Problemas de Matemáticas II
Aplicadas a las ciencias sociales

Por materias (Todas las comunidades autónomas)

(Selectividad 2022-Ordinaria y Extraordinaria)

Prof: **Isaac Musat Hervás**

última actualización:

5 de mayo de 2023

A mi familia,
a mis alumnos,
habéis aguantado estoicamente,
mis ausencias unos,
mis clases otros.
Con unos convivo,
a los otros les añoro.
Un Abrazo muy grande para cada uno.
Isaac Musat Hervás

Índice general

Capítulo 1

Álgebra

1.1. Resúmenes teóricos

Matrices

matriz A	dimensión	Transpuesta A^T	dimensión
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$m \times n$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$	$n \times m$
matriz cuadrada	orden	identidad	matriz triangular
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$	n	$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

- **Suma:** Tienen que tener la misma dimensión y se suman término a término.
- **Producto de una matriz por un número real:** Se multiplican todos los términos de la matriz por ese número.
- **Producto de dos matrices:** Se desarrolla multiplicando matriz fila por matriz columna de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

  El número de columnas de la primera matriz tiene que ser igual al número de filas de la segunda.

Determinante de una matriz

- La matriz tiene que ser cuadrada

  a) De orden dos: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

b) De orden tres: (Regla de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

- Propiedades:

a) $\begin{vmatrix} a+m & b+n & c+p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n & p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

b) $|A^T| = |A|$

c) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

d) Si cambiamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo.

e) Si una fila o una columna tiene todos sus elementos igual a cero el determinante vale cero.

f) Si dos filas o dos columnas son iguales el determinante vale cero.

g) Si dos filas o dos columnas son proporcionales el determinante vale cero.

h) Si una fila o columna es combinación lineal de las otras el determinante vale cero.

i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+a & h+b & i+c \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

j) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ xa & xb & xc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+xa & h+xb & i+xc \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila multiplicada por un número (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

Matriz Adjunta:

- Adjunto del elemento a_{ij} de una matriz es el valor del determinante resultante de eliminar la fila i y la columna j multiplicado por $(-1)^{i+j}$ y se le denomina A_{ij}.
- Matriz adjunta. $Adj(A) = (A_{ij})$

Cálculo del determinate de una matriz por adjuntos:
Se elige una fila o una columna (cualquiera es válida, siempre será mejor aquella que tenga más ceros), escojo la primera fila para el ejemplo:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Inversa de una matriz:

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^T}{|A|}$$

Una matriz tiene inversa si, y sólo si, $|A| \neq 0$.
A las matrices que tienen inversa se la llama **Regulares** y a las que no la tienen se las llama

Singulares.

Rango de una matriz

Es el número de filas linealmente independientes.

De forma práctica se calcula por determinantes. Si tenemos una matriz de dimensión 3×4 cogemos matrices cuadradas que tengan el mayor orden posible, tendremos cuatro de orden 3, si el determinante de alguna de ellas es distinto de cero el rango es 3 y habremos terminado, si por el contrario todas son cero el rango ya no puede ser 3 y buscaremos menores de orden 2. Si alguno de estos menores es distinto de cero ya habremos terminado, y el rango será 2, si por el contrario todos son cero tendremos que buscar menores de orden 1, y en el momento que encontremos alguno distinto de cero el rango será 1.

Sistema de Ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \cdots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \quad = & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \cdots & +a_{mn}x_n = & b_m \end{array}\right.$$

Matriz del sistema: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

Matriz de variables: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$,

Matriz de términos independientes: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Se trata de una ecuación matricial: $AX = B$.

Si $|A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$ y en este caso el sistema se podrá resolver de la siguiente manera $X = A^{-1}B$

Antes de resolver un sistema estudiar si hay ecuaciones nulas, iguales o proporcionales, para el estudio del rango.

Teorema de Rouché

- Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) = nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Determinado (SCD). Y tiene solución única.
- Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) $<$ nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Indeterminado (SCI). Y tiene infinitas soluciones.
- Si Rango($\overline{A}$) $\neq$Rango(A) se trata de un Sistema Incompatible. Y no tiene solución.

Sistema homogéneos Son aquellos en los que $b_i = 0$, estos siempre tienen solución $x_1 = x_2 =$

$\cdots = x_m = 0$ solución trivial, pero en el caso de que de que Rango$(A) < m$ (nº de incógnitas) estaríamos ante infinitas soluciones, es decir:

- Si Rango$(A) = m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCD $\Longrightarrow$ $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ solución trivial.
- Si Rango$(A) < m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCI $\Longrightarrow$ infinitas soluciones.

Regla de Cramer
Sea $\overline{A} = (C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n, B)$, entoces sustituimos la columna B en la matriz $\overline{A}$ por cada una de las columnas y tendremos:

$$x_1 = \frac{|B, C_2, C_3, \cdots, C_n|}{|A|},\ \ x_2 = \frac{|C_1, B, C_3, \cdots, C_n|}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{|C_1, C_2, \cdots, B|}{|A|}$$

1.2. Andalucia

1.2.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.2.1 Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Halle los valores del parámetro a para que la matriz A tenga inversa.

b) Para $a = 2$, calcule la matriz inversa de A.

c) Para Para $a = 2$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + I_3 = B^t \cdot C$

Solución:

a) $|A| = a^2 - 4a + 3 = 0 \Longrightarrow a = 1$ y $a = 3 \Longrightarrow \exists\, A^{-1} \;\; \forall a \in \mathbb{R} - \{1, 3\}$

b) Si $a = 2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

c) $X \cdot A + I_3 = B^t \cdot C \Longrightarrow X \cdot A = B^t \cdot C - I_3 \Longrightarrow X = (B^t \cdot C - I_3)A^{-1} =$
$\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & --1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 & -21 & 19 \\ 16 & 12 & -11 \\ -6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

1.2.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.2.2 Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Determine la matriz X que verifica $A \cdot X + B = A^2 \cdot C$.

b) Determine las dimensiones de dos matrices P y Q sabiendo que

$$A \cdot P^t + C = C \cdot (Q \cdot B)$$

Solución:

a) $AX + B = A^2C \Longrightarrow AX = A^2C - B \Longrightarrow X = A^{-1}(A^2C - B) =$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right] =$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -2/3 & -1/3 & -5/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right] =$$
$$\begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -2/3 & -1/3 & -5/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 11 & -16 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right] =$$
$$\begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -2/3 & -1/3 & -5/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -17 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 & 19/3 \\ -13/3 & 10/3 \\ 10/3 & -13/3 \end{pmatrix}$$

b) $\underset{3\times 3}{A} \cdot \underset{a\times b}{P^t} + \underset{3\times 2}{C} \Longrightarrow a = 3 \text{ y } b = 2 \Longrightarrow \underset{3\times 2}{P^t} \Longrightarrow \underset{2\times 3}{P}$
$\underset{3\times 2}{C} \cdot (\underset{c\times d}{Q} \cdot \underset{3\times 2}{B}) \Longrightarrow c = 2 \text{ y } d = 3 \Longrightarrow \underset{2\times 3}{Q}$

1.3. Aragón

1.3.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.3.1 Se pide:
Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} m & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcular el valor de m para que la ecuación matricial $XA = B$ tenga solución única.

b) Para $m = 1$, resuelva la ecuación matricial anterior.

c) Resuelve el sistema de ecuaciones: $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) $|A| = 8 - 7m = 0 \Longrightarrow m = \dfrac{8}{7}$
Si $m \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{8}{7}\right\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} \Longrightarrow XA = B$ tiene solución única: $X = BA^{-1}$

b) Si $m = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -15 & -2 & 4 \\ -19 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

c) Se trata de un sistema homogéneo por lo que es siempre compatible y $|B| = 0$ luego es un sistema compatible indeterminado, $F_3 = F_2 - F_1$ por lo que se puede eliminar la fila tercera y queda el sistema: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

1.3.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.3.2 Dado el sistema lineal: $\left\{\begin{array}{c} (m+1)x = m-2 \\ 2x+y=-3 \\ 3x-2y+mz=-8 \end{array}\right.$. Se pide:

a) Exprese el sistema anterior en forma matricial ($AX = B$) y determine el valor(es) del parámetro m para que el sistema sea compatible determinado.

b) ¿Existe algún valor del valor del parámetro m para que el sistema sea compatible indeterminado? En caso afirmativo, resuelva el sistema.

c) Para $m = 1$, calcule $X = A^{-1}B$, siendo A, B las matrices del apartado a)

Solución:

a) $\begin{pmatrix} m+1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$

$|A| = m(m+1) = 0 \Longrightarrow m = 0$ y $m = -1$

Si $m \in \mathbb{R} - \{0, -1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} \Longrightarrow AX = B$ tiene solución única: $X = A^{-1}B$

b) Si $m = 0 \Longrightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$

$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 2F_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado

$\left\{\begin{array}{l} 2x+y=-3 \\ 3x-2y=-8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2 \\ y=1 \\ z=\lambda \end{array}\right.$

Si $m = -1 \Longrightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & -8 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ sistema incompatible

c) Si $m = 1 : A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -7/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -7/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2 \\ -21/2 \end{pmatrix}$

1.4. Asturias

1.4.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.4.1 Un inversor ha obtenido un beneficio de 1280 euros después de invertir un total de 22000 euros en dos empresas distintas. Estos beneficios se desglosan como sigue: la cantidad invertida en la primera empresa le ha proporcionado un m % de beneficios y la cantidad invertida en la segunda empresa le ha proporcionado un 6 % de beneficios.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean la cantidad invertida en cada una de las dos empresas.

b) Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que los beneficios para la primera empresa sean del 4 %? Resuelve el sistema si se supone que ese es realmente el porcentaje de beneficio para lo invertido en la primera empresa. En ese caso, ¿cuál fue la cantidad invertida en cada una de las dos empresas?

Solución:

a) Sea x la cantidad invertida en la primera empresa e y la cantidad invertida en la segunda.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=22000 \\ \dfrac{m}{100}x+0,06y=1280 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=22000 \\ mx+6y=128000 \end{array}\right.$$

b) $\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22000 \\ m & 6 & 128000 \end{array}\right)$ con $|A|=6-m=0 \Longrightarrow m=6$

- Si $m\neq 6 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=2=$Rango$(A)=n^{\underline{o}}$ de incognitas y el sistema es compatible determinado (solución única)
  La respuesta es afirmativa:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=22000 \\ 4x+6y=128000 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=22000 \\ 2x+3y=64000 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2000€ \\ y=20000€ \end{array}\right.$$

- Si $m=6$: $A=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22000 \\ 6 & 6 & 128000 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-6F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22000 \\ 0 & 0 & -4000 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema incompatible (no tiene solución)

1.4.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.4.2 La dueña de una cafetería ha comprado café y leche por un importe total de 2500 euros. Si vende todos estos productos, ganando un 80 % con el café y un m % con la leche, obtiene por ellos un importe total de $2900+20m$ euros.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el coste de compra del café y la leche.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuánto costó el café si el beneficio de venta de la leche es del 20 %?

Solución:

a) Sea x el coste del café e y el coste de la leche.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=2500 \\ \dfrac{80}{100}x+x+\dfrac{m}{100}y+y=2900+20m \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=2500 \\ 180x+(m+100)y=2000(m+145) \end{array}\right.$$

b) $\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2500 \\ 180 & m+100 & 2000(m+145) \end{array}\right)$ con $|A|=m-80=0 \Longrightarrow m=80$

- Si $m\neq 80 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=2=$Rango$(A)=n^{\underline{o}}$ de incognitas y el sistema es compatible determinado (solución única)
- Si $m=80$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2500 \\ 180 & 80+100 & 2000(80+145) \end{array}\right) \Longrightarrow \overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2500 \\ 1 & 1 & 2500 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema compatible indetrminado y tiene infinitas soluciones.

☛ Si $m = 20$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=2500\\ 180x+120y=330000\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=2500\\ 3x+2y=5500\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=500€\\ y=2000€\end{array}\right.$$

1.5. Cantabria

1.5.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.5.1 Para poder llevar a cabo la última obra que le ha encargado, una empresa de construcción necesita adquirir 400 kg de cemento, 150 kg de ladrillos y 120 kg de azulejos. Antes de hacer la compra del material consulta precios e dos suministradores, A y B. El suministrador A le ofrece un precio de venta total de 9800€. El suministrador B, que está en liquidación, le ofrece importantes descuentos. En concreto, baja el precio del cemento a la mitad del que le ofrece el suministrador A, el del ladrillo a una tercera parte y el del azulejo a una cuarta parte, lo que supone un ahorro de 6400€ con respecto al precio total de venta ofrecido por el suministrador A. Se sabe, además, para el suministrador A, que el precio del kg de azulejo es el doble de la suma de los precios del cemento y los ladrillos.

a) Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio (en €/kg) del cemento, el ladrillo y el azulejo en el suministrador A.

b) Resuélvalo.

Solución:

a) Sea x el precio del cemento del suministrador A, y el precio del ladrillo del suministrador A y z el precio del azulejo del suministrador A.

$$\left\{\begin{array}{l} 400x+150y+120z=9800\\ 400\dfrac{x}{2}+150\dfrac{y}{3}y+120\dfrac{z}{4}=9800-6400\\ z=2(x+y)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 40x+15y+12z=980\\ 20x+5y+3z=340\\ 2x+2y-z=0\end{array}\right.$$

b) $$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & -1 & 0\\ 20 & 5 & 3 & 340\\ 40 & 15 & 12 & 980\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-10F_1\\ F_3-20F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -15 & 13 & 340\\ 0 & -25 & 32 & 980\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 3F_3-5F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -15 & 13 & 340\\ 0 & 0 & 31 & 1240\end{array}\right)\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{-2y+z}{2}=8€/\text{kg}\\ \\ y=\dfrac{340-13z}{-15}=12€/\text{kg}\\ \\ z=\dfrac{1240}{31}=40€/\text{kg}\end{array}\right.$$

sistema compatible determinado. Solución única.

1.5.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.5.2 En un día de playa y bajo un sol radiante Fabiola se acerca al chiringuito y compra 3 helados, 2 granizados y 2 horchatas, pagando un total de 20€. Al comprobar el ticket se da cuenta de que le han cobrado un helado y una horchata de más. Tras reclamar, el vendedor le devuelve 5€. Además, para compensar el error, le ofrece llevarse en promoción un helado y un granizado por 2€, lo que supone un descuento del 50 % respecto a sus precios originales.

a) Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio (sin descuento) de un helado, un granizado y una horchata.

b) Resuélvalo.

Solución:

a) Sea x el precio del helado, y el precio del granizado y z el precio de la horchata.

$$\left\{\begin{array}{l} 4x+2y+3z=20 \\ x+z=5 \\ 0,5x+0,5y=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x+2y+3z=20 \\ x+z=5 \\ x+y=4 \end{array}\right.$$

b) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 20 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-4F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-2F_2 \end{array}\right]=$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=4-y=3€ \\ y=-(1-z)=1€ \\ z=2€ \end{array}\right.$
sistema compatible determinado. Solución única.

1.6. Castilla La Mancha

1.6.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.6.1 La caja de bombones que compro cuesta 51 euros y contiene 12 bombones de chocolate negro, 6 de chocolate con leche y 6 de chocolate blanco. Cada bombón de chocolate negro cuesta un euro más que los de chocolate con leche y estos últimos cuestan 50 céntimos menos que los de chocolate blanco.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada tipo de bombón.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Sean x el precio de un chocolate negro, y de uno con leche y z de uno blanco.

$$\left\{\begin{array}{l} 12x+6y+6z=51 \\ x=y+1 \\ y=z-0,5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 12x+6y+6z=51 \\ x-y=1 \\ 2y-2z=-1 \end{array}\right.$$

b) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 12 & 6 & 6 & 51 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-12F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 18 & 6 & 39 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-9F_2 \end{array}\right]$
$=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 24 & 48 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema compatible determinado.
Solución única:

$$\begin{cases} z = \dfrac{48}{24} = 2 \\ 2y - 4 = -1 \Longrightarrow y = \dfrac{3}{2} = 1,5 \\ x - 1,5 = 1 \Longrightarrow x = 2,5 \end{cases}$$

El chocolate negro cuesta 2,5€, el chocolate con leche 1,5€ y el chocolate blanco 2€.

Problema 1.6.2 En un programa de televisión hay tres secciones: magia, humor y noticias. La sección de humor dura cinco minutos más que la de magia. El tiempo ocupado por la magia y el humor es en total la cuarta parte del dedicado a noticias y la duración total de programa es de 1 hora y 55 minutos.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto tiempo se dedica a cada una de las tres secciones del programa.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Sea x tiempo para la magia, y tiempo para el humor y z tiempo para las noticias.

$$\begin{cases} x + 5 = y \\ x + y = z/4 \\ x + y + z = 115 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 115 \\ x - y = -5 \\ 4x + 4y - z = 0 \end{cases}$$

b) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 115 \\ 1 & -1 & 0 & -5 \\ 4 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 115 \\ 0 & -2 & -1 & -120 \\ 0 & 0 & -5 & -460 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema compatible determinado. Solución única:

$z = \dfrac{-460}{-5} = 92$, $2y + 92 = 120 \Longrightarrow y = \dfrac{28}{2} = 14$ y $x + 14 + 92 = 115 \Longrightarrow x = 9$

Las noticias tienen 92 minutos, el humor 14 minutos y la magia 9 minutos.

Problema 1.6.3 Se pide:

a) Dadas dos matrices cuadradas A y B, razona si se obtendría el mismo resultado en la resolución de las ecuaciones $AX = B$ y $B = XA$? ¿De qué propiedad estamos hablando?

b) Si la dimensión de la matriz M es $3 \times m$, la dimensión de la matriz N es 2×5 y P es una matriz cuadrada de orden p. ¿Qué valores han de tomar m y p para que se pueda realizar el producto $M \cdot N \cdot P$? ¿Qué dimensión tendría la matriz resultante?

c) Para las matrices $C = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$ resuelve la ecuación $XC - D^2 = \dfrac{1}{3}E^T$

Solución:

a) No tiene por qué cumplirse $AX = XA$ dado que las matrices no cumplen la propiedad conmutativa. Esto no quiere decir que en ciertos casos si se cumpla, pero no de forma general.

b) $\underset{3\times m}{M} \cdot \underset{2\times 5}{N} \cdot \underset{p\times p}{P} \Longrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ p = 5 \end{cases}$

La matriz resultante tiene dimensión 3×5.

c) $XC - D^2 = \frac{1}{3}E^T \Longrightarrow XC = \frac{1}{3}E^T + D^2 \Longrightarrow X = \left(\frac{1}{3}E^T + D^2\right)C^{-1} =$

$$\left[\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^2\right]\begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} -3 & -11 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 28 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -11 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -81 & -296 \\ 19 & 68 \end{pmatrix}$$

1.6.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.6.4 El número total de premios Goya recibidos a lo largo de su carrera por tres mujeres (Isabel, Carmen y Enma) es de 15 Goyas. Si aumentamos en un premio la cantidad que ha recibido Isabel obtenemos el triple de los premios ganados por Enma y los que recibe Enma equivalen a las tres cuartas partes de los que recibe Carmen.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos premios Goya han recibido cada una.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Sean x el número de Goyas recibidos por Isabel, y el número de Goyas recibidos por Carmen y z el número de Goyas recibidos por Enma.

$$\begin{cases} x + y + z = 15 \\ x + 1 = 3z \\ z = \frac{3}{4}y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 15 \\ x - 3z = -1 \\ 3y - 4z = 0 \end{cases}$$

b) $$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & -1 & -4 & -16 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 3F_2 \end{array}\right]$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & -1 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & -16 & -48 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema compatible determinado.}$$

Solución única:

$$\begin{cases} z = \frac{48}{16} = 3 \\ y + 12 = 16 \Longrightarrow y = 4 \\ x + 4 + 3 = 15 \Longrightarrow x = 8 \end{cases}$$

Isabel ha recibido 8 premios Goya, Carmen 4 y Enma 3.

Problema 1.6.5 Un concesionario de automóviles tiene en oferta tres modelos de coche: uno deportivo, otro familiar y el tercero es un monovolumen. El mes pasado se vendieron 10 deportivos, 6 familiares y 3 monovolúmenes y se obtuvieron 851000 euros. El coche deportivo vale 2000 euros más que el familiar. Por 5 deportivos vendidos se obtienen 13000 euros más que si se venden 6 monovolúmenes.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el precio de cada uno de los tres modelos.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Sea x precio de un coche deportivo, y precio de un coche familiar y z precio de un monovolumen.

$$\begin{cases} 10x+6y+3z=851000 \\ x=y+2000 \\ 5x=13000+6z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x-y=2000 \\ 5x-6z=13000 \\ 10x+6y+3z=851000 \end{cases}$$

b) $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 2000 \\ 5 & 0 & -6 & 13000 \\ 10 & 6 & 3 & 851000 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-5F_1 \\ F_3-10F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 2000 \\ 0 & 5 & -6 & 3000 \\ 0 & 16 & 3 & 831000 \end{array}\right)=$
$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3-16F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 2000 \\ 0 & 5 & -6 & 3000 \\ 0 & 0 & 111 & 4107000 \end{array}\right)\Longrightarrow$
Sistema compatible determinado. Solución única:
$$\begin{cases} z=\dfrac{4107000}{111}=37000 \\ 5y-222000=3000\Longrightarrow y=\dfrac{225000}{5}=45000 \\ x-45000=2000\Longrightarrow x=47000 \end{cases}$$
El deportivo se vende por 47000€, el familiar por 45000€ y el monovolumen por 37000€.

Problema 1.6.6 Dadas dos matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

a) Resuelve la ecuación matricial $X+X\cdot\dfrac{1}{2}A=A\cdot B$

b) Calcula $-\dfrac{1}{2}A-2B^T+C$

Solución:

a) $X+X\dfrac{1}{2}A=AB\Longrightarrow X\left(I+\dfrac{1}{2}A\right)=AB\Longrightarrow X=AB\left(I+\dfrac{1}{2}A\right)^{-1}=$
$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\right)^{-1}=$
$\begin{pmatrix} -10 & -8 \\ -30 & -26 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -10 & -8 \\ -30 & -26 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -28 & 18 \\ -86 & 56 \end{pmatrix}$

b) $-\dfrac{1}{2}A-2B^T+C=-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

1.7. Castilla León

1.7.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.7.1 Una parcela produce tres cereales diferentes: maíz, trigo y centeno. En la parcela trabajan tres agricultores durante exactamente 8 horas diarias cada uno, y se utiliza el sistema de riego durante exactamente 60 minutos diarios. Para cuidar el maíz se emplean 2 horas de mano de obra y se necesitan 6 minutos de riego; para cuidar el trigo se emplean 4 horas de mano de obra y 4 minutos de riego; y para el centeno se emplea 1 hora de mano de obra y 4 minutos de riego. Si se deben producir exactamente 12 kilogramos en total de cereal al día por limitaciones en la producción, calcular los kilogramos de cada tipo de cereal que se producen en la parcela.

Solución:

Sean x : kg de maíz, y : kg de trigo y z kg de centeno.

	horas mano de obra	minutos de riego
kg maíz	2	6
kg trigo	4	4
kg centeno	1	4
	$= 24$	$= 60$

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=12 \\ 2x+4y+z=24 \\ 6x+4y+4z=60 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=12 \\ 2x+4y+z=24 \\ 3x+2y+2z=30 \end{array}\right.$$

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 2 & 4 & 1 & 24 \\ 3 & 2 & 2 & 30 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-3F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -6 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3+F_2 \end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible determinado (solución única)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} -3z=-12 \Longrightarrow z=4 \\ 2y-4=0 \Longrightarrow y=2 \\ x+2+4=12 \Longrightarrow x=6 \end{array}\right.$$

Luego se van a producir 6 kg de maíz, 2 kg de trigo y 4kg de centeno.

