bar de tapas canario sólo ofrece tres platos en su menú: escaldón, tollos y carajacas. El precio medio de los tres platos (la ración) es de 5€. Se sirven 30 raciones de escaldón, 20 raciones de tollos y 10 raciones de carajacas, por lo que se ingresaron 255 euros en total. Sabiendo que el triple del precio de las caracajas supera en diez euros el doble del precio de los tollos. Calcula el precio de la ración de cada producto.

Solución:
Sean x el precio del escaldón, y el precio de los tollos y z el precio de las carajacas.

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x+y+z}{3} = 5 \\ 30x + 20y + 10z = 255 \\ 3z = 2y + 10 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 15 \\ 6x + 4y + 2z = 51 \\ 2y - 3z = -10 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{2}€ \\ y = \dfrac{11}{2}€ \\ z = 7€ \end{array}\right.$$

Resuelto por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 6 & 4 & 2 & 51 \\ 0 & 2 & -3 & -10 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 6F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & -2 & -4 & -39 \\ 0 & 2 & -3 & -10 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & -2 & -4 & -39 \\ 0 & 0 & -7 & -49 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -7z = -49 \Longrightarrow z = 7 \\ -2y - 28 = -39 \Longrightarrow y = \dfrac{11}{2} \\ x + \dfrac{11}{2} + 7 = 15 \Longrightarrow x = \dfrac{5}{2} \end{array}\right.$$

Bloque III.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

Problema 12.1.5 (2,5 puntos) En el espacio tridimensional consideremos el plano y las rectas siguientes:

$$\pi : 2x + 3y - z = 4; \quad r : \left\{\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \end{array}\right. ; \quad s : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{1}$$

a) (1,25 puntos) Calcular el punto simétrico de $P(-2, 1, 2)$ respecto de π.

b) (1,25 puntos) Calcular el ángulo que forman r y s.

Solución:

$$r : \left\{\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3(2, -1, 1) \\ P_r = O(0, 0, 0) \end{array}\right.$$

$$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(1,0,1)\\ P_s(1,2,3)\end{array}\right. \qquad \pi: 2x+3y-z=4 \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi}=(2,3,-1)$$

a) Seguimos el siguiente procedimiento:

- ☛ Calculamos una recta $t\perp\pi$ tal que $P\in t$:

$$t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_\pi}=(2,3,-1)\\ P_t=P(-2,1,2)\end{array}\right. \Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l}x=-2+2\lambda\\ y=1+3\lambda\\ z=2-\lambda\end{array}\right.$$

- ☛ Calculamos el punto P' de corte de t con π:

$$2(-2+2\lambda)+3(1+3\lambda)-(2-\lambda)=4 \Longrightarrow \lambda=\frac{1}{2} \Longrightarrow P'\left(-1,\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$$

- ☛ El punto P' es el punto medio entre P y el simétrico P'' que buscamos:

$$\frac{P+P''}{2}=P' \Longrightarrow P''=2P'-P=(-2,5,3)-(-2,1,2)=(0,4,1)$$

b) $\cos\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r}|\cdot|\overrightarrow{u_s}|}=\dfrac{|(2,-1,1)\cdot(1,0,1)|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Longrightarrow \alpha=\dfrac{\pi}{6}=30^\circ$

Problema 12.1.6 (2,5 puntos) En el espacio tridimensional conocemos las siguientes ecuaciones de rectas:

$$r:\left\{\begin{array}{l}x+2y-7z=0\\ 2x+3y-12z+1=0\end{array}\right. \ ; \ s:\left\{\begin{array}{l}2x-7y-3z=22\\ x-y+z=1\end{array}\right.$$

a) (1,25 puntos) Estudiar la posición relativa de r y s.

b) (1,25 puntos) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}x+2y-7z=0\\ 2x+3y-12z+1=0\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ 1&2&-7\\ 2&3&-12\end{array}\right|=-(3,2,1)\\ P_r(-2,1,0)\end{array}\right.$$

$$s:\left\{\begin{array}{l}2x-7y-3z=22\\ x-y+z=1\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ 2&-7&-3\\ 1&-1&1\end{array}\right|=-5(2,1,-1)\\ P_s(-3,-4,0)\end{array}\right.$$

a) $\overrightarrow{P_sP_r}=(-2,1,0)-(-3,-4,0)=(1,5,0)$

$$\left[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\left|\begin{array}{ccc}1&5&0\\ 3&2&1\\ 2&1&-1\end{array}\right|=22\neq 0\Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

b) $$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(2,1,-1)\\ \overrightarrow{u_r}=(3,2,1)\\ P_r(-2,1,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}x+2&y-1&z\\ 2&1&-1\\ 3&2&1\end{array}\right|=3x-5y+z+11=0$$

Bloque IV.- Probabilidad y estadística (seleccione solo una pregunta)

Problema 12.1.7 (2,5 puntos) Según el estudio TALIS (2018), el 11 % de los docentes de Educación Secundaria en España son menores de 30 años.

a) (1 punto) Elegimos 15 docentes españoles, ¿qué probabilidad hay de que haya menos de 2 docentes menores de 30 años?

b) (1 punto) Supongamos que se seleccionan al azar 200 docentes españoles. ¿Qué probabilidad hay de que entre 20 y 30 docentes sean menores de 30 años?

c) (0,5 puntos) En un grupo de 500 docentes españoles, ¿cuántos cabe esperar que sean mayores de 30 años?

Solución:

a) $B(15; 0,11)$
$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{15}{0} \cdot 0,11^0 \cdot 0,89^{15} + \binom{15}{1} \cdot 0,11^1 \cdot 0,89^{14} = 0,49693$

b) $n = 200 > 10$, $np = 22 > 5$ y $nq = 178 > 5 \Longrightarrow B(200; 0,11) \overset{N(np,\sqrt{npq})}{\approx} N(22; 4,425)$
$P(20 \le X \le 30) = P\left(\frac{19,5-22}{4,425} \le Z \le \frac{30,5-22}{4,425}\right) = P(-0,56 \le Z \le 1,92) =$
$P(Z \le 1,92) - P(Z \le -0,56) = P(Z \le 1,92) - (1 - P(Z \le 0,56)) = 0,9726 - (1 - 0,7123) =$
$0,6849$

c) Cabe esperar que $\mu = nq = 500 \cdot 0,89 = 445$ docentes sean mayores de 30 años.

Problema 12.1.8 (2,5 puntos) Las estaturas de las personas que se presentan a una audición para participar en una película siguen una distribución normal de media 168 cm y desviación típica 8 cm.

a) (1 puntos) Si se selecciona una persona participante en la audición, averiguar la probabilidad de que tenga una estatura mayor a 156 cm.

b) (0,75 puntos) Se afirma que más del 15 % de los participantes en la audición medían más de 1,82 metros. Justifica la veracidad o falsedad de dicha afirmación.

c) (0,75 puntos) ¿Qué probabilidad hay de que, elegida una persona al azar, su estatura se encuentre entre 166 y 172 cm?

Solución:

$$N(168; 8)$$

a) $P(X \ge 156) = P\left(Z \ge \frac{156-168}{8}\right) = P(Z \ge -1,5) = P(Z \le 1,5) = 0,9332$

b) $P(X \ge 182) = P\left(Z \ge \frac{182-168}{8}\right) = P(Z \ge 1,75) = 1 - P(Z \le 1,75) = 1 - 0,9599 =$
$0,0401 \Longrightarrow$ la afirmación es falsa.

c) $P(166 \le X \le 172) = P\left(\frac{166-168}{8} \le Z \le \frac{172-168}{8}\right) =$
$P(-0,25 \le Z \le 0,5) = P(Z \le 0,5) - P(Z \le -0,25) =$
$P(Z \le 0,5) - (1 - P(Z \le 0,25)) = 0,6915 - (1 - 0,5987) = 0,2902$

12.2. Extraordinaria

Instrucciones:

- Debe responder sólo una pregunta de cada bloque de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque, se considerará sólo la primera pregunta respondida.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque I.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

Problema 12.2.1 (2,5 puntos) Las ventas de un determinado producto vienen dadas por el siguiente modelo:

$$V(t) = \frac{5t^2}{8+t^2}, \quad t \geq 0$$

Donde $V(t)$ son las ventas en miles; t mide el tiempo desde que se inicia la venta del producto, en meses.

a) (0,75 puntos) Calcular las tasas de variación media del primero y segundo semestre. Comparar e interpretar los resultados.

b) (0,75 puntos) Se afirma que este modelo es creciente en su dominio. Justificar si esta afirmación es correcta.

c) (0,5 puntos) ¿En qué momento las ventas alcanzan 4000 unidades?

d) (0,5 puntos) Si el producto se vende a 2€ la unidad y los ingresos de esta empresa se modelizan teniendo en cuenta las ventas mensuales. ¿Hacia dónde tienden los ingresos con el paso del tiempo? Justificar la respuesta.

Solución:

a) $TVM(0,6) = \dfrac{V(6)-V(0)}{6-0} = \dfrac{\frac{45}{11}-0}{6} = \dfrac{15}{22} \simeq 0,6818$

$TVM(6,12) = \dfrac{V(12)-V(6)}{12-6} = \dfrac{\frac{90}{19}-\frac{45}{11}}{6} = \dfrac{45}{418} \simeq 0,1077$

En el primer semestre ha habido una venta media de 681 unidades por mes, mientras que en el segundo semestre la venta media ha bajado a 107 unidades por mes.

b) $V'(t) = \dfrac{80t}{(8+t^2)^2} = 0 \Longrightarrow t = 0$ como $t \geq 0 \Longrightarrow V'(t) > 0$ en $(0,\infty) \Longrightarrow V$ es siempre creciente.

c) $V(t) = \dfrac{5t^2}{8+t^2} = 4 \Longrightarrow t^2 - 32 = 0 \Longrightarrow t = \pm 5,6569$, la solución negativa no es válida. Luego las ventas alcanzan las 4000 unidades entre el mes 5 y el mes 6.

d) Los ingresos son $2V(t)$: $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{10t^2}{8+t^2} = 10 \Longrightarrow$ los ingresos tienden a estabilizarse en 10000€ al mes.

Problema 12.2.2 (2,5 puntos) Resolver los siguientes apartados:

a) (1 punto) Averiguar el valor de k para que sea cierta la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to -2} \frac{kx^2-4k}{x^2+6x+8}=\frac{3}{2}$$

b) (1,5 puntos) Resolver la siguiente integral indefinida: $\displaystyle\int x\sqrt{2x-1}\,dx$

Solución:

a) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{kx^2-4k}{x^2+6x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{L'H}{=}\lim_{x\to -2}\frac{2kx}{2x+6}=\frac{-4k}{2}=-2k=\frac{3}{2}\Longrightarrow k=-\frac{3}{4}$

b) $$\int x\sqrt{2x-1}\,dx=\left[\begin{array}{l} t=\sqrt{2x-1}\\ t^2=2x-1\Longrightarrow x=\dfrac{t^2+1}{2}\\ 2tdt=2dx\\ dx=tdt\end{array}\right]=\int\frac{t^2+1}{2}\cdot t\cdot t\,dt=\frac{1}{2}\int t^2(t^2+1)\,dt=$$

$$\frac{1}{2}\int(t^4+t^2)\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right)+C=\frac{1}{2}\left(\frac{(\sqrt{2x-1})^5}{5}+\frac{(\sqrt{2x-1})^3}{3}\right)+C=$$

$$\frac{\sqrt{(2x-1)^5}}{10}+\frac{\sqrt{(2x-1)^3}}{6}+C=\frac{(2x-1)^2\sqrt{2x-1}}{10}+\frac{(2x-1)\sqrt{2x-1}}{6}+C=$$

$$(2x-1)\sqrt{2x-1}\left(\frac{2x-1}{10}+\frac{1}{6}\right)+C=\frac{(3x+1)(2x-1)\sqrt{2x-1}}{15}+C=$$

$$\frac{(6x^2-x-1)\sqrt{2x-1}}{15}+C$$

Bloque II.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

Problema 12.2.3 (2,5 puntos) Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\left\{\begin{array}{l} -x+ky+2z=k\\ 2x+ky-z=2\\ kx-y+2z=k\end{array}\right.$

a) (1,5 puntos) Discutir la compatibilidad del sistema según los diversos valores de k.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $k=2$.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & k & 2 & k\\ 2 & k & -1 & 2\\ k & -1 & 2 & k\end{array}\right)$; $|A|=-3k^2-6k-3=0\Longrightarrow k=-1$

- ☛ Si $k\neq -1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $k=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -1 & 2\\ -1 & -1 & 2 & -1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2+2F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 2 & -1\\ 0 & -3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones)

b) Si $k=2$:

$$\left\{\begin{array}{r} -x+2y+2z=2\\ 2x+2y-z=2\\ 2x-y+2z=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{3}\\ y=\dfrac{2}{3}\\ z=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Problema 12.2.4 (2,5 puntos) Resolver la ecuación matricial: $AX+B^t=A^2$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$AX+B^t=A^2 \Longrightarrow AX=A^2-B^t \Longrightarrow X=A^{-1}(A^2-B^t)=$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right]=$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right]=$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 4\\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Bloque III.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

Problema 12.2.5 (2,5 puntos) En el espacio tridimensional tenemos un punto y la recta siguientes:

$$P(1,-2,0);\quad r:\left\{\begin{array}{l} x-2y+z=0\\ x-z=0 \end{array}\right.$$

a) (1,75 puntos) Hallar la ecuación del plano tal que, la recta perpendicular al mismo y que pasa por el origen de coordenadas corta al plano buscado en el punto P.
Averiguar el ángulo que forma el plano encontrado con la recta r.

b) (0,75 puntos) Hallar el punto de intersección de la recta r y $s: x-5=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-9}{3}$

Solución:

a) $t:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{OP}=(1,-2,0)\\ P_t=O(0,0,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_t}=(1,-2,0)\Longrightarrow \pi: x-2y+\lambda=0 \overset{P\in\pi}{\Longrightarrow} 1+4+\lambda=0\Longrightarrow \lambda=-5\Longrightarrow \pi: x-2y-5=0$.

Por otro lado:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x-2y+z=0\\ x-z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=\lambda\\ y=\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,1,1)\\ P_r=O(0,0,0) \end{array}\right.$$

$$\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha=\frac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_\pi}|}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_\pi}|}=\frac{|(1,1,1)\cdot(1,-2,0)|}{\sqrt{3}\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{15}}\Longrightarrow \alpha=14^\circ 57' 48''$$

b) $s : x - 5 = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-9}{3} \Longrightarrow s : \left\{\begin{array}{l} x = 5 + \mu \\ y = -1 - 2\mu \\ z = 9 + 3\mu \end{array}\right.$ En el punto de corte H es $r = s$:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \lambda = 5 + \mu \\ y = \lambda = -1 - 2\mu \\ z = \lambda = 9 + 3\mu \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = 3 \\ \mu = -2 \end{array}\right. \Longrightarrow H(3,3,3)$$

Problema 12.2.6 (2,5 puntos) En el espacio tridimensional tenemos las ecuaciones de las rectas siguientes: $r : \left\{\begin{array}{l} 8x + 2y - 3z + 12 = 0 \\ -7x - y + 3z = 9 \end{array}\right.$ y $s : x = y + 1 = \dfrac{z-2}{2}$

a) (1,25 puntos) Comprobar que r y s están contenidas en un mismo plano π y hallar la ecuación de dicho plano.

b) (1,25 puntos) Averiguar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(0,-1,2)$ y corta perpendicularmente a la recta r.

Solución:

a) $r : \left\{\begin{array}{l} 8x + 2y - 3z + 12 = 0 \\ -7x - y + 3z - 9 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 8 & 2 & -3 \\ -7 & -1 & 3 \end{array}\right| = 3(1,-1,2) \\ P_r(-3,0,-4) \end{array}\right. \Longrightarrow$

$$r : \left\{\begin{array}{l} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -4 + 2\lambda \end{array}\right.$$

$$s : x = y + 1 = \frac{z-2}{2} \Longrightarrow s : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,1,2) \\ P_s(0,-1,2) \end{array}\right. \Longrightarrow s : \left\{\begin{array}{l} x = \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = 2 + 2\mu \end{array}\right.$$

r y s están en el mismo plano si se cortan en un punto H:

$\left\{\begin{array}{l} x = -3 + \lambda = \mu \\ y = -\lambda = -1 + \mu \\ z = -4 + 2\lambda = 2 + 2\mu \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \mu = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow H(-1,-2,0)$, es decir, las dos rectas se cortan en un punto H y, por tanto, están en el mismo plano:

$$\pi : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,-1,2) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,1,2) \\ P_s(0,-1,2) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi : \left|\begin{array}{ccc} x & y+1 & z-2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right| = -4x + 2z - 4 = 0 \Longrightarrow \pi : 2x - z + 2 = 0$$

b) Seguimos los dos pasos siguientes:

- ☛ Calculamos un plano $\pi' \perp r$ tal que $P \in \pi'$:
  $\overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} = (1,-1,2) \Longrightarrow \pi' : x - y + 2z + \lambda = 0 \overset{P\in\pi'}{\Longrightarrow} 0 + 1 + 4 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -5 \Longrightarrow$
  $\pi' : x - y + 2z - 5 = 0$

- ☛ Calculamos el punto P' de corte de r con π':
  $(-3+\lambda) - (-\lambda) + 2(-4+2\lambda) - 5 = 0 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{8}{3} \Longrightarrow P'\left(-3 + \dfrac{8}{3}, -\dfrac{8}{3}, -4 + 2\dfrac{8}{3}\right) =$
  $P'\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{8}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

☛ La recta t que buscamos pasa por P y P':

$$t:\begin{cases} \overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{P'P}=(0,-1,2)-\left(-\frac{1}{3},-\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}(1,5,2)\\ P_t=P(0,-1,2)\end{cases}\Longrightarrow$$

$$t:\begin{cases} x=\lambda\\ y=-1+5\lambda \qquad \forall\lambda\in\mathbb{R}\\ z=2+2\lambda\end{cases}$$

Bloque IV.- Probabilidad y estadística (seleccione solo una pregunta)

Problema 12.2.7 (2,5 puntos) Aythami tiene un sobre donde guarda el dinero que ha podido reunir, el sobre contiene: 4 billetes de 5€, 6 billetes de 10€ y 2 billetes de 50€. Quiere comprar algunas cosas y decide dejar al azar cuánto dinero va a coger del sobre. Para ello, saca aleatoriamente, sin reemplazamiento y de forma consecutiva, dos billetes del sobre.

a) (0,5 puntos) Expresar el espacio muestral del experimento que va a realizar Aythami.

b) (1 punto) Si se quiere comprar un videojuego que cuesta 57€, ¿qué probabilidad hay de que pueda hacerlo con los billetes que saca del sobre?

c) (1 punto) Si al final obtiene, con este experimento, 60€ del sobre ¿qué probabilidad hay de que el primer billete fuera de 10€?

Solución:

a) $\Omega=\{(5,5),(5,10),(10,5),(5,50),(50,5),(10,10),(10,50),(50,10),(50,50)\}$

b) Tenemos los sucesos: (10,50),(50,10) y (50,50)
$P(X\geq 57)=P(X\geq 60)=P(10,50)+P(50,10)+P(50,50)=\frac{6}{12}\cdot\frac{2}{11}+\frac{2}{12}\cdot\frac{6}{11}+\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}=\frac{13}{66}\simeq 0,197$

c) $P((10,50)|(10,50)\cup(50,10))=\frac{P((10,50)\cap((10,50)\cup(50,10)))}{P((10,50)\cup(50,10))}=\frac{P(10,50)}{P((10,50)\cup(50,10))}=\frac{\frac{6}{12}\cdot\frac{2}{11}}{\frac{6}{12}\cdot\frac{2}{11}+\frac{2}{12}\cdot\frac{6}{11}}=\frac{1}{2}=0,5$

Problema 12.2.8 (2,5 puntos) La probabilidad de que un coche de carreras sufra un reventón en un neumático durante una competición es de 0,04. En una competición en la que participan 10 coches:

a) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzcan 2 reventones?

b) (1 punto) Se afirma que existe como mucho un 1 % de posibilidades de que ocurran más de 2 reventones durante la carrera. ¿Es cierta esta afirmación? Justifícalo.

c) (0,75 puntos) Estudiamos las competiciones realizadas en una temporada con un total de 250 coches ¿qué probabilidad hay de que se produzcan más de 12 reventones en total? (Suponiendo la independencia de los sucesos)

Solución:

$$B(10;0,04)$$

a) $P(X=2)=\binom{10}{2}0,04^2\cdot 0,96^8=0,05194$

b) $P(X>2)=1-(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2))=$
$1-\left(\binom{10}{0}0,04^0\cdot 0,96^{10}+\binom{10}{1}0,04^1\cdot 0,96^9+\binom{10}{2}0,04^2\cdot 0,96^8\right)=$
$0,0062=0,62\,\%<1\,\%\Longrightarrow$ La afirmación es cierta.

c) $B(250;0,04)$
Tenemos $n=250>10$, $np=10>5$ y $nq=240>5\Longrightarrow B(250;0,04)\overset{N(np,\sqrt{npq})}{\approx}N(10;3,098)$
$P(X>12)=P\left(Z\geq\dfrac{12,5-10}{3,098}\right)=P(Z\geq 0,81)=1-P(Z\leq 0,81)=1-0,791=0,209$

Capítulo 13

La Rioja

13.1. Ordinaria

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.
En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.
Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

Problema 13.1.1 (2 puntos) Sea $f(x) = \dfrac{x}{(x-2)(x-1)}$

I. Halla el dominio, asíntotas verticales y horizontales de la función f, en caso de que existan.

II. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos si los hubiera.

Solución:

I. ☛ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1, 2\}$

☛ Asíntotas:

- Verticales:
  - $x = 1$

    $$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = \infty$$
    $$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$
  - $x = 2$

    $$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty$$
    $$\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = \infty$$
- Horizontales: $y = 0$

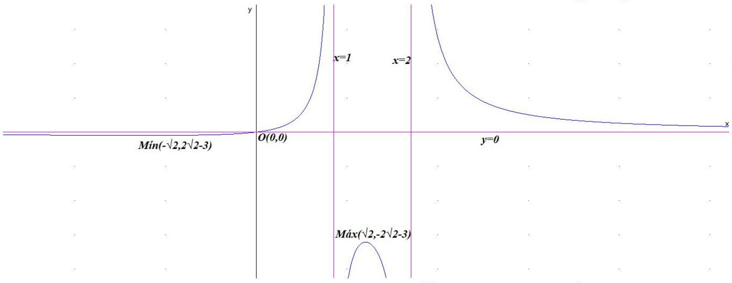
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to \infty} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

II. $f'(x) = -\dfrac{x^2-2}{(x-2)^2(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2) \cup (2, \infty)$ y creciente en el $(-\sqrt{2}, 1) \cup (1, \sqrt{2})$.
Tiene un mínimo relativo en $(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}-3)$ y un máximo relativo en $(\sqrt{2}, -2\sqrt{2}-3)$

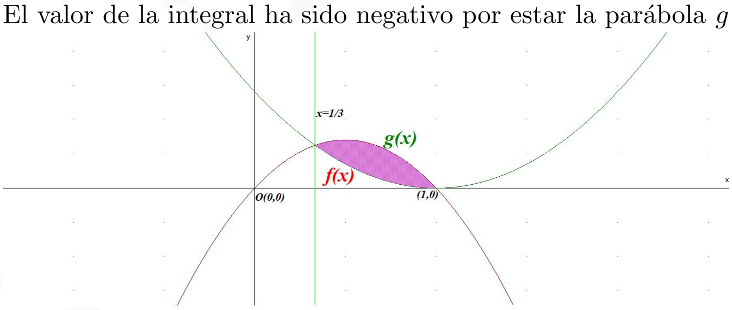


Problema 13.1.2 (2 puntos) Halla el área del recinto encerrado por las gráficas de las parábolas $y = x^2 - 2x + 1$ e $y = -2x^2 + 2x$.

Solución:
Llamamos $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y $g(x) = -2x^2 + 2x$
$f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 - 2x + 1 = -2x^2 + 2x \Longrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{3}$ y $x = 1$

$$S = \left|\int_{1/3}^{1} (3x^2 - 4x + 1)\, dx\right| = \left|x^3 - 2x^2 + x\right]_{1/3}^{1}\Big| = \left|0 - \frac{4}{27}\right| = \frac{4}{27} \simeq 0,14815\ u^2$$

El valor de la integral ha sido negativo por estar la parábola g por encima de la f.



Problema 13.1.3 (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

I. $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^x + x^3\right)^{\frac{1}{x}}$

II. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x+2} - \dfrac{x^2+1}{x-2}\right)$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x + x^3\right)^{\frac{1}{x}} = [1^\infty] = e^\lambda$

$\lambda = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}(e^x + x^3 - 1) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + x^3 - 1}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + 3x^2}{1} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x + x^3\right)^{\frac{1}{x}} = e \quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x+2} - \dfrac{x^2+1}{x-2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2-1)(x-2)-(x^2+1)(x+2)}{x^2-4} =$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x^2-2x}{x^2-4} = -4$

Problema 13.1.4 (2 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible determinado e indeterminado.

$$\left\{\begin{array}{l} x + (a+1)y + z = a \\ x + y + (a+1)z = a \\ (a+1)x + y + z = a \end{array}\right.$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a+1 & a \\ a+1 & 1 & 1 & a \end{array}\right),\ |A| = a^2(a+3) = 0 \Longrightarrow a = 0 \quad a = -3.$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-3, 0\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & a+1 & 1 \\ a & 1 & a+1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a}{a+3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a & a+1 \\ a+1 & a & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a}{a+3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a+1 & a \\ 1 & 1 & a \\ a+1 & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a}{a+3}$$

- Si $a = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -9 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

☛ Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

Tiene dos grados de libertad:

$$x + y + z = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\lambda - \mu \\ y = \mu \\ z = \lambda \end{array} \right. \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Problema 13.1.5 (2 puntos) Dada una matriz de tamaño 4×4 cuyo determinante es igual a 2. Calcula el valor del determinante de la matriz resultante al realizar las siguientes operaciones:

I. Se traspone la matriz.

II. Se cambian entre sí la primera y la cuarta columna.

III. Se multiplica la tercera columna por -4.

IV. Se multiplica toda la matriz por 4.

Solución:

I. $|A| = |A^t| = 2$

II. $|A| = 2$ y permutamos dos columnas, el determinante cambia de signo, el determinante de la nueva matriz vale -2.

III. $|A| = 2$ y multiplicamos una columna por -4, el determinante de la nueva matriz vale $-4 \cdot 2 = -8$.

IV. $|A| = 2$ y multiplicamos toda la matriz por 4, el determinante de la nueva matriz vale $4^4 \cdot 2 = 512$

Problema 13.1.6 (2 puntos) Determina para qué valores del parámetro real a la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a-1 & a^2-1 & 1 \\ a^2-1 & a-1 & a+1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $a = 2$.
Solución:
$|A| = a^3 + a^2 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 0,\ a = 1$ y $a = -2 \Longrightarrow \exists\, A^{-1}\ \ \forall a \in \mathbb{R} - \{-2, 0, 1\}$
Para $a = 2$ es posible calcular su inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/8 & 1/8 \\ 0 & 3/8 & -1/8 \\ -1 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Problema 13.1.7 (2 puntos) Determina la posición relativa de la recta

$$\frac{x-3}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{1}$$

y el plano de ecuación $3x + 2y - 11z + 3 = 0$.
Solución:

$$r: \frac{x-3}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{1} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 + \lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$$ sustituimos en $\pi : 3x + 2y - 11z + 3 = 0$ y tenemos:

$$3 \cdot 3 + 2(-1 + \lambda) - 11(5 + \lambda) + 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = -5 \Longrightarrow$$

r y π se cortan en el punto $P(3, -6, 0)$

Problema 13.1.8 (2 puntos) Halla el punto simétrico del punto $A(0, 2, 3)$ respecto al plano π de ecuación $x + y - z = 4$

Solución:
Seguimos el siguiente procedimiento:

- ☛ Calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $A \in t$:

$$t: \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, 1, -1) \\ P_t = A(0, 2, 3) \end{cases} \Longrightarrow t: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

- ☛ Calculamos el punto de corte A' de t con π:

$$\lambda + (2 + \lambda) - (3 - \lambda) = 4 \Longrightarrow \lambda = \frac{5}{3} \Longrightarrow A'\left(\frac{5}{3}, \frac{11}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

- ☛ A' es el punto medio entre A y el que buscamos A'':

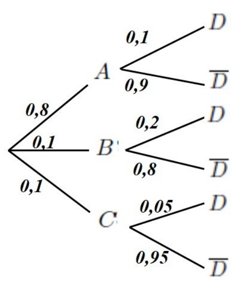
$$\frac{A + A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A' - A = \left(\frac{10}{3}, \frac{22}{3}, \frac{8}{3}\right) - (0, 2, 3) = \left(\frac{10}{3}, \frac{16}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Problema 13.1.9 (2 puntos) En una empresa automovilística se ha recibido un lote de piezas de coches de tipos A, B y C. El 80 % corresponde al coche de tipo A, el 10 % al B y el resto al C. Se ha observado que hay piezas que están defectuosas en los siguientes porcentajes: el 10 % de A, el 20 % de B y el 5 % de C. Se elige una pieza al azar. Calcula:

I. la probabilidad de coger una pieza defectuosa.

II. si sabemos que la pieza es defectuosa, la probabilidad de que sea del tipo A.

Solución:
Sean A lote de piezas tipo A, B lote de piezas tipo B, C lote de piezas tipo C, D defectuosa y $\overline{D}$ no defectuosa.



I. $P(D) =$
$P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) =$
$0,1 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,1 + 0,05 \cdot 0,1 = 0,105$

II. $P(A|D) = \dfrac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \dfrac{0,1 \cdot 0,8}{0,105} = 0,7619$

Problema 13.1.10 (2 puntos) La edad media de un jugador de la NBA sigue una distribución normal de media 26 años y desviación típica 5 años. Si se elige un jugador al azar, halla:

I. La probabilidad de que su edad sea superior o igual a 31 años.

II. La probabilidad de que su edad esté entre 21 y 31 años.

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)
Solución:

$$N(26;5)$$

I. $P(X \geq 31) = P\left(Z \geq \frac{31-26}{5}\right) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$

II. $P(21 \leq X \leq 31) = P\left(\frac{21-26}{5} \leq Z \leq \frac{31-26}{5}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) =$
$P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = 2P(Z \leq 1) - 1 = 2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6826$

13.2. Extraordinaria

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.
En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.
Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

Problema 13.2.1 (2 puntos) Sea $f(x) = \dfrac{1+4x^4-x^2}{x}$

I. Halla el dominio y asíntotas (horizontales, verticales y oblicuas) de la función f en caso de que existan.

II. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos si los hubiera.

Solución:

I. $\text{Dom}(f) = R - \{0\}$
Asíntotas:

- ☛ Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1+4x^4-x^2}{x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1+4x^4-x^2}{x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty,$$

- ☛ Horizontales: No hay.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1+4x^4-x^2}{x} = -\infty; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{1+4x^4-x^2}{x} = +\infty$$

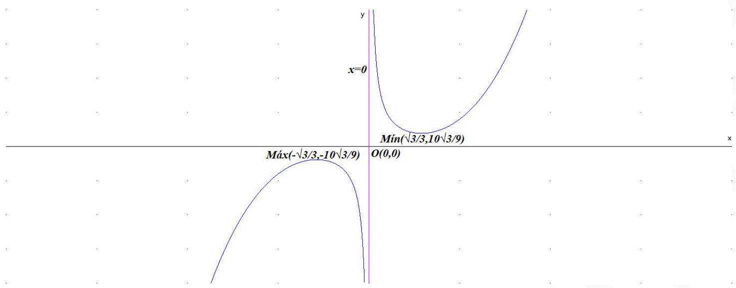
- ☛ Oblicuas: No hay. $(y = mx + n)$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+4x^4-x^2}{x^2} = \infty$$

II. $f'(x) = \dfrac{12x^4 - x^2 - 1}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

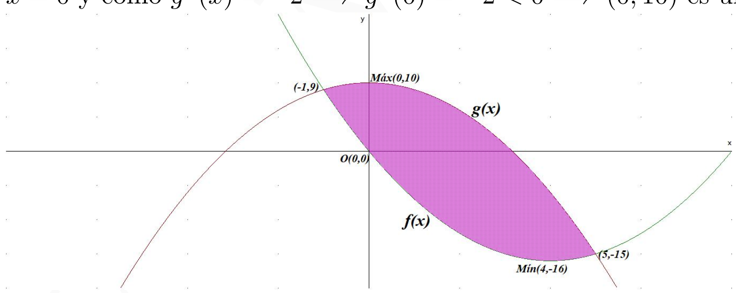
	$(-\infty, -\sqrt{3}/3)$	$(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$	$(\sqrt{3}/3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3}/3) \cup (\sqrt{3}/3, \infty)$ y decreciente en el $(-\sqrt{3}/3, 0) \cup (0, \sqrt{3}/3)$
con un máximo relativo en el punto $\left(-\sqrt{3}/3, -10\sqrt{3}/9\right)$ y
un mínimo relativo en el $\left(\sqrt{3}/3, 10\sqrt{3}/9\right)$



Problema 13.2.2 (2 puntos) Dibuja el recinto limitado por las parábolas $y = x^2 - 8x$ e $y = 10 - x^2$. Calcula su área.

Solución:
Sean $f(x) = x^2 - 8x$ y $g(x) = 10 - x^2$
Calculamos sus puntos de corte $f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 - 8x = 10 - x^2 \Longrightarrow 2x^2 - 8x - 10 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 5 \Longrightarrow (-1, 9)$ y $(5, -15)$.
El recinto de integración será $S : [-1, 5]$.
$f(x) = x^2 - 8x$ es una parábola que pasa por el punto $(0, 0)$ y $(8, 0)$. $f'(x) = 2x - 8 = 0 \Longrightarrow x = 4$ y como $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(4) = 2 > 0 \Longrightarrow (4, -16)$ es un mínimo.
$g(x) = 10 - x^2$ es una parábola que pasa por el punto $(0, 10)$ y $(\pm\sqrt{10}, 0)$. $g'(x) = -2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y como $g''(x) = -2 \Longrightarrow g''(0) = -2 < 0 \Longrightarrow (0, 10)$ es un máximo.



$$S = \int_{-1}^{5} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{-1}^{5} (-2x^2 + 8x + 10)\, dx = -\frac{2x^3}{3} + 4x^2 + 10x \Big]_{-1}^{5} = 72\ u^2$$

Problema 13.2.3 (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

I. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$

II. $\lim\limits_{x\to \infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

Solución:

I. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = [1^\infty] = e^\lambda$

$\lambda = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{x^2}(\cos 2x - 1) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos 2x - 3}{x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-6\sin 2x}{2x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=}$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-12\cos 2x}{2} = -6$
$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = e^{-6}$

II. $\lim\limits_{x\to \infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left[\infty^0\right] = \lambda \Longrightarrow \ln\lambda = \lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} =$
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{1} = 0 \Longrightarrow$
$\ln\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$

Problema 13.2.4 (2 puntos) Determina para qué valores del parámetro real a la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tiene inversa. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $a = 2$.
Solución:
$|A| = a^2(a+3) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = -3 \Longrightarrow \exists\, A^{-1}\ \ \forall a \in \mathbb{R} - \{-3, 0\}$
Para $a = 2$ es posible calcular su inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/10 & -1/10 & 2/5 \\ 2/5 & -1/10 & -1/10 \\ -1/10 & 2/5 & -1/10 \end{pmatrix}$$

Problema 13.2.5 (2 puntos)

I. Determina las matrices cuadradas de dimensión 2×2 de la forma

$$M = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

Que satisfagan la siguiente identidad: $MM^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donde M representa la matriz traspuesta de M.

II. Resuelve el sistema

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases}$$

Sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

I. $MM^T = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+4 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+4=5 \\ xy=1 \\ y^2=1 \end{array}\right. \Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} x=-1 \text{ e } y=-1 \Longrightarrow M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ x=1 \text{ e } y=1 \Longrightarrow M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

II. $\left\{\begin{array}{l} AX+BY=C \\ AX=Y \end{array}\right. \Longrightarrow Y+BY=C \Longrightarrow (I+B)Y=C \Longrightarrow Y=(I+B)^{-1}C=$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/6 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$Y = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AX=Y \Longrightarrow X=A^{-1}Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 13.2.6 (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, calcular A^{-1} y A^{20}, utilizando necesariamente la siguiente identidad $A^3=-I$, donde I es la matriz identidad de orden tres.

Solución:

$A^3=-I \Longrightarrow A\cdot A^2=-I \Longrightarrow A\cdot(-A^2)=I \Longrightarrow A^{-1}=-A^2$

$$A^{-1}=-A^2=-\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{20}=(A^3)^6A^2=(-I)^6A^2=IA^2=A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Problema 13.2.7 (2 puntos) La proyección ortogonal del punto $P(1,0,-1)$, sobre el plano π es el punto $Q(-3,2,5)$. Halla la ecuación del plano π y las coordenadas del punto simétrico del P respecto a dicho plano π.

Solución:

$\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{PQ}=(-3,2,5)-(1,0,-1)=(-4,2,6)=2(-2,1,3) \Longrightarrow$

$\pi: -2x+y+3z+\lambda=0 \stackrel{Q\in\pi}{\Longrightarrow} 6+2+15+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-23 \Longrightarrow \pi: -2x+y+3z-23=0$

El punto Q es el punto medio entre P y P' simétrico de P respecto de π:

$$\frac{P+P'}{2}=Q \Longrightarrow P'=2Q-P=(-6,4,10)-(1,0,-1)=(-7,4,11)$$

Problema 13.2.8 (2 puntos) Determina la posición relativa de los tres planos, según los valores del parámetro m:

$$\left\{\begin{array}{l} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=m^2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1\\ 1 & m & 1 & m\\ 1 & 1 & m & m^2\end{array}\right),\ |A|=m^3-3m+2=0\Longrightarrow m=-2\ \ m=1.$$

- ☛ Si $m\in\mathbb{R}-\{-2,1\}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. En este caso los tres planos se cortan en un punto.

- ☛ Si $m=-2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & 4\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ 2F_2+F_1\\ 2F_3+F_1\end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 3 & -3\\ 0 & 3 & -3 & 9\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

No hay puntos comunes a los tres planos y tenemos $\left\{\begin{array}{l}\pi_1: -2x+y+z=1\\ \pi_2: x-2y+z=-2\\ \pi_3: x+y-2z=4\end{array}\right.$.

Comparamos los planos dos a dos:

π_1 con $\pi_2\Longrightarrow \dfrac{-2}{1}\neq\dfrac{1}{-2}\Longrightarrow \pi_1$ y π_2 se cortan en una recta.

π_1 con $\pi_3\Longrightarrow \dfrac{-2}{1}\neq\dfrac{1}{1}\Longrightarrow \pi_1$ y π_3 se cortan en una recta.

π_2 con $\pi_3\Longrightarrow \dfrac{1}{1}\neq\dfrac{-2}{1}\Longrightarrow \pi_2$ y π_3 se cortan en una recta.

Los planos se cortan dos a dos formado un prisma triangular.

- ☛ Si $m=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

Tiene dos grados de libertad:

$$x+y+z=0\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=1-\lambda-\mu\\ y=\mu\\ z=\lambda\end{array}\right.\qquad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

Los tres planos coinciden.

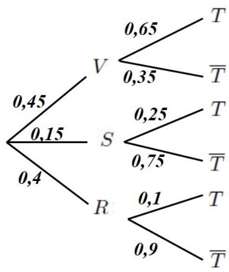
Problema 13.2.9 (2 puntos) La estadística de un equipo de baloncesto en un partido, desvela que el 45 % de los puntos conseguidos por el equipo corresponde al jugador número 23, de los cuales el 65 % son triples, 15 % al jugador número 6 de los cuales el 25 % son triples y el resto de la puntuación, siendo el 10 % triples, corresponde a otros jugadores del equipo. Halla la probabilidad de que:

I. una de las jugadas del equipo haya acabado en un triple.

II. sabiendo que la canasta ha sido un triple, haya sido conseguida por el jugador número 23.

Solución:

Sean V jugador 23, S jugador 6, R resto de jugadores, T triples y $\overline{T}$ no triples.



a) $P(T) = P(T|V)P(V) + P(T|S)P(S) + P(T|R)P(R) =$
$0,65 \cdot 0,45 + 0,25 \cdot 0,15 + 0,1 \cdot 0,4 = 0,37$

b) $P(V|T) = \dfrac{P(T|V)P(V)}{P(T)} = \dfrac{0,65 \cdot 0,45}{0,37} = 0,7905$

Problema 13.2.10 (2 puntos) La estatura media de un jugador de fútbol del Real Madrid sigue una distribución normal de media 180 cm y desviación típica 10 cm. Si se elige un jugador al azar, calcula:

I. la probabilidad de que su altura sea superior o igual a 200 cm;

II. la probabilidad de que su altura esté entre 170 y 190 cm.

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)
Solución:

$$N(180; 10)$$

a) $P(X \geq 200) = P\left(Z \geq \dfrac{200 - 180}{10}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

b) $P(170 \leq X \geq 190) = P\left(\dfrac{170 - 180}{10} \leq Z \leq \dfrac{190 - 180}{10}\right) =$
$P(-1 \leq Z \leq 1) = 2P(Z \leq 1) - 1 = 2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6826$

Capítulo 14

Madrid

14.1. Modelo

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
TIEMPO: 90 minutos.

Opción A

Problema 14.1.1 *(2,5 puntos)* En la liga de fútbol profesional de Libertonia compiten veinte equipos. Cada equipo debe tener exactamente veinticinco jugadores de los que tres, y no más, han de ser porteros. Se sabe que la tercera parte del número de defensas coincide con la diferencia entre el número de centrocampistas y el número de delanteros. Por otro lado, la suma de la mitad del número de centrocampistas y el doble del número de delanteros excede en 25 unidades al número de defensas. Calcule el número de defensas, el número de centrocampistas y el número de delanteros que juegan en la liga.
Solución:
Sean x el número de defensas, y el número de centrocampistas y z el número de delanteros.
Hay un total de $20 \cdot 25 - 20 \cdot 3 = 440$ jugadores no porteros.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=440 \\ \dfrac{y}{2}+2z-25=x \\ \dfrac{x}{3}=y-z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=440 \\ 2x-y-4z=-50 \\ x-3y+3z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=210 \text{ defensas} \\ y=150 \text{ centrocampistas} \\ z=80 \text{ delanteros} \end{array}\right.$$

Problema 14.1.2 *(2,5 puntos)* Para la función $f(x)=\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{xe-e}{e^x-e} & \text{si} & x<1 \\ \\ \dfrac{1}{4x-3} & \text{si} & x\geq 1 \end{array}\right.$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar su continuidad y determinar, en el caso de que existan, las ecuaciones de sus asíntotas.

b) (0,5 puntos) Para la función $g(x)=(ex-e)f(x)$, calcular el valor de $g'(0)$.

c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_1^5 \sqrt{f(x)}\,dx$

Solución:

a) ☛ La función es continua para cualquier valor $x \neq 1$, son composición de funciones continuas y los denominadores no se anulan nunca.

Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{xe-e}{e^x-e} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{e}{e^x} = 1 \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{1}{4x-3} = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Longrightarrow f$ es continua en $x = 1 \Longrightarrow$
f es continua en $\mathbb{R}$.

☛ Asíntotas:

- Verticales: No hay, los denominadores no se anulan en en ninguna de las dos ramas.
- Horizontales:
  - Si $x < 1$:
    $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{xe-e}{e^x-e} = \left[\frac{-\infty}{-e}\right] = \infty$
    No hay asíntota horizontal por la izquierda.
  - Si $x \geq 1$:
    $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{1}{4x-3} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$
    Hay una asíntota horizontal por la derecha $y = 0$.
- Oblicuas:
  - Si $x < 1$:
    $\displaystyle m = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{xe-e}{xe^x-xe} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{e}{xe^x+e^x-e} = -1$
    $\displaystyle n = \lim_{x\longrightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \left(\frac{xe-e}{e^x-e} + x\right) = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \left(\frac{xe-e+xe^x-ex}{e^x-e}\right) =$
    $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty} \left(\frac{-e+xe^x}{e^x-e}\right) = 1$
    Hay una asíntota oblicua por la izquierda en $y = -x + 1$.
  - Si $x \geq 1$: no puede haber oblicua por haber horizontal.

b) $g(x) = (ex-e)f(x)$ en $x = 0$ está en la rama $x < 1$ y la función $f(x) = \dfrac{xe-e}{e^x-e} \Longrightarrow g(x) =$
$(ex-e)\dfrac{xe-e}{e^x-e} = xe - e \Longrightarrow g'(x) = e \Longrightarrow g'(0) = e$

c) $\displaystyle F(x) = \int \sqrt{\frac{1}{4x-3}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{4x-3}}\,dx = \int (4x-3)^{-1/2}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = 4x-3 \\ dt = 4dx \\ dx = \dfrac{dt}{4} \end{array}\right] = \int t^{-1/2}\,\frac{dt}{4} =$

$\displaystyle\frac{1}{4}\int t^{-1/2}\,dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{1/2}}{1/2} + C = \frac{t^{1/2}}{2} + C = \frac{\sqrt{4x-3}}{2} + C$

$\displaystyle\int_1^5 \sqrt{\frac{1}{4x-3}}\,dx = F(5) - F(1) = \frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$

Problema 14.1.3 *(2,5 puntos)* Un depósito en forma de paralelepípedo, de base cuadrada $ABCD$, apoya completamente su base sobre una rampa en un local, quedando una arista superior pegada al techo. Se considera un sistema de ejes, con los semiejes positivos en un rincón del local. La arista inferior paralela a la que se apoya en el techo y no en su misma cara, tiene vértices de coordenadas $A(1,1,1)$ y $B(1,3,1)$. La ecuación del plano que contiene a la rampa es $4x-3z=1$ y el vértice sobre el punto A es $A'(1,1,6)$. Se pide:

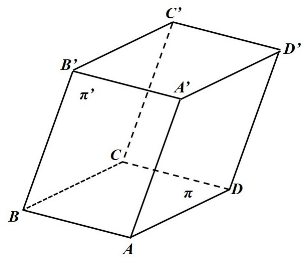
a) (0,5 puntos) Calcular una ecuación del plano que contiene a las aristas AB y AA'.

b) (1 punto) Calcular los otros dos vértices, C y D, de la base.

c) (1 punto) Calcular el volumen del depósito.

Solución:

a) Calculamos el plano π'



$$\pi' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0,2,0) \\ \overrightarrow{AA'} = (0,0,5) \\ A(1,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$10(x-1) = 0 \Longrightarrow \pi' : x-1=0$

b) Como la base es un cuadrado $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{0+4+0} = 2$

$\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{u_\pi} \times \overrightarrow{AB}$ con módulo 2:

$\overrightarrow{u_\pi} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (6,0,8)$, como tiene que tener módulo 2 quedaría

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{\sqrt{6^2+0+8^2}}(6,0,8) = \left(\frac{6}{5}, 0, \frac{8}{5}\right)$$

Luego $D = A + \overrightarrow{AD} = (1,1,1) + \left(\frac{6}{5}, 0, \frac{8}{5}\right) = \left(\frac{11}{5}, 1, \frac{13}{5}\right)$

$$C = B + \overrightarrow{BC} = B + \overrightarrow{AD} = (1,3,1) + \left(\frac{6}{5}, 0, \frac{8}{5}\right) = \left(\frac{11}{5}, 3, \frac{13}{5}\right)$$

c) $V = \left|\left[\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right| = \left| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6/5 & 0 & 8/5 \end{vmatrix} \right| = |-12| = 12\ u^3$

Problema 14.1.4 *(2,5 puntos)* Una empresa complementa el sueldo de sus empleados según la consecución de ciertos objetivos valorados en función de una puntuación que sigue una distribución normal $N(100;35)$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular el porcentaje de empleados con una puntuación comprendida entre 100 y 140.

b) (0,75 puntos) Hallar la probabilidad de que un trabajador obtenga una puntuación inferior a 95 puntos.

c) (1 punto) Determinar la puntuación mínima necesaria para cobrar los objetivos si el 75,17 % de la plantilla ha recibido dicho incentivo.

Solución:

a) $P(100 \leq X \leq 140) = P\left(\dfrac{100-100}{35} \leq Z \leq \dfrac{140-100}{35}\right) = P(0 \leq Z \leq 1,14) =$
$P(Z \leq 1,14) - P(Z \leq 0) = 0,8729 - 0,5 = 0,3729 = 37,29\,\%$

b) $P(X \leq 95) = P\left(Z \leq \dfrac{95-100}{35}\right) = P(Z \leq -0,14) = 1 - P(Z \leq 0,14) = 1 - 0,5557 =$
$0,4443$

c) $P(X \geq a) = P\left(Z \geq \dfrac{a-100}{35}\right) = P\left(Z \leq \dfrac{-a+100}{35}\right) = 0,7517 \Longrightarrow \dfrac{-a+100}{35} = 0,68 \Longrightarrow$
$a = 76,2$

Opción B

Problema 14.1.5 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y
$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular, si existe, el valor de m para el cual se verifica que $A^tB = C$.

b) (1 punto) Calcular, si existen, los valores de m para los que existe la inversa de AC y calcular para $m = 0$ la inversa de AC.

c) (0,75 puntos) Calcular, si existe, el valor de m para el cual se cumple que $B^2 = B - I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a) $A^tB = \begin{pmatrix} m & -2 \\ -1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m^2-2 & -m \\ -2m & 1 \\ 3m & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} 2m^2 - 2 = 0 \\ -m = -1 \\ -2m = -2 \\ 3m = 3 \end{cases} \Longrightarrow m = 1$$

b) $AC = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -m-2 \\ 3m & 2-m \end{pmatrix}$

$|AC| = 3m^3 + m + 10 = 0$ No tiene solución $\Longrightarrow \exists (AC)^{-1}\ \forall m \in \mathbb{R}$

Si $m = 0 \Longrightarrow AC = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow (AC)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

c) $B^2 = \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4m^2-1 & -2m \\ 2m & -1 \end{pmatrix}$

$B - I = \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m-1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$B^2 = B - I \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4m^2-1 & -2m \\ 2m & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m-1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4m^2 - 1 = 2m - 1 \\ -2m = -1 \\ 2m = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow m = \frac{1}{2}$$

Problema 14.1.6 *(2,5 puntos)* Un ayuntamiento ha dividido en parcelas parte del terreno municipal no urbanizable y lo ha cedido a los vecinos para su cultivo. Uno de los vecinos ha decidido que en su parcela asignada utilizará como huerto una zona rectangular de 72 metros cuadrados, dejando el resto para plantar frutales e instalar una caseta donde guardar las herramientas necesarias. La zona de huerto estará dividida en dos partes: la parte dedicada al cultivo de hortalizas será un rectángulo interior separado de los lados que delimitan el huerto. La separación será de medio metro entre cada uno de los lados de mayor longitud y un metro entre cada uno de los lados de menor longitud. La franja que delimita la zona de hortalizas la dedicará al cultivo de flores y plantas aromáticas.

a) (2 puntos) Calcule las dimensiones del huerto para que el área de la zona para el cultivo de hortalizas sea máxima.

b) (0,5 puntos) Calcule el área de la zona de cultivo de hortalizas.

Solución:

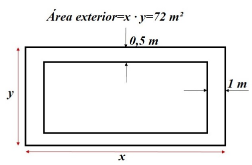
a) Relación de las dos variables: $x \cdot y = 72 \Longrightarrow y = \dfrac{72}{x}$

Función a optimizar $S(x, y) = (x - 2)(y - 1)$

Sustituyendo: $S(x) = (x-2)\left(\dfrac{72}{x} - 1\right) = \dfrac{-x^2 + 74x - 144}{x}$

$S'(x) = \dfrac{-x^2 + 144}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 12$

La solución negativa no es relevante.



	$(0, 12)$	$(12, \infty)$
$S'(x)$	$+$	$-$
$S(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función crece en el intervalo $(0, 12)$ y decrece en el $(12, \infty)$ con un máximo relativo en $x = 12$ m$\Longrightarrow y = \dfrac{72}{12} = 6$ m.

b) $S(12) = 50$ m^2.

Problema 14.1.7 *(2,5 puntos)* Se consideran las siguientes rectas:

- ☛ r, la recta que pasa por el punto $P(1, 1, 2)$ y tiene como vector director $\overrightarrow{u} = (0, 1, 2)$;
- ☛ s, la recta de ecuaciones $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y - 4 = 0 \\ x - 2z + 2 = 0 \end{array} \right.$;
- ☛ t, la recta paralela a s que contiene al punto P.

a) (0,75 puntos) Estudie la posición relativa de r y s.

b) (0,75 puntos) Calcule el ángulo que forman las rectas r y t.

c) (1 punto) Calcule la proyección ortogonal del punto P sobre la recta s.

Solución:

a) Tenemos:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u} = (0,1,2) \\ P_r = P(1,1,2) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{array} \right.$$

$$s : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = 1 + \dfrac{1}{2}\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,-1,1/2) = \dfrac{1}{2}(2,-2,1) \\ P_s(0,4,1) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 4 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (0,4,1) - (1,1,2) = (-1,3,-1)$$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \left| \begin{array}{ccc} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{array} \right| = 9 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

b) Tenemos $\overrightarrow{u_r} = (0,1,2)$ y $\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_s} = (2,-2,1)$

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r}| \cdot |\overrightarrow{u_s}|} = \frac{|(0,1,2)\cdot(2,-2,1)|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{9}} = \frac{0}{3\sqrt{5}} = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

$$r \perp t$$

.

c) Primero calculamos un plano $\pi \perp s$ que contenga $P(1,1,2)$:
$\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_s} = (2,-2,1) \Longrightarrow \pi : 2x - 2y + z + \lambda = 0$ sustituyendo P en $\pi \Longrightarrow 2 - 2 + 2 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -2 \Longrightarrow \pi : 2x - 2y + z - 2 = 0$
La proyección de P sobre s será el punto P' de corte de π con s:

$$2(2\lambda) - 2(4 - 2\lambda) + (1 + \lambda) - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow P'(2,2,2)$$

Problema 14.1.8 *(2,5 puntos)* Sabiendo que $P(A \cup B) = \dfrac{4}{5}$, $P(\overline{A}) = \dfrac{9}{20}$ y $P(\overline{B}) = \dfrac{7}{20}$, se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular razonadamente $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

b) (0,75 puntos) Calcular razonadamente $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

c) (0,5 puntos) Calcular razonadamente $P(A - B)$

d) (0,5 puntos) Determinar si A y B son sucesos independientes.

Solución:

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5}$

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \dfrac{9}{20} + \dfrac{7}{20} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{5}$

c) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \dfrac{11}{20} + \dfrac{13}{20} - \dfrac{4}{5} = \dfrac{2}{5}$
$P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \dfrac{11}{20} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{20}$

d) $P(A \cap B) = \dfrac{2}{5} \neq P(A) \cdot P(B) = \dfrac{11}{20} \cdot \dfrac{13}{20} \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

14.2. Ordinaria

Opción A

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
TIEMPO: 90 minutos.