Problema 1.7.2 Dadas las matrices:

$$A=\left(\begin{array}{rr} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{array}\right), \quad B=\left(\begin{array}{rr} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{array}\right), \quad C=\left(\begin{array}{rr} 4 & -1 \end{array}\right) \text{ y } D=\left(\begin{array}{rr} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{array}\right)$$

a) Sea A^T la matriz traspuesta de A, indicar razonadamente cuáles de los producto de matrices $A \cdot B$, $B \cdot A^T$, $C \cdot D$ y $D \cdot A$ se pueden calcular. Determinar las dimensiones de las matrices resultantes en aquellos casos en los que sea posible realizar dichos productos.

b) Hallar la matriz X que es solución de la ecuación $X \cdot B = D$.

Solución:

a)
- ☛ $\underset{3\times 2}{A} \cdot \underset{2\times 2}{B} = \underset{3\times 2}{A \cdot B}$
- ☛ $\underset{2\times 2}{B} \cdot \underset{2\times 3}{A^T} = \underset{2\times 3}{B \cdot A^T}$
- ☛ $\underset{1\times 2}{C} \cdot \underset{2\times 2}{D} = \underset{1\times 2}{C \cdot D}$
- ☛ $\underset{2\times 2}{D} \cdot \underset{3\times 2}{A}$ no se pueden multiplicar.

b) $XB = D \Longrightarrow X = DB^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} =$

$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/7 & -2/7 \\ 2/7 & 1/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

Problema 1.7.3 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar a y b para que la matriz A conmute con B.

Solución:

$AB = BA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\begin{pmatrix} a+1 & b+1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a+1 = a+b \\ b+1 = a \\ a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

1.7.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.7.4 Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real a

$$\begin{cases} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a.

b) Resolver el sistema para $a = 0$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & a & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ y $|A| = 2(a-1) = 0 \Longrightarrow a = 1$

- ☛ Si $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ =nº de incógnitas$\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)
- ☛ Si $a = 1$:

$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_3 \\ F_2 \\ F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{bmatrix} =$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$

sistema incompatible (no tiene solución)

b) Si $a = 0$:

$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_3 \\ F_2 \\ F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{bmatrix} =$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2z = 1 \Longrightarrow z = \dfrac{1}{2} \\ \\ -y + \dfrac{3}{2} = -2 \Longrightarrow y = \dfrac{7}{2} \\ \\ x + \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2} = 1 \Longrightarrow x = -2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ \\ y = \dfrac{7}{2} \\ \\ z = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Problema 1.7.5 Dadas tres matrices A, B y C se sabe que $A \cdot B \cdot C$ es una matriz de dimensiones 2×3 y que $B \cdot C$ es de dimensiones 4×3, determinar las dimensiones que debe tener A.
Solución:
$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{4\times 3}{(B \cdot C)} = \underset{2\times 3}{A \cdot B \cdot C} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m = 2 \\ n = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \underset{2\times 4}{A}$

1.8. Cataluña

1.8.1. Convocatoria Ordinaria-Serie 2

Problema 1.8.1 En el instituto de Martí han elaborado tres tipos diferentes de ramos de rosas para vender el día de Sant Jordi. La opción clásica consiste en una rosa y una espiga. La opción de ramo pequeño está formada por tres rosas y dos espigas. Y, finalmente, la opción de ramo grande consiste en media docena de rosas y tres espigas. Todos los ramos (sean de la opción que sean) llevan un bonito envoltorio. Se sabe que se han utilizado 200 rosas, 135 espigas y 85 envoltorios.

a) ¿Cuántos ramos se han elaborado de cada tipo?

b) Si el precio de venta de un ramo de la opción clásica es de 3 euros, el de un ramo pequeño es de 5 euros y el de un ramo grande es de 10 euros, ¿cuánto dinero se ingresará si se venden todos?

Solución:
Sean x nº de ramos clásicos, y nº de ramos pequeños y z nº de ramos grandes.

	rosas	espigas	envoltorios
clásicos	1	1	1
pequeños	3	2	1
grandes	6	3	1
	= 200	= 135	= 85

a) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 85 \\ x + 3y + 6z = 200 \\ x + 2y + 3z = 135 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 50 \\ y = 20 \\ z = 15 \end{array}\right.$
Se han elaborado 50 ramos clásicos, 20 pequeños y 15 grandes.

Resolución del sistema por Gauss:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 85 \\ 1 & 3 & 6 & 200 \\ 1 & 2 & 3 & 135 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 85 \\ 0 & 2 & 5 & 115 \\ 0 & 1 & 2 & 50 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 85 \\ 0 & 2 & 5 & 115 \\ 0 & 0 & -1 & -15 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema compatible determinado (solución única)} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} -z = -15 \Longrightarrow z = 15 \\ 2y + 75 = 115 \Longrightarrow y = 20 \\ x + 20 + 15 = 85 \Longrightarrow x = 50 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 50 \\ y = 20 \\ z = 15 \end{array}\right.$$

b) $3x + 5y + 10z = 3 \cdot 50 + 5 \cdot 20 + 10 \cdot 15 = 400$€

Problema 1.8.2 Considere las matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Encuentre para qué valores de a es invertible la matriz obtenida del resultado del producto $P \cdot A$.

b) Si $a = 2$, encuentra la matriz X que satisface la ecuación matricial $P \cdot A + X = I$, donde I denota la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a) $PA = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3-a & -2a-1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |PA| = 5a - 8 = 0 \Longrightarrow a = \dfrac{8}{5}$

La matriz $P \cdot A$ es invertible para cualquier valor real $a \neq \dfrac{8}{5}$.

b) Si $a = 2 \Longrightarrow X = I - PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

1.8.2. Convocatoria Ordinaria-Serie 5

Problema 1.8.3 Una caja contiene 40 monedas, que son de 50 céntimos, de 1€ y de 2€. Se sabe que el número de monedas de 50 céntimos que hay es el doble que el de monedas de 2€.

a) ¿Puede saberse el número de monedas que hay de cada tipo? En caso afirmativo, calcúlelo. En caso negativo, dé la solución en función de un parámetro.

b) Averigüe si puede calcularse el valor total, en euros, de las monedas de la caja. En caso afirmativo, calcúlelo.

Solución:
Sean x monedas de 0,5€, y monedas de 1€ y z monedas de 2€.

a) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 40 \\ x = 2z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 40 \\ x - 2z = 0 \end{array}\right.$

Sistema compatible indeterminado: $\left\{\begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 40 - 3\lambda \quad \lambda \in \mathbb{N} \\ z = \lambda \end{array}\right.$

b) Tenemos $0,5x + y + 2z = 0,5(2\lambda) + 40 - 3\lambda + 2\lambda = 40$€ el valor no depende del parámetro λ.

Problema 1.8.4 Calcule la matriz X que verifica $AXB = C$, sabiendo que

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AXB = C \Longrightarrow X = A^{-1}CB^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.8.3. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.8.5 Martí le explica a Marcel que el otro día, cuando cogió el autocar para ir de Barcelona a Tarragona, el autocar se averió justo a la mitad del trayecto. Desde ese punto fue andando hasta la población más próxima, de manera que recorrió a pie una vigésima parte del total del trayecto. Allí cogió un taxi hasta Tarragona, y dice que recorrió 5 kilómetros más en autocar que en taxi.

a) Plantee y resuelva un sistema de ecuaciones para calcular cuántos kilómetros recorrió en autocar, a pie y en taxi.

b) Si el autocar iba a 100 km/h, Martí anduvo a 5 km/h y el taxi iba a 90 km/h, ¿cuánto tiempo tardó en recorrer todo el trayecto?

Solución:

Sean x kms recorridos en autocar, y a pie y z en taxi.

a) $$\left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{x+y+z}{2} \\ y = \dfrac{x+y+z}{20} \\ x = z+5 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ -x + 19y - z = 0 \\ x - z = 5 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 50 \\ y = 5 \\ z = 45 \end{array} \right.$$

Ha recorrido 50 km en autocar, 5 km a pie y 45 km en taxi.

Resolución del sistema por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 19 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 18 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

sistema compatible determinado (solución única) $\Longrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 5 \\ 90 - 2z = 0 \Longrightarrow z = 45 \\ x - 5 - 45 = 0 \Longrightarrow x = 50 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 50 \\ y = 5 \\ z = 45 \end{array} \right.$$

b) $t = \dfrac{50}{100} + \dfrac{5}{5} + \dfrac{45}{90} = 2$ horas

Problema 1.8.6 Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Calcule para qué valor de a las dos matrices conmutan, es decir, para qué valor de a se cumple que $AB = BA$. Compruebe que para este valor de a se satisface que $AB = 2I$, donde I es la matriz identidad de orden dos.

b) Para el valor de a encontrado en el apartado anterior, calcule las matrices inversas de las matrices A y B. Puede aplicar la relación $AB = 2I$.

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\begin{pmatrix} 2 & 1-a \\ 0 & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \Longrightarrow 1 - a = 0 \Longrightarrow a = 1$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$

b) $AB = 2I \Longrightarrow A^{-1}AB = A^{-1}2I \Longrightarrow B = 2A^{-1}I = 2A^{-1} \Longrightarrow$

$A^{-1} = \dfrac{1}{2}B = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Análogamente:

$AB = 2I \Longrightarrow ABB^{-1} = 2IB^{-1} \Longrightarrow A = 2B^{-1} \Longrightarrow$

$B^{-1} = \dfrac{1}{2}A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.9. Comunidad Valenciana

1.9.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.9.1 Una agencia inmobiliaria tiene tres locales en alquiler, por los que ha cobrado en total 1650 euros en este mes. La agencia ha pagado al propietario del primer local el 95 % de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; al propietario del segundo local, el 90 % de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; y al propietario del tercer local, el 80 % de la cantidad que ha cobrado por su alquiler. Tras estos tres pagos, a la agencia le han quedado 132 euros de ganancia. Se sabe también que el alquiler que se cobra por el primer local es el doble de la suma de lo que se cobra por el alquiler de los otros dos locales juntos. ¿Cuántos euros cobra la agencia por cada uno de los tres locales que tiene en alquiler?

Solución:

Sean x alquiler del primer local, y alquiler del segundo local y z alquiler del tercer local.

☛ $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1650 \\ 0,05x + 0,10y + 0,2z = 132 \\ x = 2(y + z) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1650 \\ x + 2y + 4z = 2640 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1100 \\ y = 330 \\ z = 220 \end{array}\right.$

☛ El primer local se alquila por 1100€, el segundo por 330€ y el tercero por 220€.

1.9.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.9.2 Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix}$

a) Justifica cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúa las que sean realizables.

1.1 $B + 2CA$.

2.2 $A - (BC)^T$, siendo $(BC)^T$ la matriz traspuesta de BC.

3.3 CAB.

b) Resuelve la ecuación matricial

$$\frac{1}{5}(B+AX)=C^T$$

Siendo C^T la matriz traspuesta de C.

Solución:

a) 1.1 $\underset{2\times 1}{B}+2\underset{1\times 2}{C}\cdot\underset{2\times 2}{A}=\underset{2\times 1}{B}+2\underset{1\times 2}{CA}$ no se pueden sumar matrices de distinta dimensión.

2.2 $\underset{2\times 2}{A}-(\underset{2\times 1}{B}\cdot\underset{1\times 2}{C})^T=\underset{2\times 2}{A}-\underset{2\times 2}{(BC)^T}$ si se pueden restar matrices de la misma dimensión.

$$A-(BC)^T=\begin{pmatrix}6&0\\2&4\end{pmatrix}-\left[\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-2\end{pmatrix}\right]^T=\begin{pmatrix}6&0\\2&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8&-12\\8&-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&12\\-6&16\end{pmatrix}$$

3.3 $\underset{1\times 2}{C}\cdot\underset{2\times 2}{A}\cdot\underset{2\times 1}{B}=\underset{1\times 1}{CAB}$ si se puede.

$$CAB=\begin{pmatrix}-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-24\\16\end{pmatrix}=(16)$$

b) $\frac{1}{5}(B+AX)=C^T\Longrightarrow B+AX=5C^T\Longrightarrow X=A^{-1}(5C^T-B)=$
$\begin{pmatrix}6&0\\2&4\end{pmatrix}^{-1}\left[5\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1/6&0\\-1/12&1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\-16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-7/2\end{pmatrix}$

1.10. Extremadura

1.10.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.10.1 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-1&2\\2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-1\\2&0\\0&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&-1&-2\end{pmatrix}$

Calcular la matriz X solución de la ecuación matricial $AX+C=B^t-2X$ donde B^t es la matriz traspuesta de B.
Justificar la respuesta.

Solución:
$AX+C=B^t-2X\Longrightarrow AX+2X=B^t-C\Longrightarrow(A+2I)X=B^t-C\Longrightarrow X=(A+2I)^{-1}(B^t-C)=$
$\left[\begin{pmatrix}-1&2\\2&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\right]^{-1}\left[\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1&1\\0&-1&-2\end{pmatrix}\right]=$
$\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-2&1&-1\\-1&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&-1\\-1&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&3&-11\\3&-1&5\end{pmatrix}$

Problema 1.10.2 Sea A la matriz siguiente: $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&x&0\\-x&3&-2\end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x no existe la inversa de A.

b) Calcular la inversa de A para $x = 2$.

Solución:

a) $|A| = x^2 - 4x + 3 = 0 \Longrightarrow x = 1$ o $x = 3 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.

b) Si $x = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -7 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Problema 1.10.3 Resolver, justificando la respuesta, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + z = -3 \\ x + y - 2z = -3 \\ 4x + 3y + 2z = -3 \end{array} \right.$$

Solución:
Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & 2 & -3 \end{array} \right) = \left[\, F_1 \longleftrightarrow F_2 \, \right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 & -3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & -1 & 10 & 9 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

sistema compatible determinado

$$\left\{ \begin{array}{l} 3z = 3 \Longrightarrow z = 1 \\ -y + 7 = 6 \Longrightarrow y = 1 \\ x + 1 - 2 = -3 \Longrightarrow x = -2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

1.10.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.10.4 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Calcular la matriz X solución de la ecuación matricial $AX - B^t = C + 3X$ donde B^t es la matriz traspuesta de B.
Justificar la respuesta.

Solución:
$AX - B^t = C + 3X \Longrightarrow AX - 3X = B^t + C \Longrightarrow (A - 3I)X = B^t + C \Longrightarrow X = (A - 3I)^{-1}(B^t + C) =$

$$\left[\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right]^{-1} \left[\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 1.10.5 Sea A la matriz siguiente: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 \\ x & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x existe la inversa de A.

b) Calcular la inversa de A para $x = 0$.

Solución:

a) $|A| = 1 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

b) Si $x = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 1.10.6 Resolver, justificando la respuesta, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 3 \\ x + y - z = -2 \\ 2x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

Solución:
Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) = \left[\ F_1 \longleftrightarrow F_2\ \right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & 9 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

sistema compatible determinado

$$\begin{cases} -3z = -6 \Longrightarrow z = 2 \\ -5y + 14 = 9 \Longrightarrow y = 1 \\ x + 1 - 2 = -2 \Longrightarrow x = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

1.11. Galicia

1.11.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.11.1 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Calcule las matrices $A^2 - B$ y $A - I$, en donde I representa la matriz identidad de orden 3.

b) Calcule, si es posible, la inversa de la matriz $A - I$.

c) Despeje X en la ecuación matricial $XA + B = A^2 + X$ y calcule su valor.

Solución:

a) $A^2-B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ -3 & 3 & 6\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ -3 & 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & -2 & -3\end{pmatrix}$

$A-I=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

b) $|A-I|=1\neq 0\Longrightarrow \exists(A-I)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

c) $XA+B=A^2+X\Longrightarrow XA-X=A^2-B\Longrightarrow X(A-I)=A^2-B\Longrightarrow$

$X=(A^2-B)(A-I)^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

1.11.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.11.2 Para dos matrices A y B se verifica que:

$$A-B=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -5 & 2\end{pmatrix} \text{ y } 2A+B=\begin{pmatrix} 5 & 2\\ 2 & 7\end{pmatrix}$$

a) Calcule las matrices A y B

b) Despeje la matriz X en la ecuación matricial $AX-B=X$ y calcule su valor.

Solución:

a) $3A=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -5 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 2\\ 2 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3\\ -3 & 9\end{pmatrix}\Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

$B=A-\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}$

b) $AX-B=X\Longrightarrow AX-X=B\Longrightarrow (A-I)X=B\Longrightarrow X=(A-I)^{-1}B=$

$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3\\ 1/3 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2/3 & -1/3\\ 5/3 & 1/3\end{pmatrix}$

1.12. Islas Baleares

1.12.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.12.1 Hace un año una sociedad de capital riesgo invirtió 100000 euros en acciones de tres empresas, que llamaremos A, B y C. Ahora, las acciones de la empresa A han aumentado de valor en un 50 %, las de la empresa B han aumentado en un 10 % y, en cambio, las de la empresa C han perdido un 15 % de su valor. Si la sociedad ahora vendiera todas las acciones obtendría 102000 euros. Sabemos que invirtió en las acciones de la empresa C lo mismo que en las otras dos juntas.

a) Identifique las variables e interprete el enunciado mediante un conjunto de ecuaciones lineales.

b) Calcule la cantidad de dinero que la sociedad invirtió en acciones de cada empresa.

Solución:

a) Sean x cantidad invertida en A, y en B y z en C.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=100000 \\ 1,5x+1,1y+0,85z=102000 \\ x+y=z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=100000 \\ x+y-z=0 \\ 30x+22y+17z=2040000 \end{array}\right.$$

b) Resolvemos por Gauss:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 100000 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 30 & 22 & 17 & 2040000 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-22F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 100000 \\ 0 & 0 & -2 & -100000 \\ 0 & -8 & -13 & -96000 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

sistema compatible determinado

$$\left\{\begin{array}{l} -2z=-100000 \Longrightarrow z=50000 \\ -8y-650000=-960000 \Longrightarrow y=38750 \\ x+38750+50000=100000 \Longrightarrow x=11250 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=11250€ \\ y=38750€ \\ z=50000€ \end{array}\right.$$

Problema 1.12.2 Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} x-ay+2z=0 \\ ax-4y-4z=0 \\ 4x+3y-2z=0 \end{array}\right.$$

en función del parámetro a.

a) Discuta para qué valores de a el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso.

b) Encuentre la solución para $a=-2$.

Solución:

a) Se trata de un sistema homogéneo. El sistema no puede ser incompatible, siempre tendrá la solución trivial $x=y=z=0$. Luego se trata de sistemas siempre compatibles y la discusión será sobre si es determinado (solución única, la trivial) o indeterminado (infinitas soluciones además de la trivial)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -a & 2 \\ a & -4 & -4 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A|=-2(a^2-11a-26)=0 \Longrightarrow a=-2 \;\; a=13$$

- ☛ Si $a\in\mathbb{R}-\{-2,13\} \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=$ número de incógnitas, el sistema será compatible determinado y su única solución es la trivial.
- ☛ Si $a=-2$ o $a=13 \Longrightarrow |A|=0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)<$ número de incógnitas, el sistema será compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

b) Si $a=-2$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+2z=0 \\ -2x-4y-4z=0 \\ 4x+3y-2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y+2z=0 \\ -2x-4y-4z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

1.12.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.12.3 Dado el sistema siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 1 \\ -mx + 2y + z = 2 \end{array}\right.$$

dependiente del parámetro m.

a) Discuta para qué valores de m el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso.

b) Encuentre la solución para $m = 2$.

Solución:

a) Dado que el sistema es de dos ecuaciones con tres incógnitas, no puede ser compatible determinado.
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -m & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 6 + 2m = 0 \Longrightarrow m = -3$
Si $m \neq -3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 2 <$ número de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)
Si $m = -3 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 1 \neq$Rango$(\overline{A}) = 2 \Longrightarrow$ sistema incompatible (no tiene solución)

b) Si $m = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 1 \\ -2x + 2y + z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{5} \\ y = \dfrac{8}{10} - \dfrac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 1.12.4 Dadas las matrices

$$X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}$$

a) Encuentre los valores de k para los cuáles Y es invertible.

b) Encuentre la inversa de Y para $k = 1$.

c) Determine los valores de m y n para los que la matriz X satisface

$$X^2 - 4X + nId = O,$$

Donde Id denota la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y O la matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|Y| = -k - 4 = 0 \Longrightarrow k = -4 \Longrightarrow \exists Y^{-1}\ \forall k \in \mathbb{R} - \{-4\}$

b) $k = 1 \Longrightarrow Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow Y^{-1} = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

c) $X^2 - 4X + nId = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 4m & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 - 4m + n & 0 \\ 0 & n - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\left\{\begin{array}{l} m^2 - 4m + n = 0 \Longrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Longrightarrow m = 3,\ m = 1 \\ n - 3 = 0 \Longrightarrow n = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m = 3 \text{ y } n = 3 \\ m = 1 \text{ y } n = 3 \end{array}\right.$

1.13. Islas Canarias

1.13.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.13.1 Una empresa dedicada a actividades y deportes acuáticos ha vendido en un día, un total de 45 sesiones entre paddle surf, kayak y moto acuática. Los precios por sesión y persona de cada una de estas actividades son 40€, 20€ y 60€ respectivamente, recaudando la empresa un total de 1700€ ese día. Si por cada persona que elige kayak hay tres que eligen paddle surf.

a) Plantear el sistema de ecuaciones lineales.

b) ¿Cuántas personas van a cada actividad?

Solución:
Sean x número de sesiones de paddle surf, y número de sesiones de kayak y z número de sesiones de moto acuática.

a) $$\begin{cases} x+y+z=45 \\ 40x+20y+60z=1700 \\ x=3y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=45 \\ 2x+y+3z=85 \\ x-3y=0 \end{cases}$$

b)
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 2 & 1 & 3 & 85 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right)=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & -1 & -45 \end{array}\right)=$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3-4F_2 \end{bmatrix}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -25 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema compatible determinado

$$z=\frac{-25}{-5}=5,\ -y+5=-5\Longrightarrow y=10,\ x+10+5=45\Longrightarrow x=30$$

hay 30 personas para paddle surf, 10 personas para kayak y 5 personas para moto acuática.

1.13.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.13.2 Un comercio ha vendido 600 ejemplares de tres ediciones de un libro por un total de 19152 euros. Los ejemplares de la tercera edición se vendieron por 36 euros cada uno. Los ejemplares de las dos ediciones anteriores se vendieron con un descuento del 30 % los de la primera edición, y del 40 % los de la segunda (ambos respecto al precio de la tercera edición). Se sabe que el número total de ejemplares vendidos de las dos ediciones anteriores fue la mitad de los de la última edición. ¿Cuántos libros vendió de cada edición
Solución:
Sean x número de ejemplares vendidos de la primera edición, y número de ejemplares vendidos de la segunda edición y z número de ejemplares vendidos de la tercera edición.

a) $$\begin{cases} x+y+z=600 \\ 36\cdot 0,7x+36\cdot 0,6y+36z=19152 \\ x+y=\dfrac{z}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=600 \\ 7x+6y+10z=5320 \\ 2x+2y-z=0 \end{cases}$$

b)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 7 & 6 & 10 & 5320 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 7F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & -1 & 3 & 1120 \\ 0 & 0 & -3 & -1200 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible determinado

$$z = \frac{-1200}{-3} = 400, \ -y + 1200 = 1120 \Longrightarrow y = 80, \ x + 80 + 400 = 600 \Longrightarrow x = 120$$

Se han vendido 120 de la primera edición, 80 de la segunda y 400 de la tercera.

1.14. La Rioja

1.14.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.14.1 ¿Para qué valores de a tiene soluciones el siguiente sistema?