Problema 14.2.1 *(2,5 puntos)* En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El 10 % de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuánta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?
Solución:
Sean x el número camiones tipo A, y el número camiones tipo B y z el número camiones tipo C.

$$\left\{\begin{array}{c} 14x + 24y + 28z = 302 \\ 1 + x = y + z \\ 0,1 \cdot 24y = \dfrac{1}{7} \cdot 28z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 7x + 12y + 14z = 151 \\ x - y - z = -1 \\ 3y - 5z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 7 \text{ tipo } A \\ y = 5 \text{ tipo } B \\ z = 3 \text{ tipo } C \end{array}\right.$$

Tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} 7 \cdot 14 = 98 \text{ Tm} \\ 5 \cdot 24 = 120 \text{ Tm} \\ 3 \cdot 28 = 84 \text{ Tm} \end{array}\right.$$

Problema 14.2.2 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$, se pide:

a) (0,25 puntos) Estudiar si es par o impar.

b) (0,75 puntos) Estudiar su derivabilidad en el punto $x = 1$.

c) (1,5 punto) Estudiar sus extremos relativos y absolutos.

Solución:

a) $f(-x) = \sqrt[3]{((-x)^2-1)^2} = \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = f(x) \Longrightarrow f$ es par, simétrica respecto al eje de ordenadas OY

b) $f'(x) = \dfrac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$

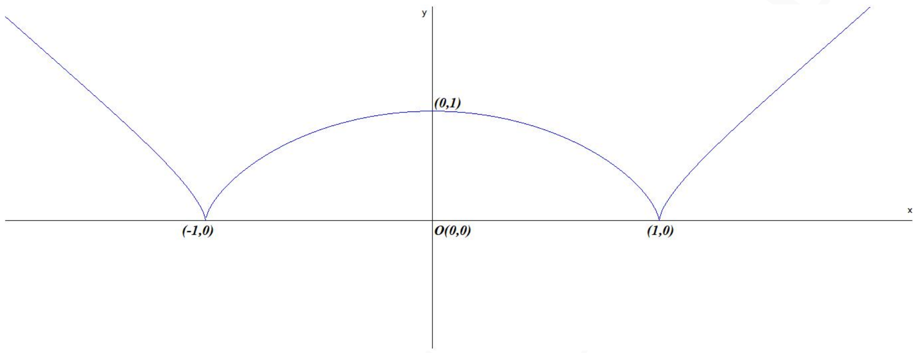
- ☛ $f'(1^-) = \dfrac{4}{3\sqrt[3]{0^-}} = -\infty$
- ☛ $f'(1^+) = \dfrac{4}{3\sqrt[3]{0^+}} = +\infty$
- ☛ $f'(1^-) \neq f'(1^+) \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 1$. (Tampoco lo es en $x = -1$)

Otra forma de justificarlo:
El $\text{Dom}(f') = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \Longrightarrow -1 \notin \text{Dom}(f') \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = -1$.

c) $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y el denominador se anula en $x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

Hay un máximo relativo en el punto (0,1). Los puntos (-1,0) y (1,0) son mínimos absolutos ya que $f(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.



Problema 14.2.3 *(2,5 puntos)* Sean los puntos $A(1, -2, 3)$, $B(0, 2, -1)$ y $C(2, 1, 0)$. Se pide:

a) (1,25 puntos) Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.

b) (0,75 puntos) Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano $z = 1$.

c) (0,5 puntos) Calcular el perímetro de triángulo T.

Solución:

a) Tenemos $\overrightarrow{AB} = (-1, 4, -4)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 3, -3)$ y $\overrightarrow{BC} = (2, -1, 1)$
Para que formen un triángulo los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen que ser proporcionales $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Longrightarrow (-1, 4, -4) = k(1, 3, -3)$ y $\nexists k \in \mathbb{R}$ que verifique esa igualdad, luego los tres puntos no están alineados y, por tanto, forman un triángulo.
El plano sería: $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1, 4, -4) \\ \overrightarrow{AC} = (1, 3, -3) \\ A(1, -2, 3) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x - 1 & y + 2 & z - 3 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$

$$\pi : y + z - 1 = 0$$

b) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (-1, 4, -4) \\ P_r = A(1, -2, 3) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + 4\lambda \\ z = 3 - 4\lambda \end{cases}$
Sustituyendo en $z = 1$ tenemos:
$(1 - \lambda) \cdot 0 + (-2 + 4\lambda) \cdot 0 + (3 - 4\lambda) = 1 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{1}{2}$ sustituyendo en r el punto de corte es: $P\left(\dfrac{1}{2}, 0, 1\right)$

c) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{33}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{19}$ y $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{6}$
El perímetro será: $\sqrt{33} + \sqrt{19} + \sqrt{6} = 12,55\ u$

Problema 14.2.4 *(2,5 puntos)* Se tiene un suceso A de probabilidad $P(A) = 0,3$.

a) (0,75 puntos) Un suceso B de probabilidad $P(B) = 0,5$ es independiente de A. Calcule $P(A \cup B)$.

b) (0,75 puntos) Otro suceso C cumple $P(C|A) = 0,5$. Determine $P(A \cap \overline{C})$.

c) (1 punto) Si se tiene un suceso D tal que $P(\overline{A}|D) = 0,2$ y $P(D|A) = 0,5$, calcule $P(D)$.

Solución:

a) Como A y B son independientes tenemos $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,5 - 0,15 = 0,65$

b) $P(C|A) = 0,5 = \dfrac{P(C \cap A)}{P(A)} \Longrightarrow P(C \cap A) = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15$
$P(A \cap \overline{C}) = P(A) - P(C \cap A) = 0,3 - 0,15 = 0,15$

c) $P(D|A) = \dfrac{P(D \cap A)}{P(A)} = 0,5 \Longrightarrow P(D \cap A) = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15$

$$P(\overline{A}|D) = \frac{P(\overline{A} \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D) - P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D) - 0,15}{P(D)} = 0,2 \Longrightarrow$$
$$P(D) - 0,15 = 0,2P(D) \Longrightarrow P(D) = \frac{0,15}{0,8} = 0,1875$$

Opción B

Problema 14.2.5 *(2,5 puntos)* Dado el sistema $\begin{cases} (a+1)x + 4y = 0 \\ (a-1)y + z = 3 \\ 4x + 2ay + z = 3 \end{cases}$, se pide Se pide:

a) (1,25 puntos) Discutirlo en función del parámetro a

b) (0,5 puntos) Resolverlo para $a = 3$

c) (0,75 puntos) Resolverlo para $a = 5$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & 3 \\ 4 & 2a & 1 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -a^2 - 2a + 15 = 0 \Longrightarrow a = -5$ y $a = 3$

- ☛ Si $a \in R - \{-5, 3\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ =número de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)
- ☛ Si $a = -5$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \\ 4 & -10 & 1 & 3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] =$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)}$$

- Si $a = 3$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] =$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Si $a = 3$:
$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 0 \\ 2y + z = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{array}\right.$$

c) Si $a = 5$:
$$\left\{\begin{array}{r} 6x + 4y = 0 \\ 4y + z = 3 \\ 4x + 10y + z = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{array}\right.$$

Problema 14.2.6 *(2,5 puntos)* Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como $f(x) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{x^2}{2 + x^2} & \text{si} \quad x \le -1 \\ \\ \dfrac{2x^2}{3 - 3x} & \text{si} \quad x > -1 \end{array}\right.$, se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar la continuidad de la función en $\mathbb{R}$

b) (0,75 puntos) Calcular el siguiente límite $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)^{2x^2 - 1}$

c) (1 punto) Calcular la siguiente integral $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$

Solución:

a) - Continuidad en $x = -1$:
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{x^2}{2 + x^2} = \dfrac{1}{3} \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} \dfrac{2x^2}{3 - 3x} = \dfrac{1}{3} \\ f(-1) = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Longrightarrow$$
$\lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = f(-1) \Longrightarrow f$ es continua en $x = -1$

- En la rama $x \le -1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{x^2}{2 + x^2}$ el denominador no se anula para ningún valor de esta rama y, por tanto, es continua en toda la rama.

- En la rama $x > -1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{2x^2}{3 - 3x}$ el denominador se anula para $x = 1$ (valor que está en la rama), donde hay una asíntota vertical y habrá una discontinuidad. En ese punto la función tiene un salto infinito. Por tanto, la función es continua en toda la rama menos en ese punto.

- En conclusión, f es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1} = [1^\infty] = e^\lambda$

$\lambda = \lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2-1)\left(\dfrac{x^2}{2+x^2}-1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x^2+2}{x^2} = -4$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1} = e^{-4}$

c) $$F(x) = \int \frac{2x^2}{3-3x}\,dx = \frac{2}{3}\int\frac{x^2}{1-x}\,dx = \left[\begin{array}{l} (\quad x^2):(-x+1) = -x-1+\dfrac{1}{-x+1} \\ \underline{-x^2+x} \\ \qquad\quad x \\ \qquad\ \underline{-x+1} \\ \qquad\qquad 1 \end{array}\right] =$$

$$\frac{2}{3}\int\left(-x-1+\frac{1}{1-x}\right)dx = \frac{2}{3}\left(-\frac{x^2}{2}-x-\ln|1-x|\right)+C$$

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = F(0)-F(-1) = \frac{2\ln 2}{3}-\frac{1}{3}\simeq 0,1288$$

Problema 14.2.7 *(2,5 puntos)* Dada la recta $r\equiv \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$, el plano $\pi\equiv x-z=2$ y el punto $A(1,1,1)$, se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.

b) (0,75 puntos) Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico del punto A respecto a la recta r.

Solución:

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,1,-2)\\ P_r(1,0,-1)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+2\lambda\\ y=\lambda\\ z=-1-2\lambda\end{array}\right.$$

Sustituyendo en π tenemos:

$$(1+2\lambda)+0\cdot\lambda-(-1-2\lambda)=2\Longrightarrow \lambda=0$$

Sustituyendo en r:

$$P\,(1,0,-1)$$

b) Seguimos los siguientes pasos:

- ☛ Calculamos $t\perp\pi$ tal que $A\in t$:

$$t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_\pi}=(1,0,-1)\\ P_t=A(1,1,1)\end{array}\right. \Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=1\\ z=1-\lambda\end{array}\right.$$

- ☛ Calculamos A' intersección de t con π. Será la proyección de A sobre π. Sustituyendo t en π tenemos:
$$(1+\lambda)+0-(1-\lambda)=2 \Longrightarrow \lambda=1$$
Sustituyendo en t tenemos: $A'(2,1,0)$

c) Seguimos los siguientes pasos:

- ☛ Calculamos $\pi' \perp r$ tal que $A \in \pi'$, $u_{\pi'}=\overrightarrow{u_r}=(2,1,-2)$:
$\pi' : 2x+y-2z+\lambda=0$, sustituyendo A tenemos $1+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-1 \Longrightarrow \pi' : 2x+y-2z-1=0$
- ☛ Calculamos el punto de corte P' de r con π':
$$2(1+2\lambda)+\lambda-2(-1-2\lambda)-1=0 \Longrightarrow \lambda=-\frac{1}{3}$$
Sustituyendo en r tenemos $P'\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$
- ☛ $\dfrac{A+P''}{2}=P' \Longrightarrow P''=2P'-A=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)-(1,1,1)=\left(-\frac{1}{3},-\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)$

Problema 14.2.8 *(2,5 puntos)* La longitud de la sardina del Pacífico (*Sardinops sagax*) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 mm y desviación típica 25,75 mm.

a) (1 punto) Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?

b) (0,5 puntos) Hallar una longitud $t<175$ mm tal que entre t y 175 mm están el 18 % de las sardinas capturadas.

c) (1 punto) En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

Solución:
$$N(175;25,75)$$

a) $P(X\geq 160)=\left(Z\geq \dfrac{160-175}{25,75}\right)=P(Z\geq -0,58)=P(Z\leq 0,58)=0,7190 \Longrightarrow 71,90\,\%$

b) $P(t\leq X\leq 175)=P\left(\dfrac{t-175}{25,75}\leq Z\leq \dfrac{175-175}{25,75}\right)=P\left(\dfrac{t-175}{25,75}\leq Z\leq 0\right)=$
$P(Z\leq 0)-P\left(Z\leq \dfrac{t-175}{25,75}\right)=0,5-P\left(Z\leq \dfrac{t-175}{25,75}\right)=0,18$
$P\left(Z\leq \dfrac{t-175}{25,75}\right)=0,32 \Longrightarrow P\left(Z\leq -\dfrac{t-175}{25,75}\right)=1-0,32=0,68 \Longrightarrow$
$-\dfrac{t-175}{25,75}=0,465 \Longrightarrow t=163,03$ mm

c) $B(10;p)$ donde $p=P(X\leq 150)=\left(Z\leq \dfrac{150-175}{25,75}\right)=P(Z\leq -0,97)=$
$1-P(Z\leq 0,97)=1-0,8340=0,166$
Luego $B(10;0,166)$, $p=0,166$ y $q=0,834$
$P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-\binom{10}{0}0,166^0\cdot 0,834^{10}=1-0,1628=0,8372$

14.3. Ordinaria-Coincidente

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
TIEMPO: 90 minutos.

Opción A

Problema 14.3.1 (2,5 puntos) Dada la matriz real $A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1\\ a & 3 & -6\\ a+1 & 1 & a\end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar el rango de la matriz A en función del parámetro a.

b) (1 punto) Calcular, en el caso de que exista, la inversa de A para $a=0$.

c) (0,5 puntos) Resolver el sistema $A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ para el caso $a=1$.

Solución:

a) $|A|=5a^2+4a-9=0\Longrightarrow a=-\dfrac{9}{5}$ y $a=1$

- Si $a\in\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{9}{5},1\right\}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3$.
- Si $a=-\dfrac{9}{5}$ o $a=1$ como $\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 3 & -6\end{vmatrix}=-9\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$

b) Si $a=0\Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 0 & 3 & -6\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y $|A|=-9\neq 0\Longrightarrow \exists A^{-1}=\begin{pmatrix} -2/3 & -1/9 & 1\\ 2/3 & 1/9 & 0\\ 1/3 & -1/9 & 0\end{pmatrix}$

c) Se trata de un sistema homogéneo y, por tanto, siempre tiene solución. En nuestro caso $|A|=0$ para $a=1$ y será un sistema compatible indeterminado. Tendremos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -6\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} 2x+y+z=0\\ x+3y-6z=0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{9}{5}\lambda\\ \\ y=\dfrac{13}{5}\lambda\\ \\ z=\lambda\end{array}\right.$$

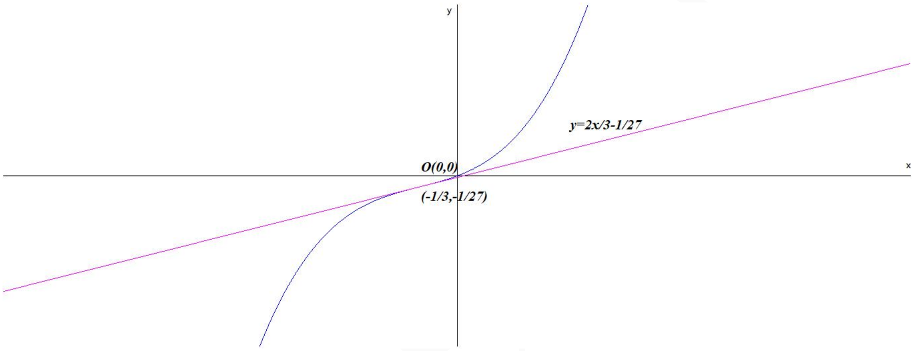
Problema 14.3.2 (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=x^3+x^2+x$, se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ con mínima pendiente.

b) (1,25 puntos) Calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica $f(x)$ y la recta $y=x$.

Solución:

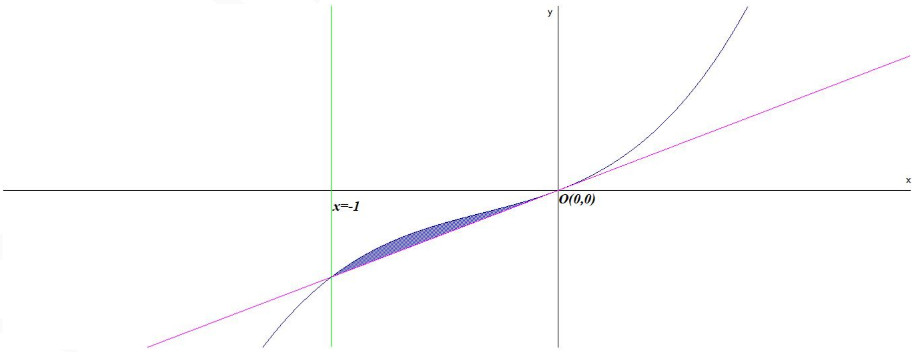
a) Llamamos $g(x) = f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$, g es la función de pendientes de f:
$g'(x) = 6x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$
$g''(x) = 6 \Longrightarrow g''\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 6 > 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$ es un mínimo.
Tenemos que $m = f'\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{3}$ y $b = f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{7}{27}$
$y - b = m(x - a) \Longrightarrow y + \dfrac{7}{27} = \dfrac{2}{3}\left(x + \dfrac{1}{3}\right) \Longrightarrow y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{27}$



b) Calculamos los puntos de corte de $f(x)$ con $y = x \Longrightarrow x^3 + x^2 + x = x \Longrightarrow x^3 + x^2 = 0 \Longrightarrow$ $x = 0$ y $x = -1$. El recinto de integración será $S_1 : [-1, 0]$

$$S_1 = \int_{-1}^{0} (f(x) - x)\, dx = \int_{-1}^{0} (x^3 + x^2)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{12}$$

$$S = |S_1| = \frac{1}{12} \simeq 0,0833\ u^2$$



Problema 14.3.3 (2,5 puntos) Sean los planos $\pi_1 : y = x$, $\pi_2 : y = x+1$, $\pi_3 : z = -1$ y $\pi_4 : z = 1$.

a) (0,5 puntos) Compruebe que son paralelos los planos π_1 y π_2, y que son paralelos los planos π_3 y π_4.

b) (0,5 puntos) Compruebe que los planos π_1 y π_2 son perpendiculares a los planos π_3 y π_4.

c) (0,5 puntos) Halle una recta que sea paralela a los cuatro planos y pase por el punto $(1, 0, 2)$.

d) (1 punto) Halle dos planos perpendiculares a π_1, π_2, π_3 y π_4, que cumplan que el volumen del paralelepípedo comprendido entre los seis planos sea 1.

Solución:
$\pi_1 : x - y = 0$, $\pi_2 : x - y + 1 = 0$, $\pi_3 : z + 1 = 0$ y $\pi_4 : z - 1 = 0$

a) π_1 con $\pi_2 \Longrightarrow \dfrac{1}{1} = \dfrac{-1}{-1} = \dfrac{\cdot}{\cdot} \neq \dfrac{0}{-1} \Longrightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$

π_3 con $\pi_4 \Longrightarrow \dfrac{\cdot}{\cdot} = \dfrac{\cdot}{\cdot} = \dfrac{1}{1} \neq \dfrac{1}{-1} \Longrightarrow \pi_3 \parallel \pi_4$

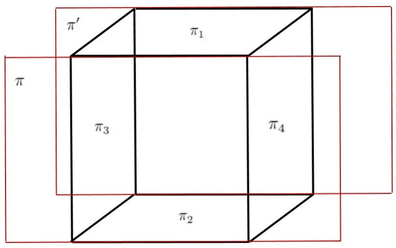
b) $\overrightarrow{u_{\pi_1}} = \overrightarrow{u_{\pi_2}} = (1, -1, 0)$
$\overrightarrow{u_{\pi_3}} = \overrightarrow{u_{\pi_4}} = (0, 0, 1)$
$\overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_3}} = 0 + 0 + 0 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi_1}} \perp \overrightarrow{u_{\pi_3}} \Longrightarrow \pi_1$ y $\pi_2 \perp \pi_3$ y a π_4

c) $$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_3}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1, 1, 0) \\ \\ P_r(1, 0, 2) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{array} \right.$$

d) Tenemos:

$\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_3}} = -(1, 1, 0)$
$\pi : x + y + \mu = 0$, podemos poner $\mu = 0 \Longrightarrow$
$\pi : x + y = 0$ y $\pi' : x + y + \lambda = 0$ y el volumen encerrado por este paralelepípedo sería:

$$V = d(\pi_1, \pi_2) \cdot d(\pi_3, \pi_4) \cdot d(\pi, \pi') = 1$$



- Calculamos $d(\pi_1, \pi_2)$ para ello cogemos un punto de $\pi_1 \Longrightarrow P(1, 1, 0)$ y tenemos:
$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2) = \dfrac{|1 - 1 + 1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
- Calculamos $d(\pi_3, \pi_4)$ para ello cogemos un punto de $\pi_3 \Longrightarrow Q(0, 0, -1)$ y tenemos:
$d(\pi_3, \pi_4) = d(Q, \pi_4) = \dfrac{|-1-1|}{\sqrt{1}} = 2$
- Calculamos $d(\pi, \pi')$ para ello cogemos un punto de $\pi \Longrightarrow H(1, -1, 0)$ y tenemos:
$d(\pi, \pi') = d(H, \pi') = \dfrac{|1 - 1 + \lambda|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|\lambda|}{\sqrt{2}}$

Tenemos: $1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \cdot \dfrac{|\lambda|}{\sqrt{2}} \Longrightarrow |\lambda| = 1 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{array} \right.$
Habría dos soluciones para el plano $\pi : x + y = 0$ elegido:

- Si $\lambda = -1 \Longrightarrow \pi' : x + y - 1 = 0$
- Si $\lambda = 1 \Longrightarrow \pi' : x + y + 1 = 0$

Problema 14.3.4 (2,5 puntos) En los juegos de rol, cada vez que se lanza un ataque este puede resultar en golpe crítico o no.

a) (1,25 puntos) En cierto juego de rol, para determinar si un ataque es crítico o no, se tira una moneda a cara o cruz. Si se obtiene una cruz, el ataque no será crítico. Por contra, si se obtiene una cara, entonces se lanza un dado de 10 caras numeradas del 1 al 10. Solo en caso de que también se obtenga una puntuación mayor o igual a 9 en el dado el ataque es crítico; en caso contrario el ataque no será crítico. Calcule la probabilidad de que, de entre 5 ataques lanzados, se obtengan 3 o menos golpes críticos.

b) (1,25 puntos) En otro juego de rol se sabe que la probabilidad de ataque crítico es del 20 %. Aproximando mediante una distribución normal, calcule la probabilidad de que, de entre 100 ataques, se obtengan no menos de 15 y no más de 25 golpes críticos.

Solución:

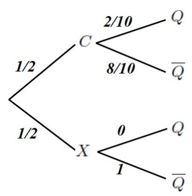
a) Sean C cara, X cruz, Q crítico y $\overline{Q}$ no crítico.

$p = P(Q) = P(Q|C)P(C) + P(Q|X)P(X) = \dfrac{2}{10}\cdot\dfrac{1}{2} + 0\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{10} = 0,1$

Tenemos $n = 5 \Longrightarrow B(5; 0,1)$

$P(X \le 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - [P(X = 4) + P(X = 5)] =$

$1 - \left[\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}\cdot 0,1^4\cdot 0,9^1 + \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}\cdot 0,1^5\cdot 0,9^0\right] = 0,99954$



b) $p = 0,2$, $n = 100 > 10$, $np = 20 > 5$ y $nq = 80 > 5 \Longrightarrow$

$B(100; 0,2) \overset{N(np,\sqrt{npq})}{\approx} N(20, 4)$

$P(15 \le X \le 25) = P\left(\dfrac{14,5-20}{4} \le Z \le \dfrac{25,5-20}{4}\right) = P(-1,38 \le Z \le 1,38) =$

$P(Z \le 1,38) - P(Z \le -1,38) = 2P(Z \le 1,38) - 1 = 2\cdot 0,9162 - 1 = 0,8324$

Opción B

Problema 14.3.5 (2,5 puntos) Un dietista veterinario ha establecido la alimentación diaria (en términos de grasas, carbohidratos y proteínas) de un quebrantahuesos pirenaico que se ha recogido en el hogar de recuperación de fauna en el que trabaja. Se sabe que el quebrantahuesos necesita 500 g de alimento al día y que necesita 2500 Kcal. También se sabe que cada gramo de grasa proporciona 9 Kcal, cada gramo de carbohidratos 4 Kcal y cada gramo de proteínas 4 Kcal. Debido a que el ave ha llegado en un estado de debilidad, el veterinario estima que el consumo de carbohidratos debe ser 40 g más del doble de proteínas. Determine la cantidad de kilocalorías diaria que obtendrá el quebrantahuesos procedentes de grasas, de carbohidratos y de proteínas.

Solución:

Sean x gramos de grasas, y gramos de carbohidratos y z gramos de proteínas.

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=500\\ 9x+4y+4z=2500\\ y=40+2z\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=500\\ 9x+4y+4z=2500\\ y-2z=40\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=100 \text{ gramos}\\ y=280 \text{ gramos}\\ z=120 \text{ gramos}\end{array}\right.$$

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500\\ 9 & 4 & 4 & 2500\\ 0 & 1 & -2 & 40\end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1\\ F_2-9F_1\\ F_3\end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500\\ 0 & -5 & -5 & -2000\\ 0 & 1 & -2 & 40\end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1\\ F_2\\ 5F_3+F_2\end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500\\ 0 & -5 & -5 & -2000\\ 0 & 0 & -15 & -1800\end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -15z=-1800 \Longrightarrow z=120\\ -5y-600=-2000 \Longrightarrow y=280\\ x+280+120=500 \Longrightarrow x=100\end{array}\right.$$

La solución sería:

$$\left\{\begin{array}{l} 100\cdot 9 = 900 \text{ Kcal de las grasas}\\ 280\cdot 4 = 1120 \text{ Kcal de los carbohidratos}\\ 120\cdot 4 = 480 \text{ Kcal de las proteínas}\end{array}\right.$$

Problema 14.3.6 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \dfrac{|x^2 - x - 2|}{x^2 + 2x + 1}$, se pide:

a) (1 punto) Hallar, si existen, las asíntotas de la gráfica de f.

b) (1,5 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y calcular, si existen, sus extremos relativos.

Solución:

$h(x) = x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 2$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,\infty)$
	$+$	$-$	$+$
$h(x)$	$+$	$+$	$+$

$$\Longrightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{h(x)}{x^2+2x+1} & \text{si} \quad x \le -1 \\ \dfrac{-h(x)}{x^2+2x+1} & \text{si} \quad -1 < x \le 2 \\ \dfrac{h(x)}{x^2+2x+1} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Luego $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x^2+2x+1} & \text{si} \quad x \le -1 \\ \dfrac{-x^2+x+2}{x^2+2x+1} & \text{si} \quad -1 < x \le 2 \\ \dfrac{x^2-x-2}{x^2+2x+1} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

a) Asíntotas:

- Verticales en $x = -1$:

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{x^2-x-2}{x^2+2x+1} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{2x-1}{2x+2} = \left[\frac{-3}{0^-}\right] = +\infty;$$

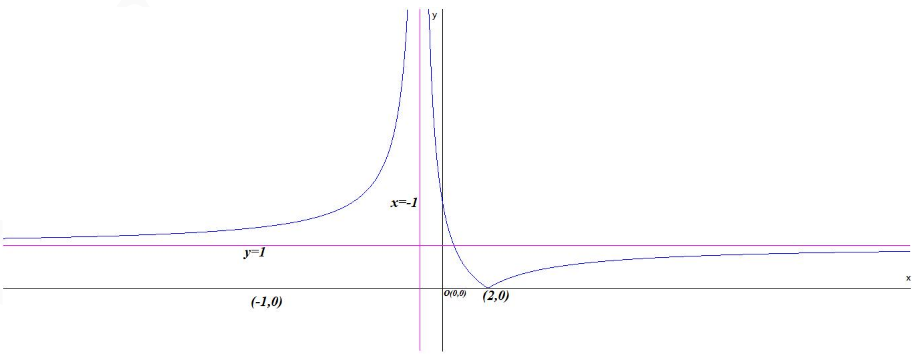
$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{-x^2+x+2}{x^2+2x+1} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{-2x+1}{2x+2} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty;$$

- Horizontales: $y = 1$

$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x^2-x-2}{x^2-2x+1} = 1$

$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2-x-2}{x^2-2x+1} = 1$

- Oblicuas no hay por haber horizontales.



b) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x < -1 \\ -\dfrac{3}{(x+1)^2} & \text{si} \quad -1 < x < 2 \\ \dfrac{3}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

La derivada no se anula nunca lo que nos afirma que no hay extremos por este método de cálculo. La función será creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ y decreciente en el $(-1, 2)$, con un mínimo relativo en el punto$(2, 0)$.