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 12 \\ 2x - y - z = 12 \\ 2x + 2y + az = 12 \end{array} \right.$$

Resuelve el sistema si $a = 0$.
Si para un valor a el sistema es incompatible, y sustituimos los términos independientes $(12, 12, 12)$ por $(12, 12, 24)$, ¿cómo clasificaríamos el sistema resultante?
Solución:

- $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & -1 & 12 \\ 2 & 2 & a & 12 \end{array} \right); \quad |A| = 12 - 3a = 0 \Longrightarrow a = 4$

- Si $a \neq 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$nº incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)

- Si $a = 4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & -1 & 12 \\ 2 & 2 & 4 & 12 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & -3 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

  Luego el sistema es incompatible (no tiene solución)

- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & -1 & 12 \\ 2 & 2 & 0 & 12 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & -3 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{l} -4z = -12 \Longrightarrow z = 3 \\ -3y - 15 = -12 \Longrightarrow y = -1 \\ x - 1 + 6 = 12 \Longrightarrow x = 7 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 7 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{array} \right.$$

- Si cambiamos $(12, 12, 12)$ por $(12, 12, 24)$:

  $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & -1 & 12 \\ 2 & 2 & 0 & 24 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & -3 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Problema 1.14.2 Justifica que la siguiente matriz es regular, y calcula su matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

☛ Una matriz es regular si tiene inversa, o lo que es lo mismo, su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Longrightarrow \text{es regular}$$

☛ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

1.14.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.14.3 Usamos una balanza de brazos muy sensible para pesar tres tipos de piezas (A, B y C) comparando su peso con el de una barrita que sabemos que pesa 13 gramos. Todas las piezas de un mismo tipo pesan igual. Descubrimos que:

a) La barrita pesa lo mismo que una pieza C y dos piezas B juntas;

b) tres piezas A pesan lo mismo que dos piezas B;

c) una pieza C pesa lo mismo que dos piezas A y una pieza B.

¿Cuánto pesan las piezas de cada tipo?
Si la relación (c) hubiera sido que una pieza B pesa como dos piezas A y una pieza C, al resolver el problema nos daríamos cuenta de que alguna relación debería ser falsa. ¿Por qué?
Solución:
Sean x el número de piezas A, y de B y z de C.

☛ $\left\{\begin{array}{l} 2y + z = 13 \\ 3x = 2y \\ z = 2x + y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + y - z = 0 \\ 2y + z = 13 \\ 3x - 2y = 0 \end{array}\right.$

☛ $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 13 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 13 \\ 0 & -7 & 3 & 0 \end{array}\right) =$
$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + 7F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 13 & 91 \end{array}\right) \Longrightarrow$
Luego el sistema es compatible determinado (solución única)

☛ $\left\{\begin{array}{l} 13z = 91 \Longrightarrow z = 7 \\ 2y + 7 = 13 \Longrightarrow y = 3 \\ 2x + 3 - 7 = 0 \Longrightarrow x = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \text{ gramos de } A \\ y = 3 \text{ gramos de } B \\ z = 7 \text{ gramos de } C \end{array}\right.$

☛ Si sustituimos $z = 2x + y$ por $y = 2x + z \Longrightarrow 2x + z - y = 0$ queda el sistema:

$$\begin{cases} 2y + z = 13 \\ 3x = 2y \\ y = 2x + z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 2y + z = 13 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 13 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 13 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & -5 & 13 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Luego el sistema es compatible determinado (solución única)

$-5z = 13 \Longrightarrow z = -\dfrac{13}{5}$ no es posible soluciones negativas. Alguna relación no es cierta.

Problema 1.14.4 Una matriz cuadrada A se dice *idempotentes* si $A^2 = A$.

a) Estudia si hay matrices *idempotentes* 2×2 que sean de la forma $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ o de la forma $\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$. En cada caso debes indicar, si la respuesta es afirmativa, el valor de a y b.

b) Si una matriz A es idempotente, calcula su potencia A^{2022}.

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4 & b+2 \\ a(b+2) & a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} a + 4 = 2 \Longrightarrow a = -2 \\ b + 2 = 1 \Longrightarrow b = -1 \\ a(b+2) = a \Longrightarrow -2(-1+2) = -2 \\ a + b^2 = b \Longrightarrow -2 + 1 = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$$

La matriz A es *idempotente* si $a = -2$ y $b = -1$.

$\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab+4 & 3b \\ 3a & ab+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} ab + 4 = 2 \Longrightarrow 0 + 4 = 2 \text{ imposible} \\ 3b = b \Longrightarrow b = 0 \\ 3a = a \Longrightarrow a = 0 \\ ab + 1 = 1 \Longrightarrow 0 + 1 = 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

La matriz B no puede ser *idempotente* sea cual sea el valor de a y b.

b) $A^2 = A$, $A^3 = A^2A = AA = A^2 = A$, $A^4 = A^3A = AA = A^2 = A, \ldots, A^n = A$ luego $A^{2022} = A$

1.15. Madrid

1.15.1. Modelo

Problema 1.15.1 Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A es invertible.

b) Calcule, para $a = 0$, la matriz inversa A^{-1}.

Solución:

a) $|A| = 2(a-2) = 0 \Longrightarrow a = 2 \Longrightarrow \exists\, A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{2\}$

b) Si $a = 0 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 3/4 \\ -1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$

Problema 1.15.2 Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x - y + az = -1 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.

b) Resuelva el sistema para $a = -2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right); \quad |A| = 3(1-a) = 0 \Longrightarrow a = 1$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

b) Si $a = -2$:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x - y - 2z = -1 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

1.15.2. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.15.3 Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A es invertible.

b) Calcule A^{-1} para $a = 1$.

Solución:

a) $|A| = a^2 - 2a - 2 = 0 \Longrightarrow a = 1 \pm \sqrt{3}$
$\exists A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \left\{1 \pm \sqrt{3}\right\}$

b) Si $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Problema 1.15.4 Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \overline{R}$:

$$\begin{cases} x + ay + z = a \\ ax - y - az = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ a & -1 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = 2a(1-a) = 0 \Longrightarrow a = 0,\ \ a = 1$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

b) Si $a = 3$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1/4 \\ y = 1 \\ z = -1/4 \end{cases}$$

1.15.3. Convocatoria Ordinaria(coincidente)

Problema 1.15.5 Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y $B = A + aI$, donde I es la matriz identidad de orden 3 y a es un número real.

a) Calcule $A(A^2 - A^4)$

b) Calcule los valores de a para que las matrices B y AB sean invertibles.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = A + aI = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$

$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^5 = A^3 \cdot A^2 = A \cdot A^2 = A^3 = A$

$A(A^2 - A^4) = A^3 - A^5 = A - A = O$

b) $|B| = a(a^2 - 1) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = \pm 1 \Longrightarrow \exists A^{-1} \ \ \forall a \in \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$

$|AB| = |A||B| = 0 \cdot |B| = 0 \Longrightarrow$ la matriz AB no es invertible, independientemente del valor de a.

En conclusión, no hay valores de a que hagan invertibles a las dos matrices.

Problema 1.15.6 Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2ax + z = 1 \\ ax - y + z = 0 \\ ay + z = a + 1 \end{cases}$$

a) Discuta la compatibilidad del sistema para diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2a & 0 & 1 & 1 \\ a & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 & a+1 \end{array}\right) \quad |A| = -a(a+2) = 0 \Longrightarrow$$

$$a = 0, \quad a = -2$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq -2 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\ F_1 = F_3 \ \right] \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b) Si $a = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 1 \\ -y + z = 0 \\ z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

1.15.4. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.15.7 Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

.

a) Determine los valores del parámetro real a para que A tenga inversa.

b) Calcule, para $a = 1$, la solución del sistema $(A - B)X = Y$.

Solución:

a) $|A| = 4a = 0 \Longrightarrow a = 0$
$\exists A^{-1} \ \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$

b) Si $a = 1$:

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - B)X = Y \Longrightarrow X = (A - B)^{-1}Y \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y = -\frac{5}{4}, \quad z = -2$$

Problema 1.15.8 Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ x - az = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right); \quad |A| = 1 - a^2 = 0 \Longrightarrow a = -1, \ \ a = 1$$

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

b) Si $a = 0$:

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ x = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

1.15.5. Convocatoria Extraordinaria (coincidente)

Problema 1.15.9 Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & a & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

.

a) Determine los valores de a para que A tenga inversa.

b) Calcule los valores de a para que la solución del sistema $(A - B)X = Y$ sea

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|A| = a(a-2) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 2$
$\exists A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$

b) Si $a = 1$:

$$A - B = \begin{pmatrix} -a & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & a & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ a-1 & a-1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -a-1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ a-1 & a-1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow 1 - a = 2 \Longrightarrow a = -1$$

Problema 1.15.10 Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ ax - z = 0 \\ ay + z = a \end{cases}$$

a) Determine a para que el sistema NO sea compatible determinado.

b) Resuelva el sistema para $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ a & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & 1 & a \end{array}\right); \quad |A| = a(a-1) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ a = 1$$

Estos valores son los únicos que hacen a este sistema NO compatible determinado.

b)

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x - z = 0 \\ 2y + z = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

1.16. Murcia

1.16.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.16.1 Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\begin{cases} 4x + ay - 2z = 1 \\ ax - 2y + 2z = -1 \\ ax + y = 0 \end{cases}$$

Resolverlo para $a = 1$.

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & -2 & 1 \\ a & -2 & 2 & -1 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{array} \right); \ |A| = 2(a^2 - 3a - 4) = 0 \Longrightarrow a = -1, \ a = 4$$

- ☛ Si $a \neq -1$ y $a \neq 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- ☛ Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 4F_2 + F_1 \\ 4F_3 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -9 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -9 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

- ☛ Si $a = 4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Si $a = 1$:

$$\begin{cases} 4x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + 2z = -1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 4F_2 - F_1 \\ 4F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -9 & 10 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -9 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 16 & -8 \end{array} \right) \Longrightarrow \begin{cases} 16z = -8 \Longrightarrow z = -1/2 \\ -9y - 5 = -5 \Longrightarrow y = 0 \\ 4x + 0 + 1 = 1 \Longrightarrow x = 0 \end{cases}$$

1.16.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.16.2 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular el valor de a para el que $B^2 = A$

b) Calcular la matriz inversa A^{-1}

c) Para $a = 0$, encuentre la matriz X que satisface la ecuación $AX + B = C$

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+9 & 4a \\ 4a & a^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$\left\{\begin{array}{l} a^2+9=10 \Longrightarrow a=\pm 1 \\ 4a=4 \Longrightarrow a=1 \\ a^2+1=2 \Longrightarrow a=\pm 1 \end{array}\right. \Longrightarrow a=1$

b) $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1 & 5/2 \end{pmatrix}$

c) $AX + B = C \Longrightarrow AX = C - B \Longrightarrow X = A^{-1}(C-B) =$
$\begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1 & 5/2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1 & 5/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -7/2 \\ 3/2 & 9 \end{pmatrix}$

1.17. Navarra

1.17.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.17.1 Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $A \cdot B^t$ y explique razonadamente si la matriz resultante tiene inversa.

b) Determine las matrices X e Y que verifican el sistema: $\left\{\begin{array}{l} 2X - 3Y = A \\ 3X - 2Y = B \end{array}\right.$.

Solución:

a) $A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -13 & 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A \cdot B^t| = -59 \neq 0 \Longrightarrow \exists (A \cdot B^t)^{-1}$

b) $\left\{\begin{array}{l} 2X - 3Y = A \\ 3X - 2Y = B \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} X = \dfrac{1}{5}(3B-2A) \\ Y = \dfrac{1}{5}(2B-3A) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right.$

$\dfrac{1}{5}(3B-2A) = \dfrac{1}{5}\left[3\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\dfrac{1}{5}(2B-3A) = \dfrac{1}{5}\left[2\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1.17.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.17.2 Se considera la siguiente matriz dependiente del parámetro real k: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & k \\ k & 1 & k \end{pmatrix}$

a) Determine los valores de k para los cuales A tiene inversa.

b) Para $k = 1$, calcule la matriz inversa de A.

c) Para $k = 0$, calcule $(A - 2A^t)^2$.

Solución:

a) $|A| = 2k^2 - 4k = 0 \Longrightarrow k = 0$ y $k = 2 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall k \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$

b) Si $k = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \\ -2 & -3/2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

c) Si $k = 0$:

$$(A-2A^t)^2 = \left(\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 8 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1.18. País Vasco

1.18.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.18.1 Una determinada empresa de selección de personal realiza un test de 90 preguntas. Por cada acierto da 6 puntos; por cada fallo quita 2,5 puntos, y por cada pregunta no contestada quita 1,5 puntos. Para aprobar hay que obtener por lo menos 210 puntos.
¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente para obtener los 210 puntos, y que el número de preguntas no contestadas más el número de aciertos sea igual al doble del número de fallos?

Solución:
Sean x número de aciertos, y número de fallos y z número de no contestadas.

$$\begin{cases} x + y + z = 90 \\ 6x - 2,5y - 1,5z = 210 \\ x + z = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 90 \\ x - 2y + z = 0 \\ 12x - 5y - 3z = 420 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 30 \\ z = 10 \end{cases}$$

50 aciertos, 30 fallos y 10 no contestadas.

Resolución del sistema por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 12 & -5 & -3 & 420 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 12F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & -3 & 0 & -90 \\ 0 & -17 & -15 & -660 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ 3F_3 + 17F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & -3 & 0 & -90 \\ 0 & 0 & -45 & -450 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema compatible determinado.}$$

$$\begin{cases} -45z = -450 \Longrightarrow z = 10 \\ -3y = -90 \Longrightarrow y = 30 \\ x + 30 + 10 = 90 \Longrightarrow x = 50 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 30 \\ z = 10 \end{cases}$$

1.18.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.18.2 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Encuentra el valor o valores de x para que se cumpla la igualdad:

$$B^2 = A$$

b) Igualmente, para que se cumpla:

$$B + C = A^{-1}$$

c) Determina el valor de x para que $A + B + C = 3I_2$, donde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+1 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 + 1 = 2 \Longrightarrow x = \pm 1 \\ x = 1 \\ x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1 \end{cases} \Longrightarrow x = 1$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ x-1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \Longrightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ x-1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow x - 1 = -1 \Longrightarrow x = 0$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & x \\ x & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = 0$

Capítulo 2

Programación Lineal

2.1. Andalucia

2.1.1. Convocatoria Ordinaria

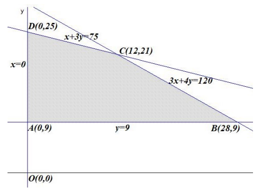
Problema 2.1.1 Una pastelería decide preparar dos tipos de cajas de pastelitos para regalar a los clientes en su inauguración. En total dispone de 120 piononos y 150 pestiños. En la caja del primer tipo habrá 3 piononos y 2 pestiños y en la del segundo tipo 4 piononos y 6 pestiños. Deben preparar al menos 9 cajas del segundo tipo.
Determine cuántas cajas de cada tipo deberá preparar para realizar el máximo número de regalos posible. En este caso, indique cuántos piononos y cuántos pestiños se utilizarán.
Solución:
Sea x el nº de cajas del primer tipo e y el nº de cajas del segundo tipo.

	piononos	pestiños	cajas
x	3	2	1
y	4	6	1
	≤ 120	≤ 150	

$f(x,y) = x + y$ en el recinto S:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+4y \leq 120 \\ 2x+6y \leq 150 \\ y \geq 9 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x+4y \leq 120 \\ x+3y \leq 75 \\ y \geq 9 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right.$$

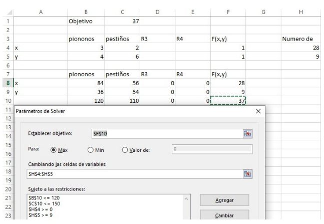
Los vértices a estudiar serán: $A(0,9)$, $B(28,9)$, $C(12,21)$ y $D(0,25)$.



$f(x,y) = x + y$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0,9) = 9 \\ f(28,9) = 37 \\ f(12,21) = 33 \\ f(0,25) = 25 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

Solución por solver :



El número máximo es de 37 cajas y se alcanza con 28 cajas del primer tipo y 9 del segundo.

	piononos	pestiños	cajas
x	3	2	28
y	4	6	9

$\Longrightarrow$

	piononos	pestiños
x	84	56
y	36	54
	120	110

Se utilizan 120 piononos y 110 pestiños.

2.1.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.1.2 Se considera el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

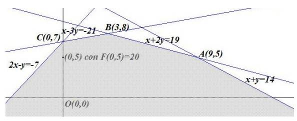
$$y - 2x \leq 7; \quad -x + 3y \leq 21; \quad x + 2y \leq 19; \quad x + y \leq 14$$

a) Represente dicho recinto y determine sus vértices.

b) Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x, y) = x + 4y$ en el recinto anterior, así como los puntos donde se alcanzan.

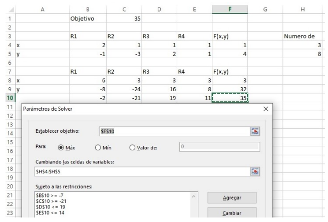
c) ¿Podrá tomar la función objetivo F el valor 40 en algún punto de la región factible? ¿Y el valor 20? Justifique las respuestas.

Solución:



$$S: \begin{cases} y - 2x \leq 7 \\ -x + 3y \leq 21 \\ x + 2y \leq 19 \\ x + y \leq 14 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - y \geq -7 \\ x - 3y \geq -21 \\ x + 2y \leq 19 \\ x + y \leq 14 \end{cases}$$

Solución por solver :



Los vértices a estudiar serán: $A(9, 5)$, $B(3, 8)$ y $C(0, 7)$.

$F(x, y) = x + 4y$

$$\begin{cases} f(9, 5) = 29 \\ f(3, 8) = 35 \\ f(0, 7) = 28 \end{cases} \Longrightarrow$$

El valor máximo de F es de 35 y se alcanza en el punto $B(3, 8)$.
El valor mínimo no existe.

El valor de 40 no se puede alcanzar dentro de la región factible, ya que el máximo es de 35.
El valor 20 si es posible. Si hacemos $x + 4y = 20$ nos daría valores de x e y dentro de la región factible, por ejemplo el $(0, 5)$

2.2. Aragón

2.2.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.2.1 Una empresa de transportes valora la apertura de sucursales rurales y/o urbanas. Las sucursales rurales emplean a tres personas, requieren de una inversión de 100.000 euros para su apertura y generan unos ingresos de 15.000 euros al mes. Las sucursales urbanas emplean a 6 personas, requieren de 150.000 euros de inversión y generan un ingreso de 18.000 euros al mes. La empresa de transportes tiene hasta tres millones de euros disponibles para abrir nuevas sucursales, han decidido limitar el número de nuevas sucursales a 25 y se han comprometido a crear como mínimo 60 empleos.

a) Plantee un problema de programación lineal que permita calcular el número de sucursales de cada tipo que deben abrirse para maximizar el ingreso mensual.

b) Resuelva el problema anterior y calcule el ingreso mensual máximo que se obtendría.

c) En la solución óptima, ¿cuántos empleos generará?, ¿se gasta todo el dinero disponible?

Solución:
Sea x el nº de sucursales rurales e y el nº de sucursales urbanas.

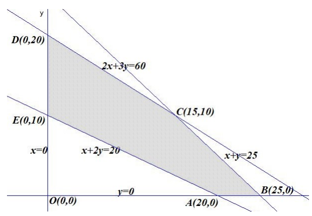
	personas	inversión	ingreso
x	3	100000	15000
y	6	150000	18000
	≥ 60	≤ 3000000	

a) $f(x,y) = 15000x + 18000y$ en el recinto S:

$$\begin{cases} x+y \leq 25 \\ 3x+6y \geq 60 \\ 100000x + 150000y \leq 3000000 \\ x,y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y \leq 25 \\ x+2y \geq 20 \\ 2x+3y \leq 60 \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $A(20,0)$, $B(25,0)$, $C(15,10)$, $D(0,20)$ y $E(0,10)$.

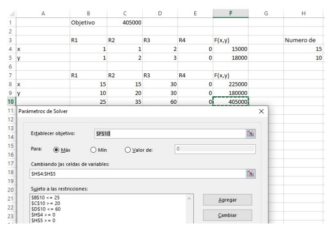


b) $f(x,y) = 15000x + 18000y$

$$\begin{cases} f(20,0) = 300000 \\ f(25,0) = 375000 \\ f(15,10) = 405000 \Longrightarrow \\ f(0,20) = 360000 \\ f(0,10) = 180000 \end{cases}$$

El valor máximo será de 405000€ y se alcanza con 15 sucursales rurales y 10 urbanas.

Solución por solver :



c)

	personas	inversión
x	$3 \cdot 15 = 45$	$100000 \cdot 15 = 1500000$
y	$6 \cdot 10 = 60$	$150000 \cdot 10 = 1500000$
	105	3000000

Se generan 105 empleos y se gastan los 3000000€ completamente.

2.2.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.2.2 Fernanda dispone de 10.000 euros para invertir. Le han recomendado dos productos que en el último año tuvieron buenos resultados: criptomonedas y fondos de inversión garantizados. Por lo que ha leído en la prensa espera que la rentabilidad anual de las criptomonedas sea del 30 % y la de los fondos de inversión sea del 5 %. Para que la inversión no sea demasiado arriesgada quiere invertir en fondos tanto o más que en criptomonedas y además, le aconsejan invertir en criptomonedas un máximo de 3.000 euros y un mínimo de 1.000€.

a) Plantee un problema de programación lineal que permita determinar cómo debe invertir Fernanda sus ahorros para obtener la máxima rentabilidad.

b) Resuelva el problema y calcule la rentabilidad máxima conseguida con la inversión.

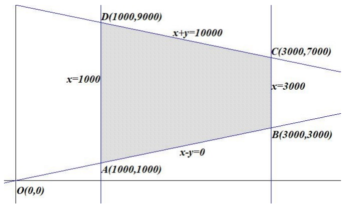
c) Su gestor le dice que por la coyuntura económica actual el riesgo de inversión es del 35 % para las criptomonedas y 0 % para los fondos. Si Fernanda quisiera minimizar el riesgo de la inversión, justifica si invertir 1.000 euros en criptomonedas y 5.000 en fondos es una solución óptima (con las restricciones del enunciado).

Solución:
Sea x la inversión en criptomonedas e y la inversión en fondos.

a) $f(x,y) = 0,3x + 0,05y$ en el recinto S:

$$\begin{cases} x + y \le 10000 \\ y \ge x \\ x \le 3000 \\ x \ge 1000 \\ y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \le 10000 \\ x - y \le 0 \\ x \le 3000 \\ x \ge 1000 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $A(1000,1000)$, $B(3000,3000)$, $C(3000,7000)$ y $D(1000,9000)$.

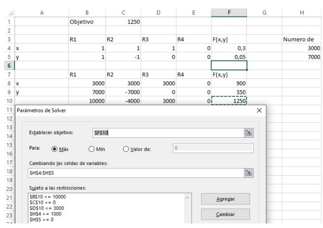


b) $f(x,y) = 0,3x + 0,05y$

$$\begin{cases} f(1000,1000) = 350 \\ f(3000,3000) = 1050 \\ f(3000,7000) = 1250 \\ f(1000,9000) = 750 \end{cases} \Longrightarrow$$

La máxima rentabilidad será de 1250€ y se alcanza con 3000€ de inversión en criptomonedas y 7000€ en fondos de inversión garantizados.

Solución por solver :



c) Ahora $f(x,y) = 0,35x + 0y$

$$\begin{cases} f(1000,1000) = 350 \\ f(3000,3000) = 1050 \\ f(3000,7000) = 1050 \\ f(1000,9000) = 350 \end{cases} \Longrightarrow$$ El riesgo mínimo se encuentra en cualquier punto del segmento que une los puntos $A(1000,1000)$ y $D(1000,9000)$.

El punto $(1000,5000)$ pertenece a ese segmento y es, por tanto, una solución óptima.

2.3. Asturias

2.3.1. Convocatoria Ordinaria

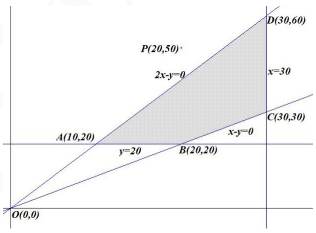
Problema 2.3.1 En un almacén hay lavadoras y frigoríficos. Por necesidades del mercado el número de frigoríficos debe ser mayor o igual que el de lavadoras, pero no puede superar el doble del de lavadoras. Se necesitan al menos 20 frigoríficos y no hay más de 30 lavadoras disponibles para tener en el almacén. Por cada lavadora se obtiene un beneficio de 200 euros y por cada frigorífico se obtiene un beneficio de 250 euros.

a) ¿Cuántos electrodomésticos de cada tipo se pueden tener en el almacén para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían tener 20 lavadoras y 50 frigoríficos?

b) ¿Cuántos electrodomésticos de cada tipo habría que tener para maximizar el beneficio al vender todo lo del almacén? ¿y para minimizar el número de lavadoras?

Solución:
Sea x el nº de lavadoras e y el nº de frigoríficos.

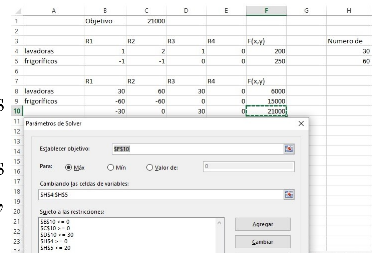
a) $\left\{\begin{array}{l} y \geq x \\ y \leq 2x \\ y \geq 20 \\ x \leq 30 \\ x \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y \leq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ y \geq 20 \\ x \leq 30 \\ x \geq 0 \end{array}\right.$



Los vértices a estudiar serán: $A(10,20)$, $B(20,20)$, $C(30,30)$ y $D(30,60)$.
El punto $P(20,50)$ se encuentra fuera de la región factible. Luego no se trata de una solución posible.

b) $f(x,y) = 200x + 250y$

$\left\{\begin{array}{l} f(10,20) = 7000 \\ f(20,20) = 9000 \\ f(30,30) = 13500 \\ f(30,60) = 21000 \end{array}\right. \Longrightarrow$ Solución por solver :



Se deberán tener 30 lavadoras y 60 frigoríficos con un beneficio máximo de 21000€.
Si se desea minimizar el número de lavadoras tiene que tener 10 lavadoras y 20 frigoríficos, en este caso el beneficio es de 7000€.

2.3.2. Convocatoria Extraordinaria

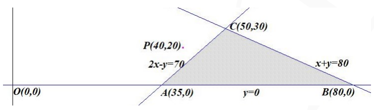
Problema 2.3.2 Las pruebas de selección de personal de una empresa consisten, entre otras actividades, en un test de 80 preguntas. Cada pregunta bien contestada suma 1 punto, cada pregunta mal contestada resta 0,5 puntos, no sumando ni restando las preguntas que se dejan sin contestar. Para aprobar hay que obtener al menos 35 puntos en el test.

a) ¿Cuántas preguntas se pueden contestar correctamente y cuántas se pueden fallar para aprobar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podría aprobar contestando exactamente 40 preguntas bien y 20 mal?

b) ¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente y cuántas fallar para aprobar dejando el máximo número de preguntas sin contestar? ¿Cuántos puntos se obtendrían en ese caso?

Solución:
Sea x el nº de preguntas acertadas e y el nº de preguntas falladas.

a) $\begin{cases} x+y\le 80 \\ x-0,5y\ge 35 \\ y\ge 0 \\ x\ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y\le 80 \\ 2x-y\ge 70 \\ y\ge 0 \\ x\ge 0 \end{cases}$

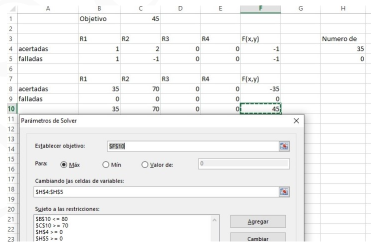


Los vértices a estudiar serán: $A(35,0)$, $B(80,0)$ y $C(50,30)$.
El punto $P(40,20)$ se encuentra fuera de la región factible. Luego no se trata de una solución posible. Con esas puntuaciones el opositor suspende.

b) $f(x,y)=80-x-y$

Solución por solver :

$\begin{cases} f(35,0)=45 \\ f(80,0)=0 \\ f(50,30)=0 \end{cases} \Longrightarrow$



Se deberán responder con 35 acertadas y 0 falladas con un máximo de preguntas sin contestar de 45.
La puntuación en este caso sería de 35 puntos.

2.4. Cantabria

2.4.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.4.1 Con el objetivo de maximizar beneficios, un obrador cántabro amplía su producción diaria máxima hasta las 400 tartas de queso y 900 quesadas, con las que elabora dos tipos de pack, A y B. El pack A contiene 4 tartas de queso y 12 quesadas, y le confiere al obrador un beneficio neto de 44€. El pack B contiene 2 tartas de queso y 3 quesadas, y le confiere al obrador un beneficio neto de 16€.

a) Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

b) Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

c) ¿Cuántos packs de cada tipo debe producir el obrador en un día para que el beneficio obtenido sea máximo?

d) ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

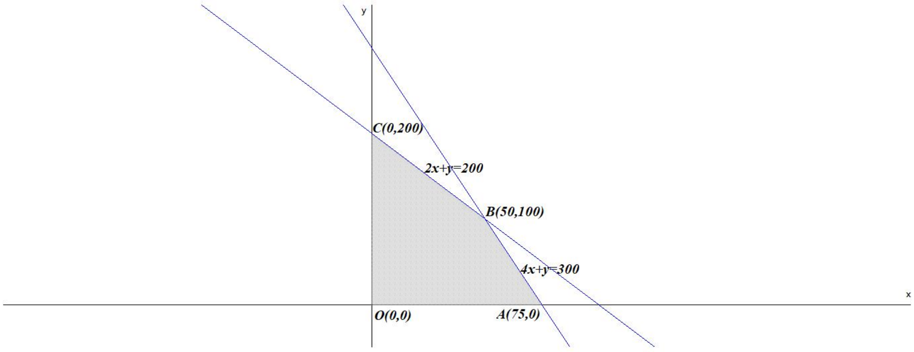
Solución:
Sea x el nº de pack A e y el nº de pack B.

	tartas	quesadas	beneficio
A	4	12	44
B	2	3	16
	≤ 400	≤ 900	

a) $f(x,y) = 44x + 16y$ sujeto a

$$\left\{\begin{array}{l} 4x + 2y \leq 400 \\ 12x + 3y \leq 900 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + y \leq 200 \\ 4x + y \leq 300 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right.$$

b) Representación:

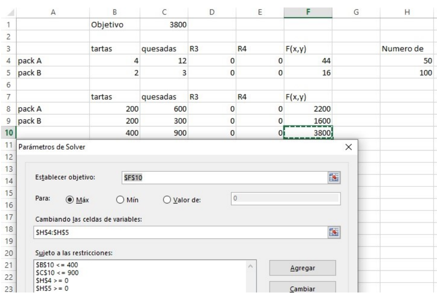


Los vértices a estudiar serán:

$$O(0,0), \;\; A(75,0), \;\; B(50,100) \text{ y } C(0,200)$$

c) Sustituyendo en la función objetivo $f(x,y) = 44x + 16y$:

Solución por solver :



$$\left\{\begin{array}{l} f(0,0) = 0 \\ f(75,0) = 3300 \\ f(50,100) = 3800 \\ f(0,200) = 3200 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

debe de producir 50 pack A y 100 pack B para obtener el máximo beneficio.

d) El beneficio máximo es de 3800€.

2.4.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.4.2 Un ganadero pasiego necesita ampliar su explotación de bovino, para lo cual decide comprar vacas de las razas parda y frisona. Como máximo, tiene planeado adquirir un total de 160 vacas para su cría. Cuando llegue el momento de venderlas, por cada ejemplar de parda espera obtener un beneficio neto de 350€, y por cada frisona uno de 500€. Tiene claro que no comprará más de 50 pardas ni menos de 70 frisonas. Además, quiere que el número de vacas pardas sea, al menos, una tercera parte del de frisonas.

a) Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

b) Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

c) ¿Cuántas vacas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio?

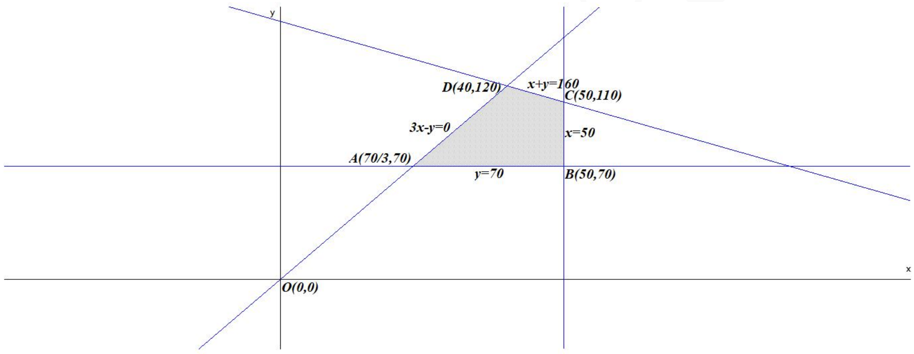
d) ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Solución:
Sea x el nº de vacas pardas e y el nº de vacas frisonas.

a) $f(x,y) = 350x + 500y$ sujeto a

$$\begin{cases} x+y \le 160 \\ x \le 50 \\ y \ge 70 \\ x \ge \dfrac{y}{3} \\ x \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y \le 160 \\ x \le 50 \\ y \ge 70 \\ 3x-y \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

b) Representación:



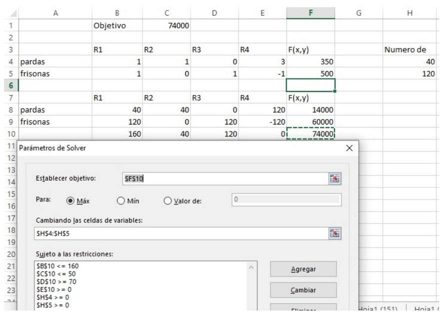
Los vértices a estudiar serán:

$$A(70/3, 70),\ \ B(50, 70),\ \ C(50, 110) \text{ y } C(40, 120)$$

c) Sustituyendo en la función objetivo $f(x,y) = 350x + 500y$:

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(70/3, 70) = 43166,67 \\ f(50, 70) = 52500 \\ f(50, 110) = 72500 \\ f(40, 120) = 74000 \end{cases} \Longrightarrow$$



debe comprar 40 vacas pardas y 120 frisonas para obtener el máximo beneficio.

d) El beneficio máximo es de 74000€.

2.5. Castilla La Mancha

2.5.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.5.1 Un fabricante comercializa 2 modelos de zapatillas para montaña, uno para mujer que le proporciona un beneficio de 28 euros por par y otro para hombre con un beneficio por cada par de 30 euros. El próximo mes tiene que fabricar entre 100 y 600 pares de zapatillas de hombre y un mínimo de 400 pares de mujer. Además solamente puede fabricar un máximo de 1200 pares de zapatillas.

a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

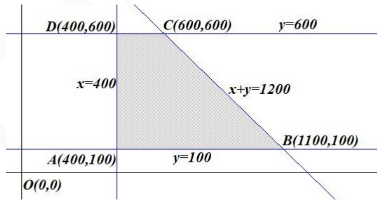
b) Determina cuántos pares de zapatillas de cada modelo debe fabricar para que el beneficio sea máximo.

Solución: Sean x nº de pares de zapatillas de montaña para mujer e y nº de pares de zapatillas de montaña para hombre.

a) Tenemos:

$f(x,y) = 28x + 30y$ sujeto a

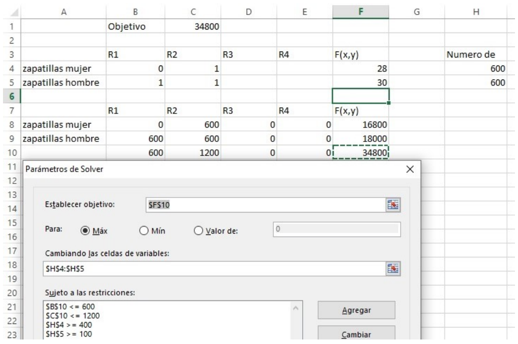
$$\begin{cases} 100 \le y \le 600 \\ x \ge 400 \\ x + y \le 1200 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y \ge 100 \\ y \le 600 \\ x \ge 400 \\ x + y \le 1200 \end{cases}$$



b) Los vértices a estudiar serán: $A(400,100)$, $B(1100,100)$, $C(600,600)$ y $D(400,600)$. Sustituyendo en $f(x,y) = 28x + 30y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(400,100) = 14200 \\ f(1100,100) = 33800 \\ f(600,600) = 34800 \\ f(400,600) = 29200 \end{cases} \Longrightarrow$$



El máximo beneficio se encuentra con la venta de 600 pares de zapatillas de mujer y 600 pares de zapatillas de hombre y es de 34800€.

2.5.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.5.2 En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,y) = 8x + 3y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} -2x + 4 \ge y \\ x + 2y \ge 2 \\ y \le 3 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

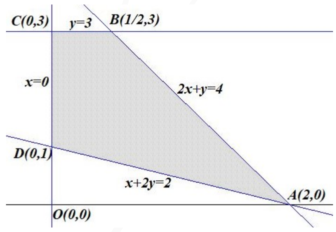
a) Dibuja la región factible y determina sus vértices.

b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores.

Solución:

a) Tenemos:
$f(x,y) = 8x + 3y$ sujeto a

$$\begin{cases} -2x+4 \geq y \\ x+2y \geq 2 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x+y \leq 4 \\ x+2y \geq 2 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

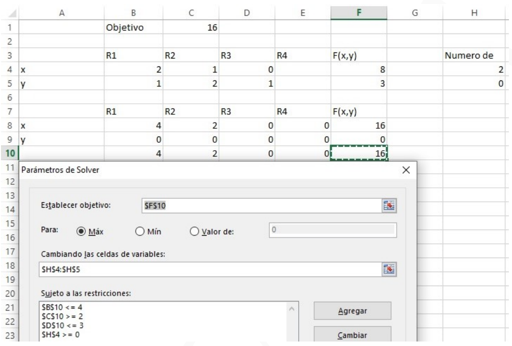


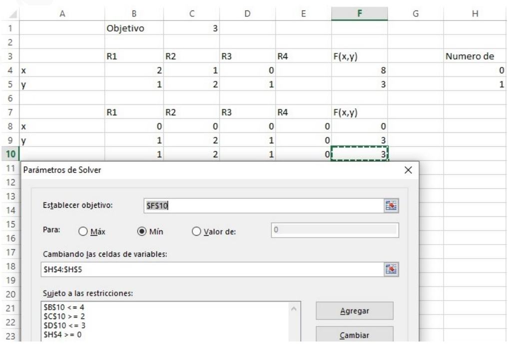
Los vértices a estudiar serán: $A(2,0)$, $B\left(\frac{1}{2},3\right)$, $C(0,3)$ y $D(0,1)$.

b) Sustituyendo en $f(x,y) = 8x + 3y$: $\begin{cases} f(2,0) = 16 \\ f\left(\frac{1}{2},3\right) = 13 \\ f(0,3) = 9 \\ f(0,1) = 3 \end{cases} \Longrightarrow$

El máximo se encuentra en el punto $A(2,0)$ con un valor de 16 unidades. El mínimo se encuentra en el punto $D(0,1)$ con un valor de 3 unidades.

Soluciones por solver :





2.6. Castilla León

2.6.1. Convocatoria Ordinaria

Sin problemas de esta materia.

2.6.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.6.1 Una empresa de diseño ha comprado dos impresoras 3D para imprimir figuras y fichas para juegos de mesa. La primera impresora puede trabajar hasta 300 horas y necesita 6 horas para imprimir cada figura y 5 horas para cada ficha. La segunda impresora puede trabajar hasta 200 horas y necesita 2 horas para hacer cada figura y 5 horas para cada ficha. El beneficio neto que obtiene la empresa por imprimir cada figura es de 1€ mientras que el beneficio neto que obtiene por imprimir cada ficha es de 1,5€. Si el número máximo de figuras ha de ser 25, calcula, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas figuras y fichas ha de imprimir para obtener el máximo beneficio neto. ¿Cuál es ese beneficio neto máximo?

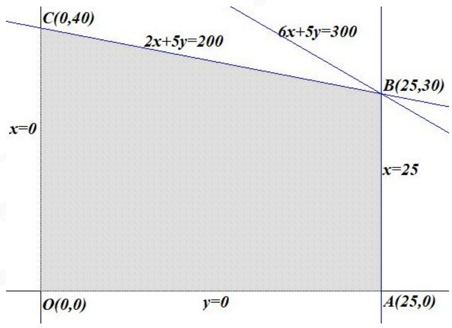
Solución:

Sean x : nº de figuras e y : nº de fichas.

	primera impresora	segunda impresora	beneficio
figuras	6	2	1
fichas	5	5	$1,5$
	≤ 300	≤ 200	

- La región factible es:

$$\begin{cases} 6x+5y \leq 300 \\ 2x+5y \leq 200 \\ x \leq 25 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



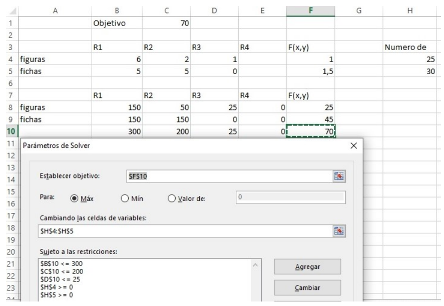
- Los vértices son: $O(0,0)$, $A(25,0)$, $B(25,30)$ y $C(0,40)$.

- La función objetivo: $B(x,y) = x + 1,5y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(25,0) = 25 \\ f(25,30) = 70 \text{ Máximo} \\ f(0,40) = 60 \end{cases}$$

Se deben imprimir 25 figuras y 30 fichas con un beneficio máximo de 70 €.

Solución por solver :



2.7. Cataluña

2.7.1. Convocatoria Ordinaria-Serie 2

Problema 2.7.1 Una empresa se propone hacer dos tipos de cestas de Navidad, A y B, para sus trabajadores y trabajadoras. Cada cesta de tipo A contendrá 1 jamón, 1 botella de cava y 5 barras de turrón. Por otro lado, cada cesta de tipo B contendrá 2 jamones, 3 botellas de cava y 2 barras de turrón. El jefe de almacén afirma que disponen de 40 jamones, 120 barras de turrón y muchas botellas de cava, y que, por lo tanto, seguro que cava no faltará. Se quieren hacer tantas cestas como sea posible.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. ¿Cuántas cestas de cada tipo tendrá que hacer la empresa?

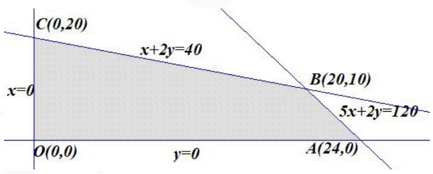
b) Una vez hecho el cálculo, la jefa de la empresa cambia de opinión y dice que es mejor hacer la misma cantidad de cestas de cada tipo. Con esta nueva condición, ¿cuántas cestas de cada tipo habrá que hacer?

Solución:
Sean x nº de cestas del tipo A e y : nº de cestas del tipo B.

	jamón	cava	turrón
A	1	1	5
B	2	3	2
	≤ 40	≥ 0	≤ 120

a) $f(x, y) = x + y$ sujeto a:

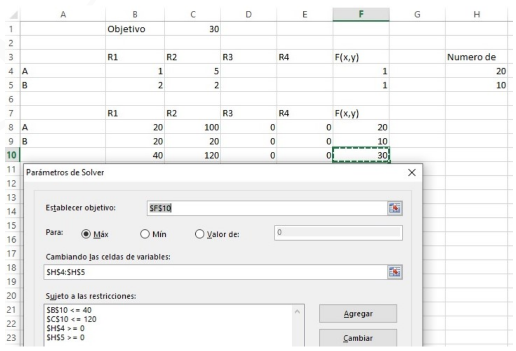
$$\begin{cases} x + 2y \leq 40 \\ x + 3y \geq 0 \text{ innecesaria} \\ 5x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $O(0,0)$, $A(24,0)$, $B(20,10)$ y $C(0,20)$.

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(24,0) = 24 \\ f(20,10) = 30 \text{ Máximo} \\ f(0,20) = 20 \end{cases}$$

Se deben hacer 20 cestas del tipo A y 10 cestas del B, con un total de 30 cestas.



b) La solución se encuentra en un punto de la recta $y = x$, tiene que estar en la frontera, o lo más próximo a ella, de la región factible y tienen que ser números enteros positivos.
El punto de corte de $y = x$ con la recta $x + 2y = 40$:
$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y = 40 \end{cases} \Longrightarrow (13,333; 13,333)$ punto de la frontera de la región factible, pero no son números enteros positivos, el más próximo dentro de la región es el $(13,13)$ cumpliendo las tres condiciones. En conclusión:
Se deben hacer 13 cestas del tipo A y 13 cestas del B, con un total de 26 cestas.

2.7.2. Convocatoria Ordinaria-Serie 5

Problema 2.7.2 Un hotel admite reservas para las 420 habitaciones dobles de que dispone y ofrece dos tarifas diferentes: la tarifa estándar (sin gastos de cancelación) es de 120€ por noche, y la tarifa reducida (que no admite cancelaciones) es de 90€ por noche. Les interesa tener reservado al menos un 20 % del total de habitaciones con la tarifa reducida y quieren que el número de habitaciones reservadas con la tarifa estándar sea igual o superior que el doble del número de habitaciones reservadas con la tarifa reducida.

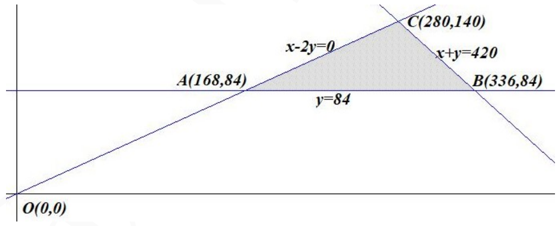
a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible.

b) Determine cuántas habitaciones deben tener reservadas con cada tarifa para obtener el beneficio máximo. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

Solución:
Sean x nº de habitaciones con tarifa estándar e y : nº de habitaciones con tarifa reducida.

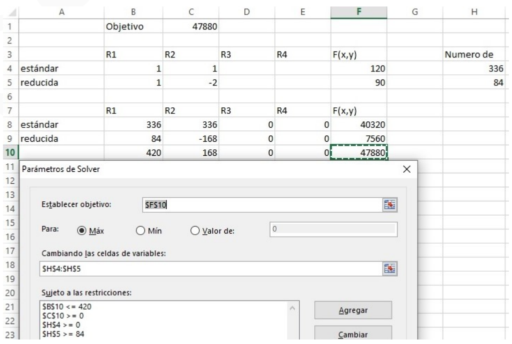
a) $f(x, y) = 120x + 90y$ sujeto a:

$$\begin{cases} x + y \leq 420 \\ y \geq 84 \\ x \geq 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \leq 420 \\ y \geq 84 \\ x - 2y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(168, 84)$, $B(336, 84)$ y $C(280, 140)$.

b) $f(x, y) = 120x + 90y$



$$\begin{cases} f(168, 84) = 27720 \\ f(336, 84) = 47880 \ \text{Máximo} \\ f(280, 140) = 46200 \end{cases}$$

Se deben reservar 336 habitaciones a precio estándar y 84 a precio reducido para obtener una recaudación máxima de 47880€.