Problema 14.3.7 (2,5 puntos) Dadas la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$ y los planos $\pi \equiv x + 2y + 2z - 1 = 0$ y $\pi' \equiv 2x + 2y + z + 4 = 0$, se pide:

a) (0,75 puntos) Comprobar que los planos π y π' se cortan. Hallar el ángulo que forman.

b) (0,75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π. Hallar, si es posible, el punto de corte.

c) (1 punto) Hallar los puntos de la recta r que equidistan de los planos π y π'.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3, 1, -1) \\ P_r(1, 0, -2) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{u_\pi} = (1, 2, 2); \quad \overrightarrow{u_{\pi'}} = (2, 2, 1)$$

a) $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{2}{2} \neq \dfrac{2}{1} \Longrightarrow \pi$ y π' se cortan.

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{u_\pi} \cdot \overrightarrow{u_{\pi'}}|}{|\overrightarrow{u_\pi}| \cdot |\overrightarrow{u_{\pi'}}|} = \frac{|2 + 4 + 2|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{9}} = \frac{8}{9} \Longrightarrow \alpha = 27^\circ 15' 58''$$

b) Sustituimos r en π: $(1 + 3\lambda) + 2\lambda + 2(-2 - \lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{4}{3}$ r y π se cortan en el punto:$\left(5, \dfrac{4}{3}, -\dfrac{10}{3}\right)$

c) $P \in r \Longrightarrow P\,(1 + 3\lambda, \lambda, -2 - \lambda)$ y tenemos: $d(P, \pi) = d(P, \pi') \Longrightarrow$

$$\frac{|(1 + 3\lambda) + 2\lambda + 2(-2 - \lambda) - 1|}{\sqrt{9}} = \frac{|2(1 + 3\lambda) + 2\lambda + (-2 - \lambda) + 4|}{\sqrt{9}} \Longrightarrow$$

$$|3\lambda - 4| = |7\lambda + 4| \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\lambda - 4 = 7\lambda + 4 \Longrightarrow \lambda = -2 \Longrightarrow Q_1(-5, -2, 0) \\ 3\lambda - 4 = -7\lambda - 4 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow Q_2(1, 0, -2) \end{array} \right.$$

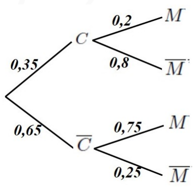
Problema 14.3.8 (2,5 puntos) Siete de cada veinte personas que entran en cierta joyería acaban comprando algún artículo. El 75 % de las personas que se marchan sin comprar nada tienen menos de 50 años y el 80 % de las personas que realizan alguna compra tienen al menos 50 años. Entra un cliente en la joyería. Se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea menor de 50 años.

b) (1,25 puntos) Sabiendo que tiene como mínimo 50 años, hallar la probabilidad de que salga de la tienda sin haber comprado nada.

Solución:
Sean C compran, $\overline{C}$ no compran, M menos de 50 años y $\overline{M}$ no es menor de 50 años.

$$P(C) = \frac{7}{20} = 0,35;\;\; P(M|\overline{C}) = 0,75;\;\; P(\overline{M}|C) = 0,8$$



a) $P(M) = P(M|C)P(C) + P(M|\overline{C})P(\overline{C}) =$
$0,2 \cdot 0,35 + 0,75 \cdot 0,65 = 0,5575$

b) $P(\overline{C}|\overline{M}) = \dfrac{P(\overline{M}|\overline{C})P(\overline{C})}{P(\overline{M})} = \dfrac{0,25 \cdot 0,65}{1 - 0,5575} = 0,3672$

14.4. Extraordinaria

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
TIEMPO: 90 minutos.

Opción A

Problema 14.4.1 (2,5 puntos)
Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular el determinante de A^tA.

b) (0,5 puntos) Calcular el rango de BA en función de b.

c) (0,75 puntos) Calcular B^{-1} para $b = 2$.

d) (0,75 puntos) Para $b = 1$, calcular B^5.

Solución:

a) $A^tA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$|A^tA| = 0$

b) $BA = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & b & 0 \\ 2-b & 1 & 2b \end{pmatrix}$
$\begin{vmatrix} 2b & b \\ 2-b & 1 \end{vmatrix} = b^2 = 0 \Longrightarrow b = 0$
Si $b \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(BA) = 2$
Si $b = 0 \Longrightarrow$ Rango$(BA) = 1$

c) Si $b = 2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |B| = 4 \neq 0 \Longrightarrow \exists B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

d) $B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \cdots, B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 14.4.2 (2,5 puntos) Un equipo de ingenieros realiza pruebas de consumo de un nuevo vehículo híbrido. El gasto en litros de combustible por cada 100 kilómetros en función de la velocidad, medida en decenas de kilómetros por hora, es

$$c(v) = \begin{cases} \dfrac{5v}{3} & \text{si} \quad 0 \le v < 3 \\ 14 - 4v + \dfrac{v^2}{3} & \text{si} \quad v \ge 3 \end{cases}$$

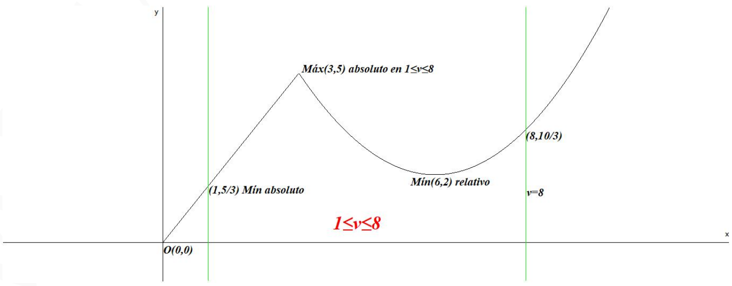
a) (1 punto) Si en una primera prueba el vehículo tiene que circular a más de 3 decenas de kilómetros por hora, ¿a qué velocidad debe ir el vehículo para obtener un consumo mínimo?

b) (1,5 puntos) Si en otra prueba el vehículo debe circular a una velocidad v tal que $1 \le v \le 8$, ¿cuáles serán el máximo y el mínimo consumo posibles del vehículo?

Solución:

a) $c(v) = 14 - 4v + \dfrac{v^2}{3} \Longrightarrow c'(v) = -4 + \dfrac{2v}{3} = 0 \Longrightarrow v = 6$
$c''(v) = \dfrac{2}{3} \Longrightarrow c''(6) = \dfrac{2}{3} > 0 \Longrightarrow v = 6$ es un mínimo relativo, en nuestro caso también es absoluto. El vehículo tiene que circular a 60 km/h para que el consuma sea mínimo.

b) En la rama $1 \le v < 3 \Longrightarrow c(v) = \dfrac{5v}{3}$ es $c(1) = \dfrac{5}{3}$ y $c(3) = 5$ el consumo es creciente en esta rama. Cuando la velocidad llega a 3 decenas $c(3) = 5$, a partir de este momento el consumo decrece hasta llegar al mínimo calculado anteriormente $c(6) = 2$ y a partir de esta velocidad el consumo es siempre creciente llegando a $c(8) = \dfrac{10}{3}$ consumo inferior a $c(3) = 5$, luego el consumo máximo se tiene al circular a 30 km/h máximo absoluto, y el consumo mínimo sería cuando circula a 10 km/h $c(1) = \dfrac{5}{3}$, mínimo absoluto.



Problema 14.4.3 (2,5 puntos) Sean el plano $\pi : z = 1$, los puntos $P(1, 1, 1)$ y $Q(0, 0, 1)$ y la recta r que pasa por los puntos P y Q.

a) (0,25 puntos) Verifique que los puntos P y Q pertenecen al plano π.

b) (1 punto) Halle una recta paralela a r contenida en el plano $z = 0$.

c) (1,25 puntos) Halle una recta que pase por P y tal que su proyección ortogonal sobre el plano π sea la recta r, con la cual forme un ángulo $\dfrac{\pi}{4}$ radianes.

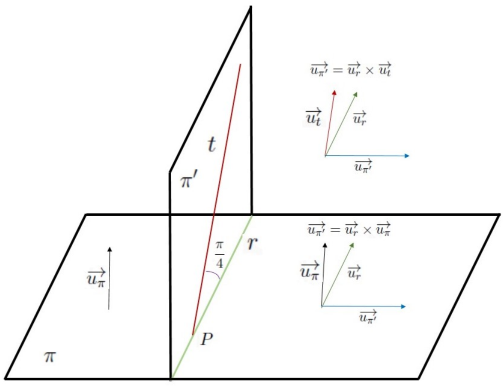
Solución:

a) Sustituyendo P en $\pi \Longrightarrow 0\cdot 1+0\cdot 1+1=1 \Longrightarrow P\in\pi$
Sustituyendo Q en $\pi \Longrightarrow 0\cdot 0+0\cdot 0+1=1 \Longrightarrow Q\in\pi$

b) $r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{QP}=(1,1,0)\\ P_r=Q(0,0,1)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=\lambda\\ z=1\end{array}\right.$
Sustituimos r en $z=0 \Longrightarrow 0\cdot\lambda+0\cdot\lambda+1=1\neq 0 \Longrightarrow r\parallel\{z=0\}$
$s\parallel r$ y $s\in\{z=0\} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{u_s}=(1,1,0)$ y P_s cualquier punto de $z=0$ por ejemplo $P_s(0,0,0)$:

$$s:\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=\lambda\\ z=0\end{array}\right.$$

c) Sea el plano $\pi'\perp\pi$ tal que $t\subset\pi'$ y $r=\pi'\cap\pi$, es decir, r es la proyección ortogonal de t sobre π. Si $t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(a,b,c)\\ P_t=P(1,1,1)\end{array}\right.$ tendremos:



$$\overrightarrow{u_{\pi'}}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_t}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ a & b & c\end{vmatrix}=(c,-c,b-a)\ \text{ y}$$

$$\overrightarrow{u_{\pi'}}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_\pi}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(1,-1,0)\Longrightarrow$$

$$(c,-c,b-a)=(1,-1,0)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}c=1\\ a=b\end{array}\right.$$

Por otro lado $\cos(\widehat{r,t})=\dfrac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_t}|}{|\overrightarrow{u_r}|\cdot|\overrightarrow{u_t}|}=\dfrac{|(1,1,0)\cdot(a,b,c)|}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|a+b|}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Longrightarrow$
$|a+b|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\Longrightarrow(a+b)^2=a^2+b^2+c^2\Longrightarrow$
$2ab=c^2=1\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=b\\ 2ab=1\end{array}\right.\Longrightarrow a^2=\dfrac{1}{2}\Longrightarrow a=b=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

☛ Si $a=b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Longrightarrow \overrightarrow{u_t}=(a,b,c)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},1\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,\sqrt{2})$

$$t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(1,1,\sqrt{2})\\ P_t=P(1,1,1)\end{array}\right.\Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=1+\sqrt{2}\lambda\end{array}\right.$$

☛ Si $a=b=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Longrightarrow \overrightarrow{u_t}=(a,b,c)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}},1\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,-\sqrt{2})$

$$t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(1,1,-\sqrt{2})\\ P_t=P(1,1,1)\end{array}\right.\Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=1-\sqrt{2}\lambda\end{array}\right.$$

Problema 14.4.4 (2,5 puntos) Sabiendo que $P(A)=0,5$, $P(A|B)=0,625$ y $P(A\cup B)=0,65$, se pide calcular:

a) (1,5 puntos) $P(B)$ y $P(A\cap B)$.

b) (1 punto) $P(A|A\cup B)$ y $P(A\cap B|A\cup B)$.

Solución:

a) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}\Longrightarrow 0,625P(B)=P(A\cap B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Longrightarrow 0,65=0,5+P(B)-P(A\cap B)\Longrightarrow 0,15=P(B)-P(A\cap B)\Longrightarrow 0,15=P(B)-0,625P(B)=0,375P(B)\Longrightarrow P(B)=\dfrac{0,15}{0,375}=0,4$

$P(A\cap B)=0,625P(B)=0,625\cdot 0,4=0,25$

b) $P(A|A\cup B)=\dfrac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(A)}{P(A\cup B)}=\dfrac{0,5}{0,65}=0,7692$

$P(A\cap B|A\cup B)=\dfrac{P((A\cap B)\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)}=\dfrac{0,25}{0,65}=0,3846$

Opción B

Problema 14.4.5 (2,5 puntos) Dado el sistema $\left\{\begin{array}{c}-2x+y+kz=1\\ kx-y-z=0\\ -y+(k-1)z=3\end{array}\right.$, se pide:

a) (1,25 puntos) Discutirlo en función del parámetro k.

b) (0,5 puntos) Resolverlo para $k=3$.

c) (0,75 puntos) Resolverlo para $k=3/2$ y especificar, si es posible, una solución particular con $x=2$.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&k&1\\ k&-1&-1&0\\ 0&-1&k-1&3\end{array}\right)$; $|A|=k(3-2k)=0\Longrightarrow$

$$k=0,\ \ k=\frac{3}{2}$$

☛ Si $a \neq 0$ y $a \neq \dfrac{3}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $k = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

☛ Si $k = \dfrac{3}{2}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 & 3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 4F_2 + 3F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & -1 & 1/2 & 3 \\ 0 & -1 & 1/2 & 3 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & -1 & 1/2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

b) Si $k = 3$:

$$\left\{\begin{array}{l} -2x + y + 3z = 1 \\ 3x - y - z = 0 \\ -y + 2z = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1/3 \\ y = -5/3 \\ z = 2/3 \end{array}\right.$$

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 + 3F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 9z = 6 \Longrightarrow z = 2/3 \\ y + 14/3 = 3 \Longrightarrow y = -5/3 \\ -2x - 5/3 + 2 = 1 \Longrightarrow x = -1/3 \end{array}\right.$$

c) Si $k = \dfrac{3}{2}$ (SCI):

$$\left\{\begin{array}{l} -2x + y + \dfrac{3}{2}z = 1 \\ \\ \dfrac{3}{2}x - y - z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ \\ y = -3 + \dfrac{1}{2}\lambda \\ \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 14.4.6 (2,5 puntos) Dadas las funciones

$$f(x) = 2 + 2x - 2x^2 \text{ y } g(x) = 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3,$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $h(x) = |f(x)|$

b) (1,5 puntos) Hallar el área de la región acotada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ y $x = 2$.

Solución:

a) la función es el valor absoluto de un polinomio y es continua en $\mathbb{R}$, también es derivable en las tres ramas de la función, hay que estudiar la derivabilidad en los puntos $f(x) = 0 \Longrightarrow$ $2 + 2x - 2x^2 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Longrightarrow x = 1,62$ y $x = -0,62$.

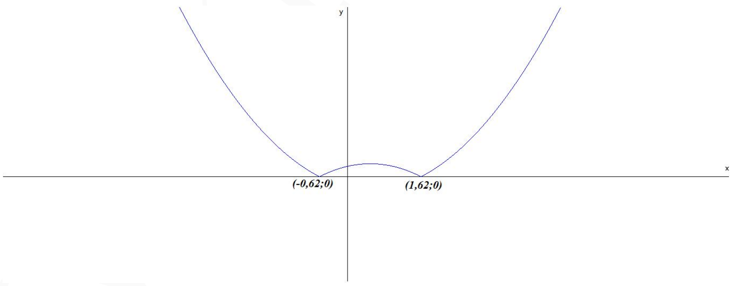
	$(-\infty; -0,62)$	$(-0,62; 1,62)$	$(1,62; +\infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$
$h(x) =$	$-f(x)$	$f(x)$	$-f(x)$

Tenemos:

$$h(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x - 2 & \text{si} \quad x < -0,62 \\ -2x^2 + 2x + 2 & \text{si} \quad -0,62 \le x < 1,62 \\ 2x^2 - 2x - 2 & \text{si} \quad x \ge 1,62 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$h'(x) = \begin{cases} 4x - 2 & \text{si} \quad x < -0,62 \\ -4x + 2 & \text{si} \quad -0,62 \le x < 1,62 \\ 4x - 2 & \text{si} \quad x \ge 1,62 \end{cases}$$

- Derivabilidad en $x = -0,62$:
  $h'(-0,62^-) = -4,47$ y $h'(-0,62^+) = 4,47 \Longrightarrow h'(-0,62^-) \ne h'(-0,62^+) \Longrightarrow h$ no es derivable en $x = -0,62$
- Derivabilidad en $x = 1,62$:
  $h'(1,62^-) = -4,47$ y $h'(1,62^+) = 4,47 \Longrightarrow h'(1,62^-) \ne h'(1,62^+) \Longrightarrow h$ no es derivable en $x = 1,62$
- La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-0,62; 1,62\}$



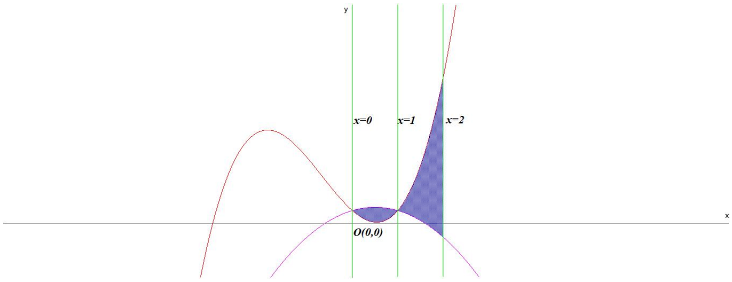
b) Hacemos $f(x) = g(x) \Longrightarrow 2 + 2x - 2x^2 = 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3 \Longrightarrow -2x(x^2 + 3x - 4) = 0 \Longrightarrow$ $x = -4$, $x = 0$ y $x = 1$. Entre las rectas $x = 0$ y $x = 2$ las curvas se cortan en $x = 1 \Longrightarrow$ tendremos dos recintos de integración $S_1 : [0, 1]$ y $S_2 : [1, 2]$

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\,dx = \int (-2x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx = -\frac{x^4}{2} - 2x^3 + 4x^2$$

$$S_1 = \int_0^1 (-2x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx = F(1) - F(0) = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}$$

$$S_2 = \int_1^2 (-2x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx = F(2) - F(1) = -8 - \frac{3}{2} = -\frac{19}{2}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{3}{2} + \frac{19}{2} = \frac{22}{2} = 11\ u^2$$



Problema 14.4.7 (2,5 puntos) Dados el plano $\pi : x + 3y + 2z + 14 = 0$ y la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ z = 5 \end{array} \right.$, se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar el punto del plano π más próximo al origen de coordenadas.

b) (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano π.

c) (1 punto) Hallar la recta con dirección perpendicular a r, que esté contenida en π, y que corte al eje OZ.

Solución:

$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ z = 5 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = \lambda \\ z = 5 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (0,1,0) \\ P_r(2,0,5) \end{array} \right.$

$\pi : x + 3y + 2z + 14 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = (1,3,2)$

a) Calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $O(0,0,0) \in t$:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,3,2) \\ P_t = O(0,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right.$$

Sustituyendo t en π: $\lambda + 3(3\lambda) + 2(2\lambda) + 14 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$ y sustituyendo en t tenemos el punto $Q\,(-1,-3,-2)$

b) Sea la recta $s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (0,0,1) \\ P_s = O(0,0,0) \end{array} \right.$ que define el eje OZ. La proyección ortogonal de esta recta sobre el plano π se calcula como la intersección de dos planos, uno es el mismo π y otro π':

$$\pi' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (1,3,2)\overrightarrow{u_s} = (0,0,1) \\ P_s = O(0,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi' = \left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| = 3x - y = 0$$

La proyección $s' : \left\{ \begin{array}{c} 3x - y = 0 \\ x + 3y + 2z + 14 = 0 \end{array} \right.$

c) Sea $\overrightarrow{u_l} = (a,b,c)$ el vector director de la recta que buscamos, tiene que cumplirse:

$$\overrightarrow{u_l} \perp \overrightarrow{u_\pi} = (a,b,c) \cdot (1,3,2) = a + 3b + 2c = 0$$

$$\overrightarrow{u_l} \perp \overrightarrow{u_r} = (a,b,c) \cdot (0,1,0) = b = 0$$

Luego $\left\{\begin{array}{l} b=0 \\ a+2c=0 \Longrightarrow a=-2c \end{array}\right. \Longrightarrow \overrightarrow{u_l}=(-2c,0,c)=c(-2,0,1)$
Ahora calculamos el punto de corte de π con $OZ \Longrightarrow 0+0+2z+14=0 \Longrightarrow z=-7 \Longrightarrow P_l(0,0,-7)$

$$l: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_l}=(-2,0,1) \\ P_l(0,0,-7) \end{array}\right. \Longrightarrow l: \left\{\begin{array}{l} x=-2\lambda \\ y=0 \\ z=-7+\lambda \end{array}\right.$$

Problema 14.4.8 (2,5 puntos) El 65 % de los universitarios de 18 años que intentan superar el examen práctico de conducir lo consigue a la primera. Se escogen al azar 10 universitarios de 18 años que ya han superado el examen práctico de conducir. Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente 3 de ellos necesitaran más de un intento para superar el examen práctico de conducir.

b) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos haya necesitado más de un intento para superar el examen práctico de conducir.

c) (1 punto) Aproximando por una distribución normal, determinar la probabilidad de que, dados 60 de estos universitarios, como mínimo la mitad superase el examen práctico de conducir a la primera.

Solución:

a) Tenemos una binomial $B(10;0,35)$

$$P(X=3)=\binom{10}{3}\cdot 0,35^3\cdot 0,65^7=0,2522$$

b) Tenemos una binomial $B(10;0,35)$

$$P(X>0)=1-P(X=0)=1-\binom{10}{0}\cdot 0,35^0\cdot 0,65^{10}=0,9865$$

c) Ahora tenemos una binomial $B(60;0,65)$. Como $n>10$, $np=39>5$ Y $nq=21>5 \Longrightarrow B(60;0,65) \stackrel{N(np,\sqrt{npq})}{=} N(39;3,6946)$
$P(X\geq 30)=P\left(Z\geq \dfrac{29,5-39}{3,6946}\right)=P(Z\geq -2,57)=P(Z\leq 2,57)=0,9949$

14.5. Extraordinaria-Coincidente

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
TIEMPO: 90 minutos.

Opción A

Problema 14.5.1 (2,5 puntos) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b+c & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} c & 2a+4 \\ 4b+4c+2 & 11 \end{pmatrix}$, Determine los valores de a, b y c sabiendo que dichas matrices verifican simultáneamente estas tres condiciones:

- la matriz AB es simétrica, es decir, coincide con su traspuesta.
- la matriz $A+B$ no tiene inversa.
- la matriz $AB - C$ es igual a la matriz identidad.

Solución:

- $AB = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b+c & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2(b+c) & 2a+4 \\ 2(2b+2c+1) & 12 \end{pmatrix}$
  $BA = \begin{pmatrix} a+2(b+c) & 2a+4 \\ 2(2b+2c+1) & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2(b+c) & 2(2b+2c+1) \\ 2a+4 & 12 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
  $2a+4 = 2(2b+2c+1) \Longrightarrow a - 2b - 2c = -1$

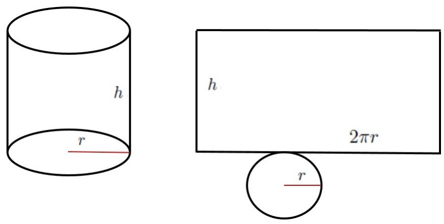
- $A + B = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b+c & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & 4 \\ b+c+2 & 6 \end{pmatrix}$
  $|A+B| = 2(3a-2b-2c-1) = 0 \Longrightarrow 3a - 2b - 2c = 1$

- $AB - C = I \Longrightarrow \begin{pmatrix} a+2(b+c) & 2a+4 \\ 2(2b+2c+1) & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & 2a+4 \\ 4b+4c+2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
  $\begin{pmatrix} a+2b+c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow a + 2b + c = 1$

- $\left\{ \begin{array}{l} a - 2b - 2c = -1 \\ 3a - 2b - 2c = 1 \\ a + 2b + c = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{array} \right.$
  Por Gauss:
  $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$
  $\left\{ \begin{array}{l} 2a = 2 \Longrightarrow a = 1 \\ 2a - c = 0 \Longrightarrow c = 2 \\ 1 - 2b - 4 = -1 \Longrightarrow b = -1 \end{array} \right.$

Problema 14.5.2 (2,5 puntos) Se quiere construir un depósito de barro cilíndrico de volumen 432π dm^3 para elaborar un vino artesanal usando técnicas antiguas. El depósito se sitúa verticalmente, apoyado sobre su base circular. Se sabe que al utilizar ese material poroso se produce, con el tiempo, una pérdida de líquido a través de la superficie que está en contacto con el vino. Dicha pérdida a través de la pared lateral es de 10 cl por dm^2 y a través del suelo de 20 cl por dm^2. Calcular las dimensiones que debe tener el depósito para que la filtración de vino sea mínima.

Solución:



- ☛ $V = 432\pi = \pi r^2 h \Longrightarrow h = \dfrac{432}{r^2}$
- ☛ Área lateral $S_l(r,h) = 2\pi r h \Longrightarrow$ $S_l(r) = 2\pi r \dfrac{432}{r^2} = \dfrac{864\pi}{r}$. La pérdida por este área sería: $P_l(r) = 0,1\dfrac{864\pi}{r} = \dfrac{86,4\pi}{r}$
- ☛ Área de la base $S_b(r) = \pi r^2$. La pérdida por este área sería: $P_b(r) = 0,2\pi r^2$

- ☛ La pérdida total $P_t(r) = 0,2\pi r^2 + \dfrac{86,4\pi}{r} = \dfrac{\pi(r^3+432)}{5r}$
- ☛ $P_t'(r) = \dfrac{2\pi(r^3-216)}{5r^2} = 0 \Longrightarrow r = 6$ dm

	$(0,6)$	$(6,\infty)$
$P_t'(r)$	$-$	$+$
$P(r)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en $(0,6)$ y creciente en $(6,\infty)$ con un mínimo relativo para un radio de 6 dm con una pérdida total y mínima de $P_t(6) = \dfrac{108\pi}{5} \simeq 67,858$ cl. La altura del depósito es de $h = \dfrac{432}{r^2} = \dfrac{432}{36} = 12$ dm

Problema 14.5.3 (2,5 puntos) Consideremos las rectas

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}; \quad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x+2z=1 \\ y-z=1 \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Determine la posición relativa de las rectas r y s, y calcule su intersección si existe.

b) (1 punto) Calcule una ecuación del plano que contiene a r y s.

c) (0,5 puntos) Indique el ángulo que forman las rectas r y s.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,-1,1) \\ P_r(0,1,2) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 2+\lambda \end{array} \right.$$

$$s : \left\{ \begin{array}{l} x+2z=1 \\ y-z=1 \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1-2\mu \\ y = 1+\mu \\ z = \mu \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-2,1,1) \\ P_s(1,1,0) \end{array} \right.$$

a) $\overrightarrow{P_rP_s} = (1,1,0) - (0,1,2) = (1,0,-2)$

$\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow r$ y s está en el mismo plano.