2.7.3. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.7.3 La técnica de irradiación de los alimentos se utiliza para favorecer su conservación, pero unas dosis demasiado altas de irradiación pueden reducir su valor nutricional. Normalmente, para el procesamiento de alimentos se utilizan las radiaciones provenientes del cobalto y del cesio. Se quiere usar esta técnica para tratar alimentos que ya han empezado a deteriorarse. Considere x e y las cantidades emitidas de rayos de cobalto y de cesio, respectivamente, medidas en grays. Se sabe que la cantidad de radiación absorbida en la parte dañada del alimento es de $6x + 4y$ grays, alrededor de la parte dañada es de $3x + y$ grays y en las partes que están en buenas condiciones es de $4x + 5y$ grays.

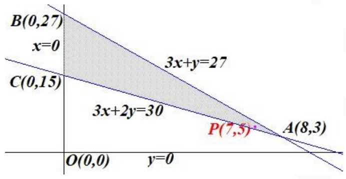
a) Calcule las cantidades de rayos de cobalto y de rayos de cesio que habrá que utilizar para que la cantidad de radiación absorbida por las partes en buenas condiciones sea mínima, teniendo en cuenta que en la parte dañada esta cantidad tiene que ser como mínimo de 60 grays y en los alrededores no puede exceder de 27 grays. Para hacerlo, determine cuál es la función objetivo que debe minimizarse y las restricciones, y dibuje la región factible.

b) Si se aplica un tratamiento consistente en 7 grays de rayos de cobalto y 5 grays de rayos de cesio, compruebe que se cumplen las dos restricciones (la que hace referencia a la parte dañada y la que hace referencia a sus alrededores). ¿Por qué es un tratamiento peor que la solución que ha encontrado en el apartado a?

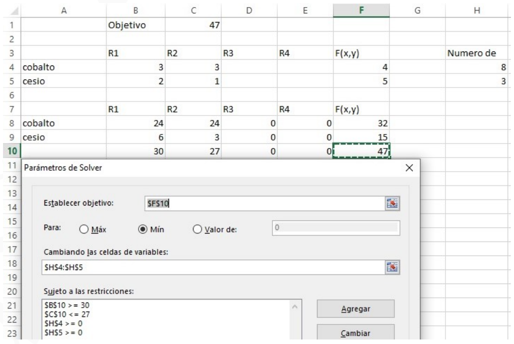
Solución:

a) $f(x, y) = 4x + 5y$ sujeto a:

$$\begin{cases} 6x + 4y \geq 60 \\ 3x + y \leq 27 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x + 2y \geq 30 \\ 3x + y \leq 27 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



solución con solver



Los vértices son: $A(8, 3)$, $B(0, 27)$ y $C(0, 15)$.

$$\begin{cases} f(8, 3) = 47 \text{ Mínimo} \\ f(0, 27) = 135 \\ f(0, 15) = 75 \end{cases}$$

El mínimo es de 47, este valor corresponde a una radiación de 8 grays de cobalto y 3 grays de cesio para la radiación absorbida en alimentos en buenas condiciones.

b) El punto $P(7, 5)$ se encuentra dentro de la región factible y, por tanto, cumple todas las restricciones planteadas. Estos datos en la función objetivo $f(7, 5) = 53$ valor mayor a la óptima de 47, lo que es un peor resultado.

2.8. Comunidad Valenciana

2.8.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.8.1 Una empresa apícola vende dos tipos de cajas con tres variedades de miel en cada una: miel de romero, miel de azahar y miel multifloral. La caja de tipo A contiene 2 tarros de miel de romero, 2 de azahar y 1 de multifloral. La caja de tipo B contiene 1 tarro de miel de romero, 2 de azahar y 2 de multifloral. Cada día la empresa dispone de 280 tarros de miel de romero, 300 de miel de azahar y 250 de miel multifloral. Con cada caja de tipo A obtiene un beneficio de 7 euros y con cada caja de tipo B obtiene un beneficio de 5 euros.

a) ¿Cuántas cajas de cada tipo debe comercializar para obtener un beneficio máximo?

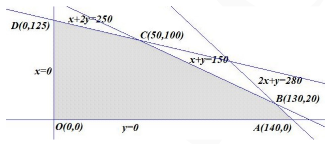
b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo?

Solución:
Sean x cajas tipo A e y cajas tipo B.

	romero	azahar	multifloral	beneficio
A	2	2	1	7
B	1	2	2	5
	≤ 280	≤ 300	≤ 250	

a) La región factible es:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 280 \\ 2x + 2y \leq 300 \\ x + 2y \leq 250 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + y \leq 280 \\ x + y \leq 150 \\ x + 2y \leq 250 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

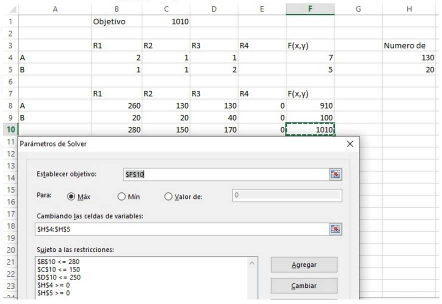


Los vértices son: $O(0,0)$, $A(140,0)$, $B(130,20)$, $C\,(50,100)$ y $D(0,125)$.

$f(x,y) = 7x + 5y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(140,0) = 980 \\ f(130,20) = 1010 \text{ Máximo} \\ f(50,100) = 850 \\ f(0,125) = 625 \end{cases}$$



Se deben comercializar 130 cajas tipo A y 20 del tipo B con un beneficio máximo de 1010 €.

2.8.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.8.2 Un vendedor dispone de café colombiano y café brasileño, y con ellos realiza mezclas que pone a la venta. Si mezcla a partes iguales los dos tipos de café, obtiene una mezcla que vende a 15 euros el kilo; si la proporción en la mezcla es de una parte de café colombiano por tres partes de café brasileño, vende la mezcla resultante a 10 euros el kilo. El vendedor dispone de 100 kilos de café colombiano y de 210 kilos de café brasileño. Desea hacer las dos mezclas de modo que sus ingresos por venta sean máximos.

a) Halla cuántos kilos de cada mezcla debe producir para obtener el ingreso máximo.

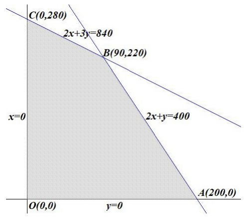
b) ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

Solución:
Sean x número de mezclas A e y número de mezclas B.
La mezcla A es la mezcla a partes iguales los dos tipos de café y la mezcla B es de una parte de café colombiano por tres partes de café brasileño.

	colombiano	brasileño	venta
A	$0,5$	$0,5$	15
B	$0,25$	$0,75$	10
	≤ 100	≤ 210	

a) La región factible es:

$$\left\{\begin{array}{l} 0,5x+0,25y\le 100\\ 0,5x+0,75y\le 210\\ x,y\ge 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+3y\le 840\\ 2x+y\le 400\\ x,y\ge 0\end{array}\right.$$



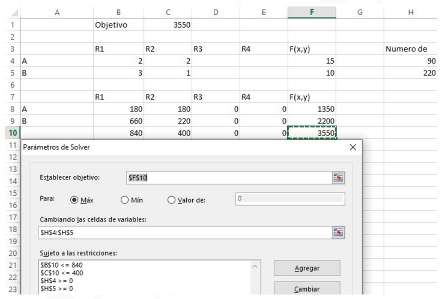
Los vértices son: $O(0,0)$, $A(200,0)$, $B(90,220)$ y $C\,(0,280)$.

$f(x,y)=15x+10y$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0,0)=0\\ f(200,0)=3000\\ f(90,220)=3550 \text{ Máximo}\\ f(0,280)=2800\end{array}\right.$$

Se deben hacer 90 mezclas de tipo A y 220 del tipo B con una venta máxima de 3550€.

Solución por solver :



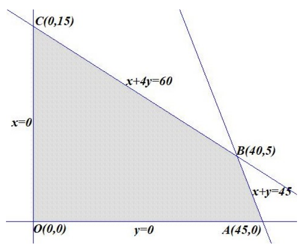
2.9. Extremadura

2.9.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.9.1 En un taller de decoración se venden espejos y cuadros con un beneficio de 120 euros por cada espejo y 180 euros por cada cuadro. Dispone para la venta de 45 artículos en total entre ambos productos que, previamente, ha fabricado necesitando 1 hora para la fabricación de cada espejo y 4 horas para elaborar cada cuadro, con una disponibilidad de, como mucho, 60 horas. Calcula el número de espejos y cuadros que debe vender para hacer máximos los beneficios, así como el valor de dichos beneficios máximos.
Solución:
Sea x el número de espejos e y el número de cuadros.

☛ Región factible:

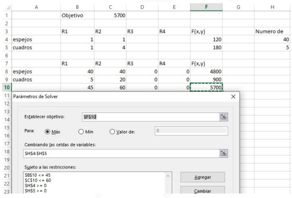
$$\left\{\begin{array}{l} x+y\le 45\\ x+4y\le 60\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{array}\right.$$



Los vértices del recinto son: $O(0,0)$, $A(45,0)$, $B(40,5)$ y $C(0,15)$.

☛ Función objetivo: $f(x,y)=120x+180y$

La solución por solver es:



$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(45,0) = 5400 \\ f(40,5) = 5700 \ \text{Máximo} \\ f(0,15) = 2700 \end{cases}$$

☛ Para obtener el máximo beneficio debe vender 40 espejos y 5 cuadros. El beneficio sería de 5700€.

2.9.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.9.2 En una pastelería se elaboran pasteles de tipo A y B. Cada pastel de tipo A necesita 6 gramos de azúcar y 3 gramos de levadura, con un beneficio de 4,5 euros. Cada pastel de tipo B se elabora con 4 gramos de azúcar y 4 de levadura, con un beneficio de 5,5 euros. Sabiendo que solo dispone de 240 gramos de azúcar y 180 gramos de levadura, calcular, justificando la respuesta, el número de pasteles de cada tipo que debe fabricar para obtener unos beneficios máximos, así como el valor de dichos beneficios máximos.

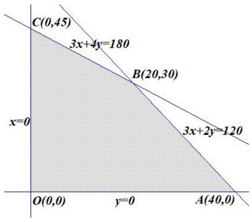
Solución:

Sea x el número de pasteles tipo A e y el número de pasteles tipo B.

	azúcar	levadura	beneficio
A	6	3	$4,5$
B	4	4	$5,5$
	≤ 240	≤ 180	

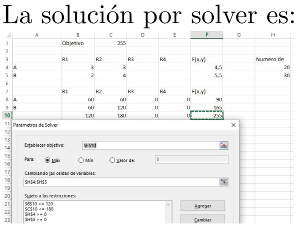
☛ Región factible:

$$\begin{cases} 6x + 4y \leq 240 \\ 3x + 4y \leq 180 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x + 2y \leq 120 \\ 3x + 4y \leq 180 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices del recinto son: $O(0,0)$, $A(40,0)$, $B(20,30)$ y $C(0,45)$.

La solución por solver es:



☛ Función objetivo: $f(x,y) = 4,5x + 5,5y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(40,0) = 180 \\ f(20,30) = 255 \ \text{Máximo} \\ f(0,45) = 247,5 \end{cases}$$

☛ Para obtener el máximo beneficio deben fabricar y vender 20 pasteles tipo A y 30 tipo B. El beneficio sería de 255€.

2.10. Galicia

2.10.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.10.1 Una empresa fabrica teléfonos móviles con la misma pantalla en dos calidades distintas: calidad A, carcasa de plástico y calidad A^+ carcasa de aluminio. El coste unitario de producción es de 70€ para los teléfonos de calidad A y de 90€ para los de calidad A^+. Los precios de venta son de 100€ para los de clase A y de 150€ para los de clase A^+. Si para fabricar la próxima remesa de móviles, la empresa dispone de un capital de 30000 euros y su proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 350 pantallas (que se usan para ambas clases de móviles) y 310 carcasas de aluminio

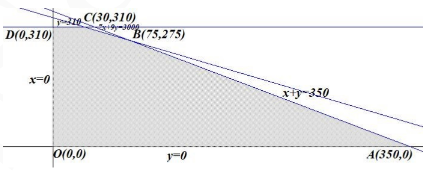
a) Plantee el problema que determina el número de teléfonos móviles de cada calidad que se deben fabricar para maximizar el beneficio.

b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) Determine una solución óptima y halle el valor óptimo de la función objetivo.

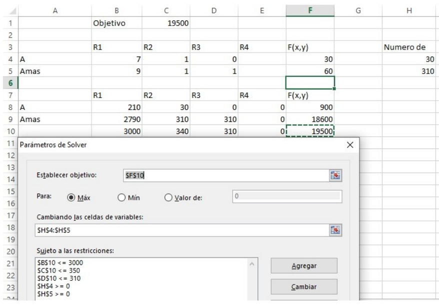
Solución:
Sean x número de móviles con la calidad A e y con la calidad A^+

a) La región factible es:



$$\begin{cases} 70x + 90y \le 30000 \\ x + y \le 350 \\ y \le 310 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 7x + 9y \le 3000 \\ x + y \le 350 \\ y \le 310 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Solución por solver :



b) Los vértices son: $O(0,0)$, $A(350,0)$, $B(75,275)$, $C(30,310)$ y $D(0,310)$.

c) La función objetivo es:
$f(x,y) = (100-70)x + (150-90)y = 30x + 60y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(350,0) = 10500 \\ f(75,275) = 18750 \\ f(30,310) = 19500 \ \text{Máximo} \\ f(0,310) = 18600 \end{cases}$$

El máximo es 19500€ y se consigue con la venta de 30 móviles tipo A y 310 de tipo A^+.

2.10.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.10.2 En una fábrica se ensamblan dos tipos de motores: para motos y para coches. Para ensamblar un motor de moto se emplean 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de trabajo de máquina. Para ensamblar un motor de coche se emplean 45 minutos de trabajo manual y 40 minutos de trabajo de máquina. En un mes, la fábrica dispone de 120 horas de trabajo manual y 90 horas de trabajo de máquina. Sabiendo que el beneficio obtenido de cada motor de moto es de 1500€ y el de cada motor de coche de 2000€

a) Plantee el problema que permite determinar cuántos motores de cada tipo hay que ensamblar mensualmente para maximizar los beneficios globales.

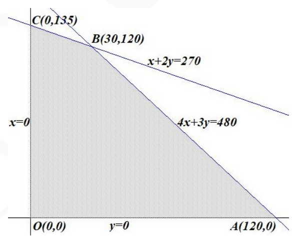
b) Represente gráficamente la región la región factible y calcule sus vértices.

c) Halle las cantidades mensuales que se deben ensamblar de motores de cada tipo para maximizar beneficios y determine cuál es el beneficio máximo.

Solución:
Sean x número de motores de motos e y de coches.

	H. manual	H. máquina	beneficio
motores motos	60	20	1500
motores coches	45	40	2000
	≤ 7200	≤ 5400	

a) La región factible es:



$$\begin{cases} 60x + 45y \leq 7200 \\ 20x + 40y \leq 5400 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x + 3y \leq 480 \\ x + 2y \leq 270 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

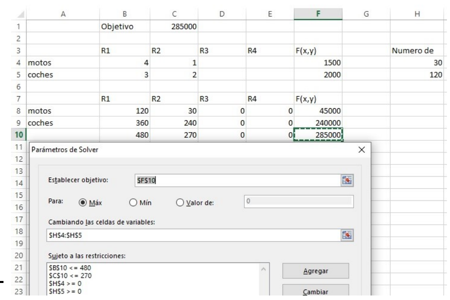
b) Los vértices son: $O(0,0)$, $A(120,0)$, $B(30,120)$ y $C(0,135)$.

c) La función objetivo es:
$f(x,y) = 1500x + 2000y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(120,0) = 180000 \\ f(30,120) = 285000 \text{ Máximo} \\ f(0,135) = 270000 \end{cases}$$

El máximo es 285000€ y se consigue ensamblando mensualmente 30 motores de moto y 120 de coche.

Solución por solver :



2.11. Islas Baleares

2.11.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.11.1 En un taller se fabrican dos tipos de bolsas. Para hacer una bolsa del primer modelo se necesitan 0,9 m^2 de cuero y 8 horas de trabajo. Para el segundo modelo necesitan 1,2 m^2 de cuero y 4 horas de trabajo. Para hacer estos dos tipos de bolsas el taller dispone de 60 m^2 de cuero y puede dedicar un máximo de 400 horas de trabajo. El taller cobra 30 euros por una bolsa del primer modelo y 25 por una del segundo.

a) Plantee la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal.

b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

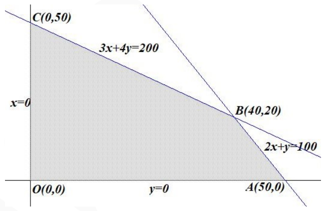
c) Calcule el número de bolsas de cada tipo que se tienen que fabricar para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo.

Solución:
Sean x número de bolsas del primer modelo e y número de bolsas del segundo.

	m^2 cuero	horas	beneficio
modelo primero	$0,9$	8	30
modelo segundo	$1,2$	4	25
	≤ 60	≤ 400	

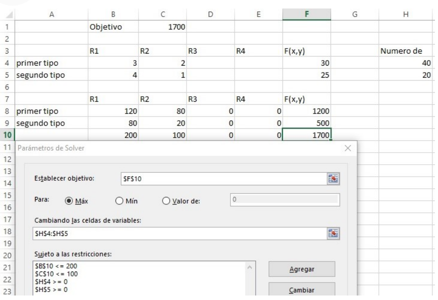
a) La región factible es:

$$\begin{cases} 0,9x + 1,2y \leq 60 \\ 8x + 4y \leq 400 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow$$



$$\begin{cases} 3x + 4y \leq 200 \\ 2x + y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Solución por solver :



b) Los vértices son: $O(0,0)$, $A(50,0)$, $B(40,20)$ y $C(0,50)$.

c) La función objetivo es:
$f(x,y) = 30x + 25y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(50,0) = 1500 \\ f(40,20) = 1700 \ \text{Máximo} \\ f(0,50) = 1250 \end{cases}$$

d) El máximo beneficio es de 1700€ y se llega con la fabricación de 40 bolsa del primer tipo y 20 del segundo.

2.11.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.11.2 El dueño de una tienda de chucherías dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones. Decide que para su mejor venta confeccionará dos tipos de paquetes: el tipo A estará formado por un paquete de pipas, dos chicles y dos bombones y se venderá a 1,5 euros. El tipo B estará formado por un paquete de pipas, cuatro chicles y un bombón y se venderá a 2 euros.

a) Plantee la maximización del beneficio de la tienda como un problema de programación lineal.

b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

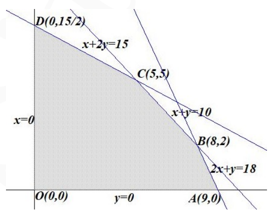
c) Calcule el número de paquetes de tipo A y B que se tienen que confeccionar y vender para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo.

Solución:
Sean x número de paquetes A e y número de paquetes B.

	pipas	chicles	bombones	ingresos
A	1	2	2	$1,5$
B	1	4	1	2
	≤ 10	≤ 30	≤ 18	

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x+y\leq 10 \\ 2x+4y\leq 30 \\ 2x+y\leq 18 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow$$



$$\begin{cases} x+y\leq 10 \\ x+2y\leq 15 \\ 2x+y\leq 18 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

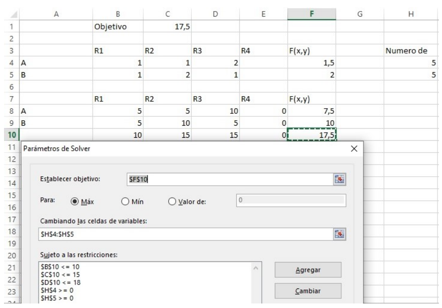
b) Los vértices son: $O(0,0)$, $A(9,0)$, $B(8,2)$, $C(5,5)$ y $D\left(0,\dfrac{15}{2}\right)$.

c) La función objetivo es:

Solución por solver :

$$f(x,y)=1,5x+2y$$

$$\begin{cases} f(0,0)=0 \\ f(9,0)=13,5 \\ f(8,2)=16 \\ f(5,5)=17,5 \text{ Máximo} \\ f\left(0,\dfrac{15}{2}\right)=15 \end{cases}$$



d) La máxima venta es de 17,5€ y se llega vendiendo 5 paquetes A y 5 paquetes B.

2.12. Islas Canarias

2.12.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.12.1 Una fábrica de helados produce helados con dos sabores (turrón y pistacho) que se envasan en tarrinas de dos tamaños, pequeño y grande. Las tarrinas pequeñas llevan 200 gramos de helado de turrón y 150 gramos de pistacho; las tarrinas grandes llevan 500 gramos de turrón y 300 de pistacho. La fábrica obtiene un beneficio de 2€ por la venta de cada tarrina pequeña y de 4,50€ por la venta de cada tarrina grande. La fábrica produce cada semana 400 kg de helado de turrón y 255 kg de helado de pistacho que envasa en estas tarrinas. Para satisfacer la demanda de las heladerías de la zona, debe producir semanalmente al menos 200 tarrinas pequeñas y 50 grandes. Suponiendo que pueda vender toda la producción:

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal.

b) Representar la región factible.

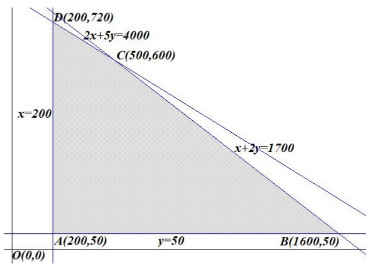
c) ¿Cuántas tarrinas de cada clase debe producir la fábrica cada semana si quiere maximizar sus beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo?

Solución:
Sean x número de tarrinas pequeñas e y número de tarrinas grandes.

	turrón	pistacho	beneficio
pequeño	200	150	2
grande	500	300	4,5
	≤ 400000	≤ 255000	

a) La región factible es:

$$\left\{\begin{array}{l} 200x + 500y \le 400000 \\ 150x + 300y \le 255000 \\ x \ge 200 \\ y \ge 50 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + 5y \le 4000 \\ x + 2y \le 1700 \\ x \ge 200 \\ y \ge 50 \end{array}\right.$$



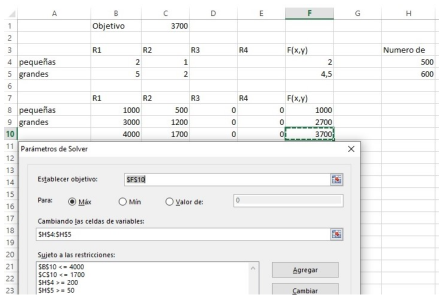
Los vértices son: $A(200, 50)$, $B(1600, 50)$, $C(500, 600)$ y $D(200, 720)$.

b) La función objetivo es:

$$f(x, y) = 2x + 4,5y$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(200, 50) = 625 \\ f(1600, 50) = 3425 \\ f(500, 600) = 3700 \;\; \text{Máximo} \\ f(200, 720) = 3640 \end{array}\right.$$

Solución por solver :



c) El máximo beneficio es de 3700€ y se alcanza con la venta de 500 tarrinas pequeñas y 600 grandes.