Como Rango$\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow r$ y s se cortan.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1-2\mu \\ 1-\lambda = 1+\mu \\ 2+\lambda = \mu \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow P_{\text{corte}}(-1,2,1)$$

b) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,-1,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-2,1,1) \\ P_s(1,1,0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2x - 3y - z + 5 = 0$

$$\pi : 2x + 3y + z - 5 = 0$$

c) $\cos(\alpha) = \dfrac{|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r}| \cdot |\overrightarrow{u_s}|} = \dfrac{|2-1+1|}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = \dfrac{2}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \Longrightarrow \alpha = 61^\circ 52' 28''$

Problema 14.5.4 (2,5 puntos) Se tiene un dado de nueve caras numeradas con los números del 2 al 10, cada uno con igual probabilidad de salir al lanzar el dado.

a) (0,5 puntos) Si se lanza una vez el dado, calcule la probabilidad del suceso "el resultado es un número primo".

b) (1 punto) Se lanza el dado dos veces consecutivas y se suman los resultados. Calcule la probabilidad de que la suma sea par.

c) (1 punto) Se lanza el dado dos veces consecutivas y la suma de los dos resultados es impar. Calcule la probabilidad de que el resultado del primer lanzamiento haya sido primo.

Solución:

a) $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
$P(\text{primo}) = \dfrac{4}{9} = 0,4444444444$

b) $\Omega =$

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	12	13	14	15	16	17	18	19	20

$\Longrightarrow P(\text{par}) = \dfrac{41}{81} = 0,5061728395$

c) Sea P suma par, I suma impar y $Pr1$ primo en el primer lanzamiento.
$P(Pr1|I) = \dfrac{P(Pr1 \cap I)}{P(I)} = \dfrac{\frac{19}{81}}{1 - \frac{41}{81}} = \dfrac{19}{40} = 0,475$

Opción B

Problema 14.5.5 (2,5 puntos) Una empresa conservera fabrica latas de macedonia de frutas (melocotón, pera y piña) de 1 kg. Las latas contienen 750 gramos de fruta y el resto es agua y azúcar. Si la empresa utiliza la misma cantidad de todas las frutas, el coste en fruta por lata para la conservera es de 1,8 euros y, si utiliza 0,25 kg de melocotón y 100 gramos más de piña que de pera, el coste en fruta por lata es de 1,9 euros. Si la empresa paga 18000 euros por un lote compuesto de 3000 kg de melocotón, 3000 kg de pera y 2000 kg de piña, calcule el coste para la empresa de cada kg de melocotón, de pera y de piña.

Solución:
Sean x coste kg de melocotón, y coste kg de pera y z coste kg de piña.

$$\left\{\begin{array}{c} 0,25x+0,25y+0,25z=1,8 \\ 0,25x+0,2y+0,3z=1,9 \\ 3000x+3000y+2000z=18000 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x+5y+5z=36 \\ 5x+4y+6z=38 \\ 3x+3y+2z=18 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2€ \\ y=1,6€ \\ z=3,6€ \end{array}\right.$$

Por Gauss:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 5 & 36 \\ 5 & 4 & 6 & 38 \\ 3 & 3 & 2 & 18 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ 5F_3-3F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 5 & 36 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -18 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} -5z=-18 \Longrightarrow z=3,6 \\ -y+3,6=2 \Longrightarrow y=1,6 \\ 5x+8+18=36 \Longrightarrow x=2 \end{array}\right.$$

Problema 14.5.6 (2,5 puntos) Sea la función $f(x)=x^4-4x-1$.

a) (0,5 puntos) Estudie los máximos y los mínimos relativos de f.

b) (0,5 puntos) Justifique que la función f se anula en un punto del intervalo $[0,2]$.

c) (0,75 puntos) Justifique que la ecuación $x^4-4x-1=0$ solo tiene dos raíces reales.

d) (0,75 puntos) Halle el área comprendida entre la gráfica de la función f y la recta $y=-4x$.

Solución:

a) $f'(x)=4x^3-4=0 \Longrightarrow x=1$

	$(-\infty,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en $(-\infty,1)$ y creciente en $(1,\infty)$ con un mínimo relativo en $(1,-4)$. Por la segunda derivada sería $f''(x)=12x^2 \Longrightarrow f''(1)=12>0 \Longrightarrow x=1$ es un mínimo relativo.

b) La función es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser un polinomio y, por tanto, continua en $[0,2]$. Además $f(0)=-1<0$ y $f(2)=7>0$, por el teorema de Bolzano $\exists c\in(0,2)$ tal que $f(c)=0$.

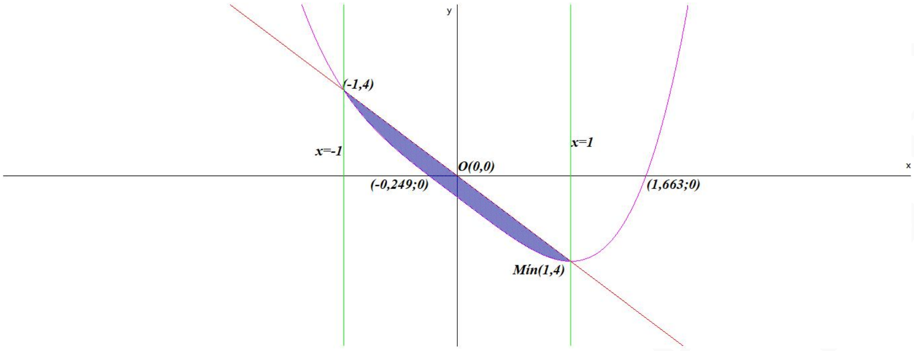
c) Tenemos una función continua, que cumple:

- ☛ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- ☛ La función decrece $(-\infty,1)$ y crece $(1,\infty)$ con un mínimo relativo en $(1,-4)$, por debajo del eje de abscisas.
- ☛ la función tiene que cortar necesariamente solo en dos puntos del eje de abscisas para llegar a ese mínimo.

d) Calculamos los cortes de ambas funciones: $x^4-4x-1=-4x \Longrightarrow x^4-1=0 \Longrightarrow x=\pm 1$, solo habrá un recinto de integración $S_1:[-1,1]$.

$$S_1=\int_{-1}^{1}(f(x)-g(x))\,dx=\int_{-1}^{1}(x^4-1)\,dx=\left.\frac{x^5}{5}-x\right]_{-1}^{1}=-\frac{4}{5}-\frac{4}{5}=-\frac{8}{5}$$

$$S = |S_1| = \frac{8}{5} \simeq 1,6\ u^2$$



Problema 14.5.7 (2,5 puntos) Dada la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=2 \\ x-z=4 \end{array} \right.$ y el punto A$(4,-3,4)$, se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular la distancia del punto A a la recta r. ¿En qué punto de la recta se alcanza?

b) (1,25 puntos) Calcular el volumen del tetraedro determinado por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$ y el plano perpendicular a r que pasa por el punto A.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=2 \\ x-z=4 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x=4+\lambda \\ y=-2-2\lambda \\ z=\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,-2,1) \\ P_r(4,-2,0) \end{array} \right.$$

a) Para encontrar el punto de r más próximo a A calculamos un plano $\pi \perp r$ tal que $A \in \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} = (1,-2,1) \Longrightarrow \pi : x-2y+z+\lambda = 0 \overset{A\in\pi}{\Longrightarrow} 4+6+4+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -14 \Longrightarrow \pi : x-2y+z-14=0$.
Ahora calculamos el punto A' de corte entre π y r que será el buscado:

$$(4+\lambda) - 2(-2-2\lambda) + \lambda - 14 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow A'(5,-4,1)$$

$$|\overrightarrow{AA'}| = |(5,-4,1)-(4,-3,4)| = |(1,-1,-3)| = \sqrt{11}\ u$$

Otra forma de calcular la distancia:

$\overrightarrow{P_rA} = (4,-3,4)-(4,-2,0) = (0,-1,4)$

$$\left|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{P_rA}\right| = |\left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{array} \right|| = |(-7,-4,-1)| = \sqrt{66}$$

$$d(A,r) = \frac{\left|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{P_rA}\right|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{\sqrt{66}}{\sqrt{6}} = \sqrt{11}\ u$$

b) Calculado en el apartado anterior: $\pi : x - 2y + z - 14 = 0$
Este plano cortará con los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ en puntos de los ejes coordenados: Con OX es $y = 0$, $z = 0 \Longrightarrow x = 14 \Longrightarrow P(14, 0, 0)$
Con OY es $x = 0$, $z = 0 \Longrightarrow y = -7 \Longrightarrow Q(0, -7, 0)$
Con OZ es $x = 0$, $y = 0 \Longrightarrow z = 14 \Longrightarrow H(0, 0, 14)$
$\overrightarrow{OP} = (14, 0, 0)$, $\overrightarrow{OQ} = (0, -7, 0)$ y $\overrightarrow{OH} = (14, 0, 0)$

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OH}\right]\right| = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{vmatrix}| = \frac{1}{6}|-1372| = \frac{686}{3}\ u^3$$

Problema 14.5.8 (2,5 puntos) Un determinado jugador de baloncesto tiene un porcentaje de éxito del 85 % en tiros libres y del 20 % en tiros desde el centro del campo.

a) (1,5 puntos) Para finalizar el calentamiento antes de cada partido el citado jugador lanza cuatro tiros libres y cuatro tiros desde el centro del campo. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte tres de los cuatro tiros libres? ¿Cuál es la probabilidad de que acierte tres de los cuatro tiros desde el centro del campo? ¿Y la de que acierte tres tiros libres y tres desde el centro del campo de los ocho lanzados?

b) (1 punto) Calcule, mediante la aproximación por una normal, la probabilidad de que el citado jugador falle al menos el 20 % de los tiros libres de una serie de 200 tiros libres.

Solución:

a) Para tiros libres $B(4; 0, 85) \Longrightarrow P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot 0, 85^3 \cdot 0, 15^1 = 0, 368475$

Para tiros desde el centro del campo $B(4; 0, 2) \Longrightarrow P(Y = 3) = \binom{4}{3} \cdot 0, 2^3 \cdot 0, 8^1 = 0, 0256$

$P(\{X = 3\} \cap \{Y = 3\}) = 0, 368475 \cdot 0, 0256 = 0, 00943296$

b) $n = 200 > 10$, $np = 200 \cdot 0, 15 = 30 > 5$ y $nq = 200 \cdot 0, 85 = 170 > 5 \Longrightarrow$
$B(200; 0, 15) \overset{N\left(np, \sqrt{npq}\right)}{\approx} N(30; 5, 05)$

$$P(X \geq (0, 2 \cdot 200)) = P(X \geq 40) = P\left(Z \geq \frac{39, 5 - 30}{5, 05}\right) = P(Z \geq 1, 88) =$$

$$1 - P(Z \leq 1, 88) = 1 - 0, 9699 = 0, 0301$$

Capítulo 15

Murcia

15.1. Ordinaria

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

Problema 15.1.1 (2,5 puntos) Una papelería vende bolígrafos, rotuladores y libretas. Una libreta cuesta el doble que un bolígrafo y un rotulador juntos, un bolígrafo cuesta la sexta parte que una libreta, y un rotulador cuesta el doble que un bolígrafo.

a) (0,75 puntos) Denotando por x el precio de cada bolígrafo, por y el de cada rotulador y por z el de cada libreta, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio.

b) (0,25 puntos) Justifique que, con estos datos, no se puede conocer el precio de cada uno de los tres productos.

c) (1 punto) Calcule el conjunto de todas las posibles soluciones del sistema.

d) (0,5 puntos) Sabiendo que una libreta cuesta 18 euros, calcule el precio de cada producto.

Solución:
Sean x el precio de cada bolígrafo, y el de cada rotulador y z el de cada libreta.

a) $\left\{\begin{array}{l} z = 2(x+y) \\ x = \dfrac{z}{6} \\ y = 2x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + 2y - z = 0 \\ 6x - z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right.$

b) Es un sistema homogéneo que siempre tiene solución. Tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$$

el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

c) Una de las ecuaciones es combinación lineal de la otras dos, elimino la primera:

$$\left\{\begin{array}{l} 6x - z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 2\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 6\lambda \end{array}\right.$$

d) Si $z = 18€ \Longrightarrow 6\lambda = 18 \Longrightarrow \lambda = 3$, luego cada bolígrafo cuesta $x = 3€$, cada rotulador $y = 6€$ y cada libreta $z = 18€$

Problema 15.1.2 (2,5 puntos) Considere las siguientes matrices:
$A = \begin{pmatrix} a & a \\ -1 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) (0,5 puntos) Determine para qué valores del parámetro a la matriz A es regular (o invertible). Se sabe que cuando $a = -2$ la matriz A es regular (o invertible). Para ese valor de a:

b) (1 punto) Calcule la inversa de A y compruebe que $A \cdot A^{-1} = I$, con I la matriz identidad de orden 2.

c) (1 punto) Resuelva la ecuación matricial $AXA^{-1} + B = C^T$, donde C^T denota la matriz traspuesta de C.

Solución:

a) $|A| = a^2 + a = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = -1 \Longrightarrow \exists A^{-1} \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$

b) Si $a = -2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$

$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

c) $AXA^{-1} + B = C^T \Longrightarrow AXA^{-1} = C^T - B \Longrightarrow X = A^{-1}(C^T - B)A =$
$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 32 \\ -23 & -24 \end{pmatrix}$

Problema 15.1.3 (2,5 puntos) Calcule los siguientes límites:

a) (1,25 puntos) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - 1}{x \sin x}$

b) (1,25 puntos) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}}{3x}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - 1}{x \sin x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-2\sin 2x}{\sin x + x \cos x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-4\cos 2x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = -2$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}}{3x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{9+x}} + \frac{1}{2\sqrt{9-x}}}{3} = \dfrac{1}{9}$

Problema 15.1.4 (2,5 puntos) Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

a) (0,5 puntos) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) (0,5 puntos) Calcule la derivada de $f(x)$ y determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función.

c) (1 punto) Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

d) (0,5 puntos) Determine la primitiva de $f(x)$ que pasa por el punto $(1,1)$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1$

b) $f'(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty,0)$ y creciente en el $(0,\infty)$. La función tiene un mínimo relativo en $(0,0)$

c)

$$\begin{array}{l} \left(\quad x^2\right) : \left(x^2+1\right) = 1 + \dfrac{-1}{x^2+1} \\ \underline{\;-x^2-1\;} \\ \quad -1 \end{array}$$

$$F(x) = \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = x - \arctan x + C$$

d) $F(1) = 1 - \arctan 1 + C = 1 \Longrightarrow C = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4} \Longrightarrow F(x) = x - \arctan x + \dfrac{\pi}{4}$

Problema 15.1.5 (2,5 puntos) Considere las siguientes rectas:

$$r : \left\{\begin{array}{l} x - 2y = 5 \\ y + z = 0 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad s : \frac{x-8}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-3}{-1}$$

a) (1 punto) Compruebe que ambas rectas son paralelas.

b) (1 punto) Compruebe que el punto $P = (7,1,-1)$ está en la recta r y calcule su proyección ortogonal sobre la recta s.

c) (0,5 puntos) Calcule la distancia entre ambas rectas.

Solución:

a) $r : \left\{\begin{array}{l} x - 2y = 5 \\ y + z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow r : \left\{\begin{array}{l} x = 5 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,-1) \\ P_r(5,0,0) \end{array}\right.$

$s : \left\{\begin{array}{l} x = 8 + 2\lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{array}\right. \Longrightarrow s : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2,1,-1) \\ P_s(8,-3,3) \end{array}\right.$

$\overrightarrow{P_rP_s} = (3, -3, 3) = 3(1, -1, 1)$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

Las dos rectas o se cortan o son paralelas.
Como Rango$\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix}$=Rango$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \Longrightarrow r \parallel s$.

b) Sustituimos $P(7, 1, -1)$ en $r : \begin{cases} x - 2y = 5 \Longrightarrow 7 - 2 = 5 \\ y + z = 0 \Longrightarrow 1 - 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow P \in r$

Seguimos el siguiente método:

- ☛ Calculamos un plano $\pi \perp s$ tal que $P \in \pi$
  $\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_s} = (2, 1, -1) \Longrightarrow \pi : 2x + y - z + \lambda = 0 \overset{P\in\pi}{\Longrightarrow} 14 + 1 + 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -16 \Longrightarrow$
  $\pi : 2x + y - z - 16 = 0$
- ☛ El punto buscado P' será el punto de corte de s con π:
  $2(8 + 2\lambda) + (-3 + \lambda) - (3 - \lambda) - 16 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow P'(10, -2, 2)$

c) $d(r, s) = \left|\overrightarrow{PP'}\right| = |(10, -2, 2) - (7, 1, -1)| = |(3, -3, 3)| = 3\sqrt{3}\ u$

Problema 15.1.6 (2,5 puntos) Considere el plano π de ecuación $\pi : 3x - y - 2z = 5$ y la recta r dada por

$$r : \frac{x - a}{1} = \frac{y - 3 + a}{1} = \frac{z}{1}$$

a) (1,25 puntos) Estudie la posición relativa del plano π y de la recta r en función del parámetro a.
Se sabe que cuando $a = 0$ la recta r es paralela al plano π. Para ese valor de a:

b) (0,75 puntos) Calcule la distancia de la recta r al plano π.

c) (0,5 puntos) Calcule la ecuación general (o implícita) del plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano π.

Solución:

a) $r : \dfrac{x - a}{1} = \dfrac{y - 3 + a}{1} = \dfrac{z}{1} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = a + \lambda \\ y = 3 - a + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow$ sustituyendo en $\pi \Longrightarrow$
$3(a + \lambda) - (3 - a + \lambda) - 2\lambda = 5 \Longrightarrow a = 2$
Si $a = 2 \Longrightarrow 5 = 5 \Longrightarrow r \subset \pi$, si $a \neq 2 \Longrightarrow r \parallel \pi$

b) Si $a = 0 \Longrightarrow r \parallel \pi$, cogemos un punto $P_r(0, 3, 0)$ de r y tenemos que $d(r, \pi) = d(P_r, \pi) =$
$\dfrac{|0 - 3 - 0 - 5|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = \dfrac{8}{\sqrt{14}} = \dfrac{4\sqrt{14}}{7}\ u$

c) $\pi' \parallel \pi \Longrightarrow \pi' : 3x - y - 2z + \lambda = 0 \overset{P_r\in\pi'}{\Longrightarrow} 0 - 3 - 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 3 \Longrightarrow \pi' : 3x - y - 2z + 3 = 0$

Problema 15.1.7 (2,5 puntos) Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas verdes, 3 bolas rojas y 4 bolas negras, y la urna B contiene 1 bola verde, 3 bolas rojas y 5 bolas negras. Se saca al azar una bola de la urna A y se mete en la urna B. A continuación, se saca al azar una bola de la urna B. Calcule:

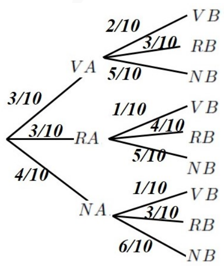
a) (0,5 puntos) La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra, sabiendo que la bola que se sacó de la urna A era verde.

b) (1 punto) La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra.

c) (1 punto) La probabilidad de que la bola que se sacó de la urna A fuera verde, sabiendo que la bola que se ha sacado de la urna B ha sido negra.

Solución:

Sean VA sacar verde de la urna A, RA sacar roja de la urna A, NA sacar negro de la urna A, VB sacar verde de la urna B, RB sacar verde de la urna B y NB sacar negro de la urna B.



a) $P(NB|VA) = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

b) $P(NB) =$
$P(NB|VA)P(VA) + P(NB|RA)P(RA) + P(NB|NA)P(NA) =$
$\dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{3}{10} + \dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{3}{10} + \dfrac{6}{10} \cdot \dfrac{4}{10} = \dfrac{27}{50} = 0,54$

c) $P(VA|NB) = \dfrac{P(NB|VA)P(VA)}{P(NB)} = \dfrac{\frac{5}{10} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{27}{50}} = \dfrac{5}{18} = 0,2778$

Problema 15.1.8 (2,5 puntos) En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades. Se lanza una moneda al aire 100 veces y se anota el resultado del lanzamiento, que puede ser cara o cruz con la misma probabilidad. Determine:

a) (0,5 puntos) Qué distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de veces que sale cara.

b) (0,5 puntos) Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

c) (0,5 puntos) Cuál es la probabilidad de que salga cara 60 veces.

d) (1 punto) Cuál es la probabilidad de que el número de veces que sale cara sea mayor o igual que 55.

Solución:

a) Se trata de una distribución binomial $B(100; 0,5)$

b) Como $n = 100 > 10$, $np = 50 > 5$ y $nq = 50 > 5 \Longrightarrow B(100; 0,5) \overset{N(np;\sqrt{npq})}{\approx} N(50; 5)$

c) $P(X = 60) = P\left(\dfrac{59,5-50}{5} \le Z \le \dfrac{60,5-50}{5}\right) = P(1,9 \le Z \le 2,1) =$
$P(Z \le 2,1) - P(Z \le 1,9) = 0,9821 - 0,9713 = 0,0108$

d) $P(X \ge 55) = P\left(Z \ge \dfrac{54,5-50}{5}\right) = P(Z \ge 0,9) = 1 - P(Z \le 0,9) = 1 - 0,8159 = 0,1841$

15.2. Extraordinaria

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

Problema 15.2.1 (2,5 puntos) Se quiere calcular un número de tres cifras con los siguientes datos:

I) La suma de sus tres cifras es 9.

II) Si permutamos la cifra de las centenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial menos 99.

III) Si permutamos la cifra de las decenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial más 36.

a) (1,5 puntos) Denotando por x la cifra de las centenas, por y la de las decenas y por z la de las unidades, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente la información dada en I), II) y III).

b) (1 punto) Calcule el número en cuestión.

Solución:
Sea xyz el número buscado. El número es igual a $100x + 10y + z$

a) $$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=9\\ 100z+10y+x=100x+10y+z-99\\ 100x+10z+y=100x+10y+z+36 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=9\\ x-z=1\\ y-z=-4 \end{array}\right.$$

b) Resolvemos por Gauss:
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9\\ 0 & -1 & -2 & -8\\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2 \end{array}\right]=$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9\\ 0 & -1 & -2 & -8\\ 0 & 0 & -3 & -12 \end{array}\right)\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3z=-12\Longrightarrow z=4\\ -y-8=-8\Longrightarrow y=0\\ x+4=9\Longrightarrow x=5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5\\ y=0\\ z=4 \end{array}\right. \Longrightarrow$$
El número buscado es el 504.

Problema 15.2.2 (2,5 puntos) Se dice que una matriz cuadrada A es 2-nilpotente si cumple que $A^2 = O$

a) (0,75 puntos) Justifique razonadamente que una matriz 2-nilpotente nunca puede ser regular (o invertible)

b) (0,75 puntos) Compruebe que la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & -9\\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ es 2-nilpotente.

c) (1 punto) Demuestre para qué valores de a y b la matriz $A=\begin{pmatrix} 6 & a\\ 4 & b \end{pmatrix}$ es 2-nilpotente.

Solución:

a) $|A^2| = |A|^2 = 0 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1} \Longrightarrow A$ no puede ser regular.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a+36 & a(b+6) \\ 4b+24 & 4a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4a+36=0 \\ a(b+6)=0 \\ 4b+24=0 \\ 4a+b^2=0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=-9 \\ b=-6 \end{array} \right. \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Problema 15.2.3 (2,5 puntos) Considere la función $f(x) = xe^{-x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

a) (0,75 puntos) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) (0,75 puntos) Calcule la derivada de $f(x)$ y determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función $f(x)$ y sus extremos relativos (máximos y/o mínimos).

c) (1 punto) Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

b) $f'(x) = e^{-x}(1-x) = 0 \Longrightarrow x = 1$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $(1, \infty)$ y creciente en el $(-\infty, 1)$. Tiene un máximo relativo en $(1, 1/e)$.

c) $\displaystyle\int xe^{-x}\, dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}\, dx \Longrightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right] = -xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx =$
$-xe^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C$

Problema 15.2.4 (2,5 puntos) Considere la función $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$, donde $\cos^2 x = (\cos x)^2$.

a) (1 punto) Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

b) (0,75 puntos) Calcule la integral definida $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\, dx$.

c) (0,75 puntos) Determine la primitiva de $f(x)$ que pasa por el punto $(\pi, 1)$

Solución:

a) $F(x)=\displaystyle\int\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx=\left[\begin{array}{l} t=\cos x\\ dt=-\sin x\,dx\\ dx=-\dfrac{dt}{\sin x}\end{array}\right]=-\int\frac{\sin x}{1+t^2}\cdot\frac{dt}{\sin x}=-\int\frac{1}{1+t^2}\cdot dt=$
$-\arctan t+C=-\arctan(\cos x)+C$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx=F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)=-\arctan\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)+\arctan(\cos 0)=$
$-\arctan 0+\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$

c) $F(\pi)=-\arctan(\cos\pi)+C=-\arctan(-1)+C=1\Longrightarrow$
$C=1+\arctan(-1)=\left\{\begin{array}{l} 1+\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{4+3\pi}{4}\\ 1+\dfrac{7\pi}{4}=\dfrac{4+7\pi}{4}\end{array}\right.$
Luego $F(x)=-\arctan(\cos x)+\dfrac{4+3\pi}{4}$ o $F(x)=-\arctan(\cos x)+\dfrac{4+7\pi}{4}$

Problema 15.2.5 (2,5 puntos) Los puntos $A=(6,-4,4)$ y $B=(12,-1,1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice C es la proyección ortogonal del vértice A sobre la recta

$$r:\left\{\begin{array}{l} x-2y=5\\ x+2z=5\end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Calcule las coordenadas del vértice C.

b) (0,5 puntos) Determine si el triángulo ABC tiene un ángulo recto en el vértice A.

c) (0,5 puntos) Calcule el área del triángulo ABC.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x-2y=5\\ x+2z=5\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=5-2\lambda\\ y=-\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-2,-1,1)\\ P_r(5,0,0)\end{array}\right.$$

a) Para calcular la proyección C de A sobre r seguimos los dos pasos siguientes:

- ☛ Calculamos un plano $\pi\perp r$ tal que $A\in\pi$
$\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_r}=(-2,-1,1)\Longrightarrow\pi:-2x-y+z+\lambda=0\stackrel{A\in\pi}{\Longrightarrow}-12+4+4+\lambda=0\Longrightarrow$
$\lambda=4\Longrightarrow\pi:-2x-y+z+4=0$
- ☛ El punto C es el corte del plano π con la recta r:
$-2(5-2\lambda)-(-\lambda)+\lambda+4=0\Longrightarrow\lambda=1\Longrightarrow C(3,-1,1)$

b) $\overrightarrow{AB}=(12,-1,1)-(6,-4,4)=(6,3,-3)$, $\overrightarrow{AC}=(3,-1,1)-(6,-4,4)=(-3,3,-3)$
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(6,3,-3)\cdot(-3,3,-3)=-18+9+9=0\Longrightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$

c) $S_t=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\dfrac{3\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{27\sqrt{2}}{2}\ u^2$
De otra forma:
$S_t=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ 6&3&-3\\ -3&3&-3\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}|(0,27,27)|=\dfrac{27}{2}|(0,1,1)|=\dfrac{27\sqrt{2}}{2}\ u^2$

Problema 15.2.6 (2,5 puntos) Considere el plano π de ecuación $\pi : 2x + ay - 2z = -4$ y la recta r dada por

$$r : \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{-2}$$

a) (1,25 puntos) Estudie la posición relativa del plano π y de la recta r en función del parámetro a.
Se sabe que cuando $a = 1$ la recta r corta al plano π. Para ese valor de a:

b) (0,75 puntos) Calcule el punto de corte de la recta r y el plano π.

c) (0,5 puntos) Calcule el ángulo que forman.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,-2) \\ P_r(-1,-1,5) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 5 - 2\lambda \end{array} \right.$$

a) Sustituimos r en $\pi \Longrightarrow 2(-1+2\lambda) + a(-1+\lambda) - 2(5-2\lambda) = -4 \Longrightarrow (a+8)\lambda = (a+8)$
Si $a = -8 \Longrightarrow 0 = 0 \Longrightarrow r \subset \pi$. Si $a \neq -8 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow r$ y π se cortan en el punto $H(1,0,3)$

b) Para $a = 1$ la recta r y el plano π se cortan en el punto $H(1,0,3)$.

c) $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi}|}{|\overrightarrow{u_r}| \cdot |\overrightarrow{u_\pi}|} = \dfrac{|(2,1,-2)\cdot(2,1,-2)|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}} = \dfrac{9}{9} = 1 \Longrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} = 90^\circ$

Problema 15.2.7 (2,5 puntos) En un cine hay 3 salas y un total de 250 espectadores repartidos de la siguiente manera: 100 espectadores en la sala A, 50 en la sala B y 100 en la sala C. Se sabe que la película de la sala A gusta al 80 % de los espectadores, la de la sala B al 20 % de los espectadores y la de la sala C al 60 % de los espectadores. A la salida de las tres películas se elige un espectador al azar. Calcule:

a) (0,25 puntos) La probabilidad de que el espectador haya estado en la sala C.

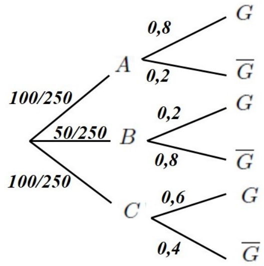
b) (0,5 puntos) La probabilidad de que le haya gustado la película, sabiendo que ha estado en la sala C.

c) (0,5 puntos) La probabilidad de que le haya gustado la película y haya estado en la sala C.

d) (0,75 puntos) La probabilidad de que le haya gustado la película.

e) (0,5 puntos) La probabilidad de que le haya gustado la película o haya estado en la sala C.

Solución:
Sean A espectador de la sala A, B espectador de la sala B, C espectador de la sala C, G le gusta la película y $\overline{G}$ no le gusta la película.



a) $P(C) = \dfrac{100}{250} = \dfrac{2}{5} = 0,4$

b) $P(G|C) = 0,6$

c) $P(C \cap G) = P(G|C)P(C) = 0,6 \cdot 0,4 = 0,24$

d) $P(G) = P(G|A)P(A) + P(G|B)P(B) + P(G|C)P(C) =$
$0,8 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,4 = 0,6$

e) $P(C \cup G) = P(C) + P(G) - P(C \cap G) = 0,4 + 0,6 - 0,24 = 0,76$

Problema 15.2.8 (2,5 puntos) En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades. El peso de los recién nacidos en la Región de Murcia sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que el 67 % de los recién nacidos pesan menos de 3,464 kg y que el 1,5 % de los recién nacidos pesan más de 4,502 kg.

a) (0,5 puntos) ¿Cuál es el porcentaje de recién nacidos cuyo peso está comprendido entre 3,464 y 4,502 kg?

b) (1 punto) Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

c) (1 punto) Calcule el porcentaje de recién nacidos que pesan menos de 2,33 kg.

Solución:

$$N(\mu, \sigma)$$

a) Tenemos $P(X \leq 3,464) = 0,67$ y $P(X \geq 4,502) = 0,015 \Longrightarrow P(X \leq 4,502) = 0,985$
$P(3,464 \leq X \leq 4,502) = P(X \leq 4,502) - P(X \leq 3,464) = 0,985 - 0,67 = 0,315 \Longrightarrow 31,5\,\%$

b) $P(X \leq 3,464) = 0,67 \Longrightarrow P\left(Z \leq \dfrac{3,464-\mu}{\sigma}\right) = 0,67 \Longrightarrow \dfrac{3,464-\mu}{\sigma} = 0,44 \Longrightarrow$
$3,464 - \mu = 0,44\sigma \Longrightarrow \mu + 0,44\sigma = 3,464$
$P(X \geq 4,502) = 0,015 \Longrightarrow P\left(Z \geq \dfrac{4,502-\mu}{\sigma}\right) = 0,015 \Longrightarrow 1 - P\left(Z \leq \dfrac{4,502-\mu}{\sigma}\right) =$
$0,015 \Longrightarrow P\left(Z \leq \dfrac{4,502-\mu}{\sigma}\right) = 0,985 \Longrightarrow \dfrac{4,502-\mu}{\sigma} = 2,17 \Longrightarrow 4,502 - \mu = 2,17\sigma \Longrightarrow$
$\mu + 2,17\sigma = 4,502$
$$\left\{\begin{array}{l} \mu + 0,44\sigma = 3,464 \\ \mu + 2,17\sigma = 4,502 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu = 3,2 \\ \sigma = 0,6 \end{array}\right.$$

c) $N(3,2; 0,6)$
$P(X \leq 2,33) = P\left(Z \leq \dfrac{2,33-3,2}{0,6}\right) = P(Z \leq -1,45) = 1 - P(Z \leq 1,45) = 1 - 0,9265 =$
$0,0735 \Longrightarrow 7,35\,\%$

Capítulo 16

Navarra

16.1. Ordinaria

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

Problema 16.1.1 (2,5 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + (2a-1)y + (\sqrt{2}-2)z = 2 \\ -ax + ay + 2a^2z = \sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.
Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2a-1 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ -a & a & 2a^2 & \sqrt{2} \end{array}\right),\ |A| = a(4a^2-1) = 0 \Longrightarrow a = 0 \text{ y } a = \pm\frac{1}{2}.$$

☛ Si $a \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
Resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2a-1 & \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2} & a & 2a^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2a-2+\sqrt{2}}{2a^2-a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & \sqrt{2}-2 \\ -a & \sqrt{2} & 2a^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2(a-1)}{2a^2-a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2a-1 & 2 \\ -a & a & \sqrt{2} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\sqrt{2}}{2a^2-a}$$

☛ Si $a=-\dfrac{1}{2}$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0\\ 2 & -2 & \sqrt{2}-2 & 2\\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & \sqrt{2} \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-2F_1\\ F_3-1/2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 2\\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ \sqrt{2}F_3-F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x-y-z=0\\ \sqrt{2}z=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\sqrt{2}+\lambda\\ y=\lambda\\ z=\sqrt{2} \end{array}\right. \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

☛ Si $a=\dfrac{1}{2}$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & \sqrt{2}-2 & 2\\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & \sqrt{2} \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-2F_1\\ F_3+1/2F_1 \end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & \sqrt{2} & 2\\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

☛ Si $a=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & \sqrt{2}-2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

Problema 16.1.2 (2,5 puntos) Calcula los valores de t para los que el rango de la matriz $A\cdot B$ es máximo, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & t-1\\ 1 & t & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} t+1 & 1 & t\\ 0 & t & -2t+1\\ t+1 & t+1 & -t-1 \end{pmatrix}$$

Solución:
$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|=1\cdot[-2t(t+1)]=0\Longrightarrow t=-1,\ t=0.$
Si $t\in\mathbb{R}-\{-1,0\}\Longrightarrow$Rango$(A\cdot B)=3$ valor maximo que puede tener el Rango$(A\cdot B)$.

Problema 16.1.3 (2,5 puntos) Calcula la ecuación continua de la recta perpendicular a r y s que corta a ambas, siendo
$r\equiv\left\{\begin{array}{l} x-y-z+2=0\\ x-3y+3z-8=0 \end{array}\right.$ y $s\equiv\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+5}{-4}=\dfrac{z-0}{-2}$
Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x-y-z+2=0\\ x-3y+3z-8=0 \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=-7+3\lambda\\ y=-5+2\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(3,2,1)\\ P_r(-7,-5,0) \end{array}\right.$$

$$s:\frac{x-2}{3}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-0}{-2}\Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} x=2+3\lambda\\ y=-5-4\lambda\\ z=-2\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(3,-4,-2)\\ P_s(2,-5,0) \end{array}\right.$$

Calculamos $t\perp r,s$ como intersección de dos planos:

- $\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = (0, 9, -18) = 9(0, 1, -2)$

- $\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (0, 1, -2) \\ \overrightarrow{u_r} = (3, 2, 1) \\ P_r(-7, -5, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} x+7 & y+5 & z \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5x - 6y - 3z + 5 = 0$

- $\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (0, 1, -2) \\ \overrightarrow{u_s} = (3, -4, -2) \\ P_s(2, -5, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -10x - 6y - 3z - 10 = 0$

- $t : \left\{ \begin{array}{l} 5x - 6y - 3z + 5 = 0 \\ -10x - 6y - 3z - 10 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow t : \dfrac{x+1}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-2}$

Problema 16.1.4 (2,5 puntos) Sean $P(1, 5, -1)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+4}{2}$

a) (1,25 puntos) Calcula el punto $Q \in r$ tal que la distancia de P a Q sea mínima.

b) (1,25 puntos) Halla los puntos Q_1 y Q_2 pertenecientes a r tales que $d(P, Q_1) = d(P, Q_2) = 3\sqrt{2}$

Solución:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{2} \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -4 + 2\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 1, 2) \\ P_r(1, 2, -4) \end{array} \right.$$

a) Q es la proyección ortogonal de P sobre r.
Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos un plano $\pi \perp r$ tal que $P \in \pi$:

$$\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} = (2, 1, 2) \Longrightarrow \pi : 2x + y + 2z + \lambda = 0 \overset{P \in \pi}{\Longrightarrow} 2 + 5 - 2 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -5 \Longrightarrow$$

$$\pi : 2x + y + 2z - 5 = 0$$

- Calculamos el punto de corte Q de r con π:
$2(1 + 2\lambda) + (2 + \lambda) + 2(-4 + 2\lambda) - 5 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow Q(3, 3, -2)$

b) Un punto genérico de r es $H(1 + 2\lambda, 2 + \lambda, -4 + 2\lambda) \Longrightarrow d(P, H) = |\overrightarrow{PH}| =$
$|(1 + 2\lambda, 2 + \lambda, -4 + 2\lambda) - (1, 5, -1)| = |(2\lambda, -3 + \lambda, -3 + 2\lambda)| =$
$\sqrt{4\lambda^2 + (-3 + \lambda)^2 + (-3 + 2\lambda)^2} = 3\sqrt{2} \Longrightarrow 4\lambda^2 + (-3 + \lambda)^2 + (-3 + 2\lambda)^2 = 18 \Longrightarrow$
$9\lambda(\lambda - 2) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$ y $\lambda = 2$

- Si $\lambda = 0 \Longrightarrow Q_1(1, 2, -4)$
- Si $\lambda = 2 \Longrightarrow Q_2(5, 4, 0)$

Problema 16.1.5 (2,5 puntos) Calcule las siguientes integrales indefinidas:

a) (1,25 puntos) $\displaystyle\int \frac{2x - 5}{x^2 + x - 2}\, dx$

b) (1,25 puntos) $\displaystyle\int x\ln x\,dx$

Solución:

$$\text{a)}\ \int \frac{2x-5}{x^2+x-2}\,dx = \left[\begin{array}{l} x^2+x-2=(x-1)(x+2) \\ \dfrac{2x-5}{x^2+x-2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}=\dfrac{A(x+2)+B(x-1)}{x^2+x-2} \\ 2x-5=A(x+2)+B(x-1) \\ x=1\Longrightarrow -3=3A\Longrightarrow A=-1 \\ x=-2\Longrightarrow -9=-3B\Longrightarrow B=3 \\ \dfrac{2x-5}{x^2+x-2}=\dfrac{-1}{x-1}+\dfrac{3}{x+2} \end{array}\right] =$$

$$\int\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{3}{x+2}\right)dx = -\ln|x-1|+3\ln|x+2|+C$$

$$\text{b)}\ \int x\ln x\,dx = \left[\begin{array}{l} u=\ln x\Longrightarrow du=\dfrac{1}{x}dx \\ dv=xdx\Longrightarrow v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right] =$$

$$\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C=\frac{x^2(2\ln x-1)}{4}+C$$

Problema 16.1.6 (2,5 puntos) Estudia la continuidad en $\mathbb{R}$ de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos^2(\pi x)-1}{1-x} & \text{si} \quad x<1 \\ \ln\left(xe^{x+1}\right)-2x & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

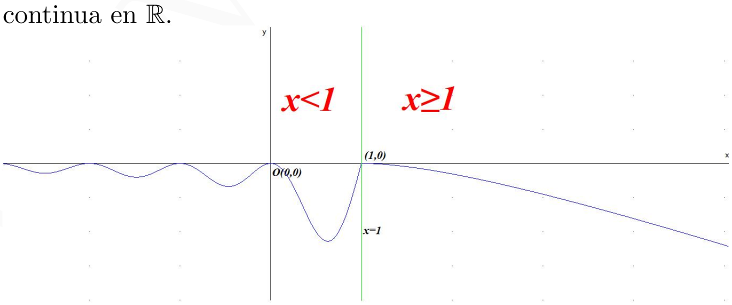
Solución:

Las funciones son continuas en sus ramas correspondientes, hay que analizar su continuidad en $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\cos^2(\pi x)-1}{1-x}=\left[\frac{0}{0}\right]\stackrel{L'H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-2\pi\sin(\pi x)\cos(\pi x)}{-1}=0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(\ln\left(xe^{x+1}\right)-2x\right)=0$$

Además es $f(1)=0\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=0\Longrightarrow f$ es continua en $x=1\Longrightarrow f$ es continua en $\mathbb{R}$.



Problema 16.1.7 (2,5 puntos) Se considera la función $f(x)=(x+1)\sin(\pi x)$

a) (0,5 puntos) Demuestra que es continua en $\mathbb{R}$.

b) (2 puntos) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (0,1)$ tal que $f(\alpha) = \dfrac{3}{4}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

Solución:

a) La función es composición de funciones continuas y, por tanto, continua en $\mathbb{R}$.

b) Utilizaremos el teorema de los valores intermedios (Darboux):
Sea f una función continua en intervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, si $m \in \mathbb{R}$ cumple $f(a) < m < f(b) \Longrightarrow \exists c \in (a,b)$ tal que $f(c) = m$.
Tenemos f continua en $[0,1/2] \subset [0,1]$ y $f(0) = 0 < \dfrac{3}{4} < f(1/2) = \dfrac{3}{2} \Longrightarrow \exists \alpha \in (0,1/2)$ tal que $f(\alpha) = \dfrac{3}{4}$

Problema 16.1.8 (2,5 puntos) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

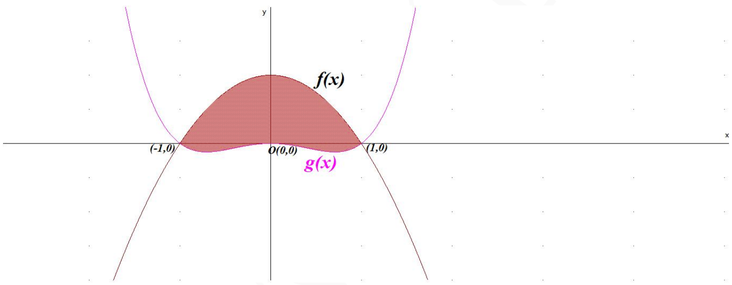
$$f(x) = 2 - 2x^2 \text{ y } g(x) = x^4 - x^2$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

Solución:
$f(x) = g(x) \Longrightarrow 2 - 2x^2 = x^4 - x^2 \Longrightarrow -x^4 - x^2 + 2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$, luego sólo hay un recinto de integración $S : [-1,1]$

$$S = \int_{-1}^{1} (-x^4 - x^2 + 2)\, dx = -\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2x \Big]_{-1}^{1} = \frac{44}{15} \simeq 2{,}9333\ u^2$$

El resultado de la integral es positivo por estar f por encima de g.



16.2. Extraordinaria

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

Problema 16.2.1 (2,5 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} ax + y - 2z = 1 \\ 3ax + a^2y - 2a^2z = 3 \\ -ax - y + (a^2 - 1)z = a + \sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.
Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -2 & 1\\ 3a & a^2 & -2a^2 & 3\\ -a & -1 & a^2-1 & a+\sqrt{3}-1 \end{array}\right),\ |A|=a(a^4-6a^2+9)=a(a^2-3)^2=0\Longrightarrow$$
$a=0$, $a=-\sqrt{3}$ y $a=\sqrt{3}$.

- Si $a\in\mathbb{R}-\{0,-\sqrt{3},\sqrt{3}\}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=\text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
  Resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2\\ 3 & a^2 & -2a^2\\ a+\sqrt{3}-1 & -1 & a^2-1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{1}{a}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & -2\\ 3a & 3 & -2a^2\\ -a & a+\sqrt{3}-1 & a^2-1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{2}{a-\sqrt{3}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 3a & a^2 & 3\\ -a & -1 & a+\sqrt{3}-1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{1}{a-\sqrt{3}}$$

- Si $a=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & -1 & -1 & \sqrt{3}-1 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $a=-\sqrt{3}$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -\sqrt{3} & 1 & -2 & 1\\ -3\sqrt{3} & 3 & -6 & 3\\ \sqrt{3} & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-3F_1\\ F_3+F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} -\sqrt{3} & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

  Sistema compatible indeterminado

  Tiene dos grados de libertad:

$$-\sqrt{3}x+y-2z=1\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\lambda\\ y=1+2\mu+\sqrt{3}\lambda \quad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}\\ z=\mu \end{array}\right.$$

- Si $a=\sqrt{3}$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{3} & 1 & -2 & 1\\ 3\sqrt{3} & 3 & -6 & 3\\ -\sqrt{3} & -1 & 2 & 2\sqrt{3}-1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-3F_1\\ F_3+F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} -\sqrt{3} & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{3} \end{array}\right)\Longrightarrow$$

  Sistema incompatible

Problema 16.2.2 (2,5 puntos) Calcula el valor de a para que la siguiente matriz no sea regular

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & a+3 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & a+3 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 - 2F_3 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & a+3 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & a+3 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$-4(a+2) = 0 \Longrightarrow a = -2$ La matriz A no es regular para $a = -2$ y si lo es para $\forall a \in \mathbb{R} - \{-2\}$

Problema 16.2.3 (2,5 puntos) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(-3, -2, 3)$ y que corta a las rectas r y s, siendo

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+3}{1}$$

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, -3, -2) \\ P_r(0, 1, 0) \end{array} \right.$$

$$s : \frac{x-3}{-1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+3}{1} \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = -5 + 2\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1, 2, 1) \\ P_s(3, -5, -3) \end{array} \right.$$

Calculamos t que pasa por P y corta a r y s como intersección de dos planos:

- ☛ $$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_rP} = (-3, -3, 3) = 3(-1, -1, 1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, -3, -2) \\ P_r(0, 1, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 5x - y + 4z + 1 = 0$$

- ☛ $$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_sP} = (-6, 3, 6) = 3(-2, 1, 2) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1, 2, 1) \\ P_s(3, -5, -3) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} x-3 & y+5 & z+3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3x - 3z = 0$$

- ☛ $$t : \left\{ \begin{array}{l} 5x - y + 4z + 1 = 0 \\ -x - z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow t : \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$$

Problema 16.2.4 (2,5 puntos) Halla el plano paralelo a r y s que se encuentra a 3 u de r y 6 u de s siendo

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 2z + 7 = 0 \\ 5x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{array} \right. \quad s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-5}{-1}$$

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 2z + 7 = 0 \\ 5x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\dfrac{13}{2} + \dfrac{3}{2}\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \left(-1, 1, \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(-2, 2, 3) \\ P_r(2, 1, -5) \text{ con } \lambda = 1 \end{array} \right.$$

$$s:\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-5}{-1}\Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=1+2\lambda\\ y=-3\\ z=5-\lambda\end{array}\right.\Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(2,0,-1)\\ P_s(1,-3,5)\end{array}\right.$$

$$\text{Si } \pi \parallel r \text{ y } s \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ -2 & 2 & 3\\ 2 & 0 & -1\end{array}\right|=(-2,4,-4)\Longrightarrow \pi:-2x+4y-4z+\alpha=0$$

$$d(P_r,\pi)=\frac{|-4+4+20+\alpha|}{\sqrt{4+16+16}}=\frac{|20+\alpha|}{6}=3\Longrightarrow|20+\alpha|=18$$

$$|20+\alpha|=18\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}20+\alpha=18\Longrightarrow \alpha=-2\\ 20+\alpha=-18\Longrightarrow \alpha=-38\end{array}\right.$$

$$d(P_s,\pi)=\frac{|-2-12-20+\alpha|}{\sqrt{4+16+16}}=\frac{|-34+\alpha|}{6}=6\Longrightarrow|-34+\alpha|=36$$

$$|-34+\alpha|=36\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}-34+\alpha=36\Longrightarrow \alpha=70\\ -34+\alpha=-36\Longrightarrow \alpha=-2\end{array}\right.$$

El único valor de α que cumple las dos condiciones es $\alpha=-2\Longrightarrow \pi:-2x+4y-4z-2=0\Longrightarrow \pi:-x+2y-2z-1=0$

Problema 16.2.5 (2,5 puntos) Calcula las derivadas de las siguientes funciones y sus valores en el punto $x=0$.

a) (1,25 puntos) $f(x)=\ln\left[\cos(\pi x)\cdot e^{x^2+2x}\right]$

b) (1,25 puntos) $g(x)=\arctan\sqrt{1+2x+e^{2x}}$

Solución:

a) $f(x)=\ln\left[\cos(\pi x)\cdot e^{x^2+2x}\right]=\ln\cos(\pi x)+x^2+2x$

$$f'(x)=\frac{-\pi\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)}+2x+2=-\pi\tan(\pi x)+2x+2$$

$f'(0)=2$

b) $g(x)=\arctan\sqrt{1+2x+e^{2x}}$

$$g'(x)=\frac{\frac{2+2e^{2x}}{2\sqrt{1+2x+e^{2x}}}}{1+(1+2x+e^{2x})}=\frac{1+e^{2x}}{(2+2x+e^{2x})\sqrt{1+2x+e^{2x}}}$$

$$g'(0)=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Problema 16.2.6 (2,5 puntos) Se considera la función $f(x)=\dfrac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]}{x^2-6x+10}$

a) (0,75 puntos) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[1,4]$.

b) (1,75 puntos) Comprueba que existen dos valores α y β en el intervalo $(1,4)$ tales que $f(\alpha)=\dfrac{-1}{2}=f(\beta)$.
Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

Solución:

a) Se trata de composición de funciones continuas y el denominador no se anula para ningún valor de $x\in\mathbb{R}$ ($x^2-6x+10\neq 0$)

b) Vamos a aplicar el teorema de los valores intermedios (Darboux):
Sea f una función continua en intervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, si $m \in \mathbb{R}$ cumple $f(a) < m < f(b) \Longrightarrow \exists c \in (a,b)$ tal que $f(c) = m$.

Dando valores tenemos:
$f(1) = \dfrac{1}{5}$, $f(2) = 0$, $f(3) = -1$ y $f(4) = 0$, luego la función es negativa en el intervalo $(2,3)$ y en el $(3,4)$. Como f es una función continua se cumple las condiciones del teorema:
En el intervalo $(2,3)$ tenemos $f(2) > -\dfrac{1}{2} > f(3) \Longrightarrow \exists \alpha \in (2,3)$ tal que $f(\alpha) = -\dfrac{1}{2}$
En el intervalo $(3,4)$ tenemos $f(3) < -\dfrac{1}{2} < f(4) \Longrightarrow \exists \beta \in (3,4)$ tal que $f(\beta) = -\dfrac{1}{2}$
Luego $\exists \alpha, \beta \in (1,4)$ tal que $f(\alpha) = \dfrac{-1}{2} = f(\beta)$

Problema 16.2.7 (2,5 puntos) Se considera la función $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{2} - \sin\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)}$.

a) (1,25 puntos) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[7,11]$ y derivable en $(7,11)$.

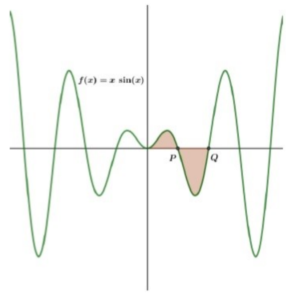
b) (1,25 puntos) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (7,11)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

Solución:

a) Se trata de composición de funciones continuas, habrá que ver si
$\dfrac{1}{2} - \sin\left(\dfrac{\pi x}{6}\right) > 0$ en el intervalo $[7,11]$.
Si $x = 7 \Longrightarrow \sin\dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$
Si $x = 8 \Longrightarrow \sin\dfrac{8\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
Si $x = 9 \Longrightarrow \sin\dfrac{9\pi}{6} = -1$
Si $x = 10 \Longrightarrow \sin\dfrac{10\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
Si $x = 11 \Longrightarrow \sin\dfrac{11\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$
En todo el intervalo se cumple $\dfrac{1}{2} - \sin\left(\dfrac{\pi x}{6}\right) > 0$ y, por tanto, la función es continua en $[7,11]$. Por otra parte:
$f'(x) = \dfrac{-\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)}{2\sqrt{\frac{1}{2} - \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)}}$ está definida en todo el intervalo $(7,11)$ ya que el denominador no se anula en ese intervalo. Luego la función es derivable en $(7,11)$.

b) Aplicamos el teorema de Rolle:
Sea f una función real continua en el intervalo $[a,b]$, derivable en el (a,b) y cumple $f(a) = f(b)$. Entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.
La función es continua en el intervalo $[7,11]$, es derivable en el $(7,11)$ y $f(7) = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} = f(11)$. Luego cumple las condiciones del teorema de Rolle que nos asegura $\exists \alpha \in (7,11)$ tal que $f'(\alpha) = 0$

Problema 16.2.8 (2,5 puntos) La curva de la imagen corresponde a la función $f(x) = x \sin x$. Tal y como se intuye, la curva corta el eje OX en infinitos puntos:



Encuentra los puntos P y Q, y, a continuación, calcula el área de la región del plano sombreada.

Solución:

Calculamos los puntos de corte de la función f con el eje de abscisas:

$$f(x) = 0 \Longrightarrow x \sin x = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \sin x = 0 \Longrightarrow x = k\pi, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \Longrightarrow O(0,0), \quad P(\pi, 0) \text{ y } Q(2\pi, 0)$$

Tenemos dos recintos $S_1 : [0, \pi]$, en el que f está por encima del eje de abscisas y la integral será positiva, y $S_2 : [\pi, 2\pi]$, en el que f está por debajo del eje de abscisas y la integral será negativa. El área total será $S = |S_1| + |S_2|$.

$$F(x) = \int x \sin x \, dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = \sin x \, dx \Longrightarrow v = -\cos x \\ \int u dv = uv - \int v du \end{array} \right] \Longrightarrow$$

$$F(x) = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$$S_1 = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx = F(\pi) - F(0) = \pi - 0 = \pi$$

$$S_2 = \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx = F(2\pi) - F(\pi) = -2\pi - \pi = -3\pi$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \pi + 3\pi = 4\pi \; u^2$$

Capítulo 17

País Vasco

17.1. Ordinaria

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a **CUATRO** de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.
En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.
No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.
No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Problema 17.1.1 ($A1$) (2,5 puntos) Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función del parámetro α:

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+3z=1\\ x+\alpha y+z=1\\ 2x+3y+4z=2 \end{array}\right.$$

Resolver el sistema para $\alpha=1$ y $\alpha=2$.
Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1\\ 1 & \alpha & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right);\quad |A|=2(1-\alpha)=0\Longrightarrow \alpha=1$$

- Si $\alpha\in\mathbb{R}-\{1\}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $\alpha=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_2 \end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

☛ Cuando $\alpha = 1$

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ -y - 2z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = -2\lambda \qquad \forall\lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

☛ Cuando $\alpha = 2$

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Problema 17.1.2 ($B1$) (2,5 puntos) Calcula el rango de la matriz A según los valores del parámetro α, siendo

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha & 0 \\ 3 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

☛ $|A_1| = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 3 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\alpha - \alpha^2 = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$ y $\alpha = 3$

☛ $|A_2| = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 3 & \alpha & \alpha \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \alpha^2 = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$

☛ $|A_3| = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ 3 & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \alpha^2 - 6\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$ y $\alpha = 6$

☛ $|A_4| = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\alpha^2 = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$

☛ El único valor que anula los cuatro menores es $\alpha = 0 \Longrightarrow$
$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$

☛ En conclusión:

- Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\} \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$
- Si $\alpha = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Problema 17.1.3 ($A2$) (2,5 puntos) Sea r la recta cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{array}\right.$$

a) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta r.

b) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que corta perpendicularmente a r y pasa por el punto $P(2,1,0)$, que es exterior a r.