2.12.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.12.2 Por cierre de campaña, un vivero de frutales necesita vender 350 aguacateros y 400 mangos. Anuncia dos ofertas: la oferta A consiste en un lote con una planta de aguacate y dos de mango por 40€, la oferta B consiste en un lote con dos plantas de aguacate y una de mango por 45€. Es necesario vender al menos 80 lotes de la oferta A y al menos 90 de la oferta B.

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal.

b) Representar la región factible.

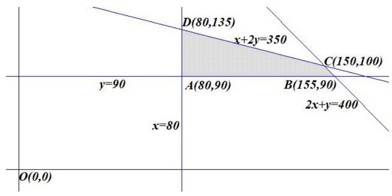
c) Para maximizar la recaudación, ¿cuántos lotes se deben vender de cada tipo?

Solución:
Sean x número de lotes A e y número de lotes B.

	turrón	pistacho	beneficio
A	1	2	40
B	2	1	45
	≤ 350	≤ 400	

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 350 \\ 2x + y \leq 400 \\ x \geq 80 \\ y \geq 90 \end{cases}$$



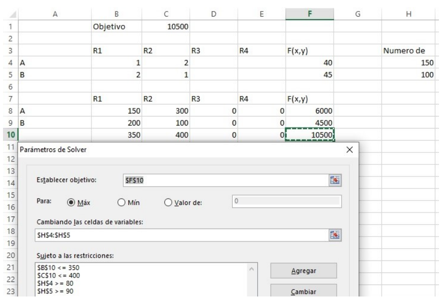
Los vértices son: $A(80,90)$, $B(155,90)$, $C(150,100)$ y $D(80,135)$.

b) La función objetivo es:

$$f(x,y) = 40x + 45y$$

$$\begin{cases} f(80,90) = 7250 \\ f(155,90) = 10250 \\ f(150,100) = 10500 \ \text{Máximo} \\ f(80,135) = 9275 \end{cases}$$

Solución por solver :



c) El máximo beneficio es de 10500€ y se alcanza con la venta de 150 lotes A y 100 B.

2.13. La Rioja

2.13.1. Convocatoria Ordinaria

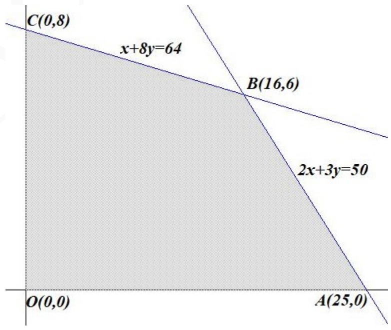
Problema 2.13.1 Un orfebre emplea 2 horas para fabricar un anillo, y tarda 3 horas en hacer un brazalete. El material de cada anillo le cuesta 40€, y el del brazalete 320€. A cambio, por cada anillo gana 10€ y por cada brazalete gana 90€.
Si no quiere dedicar más de 50 horas a su trabajo semanal y no puede gastar en material más de 2560€, ¿cuántos anillos y brazaletes en una semana le reportarán el máximo beneficio?
¿Cambiaría la respuesta si ya tuviera apalabrados ocho anillos?
¿Cuánto tiempo trabaja en total en ambos casos en la fabricación de anillos y brazaletes?

Solución:
Sean x el número de anillos e y el de brazaletes.

	horas	coste	beneficio
anillos	2	40	10
brazaletes	3	320	90
	≤ 50	≤ 2560	

☛ • La región factible es:

$$\begin{cases} 2x+3y \leq 50 \\ 40x+320y \leq 2560 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x+3y \leq 50 \\ x+8y \leq 64 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

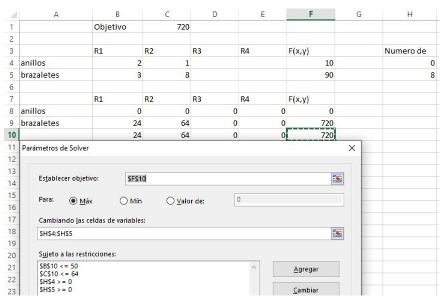


- Los vértices son: $O(0,0)$, $A(25,0)$, $B\,(16,6)$ y $C(0,8)$.
- La función objetivo es:

$$f(x,y) = 10x + 90y$$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(25,0) = 250 \\ f\,(16,6) = 700 \\ f(0,8) = 720 \text{ Máximo} \end{cases}$$

Solución por solver :

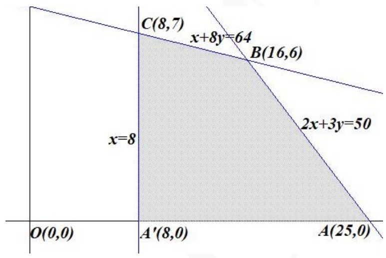


- El beneficio máximo es de 720€ y se alcanza con la venta de 0 anillos y 8 brazaletes.

☛ Si tenemos apalabrados 8 anillos:

- hay que añadir $x \geq 8$ y la región factible sería:

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 50 \\ x + 8y \leq 64 \\ x \geq 8 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

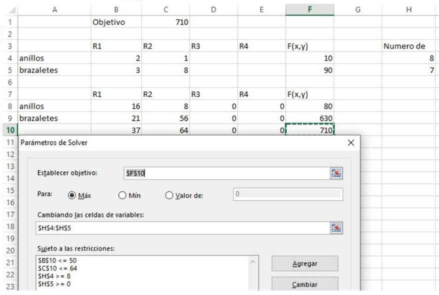


- Los vértices son: $A'(8,0)$, $A(25,0)$, $B\,(16,6)$ y $C(8,7)$.
- $f(x,y) = 10x + 90y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(8,0) = 80 \\ f(25,0) = 250 \\ f\,(16,6) = 700 \\ f(8,7) = 710 \text{ Máximo} \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 710€ y se alcanza con la venta de 8 anillos y 7 brazaletes.



☛
- En el primer caso trabaja un total de $2 \cdot 0 + 3 \cdot 8 = 24$ horas.
- En el segundo caso trabaja un total de $2 \cdot 8 + 3 \cdot 7 = 37$ horas.

2.13.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.13.2 Dibuja la región del plano formada por los puntos (x,y) que cumplen

$$\begin{array}{l} 0 \leq y, \quad 0 \leq x \\ x + y \leq 6 \\ 2x + y \leq 10, \text{ y} \\ x + 2y \leq 10 \end{array}$$

Averigua el valor máximo que alcanza en dicha región la función dada por

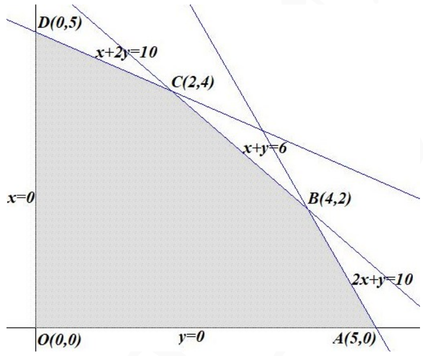
$$f(x,y) = 4x + 3y$$

Si dicho valor máximo se alcanza en el punto (x_0, y_0), ¿sabrías expresar una función cuyo máximo lo alcance en (y_0, x_0)?

Solución:

☛ • La región factible es:

$$\begin{cases} x+y \leq 6 \\ 2x+y \leq 10 \\ x+2y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



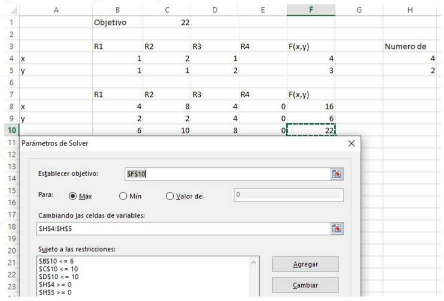
• Los vértices son: $O(0,0)$, $A(5,0)$, $B(4,2)$, $C(2,4)$ y $D(0,5)$.

• La función objetivo es:

$f(x,y) = 4x + 3y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(5,0) = 20 \\ f(4,2) = 22 \ \text{Máximo} \\ f(2,4) = 20 \\ f(0,5) = 15 \end{cases}$$

Solución por solver :

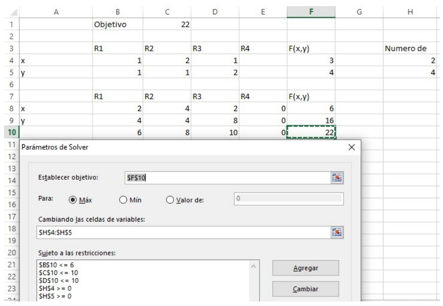


• El valor máximo es de 22 y se alcanza en el punto $B(4,2)$.

☛ Hay que buscar una función objetivo cuyo máximo esté en el punto $C(2,4)$.
Si $f(x,y) = 3x + 4y$:

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(5,0) = 15 \\ f(4,2) = 20 \\ f(2,4) = 22 \ \text{Máximo} \\ f(0,5) = 20 \end{cases}$$



El valor máximo es de 22 y se alcanza en el punto $C(2,4)$.

2.14. Madrid

2.14.1. Modelo

Problema 2.14.1 Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \geq 3, \quad 2x + y \leq 8, \quad x + 2y \leq 10, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

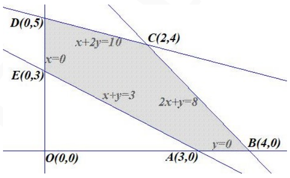
a) Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Obtenga el valor máximo de la función $f(x, y) = 2x + 3y$ en S, indicando el punto de la región en el cual se alcanza el máximo y el valor máximo alcanzado.

Solución:

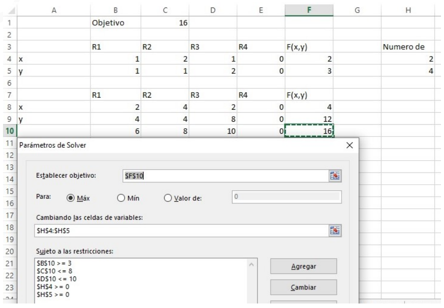
a) La región factible S es:

$$\begin{cases} x + y \geq 3 \\ 2x + y \leq 8 \\ x + 2y \leq 10 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $A(3, 0)$, $B(4, 0)$, $C(2, 4)$, $D(0, 5)$ y $E(0, 3)$

Solución por solver



b) La función objetivo es $f(x, y) = 2x + 3y \Longrightarrow$

$$\begin{cases} f(3, 0) = 6 \\ f(4, 0) = 8 \\ f(2, 4) = 16 \\ f(0, 5) = 15 \\ f(0, 3) = 9 \end{cases}$$

El máximo se encuentra en el punto $C(2, 4)$ con un valor de 16.

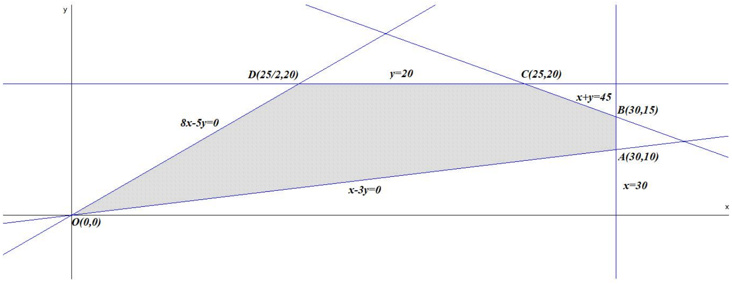
2.14.2. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.14.2 El dueño de una empresa que organiza fiestas infantiles quiere hacer chocolate con leche y dispone para la mezcla de 30 litros de leche y 20 litros de chocolate líquido. Por cada litro de chocolate debe echar como máximo 3 litros de leche, y por cada litro de leche debe echar como máximo 1,6 litros de chocolate. Además, solo dispone de botellas para envasar 45 litros de chocolate con leche. Por cada litro de leche de la mezcla puede obtener un beneficio de 1€ y por cada litro de chocolate un beneficio de 2€. Determine cuántos litros de leche y de chocolate líquido debe mezclar para obtener el máximo beneficio y calcule el beneficio que se obtiene.

Solución:

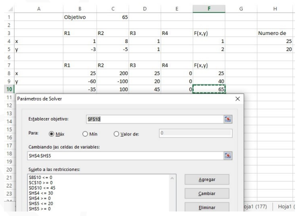
Sean x la cantidad en litros de leche en la mezcla e y la cantidad en litros de chocolate en la mezcla. $f(x, y) = x + 2y$ sujeto a

$$S : \begin{cases} x \leq 3y \\ y \leq 1,6x \\ x + y \leq 45 \\ 0 \leq x \leq 30 \\ 0 \leq y \leq 20 \end{cases} \Longrightarrow S : \begin{cases} x - 3y \leq 0 \\ 1,6x - y \geq 0 \\ x + y \leq 45 \\ 0 \leq x \leq 30 \\ 0 \leq y \leq 20 \end{cases} \Longrightarrow S : \begin{cases} x - 3y \leq 0 \\ 8x - 5y \geq 0 \\ x + y \leq 45 \\ 0 \leq x \leq 30 \\ 0 \leq y \leq 20 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(30,10)$, $B(30,15)$, $C(25,20)$ y $D\left(\dfrac{25}{2},20\right)$.

Solución por solver



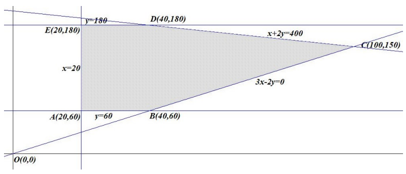
$$f(x,y)=x+2y \text{ en } S\text{:}\ \begin{cases} f(0,0)=0 \\ f(30,10)=50 \\ f(30,15)=60 \\ f(25,20)=65 \\ f\left(\dfrac{25}{2},20\right)=52,5 \end{cases} \Longrightarrow$$

El beneficio máximo será de 65€ y se alcanza mezclando 25 litros de leche y 20 litros chocolate.

2.14.3. Convocatoria Ordinaria(coincidente)

Problema 2.14.3 Un almacén de legumbres al por mayor tiene sacos de dos tipos, con capacidad para 5 kg de peso y con capacidad para 10 kg de peso. Sólo tiene 180 sacos de capacidad 10 kg. Debe poner a la venta como mucho 2000 kg de alubias en sacos de ambos tipos. Por cada 3 sacos de 10 kg puede vender como mucho 2 sacos de 5 kg, y como mínimo tiene que poner a la venta 20 sacos de 5 kg y 60 de 10 kg. Por cada saco de 10 kg obtiene un beneficio de 5 € y por cada saco de 5 kg obtiene un beneficio de 2 €. Determine cuántos sacos de cada tipo debe vender para obtener el máximo beneficio y calcule el beneficio que se obtiene.
Solución:
Sean x el número de sacos de 5 kg e y el número sacos de 10 kg.
La función objetivo es $f(x,y)=2x+5y$ sujeta a las restricciones (región factible):

$$S:\begin{cases} y\le 180 \\ 5x+10y\le 2000 \\ 2y\ge 3x \\ x\ge 20 \\ y\ge 60 \end{cases} \Longrightarrow$$

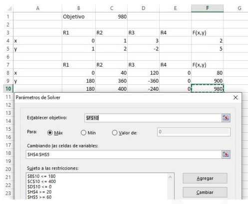


$$S:\begin{cases} y\le 180 \\ x+2y\le 400 \\ 3x-2y\le 0 \\ x\ge 20 \\ y\ge 60 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $A(20,60)$, $B(40,60)$, $C(100,150)$, $D(40,180)$ y $E(20,180)$

Solución por solver

$$f(x,y) = 2x + 5y \text{ en } S\text{:} \begin{cases} f(20,60) = 340 \\ f(40,60) = 380 \\ f(100,150) = 950 \\ f(40,180) = 980 \\ f(20,180) = 940 \end{cases}$$



El beneficio máximo será de 980 € y se alcanza con la venta de 40 sacos de 5 kg y 180 de 10 kg.

2.14.4. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.14.4 Sea S la región del plano definida por

$$7y - 8x \leq 3400, \;\; 3x - 8y \leq 2000, \;\; 11x + 14y \geq 9500, \;\; x \leq 1200, \;\; y \leq 1000$$

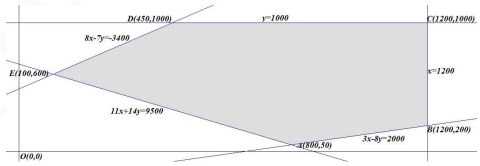
a) Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Obtenga el valor mínimo de la función $f(x,y) = 2x + y$ en S, indicando el punto de la región en el cual se alcanza.

Solución:

a) La región factible:

$$S: \begin{cases} 7y - 8x \leq 3400 \\ 3x - 8y \leq 2000 \\ 11x + 14y \geq 9500 \\ x \leq 1200 \\ y \leq 1000 \end{cases} \Longrightarrow$$



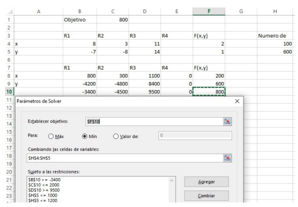
$$\begin{cases} 8x - 7y \geq -3400 \\ 3x - 8y \leq 2000 \\ 11x + 14y \geq 9500 \\ x \leq 1200 \\ y \leq 1000 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $A(800,50)$, $B(1200,200)$, $C(1200,1000)$, $D(450,1000)$ y $E(100,600)$.

b) $f(x,y) = 2x + y$ en S:

Solución por solver

$$\begin{cases} f(800,50) = 1650 \\ f(1200,200) = 2600 \\ f(1200,1000) = 3400 \\ f(450,1000) = 1900 \\ f(100,600) = 800 \end{cases} \Longrightarrow$$



El valor mínimo de la función en S se alcanza en el punto $E(100,600)$ con un valor de 800.

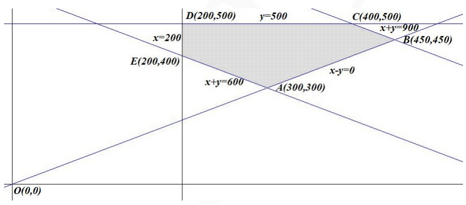
2.14.5. Convocatoria Extraordinaria (coincidente)

Problema 2.14.5 La plataforma digital *Plusfix* va a lanzar un nuevo canal de cine y deporte y tiene que elaborar una propuesta piloto de contenidos, teniendo en cuenta que el tiempo dedicado

al cine no puede ser mayor que el tiempo dedicado al deporte. La propuesta piloto debe tener una duración entre 600 y 900 minutos, debe tener al menos 200 minutos de cine y como mucho 500 minutos de deporte. Además, con la emisión de la propuesta la plataforma obtiene 15€ de beneficio por cada minuto de emisión de cine y 10€ de beneficio por cada minuto de emisión de deporte. Determine cuántos minutos de cine y cuántos de deporte debe tener la propuesta para obtener el máximo beneficio y obtenga el beneficio que obtiene la plataforma con dicha propuesta.
Solución:
Sean x el tiempo de cine e y el tiempo de deporte.

- ☛ La región factible:

$$S:\begin{cases} x\le y\\ 600\le x+y\le 900\\ x\ge 200\\ y\le 500\\ y\ge 0\end{cases}\Longrightarrow$$



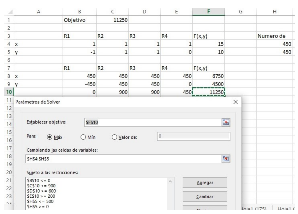
$$\begin{cases} x-y\le 0\\ x+y\le 900\\ x+y\ge 600\\ x\ge 200\\ y\le 500\\ y\ge 0\end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $A(300,300)$, $B(450,450)$, $C(400,500)$, $D(200,500)$ y $E(200,400)$.

- ☛ $f(x,y)=15x+10y$ en S:

Solución por solver

$$\begin{cases} f(300,300)=7500\\ f(450,450)=11250\\ f(400,500)=11000\\ f(200,500)=8000\\ f(200,400)=7000\end{cases}\Longrightarrow$$



El beneficio máximo de la propuesta se obtiene con 450 minutos de cine y 450 minutos de deporte y es de 11250€.

2.15. Murcia

2.15.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.15.1 La empresa Sportwear, especializada en ropa deportiva, quiere fabricar dos tipos de camisetas: técnica y casual. Para ello utiliza tejidos sostenibles con el medio ambiente: algodón orgánico y lino. Para fabricar una camiseta técnica necesita 70 g de algodón orgánico y 20 g de lino, y para fabricar una camiseta casual necesita 60 g de algodón orgánico y 10 g de lino. Actualmente, la empresa dispone para producir 4200 g de algodón orgánico y 800 g de lino. Además, para que sea rentable el proceso se debe fabricar al menos 10 camisetas tipo casual. Sabiendo que cada camiseta técnica da un beneficio de 5€ y cada casual de 4€, calcule, justificando la respuesta:

a) El número de camisetas de cada tipo que debería fabricar para obtener el máximo beneficio.

b) El valor de dicho beneficio máximo.

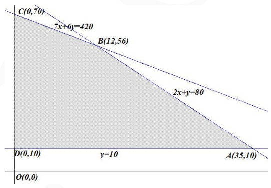
Solución:
Sea x : número de camisetas técnicas e y : de casual.

a)

	algodón	lino	beneficios
técnicas	70	20	5
casual	60	10	4
	≤ 4200	≤ 800	

La región factible es:

$$\begin{cases} 70x + 60y \leq 4200 \\ 20x + 10y \leq 800 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 7x + 6y \leq 420 \\ 2x + y \leq 80 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

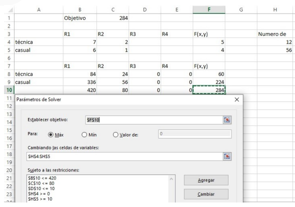


Los vértices son: $A(35, 10)$, $B(12, 56)$, $C(0, 70)$ y $D(0, 10)$

$f(x, y) = 5x + 4y$

$$\begin{cases} f(35, 10) = 215 \\ f(12, 56) = 284 \;\; \text{Máximo} \\ f(0, 70) = 280 \\ f(0, 10) = 40 \end{cases}$$

Solución por solver :



Se deben fabricar 12 camisetas técnicas y 56 casual.

b) El beneficio es de 284€.

2.15.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.15.2 Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 10 \\ x + 2y \geq 8 \\ 2 \leq y \leq x + 6 \\ x \leq 6 \end{array}\right\}$$

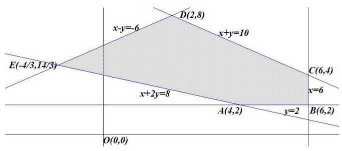
a) Represente la región S y calcule sus vértices.

b) Determine el punto de la región factible dónde la función $f(x, y) = -x + 2y$ alcanza su valor mínimo. Calcule dicho valor.

Solución:
Sea x : número de camisetas técnicas e y : de casual.

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ x + 2y \geq 8 \\ 2 \leq y \leq x + 6 \\ x \leq 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \leq 10 \\ x + 2y \geq 8 \\ x - y \geq -6 \\ y \geq 2 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

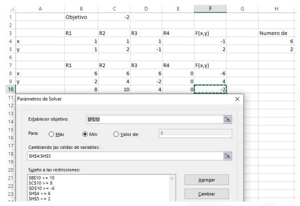


Los vértices son: $A(4, 2)$, $B(6, 2)$, $C(6, 4)$, $D(2, 8)$ y $E\left(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{14}{3}\right)$

b) $f(x,y) = -x + 2y$

$$\begin{cases} f(4,2) = 0 \\ f(6,2) = -2 \text{ Mínimo} \\ f(6,4) = 2 \\ f(2,8) = 14 \\ f\left(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{14}{3}\right) = \dfrac{32}{3} \end{cases}$$

Solución por solver :



El mínimo se encuentra en el punto $B(6,2)$ con un valor de -2.

2.16. Navarra

2.16.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.16.1 Un joven estudiante ganó 20000 euros en un concurso cultural y está pensando en invertir al menos el 20 % y no más del 50 % del premio. Un asesor le aconseja que reparta su inversión en dos carteras ($C1$ y $C2$). La cartera $C1$ tiene un perfil de riesgo audaz y una rentabilidad del 7 %, mientras que la cartera $C2$ tiene un perfil de riesgo moderado y una rentabilidad del 4 %. El estudiante decide invertir no más de 8000 euros en la cartera $C1$ y al menos 3000 euros en la cartera $C2$. Además, el asesor le recomienda que invierta en $C2$ una cantidad igual o superior a lo invertido en $C1$. ¿Cuánto deberá invertir en cada cartera si se desea maximizar la rentabilidad?

a) Plantee el problema.

b) Resuélvalo gráficamente.

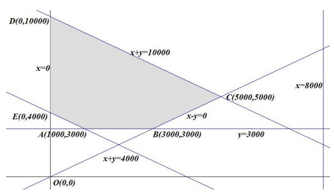
c) Analice gráficamente qué ocurriría si considerando el perfil de riesgo, el estudiante modifica su idea inicial y decide no invertir más de 2500 euros en la cartera $C1$.

Solución:

Sea x inversión en carteras $C1$ e y inversión en carteras $C2$.

a) La región factible es

$$\begin{cases} 4000 \le x + y \le 10000 \\ x + y \ge 4000 \\ x \le 8000 \\ y \ge 3000 \\ y \ge x \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \le 10000 \\ x + y \ge 4000 \\ x \le 8000 \\ y \ge 3000 \\ x - y \le 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

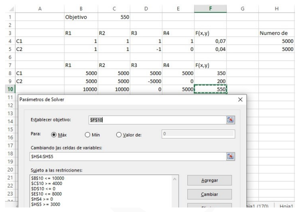


Los vértices son: $A(1000,3000)$, $B(3000,3000)$, $C(5000,5000)$, $D(0,10000)$ y $E(0,4000)$.

$f(x, y) = 0,07x + 0,04y$

$$\begin{cases} f(1000, 3000) = 190 \\ f(3000, 3000) = 330 \\ f(5000, 5000) = 550 \text{ Máximo} \\ f(0, 10000) = 400 \\ f(0, 4000) = 160 \end{cases}$$

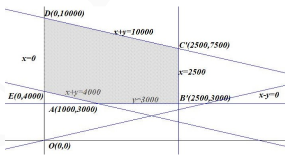
Solución por solver :



La máxima rentabilidad sería de 550€ con una inversión de 5000€ en $C1$ y 5000€ en $C2$.

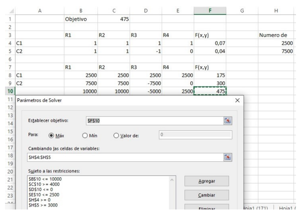
b) Si $x \leq 2500$:

$$\begin{cases} x + y \leq 10000 \\ x + y \geq 4000 \\ x \leq 2500 \\ y \geq 3000 \\ x - y \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow$$



$$\begin{cases} A(1000, 3000) \\ B'(2500, 3000) \\ C'(2500, 7500) \\ D(0, 10000) \\ E(0, 4000) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(1000, 3000) = 190 \\ f(2500, 3000) = 295 \\ f(2500, 7500) = 475 \text{ Máximo} \\ f(0, 10000) = 400 \\ f(0, 4000) = 160 \end{cases}$$

Solución por solver :



La máxima rentabilidad sería de 475€ con una inversión de 2500€ en $C1$ y 7500€ en $C2$.

2.16.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.16.2 Una empresa fabrica dos productos $P1$ y $P2$, con un coste de fabricación de 20 y 15 euros/kg, respectivamente. Para ello utiliza tres recursos ($R1$, $R2$ y $R3$). La siguiente tabla muestra la cantidad necesaria de cada recurso para obtener un kg de cada producto y la disponibilidad semanal de los recursos. Determine cuántos kg de cada producto deberá fabricar semanalmente esta empresa si desea minimizar el coste de producción, garantizando un nivel de fabricación total de al menos 30 kg.

	$P1$	$P2$	Disponibilidad semanal
$R1$	6	3	180
$R2$	4	5	200
$R3$	1	1,5	70

a) Plantee el problema.

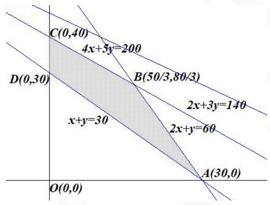
b) Resuélvalo gráficamente.

c) Analice gráficamente qué ocurriría si fabricación del producto $P2$ se encarece y su coste pasa a ser 20 euros/kg.

Solución:
Sea x kg de $P1$ e y kg de $P2$.

a) La región factible es

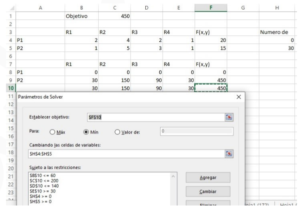
$$\begin{cases} 6x+3y \le 180 \\ 4x+5y \le 200 \\ x+1,5y \le 70 \\ x+y \ge 30 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x+y \le 60 \\ 4x+5y \le 200 \\ 2x+3y \le 140 \\ x+y \ge 30 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(30,0)$, $B\left(\dfrac{50}{3},\dfrac{80}{3}\right)$, $C(0,40)$ y $D(0,30)$.

$f(x,y) = 20x+15y$

Solución por solver :



$$\begin{cases} f(30,0) = 600 \\ f\left(\dfrac{50}{3},\dfrac{80}{3}\right) = \dfrac{2200}{3} \simeq 733,3333 \\ f(0,40) = 600 \\ f(0,30) = 450 \ \text{Mínimo} \end{cases}$$

El mínimo coste sería de 450€ con ningún kg de $P1$ y 30 kg de $P2$.

b) Si $f(x,y) = 20x+20y$

$$\begin{cases} f(30,0) = 600 \ \text{Mínimo} \\ f\left(\dfrac{50}{3},\dfrac{80}{3}\right) = \dfrac{2600}{3} \simeq 866,6667 \\ f(0,40) = 800 \\ f(0,30) = 600 \ \text{Mínimo} \end{cases}$$

El mínimo coste sería de 600€ y se obtiene en cualquier punto del segmento $\overline{AD}$.

2.17. País Vasco

2.17.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.17.1 El ayuntamiento de una determinada ciudad ha concedido la licencia para la construcción de una urbanización de a lo sumo 120 viviendas, de dos tipos A y B. Para ello, la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros. El coste de construcción de la vivienda de tipo A es 100.000€, y el de la del tipo B 300.000€. Además, el beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo A asciende a 20.000€ y por una del tipo B a 40.000€.

	coste de construcción	beneficio
A	100000€	20000€
B	300000€	40000€

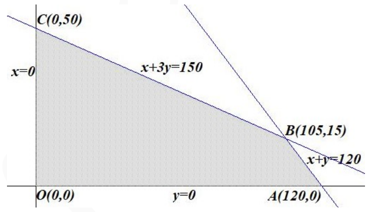
a) ¿Cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para obtener el máximo beneficio?

b) ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

Solución:
Sea x : número de viviendas de tipo A e y : las de tipo B.

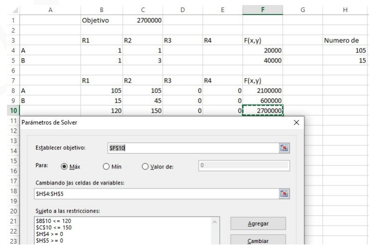
a) La región factible es

$$\begin{cases} x + y \leq 120 \\ 100000x + 300000y \leq 15000000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \leq 120 \\ x + 3y \leq 150 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $O(0,0)$, $A(120,0)$, $B(105,15)$ y $C(0,50)$.

Solución por solver :



$f(x,y) = 20000x + 40000y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(120,0) = 2400000 \\ f(105,15) = 2700000 \text{ Máximo} \\ f(0,50) = 2000000 \end{cases}$$

El beneficio máximo se consigue con la venta de 105 viviendas del tipo A y 15 del tipo B.

b) El máximo beneficio sería de 2700000€

2.17.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.17.2 Se quiere obtener el máximo y el mínimo de la función $f(x,y) = 4x + 2y - 1$ en el recinto definido por las siguientes restricciones:

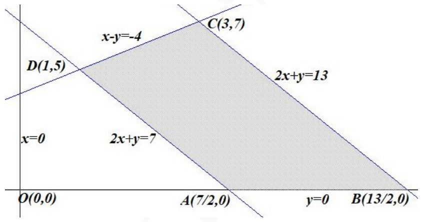
$$\begin{cases} y - x \leq 4 \\ y + 2x \geq 7 \\ -2x - y + 13 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

a) Representa el recinto mencionado.

b) Obtén los puntos en los que se alcanza el máximo y el mínimo de la función, así como los valores de la función en dichos puntos.

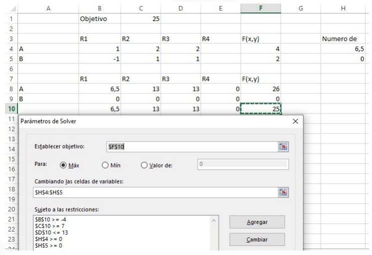
Solución:

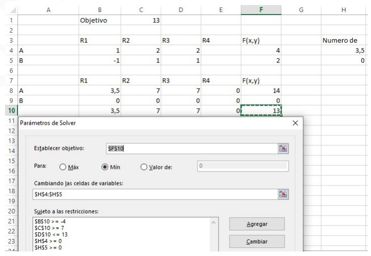
a) La región factible es



$$\begin{cases} y - x \leq 4 \\ y + 2x \geq 7 \\ -2x - y + 13 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - y \geq -4 \\ 2x + y \geq 7 \\ 2x + y \leq 13 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Solución por solver :





b) Los vértices son: $A\left(\frac{7}{2}, 0\right)$, $B\left(\frac{13}{2}, 0\right)$, $C(3,7)$ y $D(1,5)$.

$f(x,y) = 4x + 2y - 1$

$$\begin{cases} f\left(\frac{7}{2}, 0\right) = 13 \text{ Mínimo} \\ f\left(\frac{13}{2}, 0\right) = 25 \text{ Máximo} \\ f(3,7) = 25 \text{ Máximo} \\ f(1,5) = 1313 \text{ Mínimo} \end{cases}$$

El mínimo se consigue en cualquier punto del segmento $\overline{AD}$ con un valor de 13. El máximo en cualquier punto del segmento $\overline{BC}$ con un valor de 25.

Capítulo 3

Análisis

3.1. Resúmenes teóricos

Tabla de Derivadas

función	derivada	función	derivada
$y = k$	$y' = 0$	$y = x$	$y' = 1$
$y = ax^n$	$y' = nax^{n-1}$	$y = au^n$	$y' = nau^{n-1}u'$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	$y = uv$	$y' = u'v + uv'$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y = \dfrac{u}{v}$	$y = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$	$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
$y = u^v$	$y' = u^v(v' \ln u) + vu^{v-1}u'$	$y = a^u$	$y' = u'a^u \ln a$
$y = e^u$	$y' = u'e^u$	$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$	$y = \tan u$	$y' = u' \sec^2 u$
$y = \cot u$	$y' = -u' \csc^2 u$	$y = \csc u$	$y' = -u' \csc u \cot u$
$y = \sec u$	$y' = u' \sec u \tan u$	$y = \arcsin u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \operatorname{arc\,cos} u$	$y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \arctan u$	$y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
	Regla de la Cadena	$y = f(g(x))$	$y' = g'(x)f'(g(x))$

Representación gráfica de funciones(pasos a seguir)

1 Dominio	Buscar Puntos Singulares	2 Signo	$f(x) > 0$ o $f(x) < 0$
3 Ptos. Corte	Corte con OX : $f(x) = 0$ Corte con OY : $x = 0$	4 Simetría :	Par : $f(-x) = f(x)$ con OY Impar : $f(-x) = -f(x)$ con O
5 Asíntotas :	Verticales : $x = p$ $\lim\limits_{x \longrightarrow p} f(x) = \pm\infty$ Horizontales : $y = p$ $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = p$ Si $\exists\, y = p \Longrightarrow$ No Oblicuas Oblicuas : $y = mx + n$ $m = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $n = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx)$	6 Monotonía :	Creciente : $f'(x) > 0$ $\nearrow$ Decreciente : $f'(x) < 0$ $\searrow$ Si $f'(p) = 0$ Punto Crítico : Máximo si $f''(p) < 0$ Mínimo si $f''(p) > 0$ Pto. Inflexión si $f''(p) = 0$ y $f'''(p) \neq 0$

7 Máximos y Mínimos	Máximo : $\nearrow\searrow$ de creciente a decreciente Mínimo : $\searrow\nearrow$ de decreciente a creciente	8 Curvatura :	Cóncava : $f''(x) > 0 \cup$ Convexa : $f''(x) < 0 \cap$ Si $f''(p) = 0$ Punto Crítico : Pto. Inflexión si de Cóncava a Convexa de Convexa a Cóncava
9 Periodo :	$f(x+T) = f(x)$		

Tabla de Integrales Inmediatas

Tipo	Simple	Compuesta
Potencial $a \neq -1$	$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int f^a \cdot f'\,dx = \frac{f^{a+1}}{a+1}$
Logarítmica	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert$	$\int \frac{f'}{f}\,dx = \ln\lvert f\rvert$
Exponencial	$\int e^x\,dx = e^x$	$\int e^f \cdot f'\,dx = e^f$
Exponencial	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int a^f \cdot f'\,dx = \frac{a^f}{\ln a}$
Seno	$\int \cos x\,dx = \sin x$	$\int f' \cdot \cos f\,dx = \sin f$
Coseno	$\int \sin x\,dx = -\cos x$	$\int f' \cdot \sin f\,dx = -\cos f$
Tangente	$\int \sec^2\,dx = \tan x$	$\int f' \cdot \sec^2 f\,dx = \tan f$
	$\int (1+\tan^2 x)\,dx = \tan x$	$\int f' \cdot (1+\tan^2 f)\,dx = \tan f$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x$	$\int \frac{f'}{\cos^2 f}\,dx = \tan f$
Cotangente	$\int \csc^2\,dx = -\cot x$	$\int f' \cdot \csc^2 f\,dx = -\cot f$
	$\int (1+\cot^2 x)\,dx = -\cot x$	$\int f' \cdot (1+\cot^2 f)\,dx = -\cot f$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x$	$\int \frac{f'}{\sin^2 f}\,dx = -\cot f$
Arco seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}\,dx = \arcsin f$
	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{\sqrt{a^2-f^2}}\,dx = \arcsin \frac{f}{a}$
Arco coseno	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}\,dx = \arccos f$
	$\int \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arccos \frac{x}{a}$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{a^2-f^2}}\,dx = \arccos \frac{f}{a}$
Arco tangente	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$	$\int \frac{f'}{1+f^2}\,dx = \arctan f$
	$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \arctan \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{a^2+f^2}\,dx = \arctan \frac{f}{a}$
Neperiano – Arcotangente	$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx = \ln \pm \arctan x$	Si $M \neq 0$ ax^2+bx+c irreducible

Definición de Derivada

$$f'(x) = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad f'(a) = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Continuidad: Una función f es continua en un punto a si

$$\lim_{x\longrightarrow a^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

- Si $\lim_{x\longrightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x\longrightarrow a^+} f(x) \Longrightarrow$ Discontinua no evitable. (La función pega un salto en ese punto)
- Si $\lim_{x\longrightarrow a^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow a^+} f(x) \neq f(a) \Longrightarrow$ Discontinua evitable. (La función tiene un agujero en ese punto)

Derivabilidad
Una función f es derivable en un punto a si $f'(a^-) = f'(a^+)$.

$$f'(a^-) = \lim_{h\longrightarrow 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \quad f'(a^+) = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Si f es una función derivable en un punto a, entonces f tiene que ser continua en a.
Teorema de Weierstrass
Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces f alcanza un máximo y un mínimo en este intervalo.
Teorema de Darboux
Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces f toma en dicho intervalo todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo.
Teorema de Bolzano
Si f es una función continua en el intervalo cerrado y no nulo $[a, b]$ $(a < b)$ y la función toma valores de distinto signo en los extremos de este intervalo (Si signo de $f(a)$ es positivo entonces signo de $f(b)$ es negativo o viceversa). Entonces la función pasa necesariamente por un punto que corta al eje de abcisas, es decir, $\exists c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.
Teorema de Rolle
Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). Si además cumple que $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
Teorema del Valor Medio de Lagrange
Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Primer Teorema Fundamental del Cálculo
Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Definimos en este intervalo la función

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \text{ donde } c \in [a, b]$$

En estas condiciones, si f es continua en c se cumple que F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.
Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (Regla de Barrow)
Dada una función f continua en el intervalo $[a, b]$ y sea F cualquier función primitiva de f, es decir $F'(x) = f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema de integración por partes
Sean f y g dos funciones reales derivables en el intervalo $[a, b]$. En estas condiciones se cumple

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

$\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (sentado un día vi un valiente soldado vestido de uniforme)

Teorema del cambio de variable
Sea g una función con derivada g' continua en $[a, b]$, y sea f una función real y continua en el mismo intervalo. SI hacemos el cambio de variable $t = g(x)$ se cumple que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

Límites cuando $x \longrightarrow \pm\infty$
Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que Grado$(P(x)) = n$ y Grado$(Q(x)) = m$. Sea A el coeficiente del monomio de mayor grado de $P(x)$ y sea B el coeficiente del monomio de mayor grado de $Q(x)$

$$L = \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} P(x) = \pm\infty$ el signo depende del signo del coeficiente de mayor grado de este polinomio.
- Si $n > m \Longrightarrow L =$Signo$\left(\dfrac{A}{B}\right) \cdot \infty$
- Si $n < m \Longrightarrow L = 0$
- Si $n = m \Longrightarrow L = \dfrac{A}{B}$

Si $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} P(x)^{Q(x)} = [1^\infty] = e^\lambda$, donde

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} Q(x)(P(x) - 1)$$

Regla de L'Hôpital Sean f y g dos funciones reales y derivables, entonces si

$$\lim_{x\longrightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \; o \; \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right] \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\longrightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aproximaciones cuando $x \longrightarrow 0$

$\sin x \approx x$	$\tan x \approx x$	$e^x \approx 1 + x$	$\log(1 + x) \approx x$
$a^x \approx 1 + x \ln a$	$\arcsin x \approx x$	$\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$	$\arccos \approx \dfrac{\pi}{2} - x$

3.2. Andalucia

3.2.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.2.1 Se pide:

a) Se considera la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, con a, b y c números reales. Calcule los valores a, b y c, sabiendo que la gráfica de f posee un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 3$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(0, 18)$ es -3.

b) Calcule el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función $g(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$ y el eje de abscisas.

Solución:

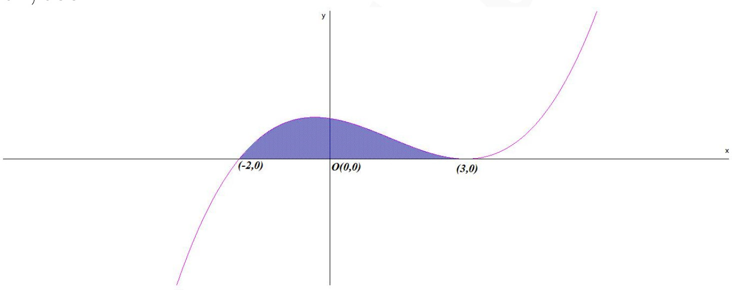
a) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} f'(3) = 0 \Longrightarrow 27 + 6a + b = 0 \\ f'(0) = -3 \Longrightarrow b = -3 \\ f(0) = 18 \Longrightarrow c = 18 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -4 \\ b = -3 \\ c = 18 \end{array}\right.$$

$f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$

b) $g(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0 \Longrightarrow x = -2$ y $x = 3$

$$S = \left|\int_{-2}^{3} (x^3 - 4x^2 - 3x + 18)\, dx\right| = \left|\left.\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 18x\right]_{-2}^{3}\right| = \left|\frac{99}{4} + \frac{82}{3}\right| = \frac{625}{12} \simeq 52,083\ u^2$$



Problema 3.2.2 Se pide:

a) Se considera la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} 6x - 3 & \text{si} & x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 2 & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$$

Con a y b números reales. Determine los valores de a y b para que f sea continua y derivable en todo su dominio.

b) Calcule el área del recinto acotado, limitado por el eje OX y la gráfica de la función $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$.

Solución:

a) Las dos ramas son polinomios y, por tanto, continuas y derivables en $\mathbb{R} - \{1\}$. Calculamos a y b para que estas dos condiciones se cumplan en $x = 1$:

☛ Continua en $x = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (6x-3) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (ax^2+bx+2) = a+b+2 \\ f(1) = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow a+b+2 = 3 \Longrightarrow a+b = 1$$

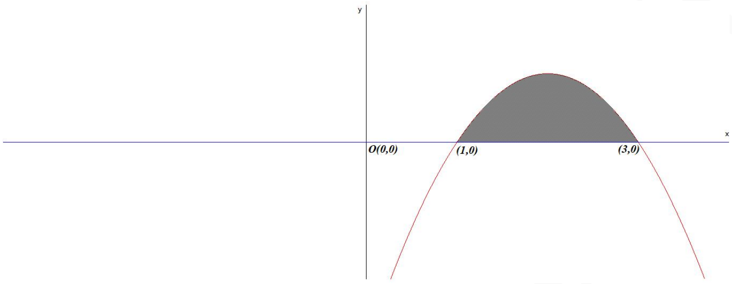
☛ Derivable en $x = 1$:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} 6 & \text{si} & x \le 1 \\ 2ax+b & \text{si} & x > 1 \end{array}\right. \Longrightarrow 2a+b = 6$$

☛ $\left\{\begin{array}{l} a+b=1 \\ 2a+b=6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=5 \\ b=-4 \end{array}\right.$

b) $g(x) = -2x^2+8x-6 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = 3$

$$S = \left|\int_1^3 (-2x^2+8x-6)\,dx\right| = \left|-\frac{2x^3}{3}+4x^2-6x\right]_1^3\Bigg| = \left|0+\frac{8}{3}\right| = \frac{8}{3} \simeq 2,667\ u^2$$



3.2.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.2.3 Se pide:

a) Se considera la función $f(x) = x^3+bx^2+cx-1$, con b y c números reales. Determine el valor de b y c para que la función f presente un extremo en el punto de abscisa $x = \dfrac{1}{3}$ y además la gráfica de la función f pase por el punto $(-2,-3)$.

b) Dada la función $g(x) = -x^3-x^2+x+1$, realice el esbozo de su gráfica, estudiando los puntos de corte con los ejes coordenados y su monotonía. Determine el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función g y el eje de abscisas.