Solución:

a) $r: \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y+z=2 \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases} \quad \forall\lambda\in\mathbb{R} \Longrightarrow r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(-1,1,0) \\ P_r(1,0,0) \end{cases}$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos un plano $\pi \perp r$ tal que $P\in\pi$:
$\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_r}=(-1,1,0) \Longrightarrow \pi: -x+y+\lambda=0 \stackrel{P\in\pi}{\Longrightarrow} -2+1+0+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=1 \Longrightarrow$
$\pi: -x+y+1=0$
- Calculamos el punto de corte P' de π con r:
$-(1-\lambda)+\lambda+1=0 \Longrightarrow \lambda=0 \Longrightarrow P'(1,0,0)$
- La recta $t\perp r$ tal que $P\in t$:

$$t: \begin{cases} \overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{P'P}=(1,1,0) \\ P_t(1,0,0) \end{cases} \Longrightarrow t: \begin{cases} x=1+\mu \\ y=\mu \\ z=0 \end{cases} \quad \forall\mu\in\mathbb{R}$$

Problema 17.1.4 ($B2$) (2,5 puntos) Sean r la recta cuya ecuación continua es: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$, los planos de ecuaciones $\pi_1\equiv x+y+z=1$ y $\pi_2\equiv x+y-z=1$. P_1 el punto de corte de la recta r con el plano π_1 y P_2 el punto de corte de la recta r con el plano π_2. Calcula:

a) las coordenadas de los puntos P_1 y P_2;

b) la distancia entre los puntos P_1 y P_2;

c) la distancia del punto P_1 al plano π_2.

Solución:

a) $r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(1,-1,2) \\ P_r(1,1,1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$

- Cálculo de P_1 corte de r con π_1:
$(1+\lambda)+(1-\lambda)+(1+2\lambda)=1 \Longrightarrow \lambda=-1 \Longrightarrow P_1(0,2,-1)$
- Cálculo de P_2 corte de r con π_2:
$(1+\lambda)+(1-\lambda)-(1+2\lambda)=1 \Longrightarrow \lambda=0 \Longrightarrow P_2(1,1,1)$

b) $d(P_1,P_2)=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=|(1,-1,2)|=\sqrt{6}\ u$

c) $d(P_1,\pi_2)=\dfrac{|0+2+1-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\ u$

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

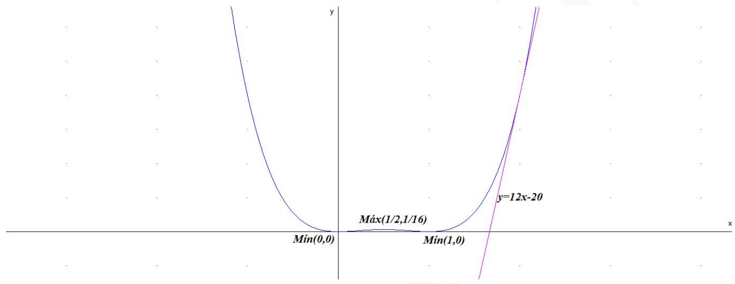
Problema 17.1.5 ($A3$) (2,5 puntos) Sea la función $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$. Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y encuentra sus máximos y mínimos relativos. Calcula la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:
$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = \dfrac{1}{2}$ y $x = 1$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1/2)$	$(1/2, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (1/2, 1)$ y creciente en el intervalo $(0, 1/2) \cup (1, \infty)$. La función presenta mínimos relativos en $(0, 0)$ y $(1, 0)$, y un máximo relativo en $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{16}\right)$

La recta Tangente:
$b = f(2) = 4,\ m = f'(2) = 12 \overset{y-b=m(x-a)}{\Longrightarrow} y - 4 = 12(x - 2) \Longrightarrow y = 12x - 20$



Problema 17.1.6 ($B3$) (2,5 puntos) La función $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$. Además, la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 2$ es perpendicular a la recta de ecuación $y = x + 2$ y $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$. Calcula los valores de los parámetros A, B y C.
Solución:
Por el enunciado:

- f tiene un máximo relativo en $x = 1 \Longrightarrow f'(1) = 0$.
- La pendiente de la recta tangente a f en $x = 2$ es $m = f'(2) = \dfrac{-1}{1} = -1$
- $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$

$f(x) = Ax^2 + Bx + C \Longrightarrow f'(x) = 2Ax + B$

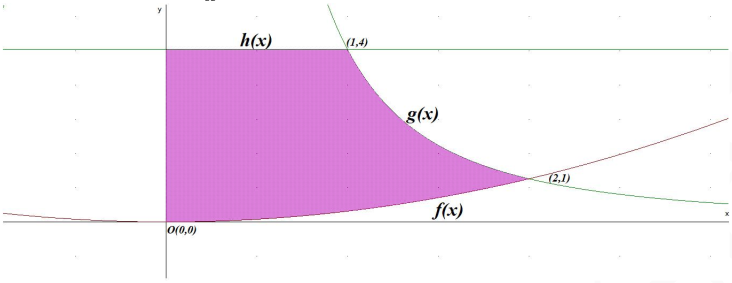
$$\left\{\begin{array}{l} f'(1) = 0 \Longrightarrow 2A + B = 0 \\ f'(2) = -1 \Longrightarrow 4A + B = -1 \\ f(0) = 1 \Longrightarrow C = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = -1/2 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Problema 17.1.7 ($A4$) (2,5 puntos) Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado inferiormente por la curva de ecuación $y = \dfrac{x^2}{4}$ y superiormente por las curvas de ecuaciones $y = \dfrac{4}{x^2}$ e $y = 4$.

Calcula el área de ese recinto.
Solución:

Sean $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$, $g(x) = \dfrac{4}{x^2}$ y $h(x) = 4$
Haciendo una tabla de valores y puntos de intersección de las funciones:
$f(x) = g(x) \Longrightarrow \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{4}{x^2} \Longrightarrow x^4 - 16 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2 \Longrightarrow (2, 1)$, la solución negativa no es relevante
$f(x) = h(x) \Longrightarrow \dfrac{x^2}{4} = 4 \Longrightarrow (4, 4)$ (fuera del recinto)
$g(x) = h(x) \Longrightarrow \dfrac{4}{x^2} = 4 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1 \Longrightarrow (1, 4)$



$$S_1 = \int_0^1 \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) dx = 4x - \frac{x^3}{12}\bigg]_0^1 = \frac{47}{12}$$
$$S_2 = \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} - \frac{x^2}{4}\right) dx = -\frac{4}{x} - \frac{x^3}{12}\bigg]_1^2 = \frac{17}{12}$$
$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{47}{12} + \frac{17}{12} = \frac{16}{3} \simeq 5,3333\ u^2$$

Problema 17.1.8 ($B4$) (2,5 puntos) Calcula las siguientes integrales:
$$\int \frac{x^2+4}{(x+2)^2}\,dx, \int (x+2)\sin(3x)\,dx$$

Solución:

☛

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^2 \qquad\quad + 4\big) : \big(x^2 + 4x + 4\big) = 1 + \dfrac{-4x}{x^2+4x+4} \\ \underline{-x^2 - 4x - 4} \\ \quad -4x \end{array}$$

$$\int \frac{x^2+4}{(x+2)^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{4x}{(x+2)^2}\right) dx = \left[\begin{array}{c} \dfrac{4x}{(x+2)^2} = \dfrac{A}{(x+2)^2} + \dfrac{B}{x+2} = \dfrac{A + B(x+2)}{(x+2)^2} \\ 4x = A + B(x+2) \\ x = 0 \Longrightarrow A + 2B = 0 \\ x = -2 \Longrightarrow A = -8 \Longrightarrow B = 4 \\ \dfrac{4x}{(x+2)^2} = \dfrac{-8}{(x+2)^2} + \dfrac{4}{x+2} \end{array}\right] =$$
$$x - \int \left(\frac{-8}{(x+2)^2} + \frac{4}{x+2}\right) dx = x - \frac{8}{x+2} - 4\ln|x+2| + C$$

☛ $\displaystyle\int (x+2)\sin(3x)\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x+2 \Longrightarrow du = dx \\ dv = \sin(3x)dx \Longrightarrow v = -\dfrac{1}{3}\cos(3x) \\ \displaystyle\int udv = uv - \int vdu \end{array}\right] =$

$$-\frac{(x+2)\cos(3x)}{3} + \frac{1}{3}\int \cos(3x)\,dx = -\frac{(x+2)\cos(3x)}{3} + \frac{\sin(3x)}{9} + C$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

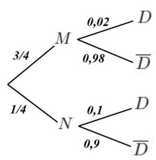
Problema 17.1.9 ($A5$) (2,5 puntos) La producción de una empresa la realizan, a partes iguales, cuatro turnos, de los que tres son diurnos y uno nocturno. El porcentaje de piezas defectuosas producidas en cada turno diurno es el 2 % y en el nocturno es del 10 %. Si se toma una pieza al azar de un turno al azar,

a) calcula la probabilidad de que la pieza sea defectuosa;

b) si la pieza tomada es defectuosa, calcula la probabilidad de que se haya producido en un turno diurno.

Solución:

Sean M turno diurno, N nocturno, D defectuosa y $\overline{D}$ no defectuosa.



a) $P(D) = P(D|M)P(M) + P(D|N)P(N) =$
$0,02\cdot\dfrac{3}{4} + 0,1\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{25} = 0,04$

b) $P(M|D) = \dfrac{P(D|M)P(M)}{P(D)} = \dfrac{0,02\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{25}} = \dfrac{3}{8} = 0,375$

Problema 17.1.10 ($B5$) (2,5 puntos) Los resultados obtenidos en una prueba de matemáticas siguen una distribución normal con media 65 puntos y desviación típica 18 puntos. El 15 % del alumnado está en el nivel avanzado, el 65 % en el nivel medio y el 20 % restante en el nivel inicial. Decide, razonando tus respuestas, en qué nivel situaremos a los alumnos o alumnas que han obtenido las siguientes notas:

a) 85,5 puntos,

b) 48 puntos.

Solución:

$$N(65;18)$$

☛ El nivel inicial $P(X \le a) = 0,2 \Longrightarrow P(X \le a) = P\left(Z \le \dfrac{a-65}{18}\right) = 0,2 \Longrightarrow$
$P\left(Z \le \dfrac{-a+65}{18}\right) = 0,8 \Longrightarrow \dfrac{-a+65}{18} = 0,845 \Longrightarrow a = 49,79$, por debajo de esta puntuación.

☛ En nivel avanzado $P(X \ge b) = 0,15 \Longrightarrow P(X \ge b) = P\left(Z \ge \dfrac{b-65}{18}\right) = 0,15 \Longrightarrow$
$P\left(Z \le \dfrac{b-65}{18}\right) = 0,85 \Longrightarrow \dfrac{b-65}{18} = 1,035 \Longrightarrow b = 83,63$, por encima de esta puntuación.

☛ En el nivel medio se encontrará entre los $49,79$ y $83,63$ puntos.

a) 85,5 puntos estaría en el nivel avanzado.

b) 48 puntos estaría en el nivel inicial.

17.2. Extraordinaria

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a **CUATRO** de ellas.
En cada parte debes responder a una única pregunta.
En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.
No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.
No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Problema 17.2.1 ($A1$) Se considera el sistema de ecuaciones lineales que sigue:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + y + \alpha z = 0 \\ 2x + \alpha y + z = 1 \\ 3x + \alpha y + z = \alpha - 1 \end{array}\right.$$

Discute su compatibilidad en función de los valores del parámetro α.
Resolver el sistema para $\alpha = 0$, si es posible.
Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & \alpha & 0 \\ 2 & \alpha & 1 & 1 \\ 3 & \alpha & 1 & \alpha - 1 \end{array}\right); \quad |A| = 1 - \alpha^2 = 0 \Longrightarrow \alpha = \pm 1$$

- Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $\alpha = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 3F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 - 2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible (no tiene solución)

- Si $\alpha = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 3F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones):

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + y - z = 0 \\ y + z = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 + \dfrac{2}{3}\lambda \\ \\ y = 3 - \lambda \\ \\ z = \lambda \end{array}\right. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

☛ Cuando $\alpha = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + y = 0 \\ 2x + z = 1 \\ 3x + z = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 6 \\ z = 5 \end{array}\right.$$

Problema 17.2.2 ($B1$) Calcula las dos matrices A y B que satisfacen las siguientes igualdades:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 & 9 \\ 2 & 6 & 2 & 11 \end{pmatrix},$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 6 & -16 & 6 & -3 \\ -4 & 18 & -4 & 18 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} 2A + 2B = \begin{pmatrix} 4 & 16 & 4 & 18 \\ 4 & 12 & 4 & 22 \end{pmatrix} \\ 3A - 2B = \begin{pmatrix} 6 & -16 & 6 & -3 \\ -4 & 18 & -4 & 18 \end{pmatrix} \end{array}\right. \Longrightarrow 5A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 10 & 15 \\ 0 & 30 & 0 & 40 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} -3A - 3B = \begin{pmatrix} -6 & -24 & -6 & -27 \\ -6 & -18 & -6 & -33 \end{pmatrix} \\ 3A - 2B = \begin{pmatrix} 6 & -16 & 6 & -3 \\ -4 & 18 & -4 & 18 \end{pmatrix} \end{array}\right. \Longrightarrow -5B = \begin{pmatrix} 0 & -40 & 0 & -30 \\ -10 & 0 & -10 & -15 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Problema 17.2.3 ($A2$) Sea la recta r y el plano π, que se cortan perpendicularmente en el punto $P(1, -1, 2)$. Si el plano π pasa por el punto $Q(1, 2, 3)$ y contiene al vector $(0, 0, 2)$, calcula las ecuaciones de la recta r y del plano π.

Solución:

☛ $\pi : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (0, 0, 2) \\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ} = (0, 3, 1) \\ P(1, -1, 2) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x - 1 & y + 1 & z - 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6x + 6 \Longrightarrow \pi : x - 1 = 0$

☛ $r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, 0, 0) \\ P_r = (1, -1, 2) \end{array}\right. \Longrightarrow r : \left\{\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 2 \end{array}\right. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Problema 17.2.4 ($B2$) Se consideran tres planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv 4x + 2y - 4z = 2, \quad \pi_2 \equiv x - y - z = 2 \text{ y } \pi_3 \equiv x + ay + z = b.$$

¿Existen valores de los parámetros a y b para los cuales los tres planos se cortan en una recta? En caso de que la respuesta sea negativa, razónala.
En el caso de que la respuesta sea positiva, calcula dichos valores.
Solución:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & a & 1 & b \end{array} \right)$; $|A| = -12 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. La solución es única y los tres planos se cortan en un punto, independientemente de los valores que tomen los parámetros a y b. No pueden cortarse en una recta.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

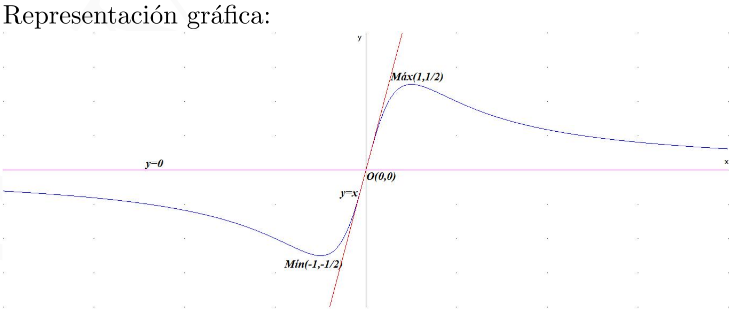
Problema 17.2.5 ($A3$) Sea $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, calcula sus asíntotas, y encuentra la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$. Haz una representación aproximada de la gráfica de la función f.
Solución:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, con un único punto de corte con los ejes coordenados en $(0,0)$ y es una función IMPAR.
- Asíntotas:
  - Verticales: No tiene, el denominador no se anula para ningún valor real.
  - Horizontales: $y = 0$ ya que
  $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$$
  - Oblicuas: no hay por haber horizontales.
- Monotonía: $f'(x) = -\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

  La función es creciente en el intervalo $(-1,1)$ y decreciente en el $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. Tiene un máximo en el punto $(1,1/2)$ y un mínimo en el $(-1,-1/2)$

- Recta tangente: $a = 0 \Longrightarrow b = f(0) = 0$, $m = f'(0) = 1 \overset{y-b=m(x-a)}{\Longrightarrow} y-0 = 1(x-0) \Longrightarrow y = x$
- Representación gráfica:



Problema 17.2.6 ($B3$) Sea $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Encuentra los valores de los parámetros A, B y C para que $f(0) = 2$, las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = 3$ sean paralelas y f tenga un extremo relativo en el punto $x = -1$. Ese extremo relativo, ¿es un máximo o un mínimo? Estudia si f tiene algún otro extremo relativo y determina si son máximos o mínimos.

Solución:
$f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 2 \Longrightarrow C = 2 \\ f'(1) = f'(3) \Longrightarrow 3 + 2A + B = 27 + 6A + B \\ f'(-1) = 0 \Longrightarrow 3 - 2A + B = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} C = 2 \\ 4A = -24 \\ 2A - B = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = -6 \\ B = -15 \\ C = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$$

$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 5$

$$f''(x) = 6x - 12 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f''(-1) = -18 < 0 \Longrightarrow (-1, 10) \text{ Máximo relativo} \\ f''(5) = 18 > 0 \Longrightarrow (5, -98) \text{ Mínimo relativo} \end{array}\right.$$

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Problema 17.2.7 ($A4$) Calcula $\displaystyle\int (x^2+1)e^{x+1}\, dx$ explicando el método utilizado.

Solución:
Integración por partes: $\left(\displaystyle\int udv = uv - \int vdu\right)$

$$\int (x^2+1)e^{x+1}\, dx = \left[\begin{array}{c} u = x^2 + 1 \Longrightarrow du = 2xdx \\ dv = e^{x+1}\, dx \Longrightarrow v = e^{x+1} \end{array}\right] =$$

$$(x^2+1)e^{x+1} - 2\int xe^{x+1}\, dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{x+1}\, dx \Longrightarrow v = e^{x+1} \end{array}\right] =$$

$$(x^2+1)e^{x+1} - 2\left[xe^{x+1} - \int e^{x+1}\, dx\right] = (x^2+1)e^{x+1} - 2\left[xe^{x+1} - e^{x+1}\right] + C =$$

$$(x^2+1)e^{x+1} - 2xe^{x+1} + 2e^{x+1} + C = e^{x+1}(x^2 - 2x + 3) + C$$

Problema 17.2.8 ($B4$) Dibuja el recinto limitado por las parábolas de ecuaciones $y = 2x^2 - 4x + 3$ e $y = x^2 - 2x + 3$ y calcula el área de ese recinto.
Solución:

☛ $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$

- Puntos de corte: Con el eje de ordenadas en $(0, 3)$ y como $2x^2 - 4x + 3 > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ no tiene puntos de corte con el eje de abscisas y es positiva en $\mathbb{R}$.
- $f'(x) = 4x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 1$.
  $f''(x) = 4 \Longrightarrow f''(1) = 4 > 0 \Longrightarrow (1, 1)$ es un mínimo.

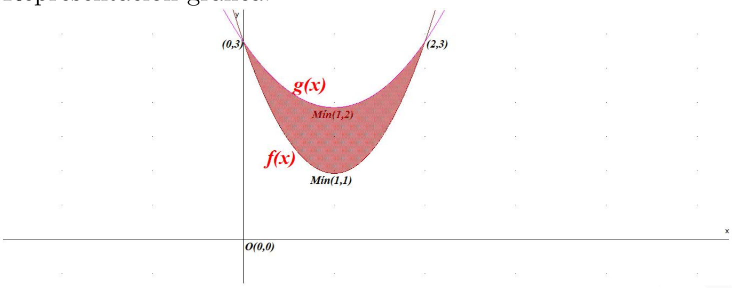
☛ $g(x) = x^2 - 2x + 3$

- Puntos de corte: Con el eje de ordenadas en $(0, 3)$ y como $x^2 - 2x + 3 > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ no tiene puntos de corte con el eje de abscisas y es positiva en $\mathbb{R}$.

- $g'(x) = 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$.
  $g''(x) = 2 \Longrightarrow f''(1) = 2 > 0 \Longrightarrow (1, 2)$ es un mínimo.

☛ Puntos de corte entre las dos gráficas:
$f(x) = g(x) \Longrightarrow 2x^2 - 4x + 3 = x^2 - 2x + 3 \Longrightarrow x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow (0, 3)$ y $(2, 3)$

☛ Representación gráfica:



☛ El recinto de integración será: $S : [0, 2]$

☛ $S = \displaystyle\int_0^2 (g(x) - f(x))\, dx = \int_0^2 \left(-x^2 + 2x\right) dx = \left.\frac{-x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}\, u^2$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Problema 17.2.9 ($A5$) Tenemos dos dados, uno normal y otro trucado. En el trucado hay 4 unos y 2 doses. Se elige un dado al azar y se tira dos veces.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 en la primera tirada y un 2 en la segunda?

b) Sabiendo que el resultado de la primera tirada ha sido un 1 y el de la segunda ha sido un 2, calcula la probabilidad de que se haya escogido el dado trucado.

Solución:
Sea N dado normal y T dado trucado.

a) $P(1, 2) = P(1, 2)P(N) + P(1, 2)P(T) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{72} + \frac{1}{9} = \frac{1}{8} = 0,125$

b) $P(T|1, 2) = \dfrac{P(1, 2|T)P(T)}{P(1, 2)} = \dfrac{\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{8}} = \dfrac{8}{9} = 0,8889$

Problema 17.2.10 ($B5$) Una caja que contiene 500 monedas es vaciada sobre una mesa. Halla

a) la probabilidad de que el número de caras sea mayor que 240;

b) la probabilidad de que el número de caras sea menor que 230;

c) la probabilidad de que el número de caras esté comprendido entre 230 y 240, ambos incluidos.

Solución:

$$B(500; 0, 5)$$

Como $n > 10$, $np = 250 > 5$ y $nq = 250 > 5 \Longrightarrow$

$$B(500; 0, 5) \overset{N(np, \sqrt{npq})}{\approx} N(250; 11, 18)$$

a) $P(X > 240) = P\left(Z \geq \dfrac{240,5 - 250}{11,18}\right) = P(Z \geq -0,85) =$
$P(Z \leq 0,85) = 0,8023$

b) $P(X < 230) = P\left(Z \leq \dfrac{229,5 - 250}{11,18}\right) = P(Z \leq -1,83) =$
$1 - P(Z \leq 1,83) = 1 - 0,9664 = 0,0336$

c) $P(230 \leq X \leq 240) = P\left(\dfrac{229,5 - 250}{3,464} \leq Z \leq \dfrac{240,5 - 250}{3,464}\right) =$
$P(-1,83 \leq Z \leq -0,85) = P(Z \leq -0,85) - P(Z \leq -1,83) =$
$(1 - 0,8023) - 0,0336 = 0,1641$

Capítulo 18

Resúmenes teóricos

18.1. Álgebra

Matrices

matriz A	dimensión	Transpuesta A^T	dimensión
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$m \times n$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$	$n \times m$
matriz cuadrada	orden	identidad	matriz triangular
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$	n	$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

☛ **Suma:** Tienen que tener la misma dimensión y se suman término a término.

☛ **Producto de una matriz por un número real:** Se multiplican todos los términos de la matriz por ese número.

☛ **Producto de dos matrices:** Se desarrolla multiplicando matriz fila por matriz columna de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

El número de columnas de la primera matriz tiene que ser igual al número de filas de la segunda.

Determinante de una matriz

☛ La matriz tiene que ser cuadrada

a) De orden dos: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

b) De orden tres: (Regla de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

☛ Propiedades:

a) $\begin{vmatrix} a+m & b+n & c+p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n & p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

b) $|A^T| = |A|$

c) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

d) Si cambiamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo.

e) Si una fila o una columna tiene todos sus elementos igual a cero el determinante vale cero.

f) Si dos filas o dos columnas son iguales el determinante vale cero.

g) Si dos filas o dos columnas son proporcionales el determinante vale cero.

h) Si una fila o columna es combinación lineal de las otras el determinante vale cero.

i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+a & h+b & i+c \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

j) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ xa & xb & xc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+xa & h+xb & i+xc \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila multiplicada por un número (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

Matriz Adjunta:

☛ Adjunto del elemento a_{ij} de una matriz es el valor del determinante resultante de eliminar la fila i y la columna j multiplicado por $(-1)^{i+j}$ y se le denomina A_{ij}.

☛ Matriz adjunta. $Adj(A) = (A_{ij})$

Cálculo del determinate de una matriz por adjuntos:
Se elige una fila o una columna (cualquiera es válida, siempre será mejor aquella que tenga más ceros), escojo la primera fila para el ejemplo:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Inversa de una matriz:

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^T}{|A|}$$

Una matriz tiene inversa si, y sólo si, $|A| \neq 0$.
A las matrices que tienen inversa se la llama **Regulares** y a las que no la tienen se las llama **Singulares**.

Rango de una matriz
Es el número de filas linealmente independientes.
De forma práctica se calcula por determinantes. Si tenemos una matriz de dimensión 3×4 cogemos matrices cuadradas que tengan el mayor orden posible, tendremos cuatro de orden 3, si el determinante de alguna de ellas es distinto de cero el rango es 3 y habremos terminado, si por el contrario todas son cero el rango ya no puede ser 3 y buscaremos menores de orden 2. Si alguno de estos menores es distinto de cero ya habremos terminado, y el rango será 2, si por el contrario todos son cero tendremos que buscar menores de orden 1, y en el momento que encontremos alguno distinto de cero el rango será 1.

Sistema de Ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \cdots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \quad = & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \cdots & +a_{mn}x_n = & b_m \end{array}\right.$$

Matriz del sistema: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

Matriz de variables: $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$,

Matriz de términos independientes: $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Se trata de una ecuación matricial: $AX=B$.
Si $|A|\neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$ y en este caso el sistema se podrá resolver de la siguiente manera $X=A^{-1}B$

Antes de resolver un sistema estudiar si hay ecuaciones nulas, iguales o proporcionales, para el estudio del rango.

Teorema de Rouché

- ☛ Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) = nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Determinado (SCD). Y tiene solución única.
- ☛ Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) $<$ nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Indeterminado (SCI). Y tiene infinitas soluciones.
- ☛ Si Rango($\overline{A}$) $\neq$Rango(A) se trata de un Sistema Incompatible. Y no tiene solución.

Sistema homogéneos Son aquellos en los que $b_i=0$, estos siempre tienen solución $x_1=x_2=\cdots=x_m=0$ solución trivial, pero en el caso de que de que Rango(A) $<m$ (nº de incógnitas) estaríamos ante infinitas soluciones, es decir:

- ☛ Si Rango$(A) = m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCD $\Longrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ solución trivial.

- ☛ Si Rango$(A) < m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCI $\Longrightarrow$ infinitas soluciones.

Regla de Cramer
Sea $\overline{A} = (C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n, B)$, entoces sustituimos la columna B en la matriz $\overline{A}$ por cada una de las columnas y tendremos:

$$x_1 = \frac{|B, C_2, C_3, \cdots, C_n|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|C_1, B, C_3, \cdots, C_n|}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{|C_1, C_2, \cdots, B|}{|A|}$$

18.2. Geometría

Vectores
Sean $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$

- ☛ $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente independientes si $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$. En caso contrario uno de los vectores es combinación lineal de los otros.

- ☛ Producto escalar: $\begin{cases} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \\ \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{u}| \cos\alpha \end{cases}$

- ☛ Producto vectorial: $\overrightarrow{t} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$; el vector $\overrightarrow{t}$ es perpendicular a los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$. Se cumple $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}| \sin\alpha$.
$|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = S$ donde S es el área del paralelogramo que describen los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ por paralelelismo. (El área de un triángulo será $\frac{1}{2}S$)

- ☛ Producto mixto: $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = V$, donde V es el volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores por paralelismo. El volumen de un paralelepípedo es también $V = S_{\text{base}} \cdot$Altura. Para calcular el volumen de un tetraedro tenemos dos fórmulas: $V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} V_{\text{paralelepípedo}}$ y $V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{3} S_{\text{base}} \cdot$ Altura

Ecuaciones
Sea la recta $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (u_1, u_2, u_3) \\ P_r(a, b, c) \end{cases}$

Vectorial	Paramétrica	Continua	General
$\overrightarrow{x} = P_r + \lambda \overrightarrow{u_r}$	$\begin{cases} x = a + \lambda u_1 \\ y = b + \lambda u_2 \\ z = c + \lambda u_3 \end{cases}$	$\dfrac{x-a}{u_1} = \dfrac{y-b}{u_2} = \dfrac{z-c}{u_3}$	No hay

Sea el plano $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3) \\ \overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \\ P(a, b, c) \end{cases}$

Vectorial	Paramétrica	Continua	General
$\overrightarrow{x} = P + \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$	$\begin{cases} x = a + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = b + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = c + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$	No hay	$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x-a \\ u_2 & v_2 & y-b \\ u_3 & v_3 & z-c \end{vmatrix} = 0$ $Ax + By + Cz + D = 0$

Ideas:

- Tres puntos $P_1(a_1, b_1, c_1)$, $P_2(a_2, b_2, c_2)$ y $P_3(a_3, b_3, c_3)$ no están alineados si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$
- El vector $\overrightarrow{u_r}$ y la recta r tienen la misma dirección.
- El vector $\overrightarrow{u_\pi} = (A, B, C)$ y el plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ son perpendiculares.

Posiciones de rectas y planos:

- Dos rectas: $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{cases}$, $s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} \\ P_s \end{cases}$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$. Construimos la matriz $A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \\ \overrightarrow{P_rP_s} \end{pmatrix}$.

  Si $\text{Rango}(A) = 3 \Longrightarrow$ Se cruzan.

  Si $\text{Rango}(A) = 2$: $\begin{cases} \text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow \text{Se cortan} \\ \text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 1 \Longrightarrow \text{Son paralelas} \end{cases}$.

  Si $\text{Rango}(A) = 1 \Longrightarrow$ Coinciden.

- De una recta $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{cases}$ y un plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$: Se pasa la recta a paramétricas y se sustituye en el plano: $A(a + \lambda u_1) + B(b + \lambda u_2) + C(c + \lambda u_3) + D = 0$ Al resolver esta ecuación pueden ocurrir tres casos:

  a) Encuentro un valor de $\lambda = k \Longrightarrow$ se cortan. El punto de corte se encuentra sustituyendo el valor de λ en la ecuación paramétrica de la recta.

  b) Encuentro infinitos valores de $\lambda \Longrightarrow$ la recta se encuentra contenida en el plano. (La solución de la ecuación queda de la forma $0 = 0$)

  c) No existen valores de $\lambda \Longrightarrow$ la recta es paralela al plano. (La solución de la ecuación queda de la forma $7 = 0$)

- De dos planos $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1$ y $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2$. Puede ocurrir:

  a) $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ o $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ o $\dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ en cualquiera de ellos los dos planos se cortan en una recta.

  b) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$ en este caso son paralelos.

  c) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$ en este caso coinciden.

- ☛ De tres planos $\pi_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1$, $\pi_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2$ y $\pi_3 : A_3x+B_3y+C_3z+D_3$. Se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y se discute por el teorema de Roché. Si el sistema tiene solución única los tres planos se cortan en un punto. En el caso de que tenga infinitas soluciones se analizan los planos dos a dos. En el caso de que no tenga soluciones se analizan los planos dos a dos.

Fórmulas:

- ☛ Distancia entre dos puntos: $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$
- ☛ Distancia de un punto a una recta: $d(P, r) = \dfrac{|\overrightarrow{PP_r} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}$
- ☛ Distancia de un punto a un plano: $d(P, \pi) = \dfrac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
- ☛ Distancia entre dos rectas que se cruzan: $d(r, s) = \dfrac{|[\overrightarrow{PP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|}$
- ☛ Ángulo entre dos vectores: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|}$
- ☛ Ángulo entre dos rectas: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_r}|}$
- ☛ Ángulo entre dos planos: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}}}{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}||\overrightarrow{u_{\pi_2}}|}$
- ☛ Ángulo entre una recta y un plano: $\sin\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_\pi}|}$
- ☛ Punto medio de P y Q es $A = \dfrac{P + Q}{2}$
- ☛ Punto simétrico de P respecto de Q es $A = 2Q - P$
- ☛ Esfera: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ es una esfera de centro $C(a, b, c)$ y radio$= r$.

Ideas métricas:

- ☛ Punto simétrico de P respecto al plano π:
  - Calculo r que pasa por P perpendicular a π, $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi}$.
  - Calculo el punto de corte P' de r con π.
  - $P'' = 2P' - P$
- ☛ Punto simétrico de P respecto a la recta r:
  - Calculo π perpendicular a r que contenga a P, $\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r}$.
  - Calculo el punto de corte P' de r con π.
  - $P'' = 2P' - P$

- ☛ Recta perpendicular a otras dos que se cruzan (y las corta): Se calcula como intersección de los dos planos $\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} \\ \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{cases}$, $\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} \\ \overrightarrow{u_s} \\ P_s \end{cases}$
  donde $\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$

- ☛ Recta que pasa por un punto P y corta a dos rectas que se cruzan: Se calcula como intersección de los dos planos

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{P_rP} \\ \overrightarrow{u_r} \\ P_r \text{ o } P \end{cases} \quad , \quad \pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{P_sP} \\ \overrightarrow{u_s} \\ P_s \text{ o } P \end{cases}$$

- ☛ Recta paralela a un plano π y que corta a otra recta t que a su vez corta a π y que pasa por el punto P:

  - Calculo un plano π' paralelo a π que contenga a P.
  - Calculo P' punto de corte de π' y t.
  - La recta buscada es la que une los puntos P y P'.

- ☛ Ecuación de la circunferencia resultante de cortar una esfera con un plano (vertical u horizontal). Si el plano es $z = k$, se sustituye en la ecuación y resulta una circunferencia. Tened cuidado, el centro de esta circunferencia es (a, b, k).

- ☛ Plano tangente a una esfera de centro C en el punto de tangencia P: $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{CP} \\ \text{Contiene a } P \end{cases}$

- ☛ Encontrar los puntos de una recta r que están a una distancia λ de un punto P: Se calcula la ecuación de una esfera de centro P y radio λ. Se buscan los puntos de corte de esta esfera y la recta r.

- ☛ Plano Mediador π entre dos puntos P_1 y P_2: Es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que cumplen $d(P, P_1) = d(P, P_2)$.

- ☛ Plano Bisector π entre dos planos π_1 y π_2:Es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que cumplen $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$.

18.3. Análisis

Tabla de Derivadas

función	derivada	función	derivada
$y = k$	$y' = 0$	$y = x$	$y' = 1$
$y = ax^n$	$y' = nax^{n-1}$	$y = au^n$	$y' = nau^{n-1}u'$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	$y = uv$	$y' = u'v + uv'$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y = \dfrac{u}{v}$	$y = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$	$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
$y = u^v$	$y' = u^v(v' \ln u) + vu^{v-1}u'$	$y = a^u$	$y' = u'a^u \ln a$
$y = e^u$	$y' = u'e^u$	$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$	$y = \tan u$	$y' = u' \sec^2 u$
$y = \cot u$	$y' = -u' \csc^2 u$	$y = \csc u$	$y' = -u' \csc u \cot u$
$y = \sec u$	$y' = u' \sec u \tan u$	$y = \arcsin u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \arccos u$	$y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \arctan u$	$y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
	Regla de la Cadena	$y = f(g(x))$	$y' = g'(x)f'(g(x))$

Representación gráfica de funciones

Hay que seguir los siguientes pasos:

1 Dominio	Buscar Puntos Singulares	2 Signo	$f(x) > 0$ o $f(x) < 0$
3 Ptos. Corte	Corte con OX : $f(x) = 0$ Corte con OY : $x = 0$	4 Simetría :	Par : $f(-x) = f(x)$ con OY Impar : $f(-x) = -f(x)$ con O
5 Asíntotas :	Verticales : $x = p$ $\lim\limits_{x\longrightarrow p} f(x) = \pm\infty$ Horizontales : $y = p$ $\lim\limits_{x\longrightarrow\pm\infty} f(x) = p$ Si $\exists\, y = p \Longrightarrow$ No Oblicuas Oblicuas : $y = mx + n$ $m = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $n = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx)$	6 Monotonía :	Creciente : $f'(x) > 0$ $\nearrow$ Decreciente : $f'(x) < 0$ $\searrow$ Si $f'(p) = 0$ Punto Crítico : Máximo si $f''(p) < 0$ Mínimo si $f''(p) > 0$ Pto. Inflexión si $f''(p) = 0$ y $f'''(p) \neq 0$
7 Máximos y Mínimos	Máximo : $\nearrow\searrow$ de creciente a decreciente Mínimo : $\searrow\nearrow$ de decreciente a creciente	8 Curvatura :	Cóncava : $f''(x) > 0$ $\cup$ Convexa : $f''(x) < 0$ $\cap$ Si $f''(p) = 0$ Punto Crítico : Pto. Inflexión si de Cóncava a Convexa de Convexa a Cóncava
9 Periodo :	$f(x + T) = f(x)$		

Tabla de Integrales Inmediatas

Tipo	Simple	Compuesta
Potencial $a \neq -1$	$\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int f^a \cdot f' \, dx = \frac{f^{a+1}}{a+1}$
Logarítmica	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln \lvert x \rvert$	$\int \frac{f'}{f} \, dx = \ln \lvert f \rvert$
Exponencial	$\int e^x \, dx = e^x$	$\int e^f \cdot f' \, dx = e^f$
Exponencial	$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int a^f \cdot f' \, dx = \frac{a^f}{\ln a}$
Seno	$\int \cos x \, dx = \sin x$	$\int f' \cdot \cos f \, dx = \sin f$
Coseno	$\int \sin x \, dx = -\cos x$	$\int f' \cdot \sin f \, dx = -\cos f$
Tangente	$\int \sec^2 \, dx = \tan x$	$\int f' \cdot \sec^2 f \, dx = \tan f$
	$\int (1 + \tan^2 x) \, dx = \tan x$	$\int f' \cdot (1 + \tan^2 f) \, dx = \tan f$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x$	$\int \frac{f'}{\cos^2 f} \, dx = \tan f$
Cotangente	$\int \csc^2 \, dx = -\cot x$	$\int f' \cdot \csc^2 f \, dx = -\cot f$
	$\int (1 + \cot^2 x) \, dx = -\cot x$	$\int f' \cdot (1 + \cot^2 f) \, dx = -\cot f$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x$	$\int \frac{f'}{\sin^2 f} \, dx = -\cot f$
Arco seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \arcsin x$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1 - f^2}} \, dx = \arcsin f$
	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{\sqrt{a^2 - f^2}} \, dx = \arcsin \frac{f}{a}$
Arco coseno	$\int \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \mathrm{arc}\cos x$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{1 - f^2}} \, dx = \mathrm{arc}\cos f$
	$\int \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \mathrm{arc}\cos \frac{x}{a}$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{a^2 - f^2}} \, dx = \mathrm{arc}\cos \frac{f}{a}$
Arco tangente	$\int \frac{1}{1 + x^2} \, dx = \arctan x$	$\int \frac{f'}{1 + f^2} \, dx = \arctan f$
	$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \arctan \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{a^2 + f^2} \, dx = \arctan \frac{f}{a}$
Neperiano − Arcotangente	$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} \, dx = \ln \pm \arctan x$	Si $M \neq 0$ $ax^2 + bx + c$ irreducible

Definición de Derivada

$$f'(x) = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad f'(a) = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Continuidad: Una función f es continua en un punto a si

$$\lim_{x\longrightarrow a^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

- ☛ Si $\lim\limits_{x\longrightarrow a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x) \Longrightarrow$ Discontinua no evitable. (La función pega un salto en ese punto)

- ☛ Si $\lim\limits_{x\longrightarrow a^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x) \neq f(a) \Longrightarrow$ Discontinua evitable. (La función tiene un agujero en ese punto)

Derivabilidad
Una función f es derivable en un punto a si $f'(a^-) = f'(a^+)$.

$$f'(a^-) = \lim_{h\longrightarrow 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \quad f'(a^+) = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Si f es una función derivable en un punto a, entonces f tiene que ser continua en a.
Teorema de Weierstrass
Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces f alcanza un máximo y un mínimo en este intervalo.
Teorema de Darboux
Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces f toma en dicho intervalo todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo.
Teorema de Bolzano
Si f es una función continua en el intervalo cerrado y no nulo $[a, b]$ $(a < b)$ y la función toma valores de distinto signo en los extremos de este intervalo (Si signo de $f(a)$ es positivo entonces signo de $f(b)$ es negativo o viceversa). Entonces la función pasa necesariamente por un punto que corta al eje de abscisas, es decir, $\exists c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.
Teorema de Rolle
Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). Si además cumple que $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
Teorema del Valor Medio de Lagrange
Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Primer Teorema Fundamental del Cálculo
Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Definimos en este intervalo la función

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \;\text{ donde }\; c \in [a, b]$$

En estas condiciones, si f es continua en c se cumple que F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.
Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (Regla de Barrow)
Dada una función f continua en el intervalo $[a, b]$ y sea F cualquier función primitiva de f, es decir $F'(x) = f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema de integración por partes
Sean f y g dos funciones reales derivables en el intervalo $[a,b]$. En estas condiciones se cumple

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

$\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (sentado un día vi un valiente soldado vestido de uniforme)

Teorema del cambio de variable
Sea g una función con derivada g' continua en $[a,b]$, y sea f una función real y continua en el mismo intervalo. SI hacemos el cambio de variable $t = g(x)$ se cumple que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

Límites cuando $x \longrightarrow \pm\infty$
Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que Grado$(P(x)) = n$ y Grado$(Q(x)) = m$. Sea A el coeficiente del monomio de mayor grado de $P(x)$ y sea B el coeficiente del monomio de mayor grado de $Q(x)$

$$L = \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- ☛ $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} P(x) = \pm\infty$ el signo depende del signo del coeficiente de mayor grado de este polinomio.
- ☛ Si $n > m \Longrightarrow L =$Signo$\left(\dfrac{A}{B}\right)\cdot\infty$
- ☛ Si $n < m \Longrightarrow L = 0$
- ☛ Si $n = m \Longrightarrow L = \dfrac{A}{B}$

Si $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} P(x)^{Q(x)} = [1^\infty] = e^\lambda$, donde

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} Q(x)(P(x)-1)$$

Regla de L'Hôpital Sean f y g dos funciones reales y derivables, entonces si

$$\lim_{x\longrightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \; o \; \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right] \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\longrightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aproximaciones cuando $x \longrightarrow 0$

$\sin x \approx x$	$\tan x \approx x$	$e^x \approx 1 + x$	$\log(1+x) \approx x$
$a^x \approx 1 + x\ln a$	$\arcsin x \approx x$	$\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$	$\arccos \approx \dfrac{\pi}{2} - x$

18.4. Probabilidad

Frecuencia absoluta de un suceso A es el número de veces que se repite dicho suceso $\Longrightarrow f(A)$

Frecuencia relativa de un suceso A es la proporción de veces que ha sucedido A de N experiencias $\Longrightarrow f_r(A) = \dfrac{f(A)}{N}$

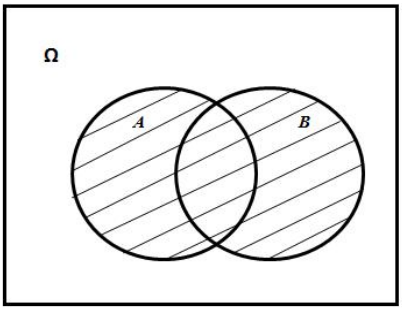
Ley de los grandes números: $\lim\limits_{N \longrightarrow \infty} f_r(A) = P(A)$

Ley de Laplace: $P(A) = \dfrac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$

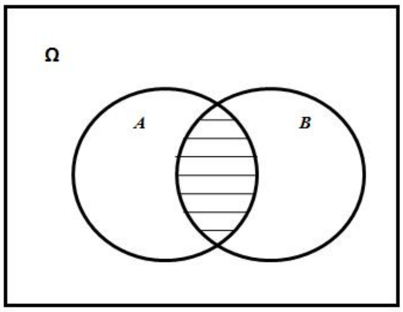
$\Omega \equiv$ **Espacio muestral** es el de todos los sucesos, sería el suceso seguro: $P(\Omega) = 1$.

$\emptyset \equiv$ **Espacio vacio** es el de ningún suceso, sería el suceso imposible: $P(\emptyset) = 0$.

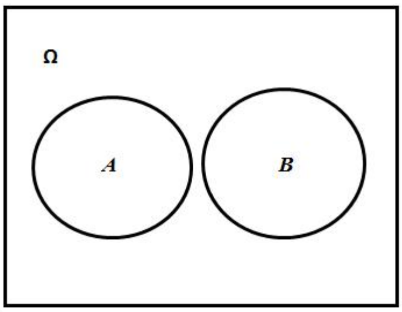
Diagramas de Venn: (esquemas usados en la teoría de conjuntos)



Unión de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos del conjunto A con todos los de B: $A \cup B$



Intersección de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos comunes entre los conjuntos A y B: $A \cap B$



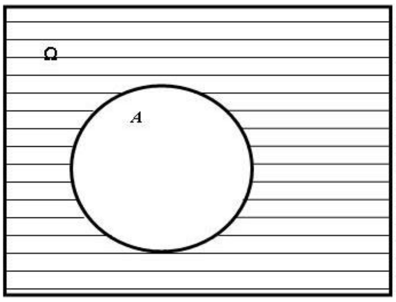
Sucesos Incompatibles: Dos sucesos son incompatibles si su intersección es vacía. $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cap B) = 0$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

En el caso de que los dos sucesos sean incompatibles la fórmula quedaría:

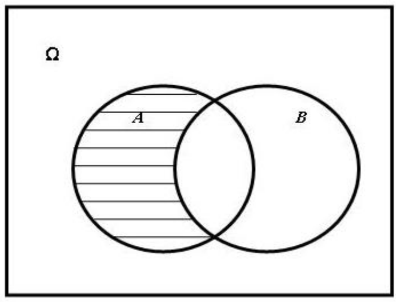
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Sucesos independientes: Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.



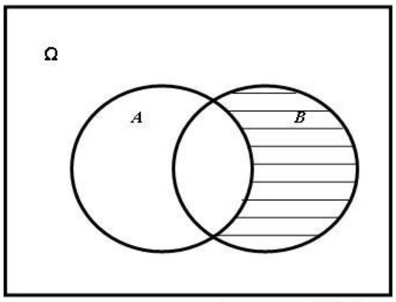
$\overline{A}$ es el suceso contrario o complementario de A:

$$\overline{A} = \Omega - A \Longrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$



$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$



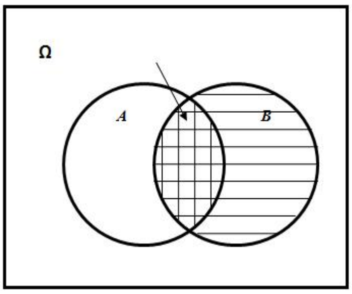
Leyes de Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Probabilidad condicionada: es la probabilidad de que ocurra un suceso A sabiendo que ha ocurrido el suceso B: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Teorema de Bayes: $P(A|B) = \dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

Teorema de la probabilidad total: Si $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \Omega$ y los sucesos A_i con $i = 1, ..., 5$ son incompatibles dos a dos (intersección vacía), entonces:

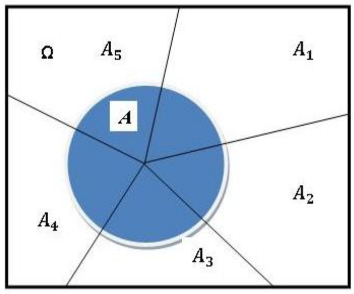
$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) + P(A_4)P(A|A_4) + P(A_5)P(A|A_5)$$



Probabilidad condicionada:

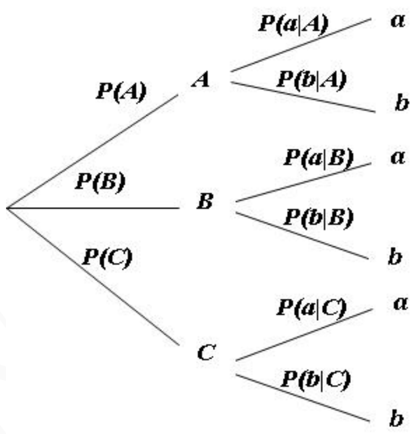
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

probabilidad total



$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1)+P(A_2)P(A|A_2)+P(A_3)P(A|A_3)+P(A_4)P(A|A_4)+P(A_5)P(A|A_5)$$

Organización por árboles:



Organización por tablas de contingencia:

	Renault	Seat	Mercedes	Totales
Blanco	15	20	10	45
Negro	300	455	200	955
	315	475	210	1000

$$P(B|S) = \frac{20}{475}, \ \ P(N|M) = \frac{200}{210}, \ \ P(B) = \frac{45}{1000}, \ \ P(M) = \frac{210}{1000}$$

18.5. Estadística

Gráficos:

☛ Varable discreta: con diagrama de barras.

$$x_i, \;\; p(x_i) = p_i, \;\; \sum p_i = 1$$

$$\text{Media} = \mu = \sum x_i p_i, \;\; \text{Varianza} = \sigma^2 = \sum p_i (x_i - \mu)^2 = \sum p_i x_i - \mu^2$$

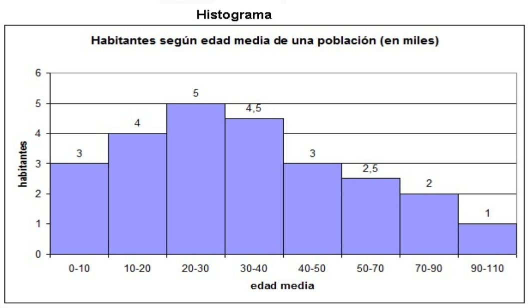
$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$

☛ Variable continua: histogramas (intervalos)

$$x_i, \;\; f_i,$$

$$\text{Media} = \overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum x_i}, \;\; \text{Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \overline{X})^2}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \overline{X}^2$$

$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$



Distribución Binomial $\mathrm{B}(n, p)$:

$$P(X = a) = \binom{n}{a} p^a q^{n-a}$$

p es la probabilidad de éxito y $q = 1 - p$ la probabilidad de fracaso. Por ejemplo, si $\mathrm{B}(7, 0, 4) \Longrightarrow$ $n = 7$, $p = 0, 4$ y $q = 0, 6$:

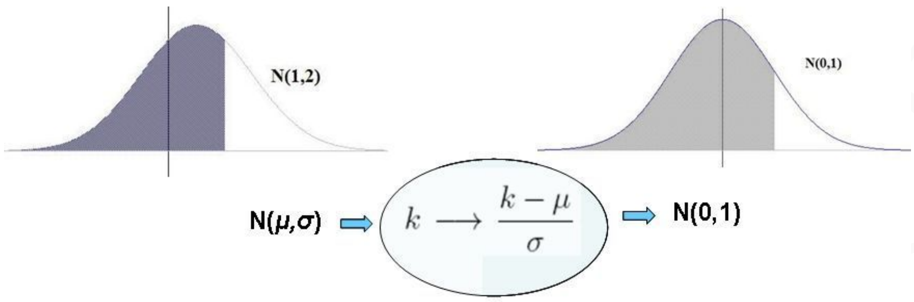
$$P(X = 2) = \binom{7}{2} 0, 4^2 0, 6^5 = 0, 261$$

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3), \text{ ó}$$

$$P(X \leq 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - (P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7))$$

Su Media= $\mu = np$, su Varianza= $\sigma^2 = npq$ y su Desviación Típica= $\sqrt{\text{Varianza}}$.
Distribución Normal $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$:

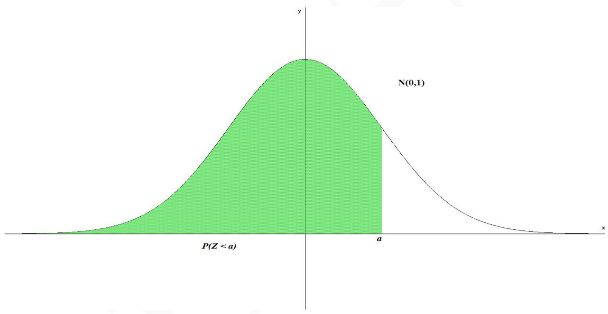
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Tipificación Paso de una normal N(μ,σ) a otra N$(0,1)$: $k \longrightarrow \dfrac{k-\mu}{\sigma}$, si queremos calcular $P(a < X < b)$ y X es de una normal N(μ,σ) entoces Z seguirá una normal N$(0,1)$

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Cuando una distribución binmial $B(n,p)$ cumple $np > 3$ y $nq > 3$, se aproxima a una normal $N(np, \sqrt{npq})$, si son mayores de 5 la aproximación es perfecta.



$$P(Z > a) = 1 - P(Z < a), \quad P(Z < -a) = 1 - P(Z < a)$$
$$P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$$

La corrección por continuidad de Yate seguirá las siguientes reglas:
$P(x = a) = P(a - 0,5 \leq X \leq a + 0,5)$
$P(X \leq a) = P(X \leq a + 0,5)$
$P(X < a) = P(X \leq a - 0,5)$
$P(X > a) = P(X \geq a + 0,5)$
$P(X \geq a) = P(X \geq a - 0,5)$
Cálculo de $z_{\alpha/2}$ con un **Nivel de confianza** del 95 %: $NC = 0,95 = 1 - \alpha$ ($\alpha =$**Nivel de significación**)$\Longrightarrow$ $\alpha = 0,05$. Para una distribución bilateral tendremos $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025 \Longrightarrow P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975$ se busca en la tabla $N(0,1)$ y obtenemos $z_{\alpha/2} = 1,96$
Para muestras aleatorias de tamaño n con media $\overline{X}$ de una $N(\mu,\sigma)$ la media $\overline{X}$ se distribuye como una normal $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
Error: $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Intervalo de Confianza: $(\overline{X}-E,\overline{X}+E)=\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de medias.

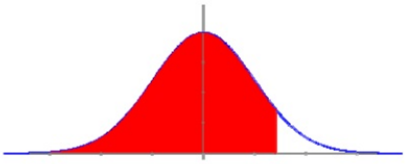
Proporciones: Sea $\hat{p}$ proporción de la muestra de tamaño n, se distribuye como una $N\left(p,\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$

Error: $E=z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

Intervalo de Confianza: $(\hat{p}-E,\hat{p}+E)=\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}},\hat{p}+z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de proporciones.

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

$$P(Z \leq z) = F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Agradecimientos

✎ A las Universidades por la publicación de los exámenes oficiales.

✎ A Íñigo Zunzunegui Monterrubio (https://aprendeconmigomelon.com) por sus correcciones.

✎ A Juan Antonio Martínez (https://www.ebaumatematicas.com) por el contenido de su página, me ha servido para contrastar resultados.

✎ A Paula Cabildo por el diseño de la portada y contraportada.

Prof: **Isaac Musat Hervás**

Profesor de Matemáticas en el colegio Villaeuropa de Móstoles

Bachillerato y Selectividad en las dos opciones

Ferroviario en la Dirección de Cercanías de Madrid

Diferentes estudios y trabajos

Jubilado en la actualidad

La educación ha sido mi pasión, el recuerdo del aula, el olor a tiza
y el pantalón manchado de polvo blanco lo llevo siempre conmigo.
Las voces con las preguntas de mis alumnos y mis respuestas,
acertadas o no, quedan en nuestros recuerdos valiosos.
He sido un afortunado, mi trabajo ha sido mi diversión favorita.