Solución:

a) $f(x) = x^3+bx^2+cx-1 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2+2bx+c = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} f'\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{3}+\dfrac{2b}{3}+c = 0 \\ f(-2) = -3 \Longrightarrow -8+4b-2c-1 = -3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=1 \\ c=-1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

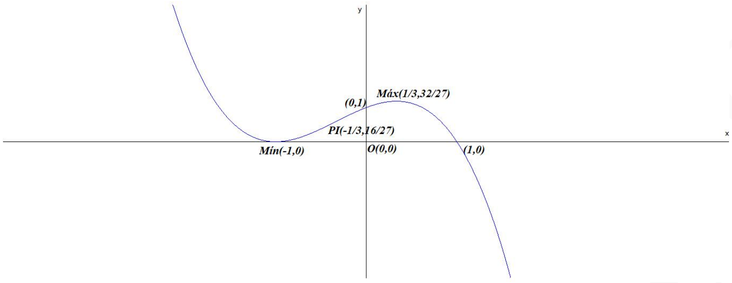
$f(x) = x^3+x^2-x-1$

b) $g(x) = -x^3-x^2+x+1 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 1 \Longrightarrow (1,0)$ y $(-1,0)$

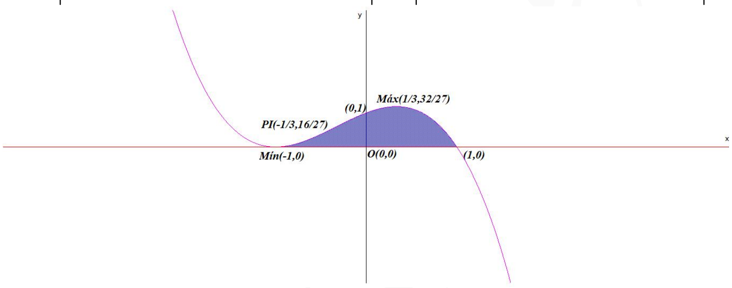
$g(0) = 1 \Longrightarrow (0,1)$

$g'(x) = -3x^2-2x+1 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = \dfrac{1}{3}$

$g''(x) = -6x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$
$g''(-1) = 4 > 0 \Longrightarrow (-1, 0)$ es un mínimo relativo.
$g''\left(\dfrac{1}{3}\right) = -4 < 0 \Longrightarrow \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{32}{27}\right)$ es un máximo relativo.
La función decrece en el intervalo $(-\infty, -1) \cup \left(\dfrac{1}{3}, \infty\right)$ y crece en el $\left(-1, \dfrac{1}{3}\right)$
$g'''(x) = -6 \Longrightarrow g'''\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -6 \neq 0 \Longrightarrow \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{16}{27}\right)$ es un punto de inflexión.



$$S = \left| \int_{-1}^{1} (-x^3 - x^2 + x + 1)\, dx \right| = \left| -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^{1} \Bigg| = \left| \frac{11}{12} + \frac{5}{12} \right| = \frac{4}{3} \simeq 1,3333\ u^2$$



Problema 3.2.4 El beneficio, en miles de euros, que se obtiene en una pequeña finca familiar por la venta de aceitunas, en miles de kilogramos, viene dado por la siguiente función:

$$B(x) = -0,02x^2 + 1,3x - 15, \quad x \geq 0$$

a) Represente la función beneficio y calcule los puntos de corte con el eje OX.

b) ¿Para qué valores de x la finca no tiene pérdidas?

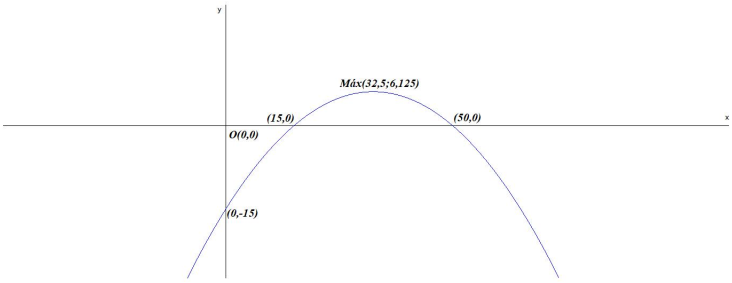
c) ¿Para qué número de kilogramos el beneficio será máximo? ¿Cuánto vale dicho beneficio?

d) ¿Cuántos kilogramos debe vender para obtener un beneficio de 5000€?

Solución:

a) $B(x) = -0,02x^2 + 1,3x - 15 = 0 \Longrightarrow x = 15$ y $x = 50 \Longrightarrow (15, 0)$ y $(50, 0)$
$B(0) = -15 \Longrightarrow (0, -15)$
$B'(x) = -0,04x + 1,3 = 0 \Longrightarrow x = 32,5$
$B''(x) = -0,04$
$B''(32,5) = -0,04 < 0 \Longrightarrow (32,5; 6,125)$ es un máximo relativo.

La función crece en el intervalo $(0; 32,5)$ y decrece en el $(32,5; \infty)$



b) No hay pérdidas para ventas comprendidas entre 15000 Kg y 50000 Kg

c) El beneficio es máximo con la venta de 32500 Kg con un beneficio de 6125€.

d) $B(x) = 5 \Longrightarrow -0,02x^2 + 1,3x - 15 = 5 \Longrightarrow x = 25$ y $x = 40$ El beneficio de 5000€ se obtiene con la venta de 25000 Kg o de 40000 Kg.

3.3. Aragón

3.3.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.3.1 En una empresa el coste total, en euros, de producir q unidades viene dado por:

$$C(q) = 300q - 10q^2 + \frac{q^3}{3}$$

donde t representa los años transcurridos desde la apertura. Los emprendedores quieren saber:

a) Calcule la función coste marginal ($C_m(q) = C'(q)$) ¿A partir de qué unidad el coste marginal aumenta al aumentar la producción?

b) Determine el nivel de producción para el que se minimiza el coste medio

$$CM(q) = \frac{C(q)}{q}$$

c) Si el precio de venta unitario, en euros, del artículo en el mercado es $P(q) = 240 - 2q$ Determine para qué nivel de producción se maximiza el beneficio (ingresos menos costes).

Solución:

a) $C_m(q) = C'(q) = 300 - 20q + q^2$.
$C'(q) = -20 + 2q = 0 \Longrightarrow q = 10$

	$(0, 10)$	$(10, \infty)$
$C'(q)$	$-$	$+$
$C(q)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

El coste marginal decrece hasta la producción de 10 unidades y crece a partir de esa producción.

b) $CM(q) = \dfrac{C(q)}{q} = 300 - 10q + \dfrac{q^2}{3}$

$CM'(q) = -10 + \dfrac{2q}{3} = 0 \Longrightarrow q = 15$

	$(0,15)$	$(15,\infty)$
$CM'(q)$	$-$	$+$
$CM(q)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

El coste medio se minimiza con la producción de 15 unidades.

c) $B(q) = I(q) - C(p) = qP(q) - C(q) = q(240 - 2q) - \left(300q - 10q^2 + \dfrac{q^3}{3}\right) = -60q + 8q^2 - \dfrac{q^3}{3}$

$B'(q) = -60 + 16q - q^2 = 0 \Longrightarrow q = 6$ y $q = 10$

	$(0,6)$	$(0,10)$	$(10,\infty)$
$B'(q)$	$-$	$+$	$-$
$B(q)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

El beneficio es máximo con la producción de 10 unidades.

Problema 3.3.2 Siendo a, b parámetros reales, se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\sqrt{3} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \sqrt{ax+b} & \text{si} \quad 0 < x \le 3 \\ \dfrac{7}{2} - \dfrac{x}{6} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

a) Determine el valor de los parámetros para que $f(x)$ sea continua.

b) Para dichos valores, analice si $f(x)$ es derivable en $x = 0$ y en $x = 3$.

c) Calcule el valor máximo y mínimo de $f(x)$ si $x \in [6, 9]$ y las coordenadas de los puntos donde se alcanzan dichos valores.

Solución:

a) Las ramas de las funciones son continuas, hay que estudiar la continuidad en $x = 0$ y $x = 3$:

☛ Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} (x^2 + 2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \sqrt{ax+b} = \sqrt{b} \\ f(0) = 2\sqrt{3} \end{array}\right. \Longrightarrow 2\sqrt{3} = \sqrt{b} \Longrightarrow b = 12$$

☛ Continuidad en $x = 3$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} \sqrt{ax+b} = \sqrt{3a+b} \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} \left(\dfrac{7}{2} - \dfrac{x}{6}\right) = 3 \\ f(3) = \sqrt{3a+b} \end{array}\right. \Longrightarrow \sqrt{3a+b} = 3 \Longrightarrow 3a + b = 9$$

☛ $\left\{\begin{array}{l} b = 12 \\ 3a + b = 9 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ b = 12 \end{array}\right.$

☛ Para estos valores $\exists\sqrt{-x+12}\ \forall x\in(0,3]$

b)

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2\sqrt{3} & \text{si} \quad x\le 0\\ \sqrt{-x+12} & \text{si} \quad 0<x\le 3\\ \dfrac{7}{2}-\dfrac{x}{6} & \text{si} \quad x>3\end{cases} \Longrightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si} \quad x\le 0\\ \dfrac{-1}{2\sqrt{-x+12}} & \text{si} \quad 0<x\le 3\\ -\dfrac{1}{6} & \text{si} \quad x>3\end{cases}$$

☛ Derivable en $x=0$:

$$f'(0^-)=0,\quad f'(0^+)=\frac{-1}{4\sqrt{3}}\Longrightarrow f'(0^-)\ne f'(0^+)$$

f no es derivable en $x=0$.

☛ Derivable en $x=3$:

$$f'(3^-)=\frac{-1}{6},\quad f'(3^+)=\frac{-1}{6}\Longrightarrow f'(0^-)=f'(0^+)$$

f si es derivable en $x=3$.

c) Si $x\in[6,9]\Longrightarrow f(x)=\dfrac{7}{2}-\dfrac{x}{6}$ y se trata de una recta, los valores máximo y mínimo estarán en los bordes del intervalo: $f(6)=\dfrac{7}{2}-1=\dfrac{5}{2}$ y $f(9)=\dfrac{7}{2}-\dfrac{3}{2}=2$ el máximo está en $x=6$ y el mínimo en $x=9$.

3.3.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.3.3 Dada $f(x)=60+\dfrac{1}{100}(1-x)+\dfrac{1}{1-x}$

a) Calcule el dominio y, si existen, las asíntotas verticales y horizontales.

b) Razone que $f(x)$ tiene dos extremos relativos, uno mínimo y otro máximo ¿El valor en el mínimo de la función es mayor o menor que el valor en el máximo?

c) Supongamos que x representa el precio de venta de un kg de solomillo según la época del año, $x\in[5,21]$ euros por kilo, y $f(x)$ el ingreso diario de un mayorista (en cientos de euros) por la venta del producto. ¿A qué precio debe vender para obtener el máximo ingreso? ¿A cuántos euros asciende dicho ingreso máximo?

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-6002x+6101}{100(1-x)}$
Dom$(f)=\mathbb{R}-\{1\}$
Asíntotas:

☛ Verticales: $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-6002x+6101}{100(1-x)}=\left[\frac{100}{0^+}\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-6002x+6101}{100(1-x)}=\left[\frac{100}{0^-}\right]=-\infty$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-6002x+6101}{100(1-x)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-6002x+6101}{100(1-x)} = -\infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$ (no lo piden)

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-6002x+6101}{100(x-x^2)} = -\frac{1}{100}$$

$$n = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-6002x+6101}{100(1-x)} + \frac{x}{100}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-6001x+6101}{100(1-x)} = \frac{6001}{100} \Longrightarrow y = -\frac{1}{100}x + \frac{6001}{100}$$

b) $f'(x) = -\dfrac{x^2-2x-99}{100(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = -9$ y $x = 11$

	$(-\infty,-9)$	$(-9,1)$	$(1,11)$	$(11,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty,-9)\cup(11,\infty)$ y creciente en el $(-9,1)\cup(1,11)$. Tiene un mínimo relativo en el punto $\left(-9, \dfrac{301}{5}\right)$ y un máximo relativo en el $\left(11, \dfrac{299}{5}\right)$. Claramente $f(11) < f(-9)$, el valor del mínimo es más elevado que el valor del máximo.

c) El vendedor debe vender 11€ el kg para obtener un máximo ingreso de $\dfrac{299}{5} = 59,8 \to 5980$€. Si comprobamos los valores de los extremos del intervalo:
$f(5) = 59,71 \to 5971$€ y $f(21) = 59,75 \to 5975$€. Ambos valores son inferiores al máximo.

Problema 3.3.4 La primera derivada de una cierta función es $f'(x) = x(x-1)^2$

a) ¿En qué intervalo $f(x)$ es creciente? y ¿decreciente? Calcule los extremos relativos.

b) ¿En qué intervalo es cóncava la gráfica de $f(x)$? ¿y convexa? Calcule los puntos de inflexión de $f(x)$.

c) Determine $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 10$.

Solución:

a) $f'(x) = x(x-1)^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 1$

$$f''(x) = (x-1)(3x-1) \Longrightarrow \begin{cases} f''(0) = 1 > 0 \Longrightarrow x = 1 \text{ Mínimo relativo} \\ f''(1) = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ no es extremo} \end{cases}$$

La función es decreciente en $(-\infty,0)$ y creciente en $(0,\infty)$

b) $f''(x) = (x-1)(3x-1) = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = \dfrac{1}{3}$

	$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava $\smile$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es cóncava ($\smile$) en el intervalo $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right) \cup (1, \infty)$ y convexa ($\frown$) en el $\left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$

Con puntos de inflexión en $x = 1$ y en $x = \dfrac{1}{3}$

c) $f(x) = \displaystyle\int (x^3 - 2x^2 + x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$

$f(0) = 10 \Longrightarrow C = 10$

$f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 10$

3.4. Asturias

3.4.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.4.1 El salario diario (f) de un trabajador durante los primeros cinco años en una determinada empresa se ajusta a la siguiente función, donde x representa el tiempo, en años, que lleva contratado:

$$f(x) = \begin{cases} 35 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 25 + 10x & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ -0,5x^2 + 4x + a & \text{si} \quad 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función, determinando el valor de a para que dicha función sea continua en todo su dominio.

b) Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en todo su dominio. ¿En qué momento el salario fue máximo? ¿y mínimo?

Solución:

a) Las ramas son polinomios y son continuas en el dominio de la función. Hay que estudiar la continuidad en $x = 1$ y en $x = 2$

☛ En $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 35 = 35 \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (25 + 10x) = 35 \\ f(1) = 35 \end{array} \right. \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 1$$

☛ En $x = 2$:

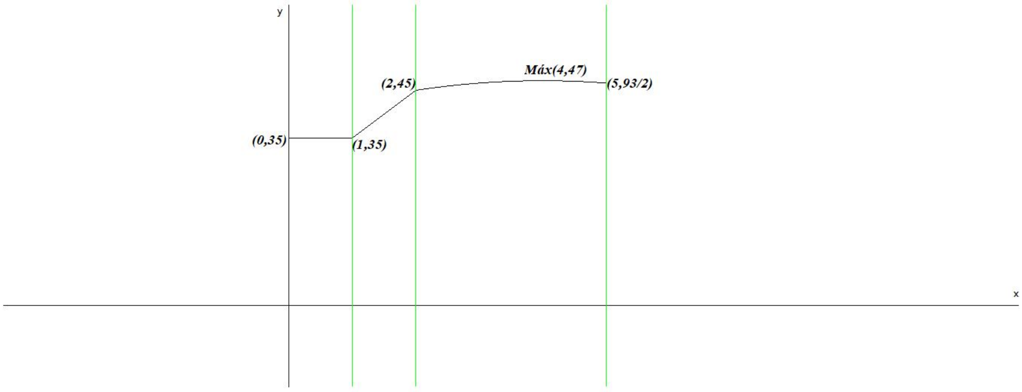
$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (25 + 10x) = 45 \\ \displaystyle\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (-0,5x^2 + 4x + a) = a + 6 \\ f(2) = a + 6 \end{array} \right. \Longrightarrow a + 6 = 45 \Longrightarrow a = 39$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} 35 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 25 + 10x & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ -0,5x^2 + 4x + 39 & \text{si} \quad 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

Las ramas $0 \le x < 1$ y $1 \le x < 2$ son dos rectas y se dibujan con los puntos de los bordes de la rama correspondiente. En la rama $2 \le x \le 5 \Longrightarrow f(x) = -0,5x^2 + 4x + 39 \Longrightarrow f'(x) = -x + 4 = 0 \Longrightarrow x = 4$

$f''(x) = -1 \Longrightarrow f''(4) = -1 < 0 \Longrightarrow x = 4$ hay un máximo relativo en $\left(4, \dfrac{93}{2}\right)$ que a la vista de gráfica de la función es también absoluto. El máximo salario se produce al cuarto año y el mínimo durante el intervalo $[0, 1]$.



Problema 3.4.2 Dada la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$, se pide:

a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 0$.

b) Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = 4$.

Solución:

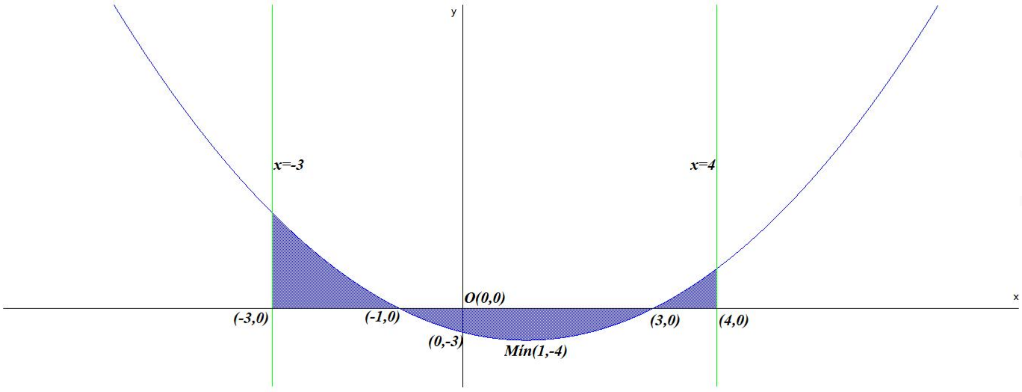
a) $F(x) = \displaystyle\int (x^2 - 2x - 3)\, dx = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + C$
$F(0) = 0 - 0 - 0 + C = 0 \Longrightarrow C = 0 \Longrightarrow$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$$

b) La función es una parábola y $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ con puntos de corte en:

- Con OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, -3)$
- Con OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow (-1, 0)$ y $(3, 0)$

$f'(x) = 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$
$f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(1) = 2 > 0 \Longrightarrow (1, -4)$ es un mínimo. Con estos datos la representación gráfica sería la siguiente:



Tendríamos tres recintos: S_1 en $[-3,-1]$, S_2 en $[-1,3]$ y S_3 en $[3,4]$ con $S = |S_1|+|S_2|+|S_3|$

$S_1 = \displaystyle\int_{-3}^{-1} f(x)\,dx = F(-1) - F(-3) = \frac{5}{3} + 9 = \frac{32}{3}$

$S_2 = \displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = F(3) - F(-1) = -9 - \frac{5}{3} = -\frac{32}{3}$

$S_3 = \displaystyle\int_{3}^{4} f(x)\,dx = F(4) - F(3) = -\frac{20}{3} + 9 = \frac{7}{3}$

$S = |S_1| + |S_2| + |S_3| = \dfrac{32}{3} + \dfrac{32}{3} + \dfrac{7}{3} = \dfrac{71}{3} \simeq 23,6667\ u^2$

3.4.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.4.3 Una empresa ingresa 500 miles de euros por cada tonelada de producto que vende. En cuanto a costes, tiene unos costes de producción, entre mano de obra y materia prima, de 250 miles de euros por cada tonelada que produce. Además, cada año debe pagar como impuestos el $x\,\%$ de sus ingresos, si ha vendido x toneladas de producto. Por último, la empresa tiene unos costes fijos anuales de 1125 miles de euros. Si f representa los beneficios (ingresos - costes) anuales, la producción máxima anual es de 40 toneladas, y esta empresa vende cada año todo lo que produce, se pide:

a) Obtener la expresión de la función f en función de x. Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo $[0,40]$.

b) ¿Qué cantidad debe producir en un año para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Qué cantidad hay que producir en un año para que el beneficio sea positivo?

Solución:

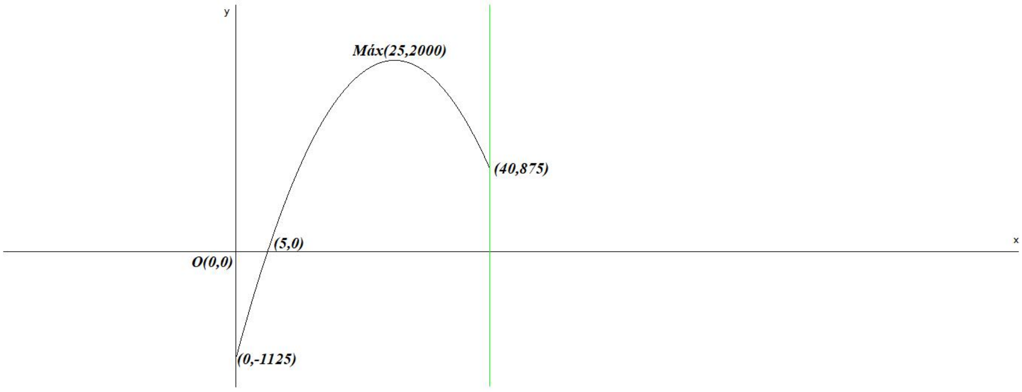
a) Si se producen x Tm la empresa ingresa $I(x) = 500x$ miles de euros.
Con los siguientes costes:

- ☛ $250x$ miles de euros.
- ☛ $\dfrac{xI(x)}{100}$ miles de euros.
- ☛ 1125 miles de euros.
- ☛ $C(x) = 250x + \dfrac{500x^2}{100} + 1125 = 5x^2 + 250x + 1125$

La función beneficio es

$$f(x) = I(x) - C(x) = 500x - 5x^2 - 250x - 1125 = -5x^2 + 250x - 1125$$

$f(0) = -1125$ y $f(40) = 875$.
$f(x) = 0 \Longrightarrow x = 5$ y $x = 45$, este último punto fuera del intervalo. El único punto de corte con OX es el $(5, 0)$.
$f'(x) = -10x + 250 = 0 \Longrightarrow x = 25$
$f''(x) = -10 \Longrightarrow f''(25) = -10 < 0 \Longrightarrow x = 25$ es un máximo relativo $(25, 2000)$
Su gráfica sería:



b) Como se ha visto en el apartado anterior se deben producir 25 Tm para obtener un máximo beneficio de $f(25) = 2000$ miles de euros, es decir, 2000000€.
El beneficio es positivo a partir de una producción de 5 Tm. en el intervalo estudio.

Problema 3.4.4 Dada la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, se pide:

a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 1$.

b) Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 4$.

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int (x^3 - 4x^2 + 3x)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + C$
$F(1) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{4}{3} + \dfrac{3}{2} + C = 0 \Longrightarrow C = -\dfrac{7}{12} \Longrightarrow$

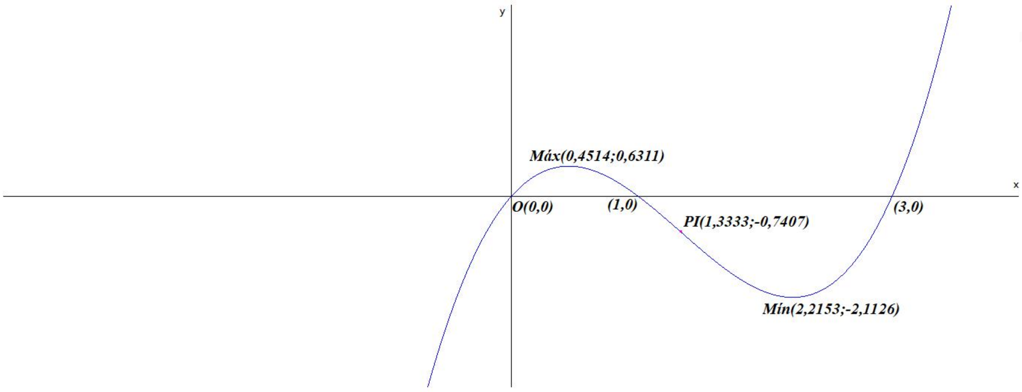
$$F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - \frac{7}{12}$$

b) La función tiene $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ con puntos de corte en:

- Con OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
- Con OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$, $(1, 0)$ y $(3, 0)$

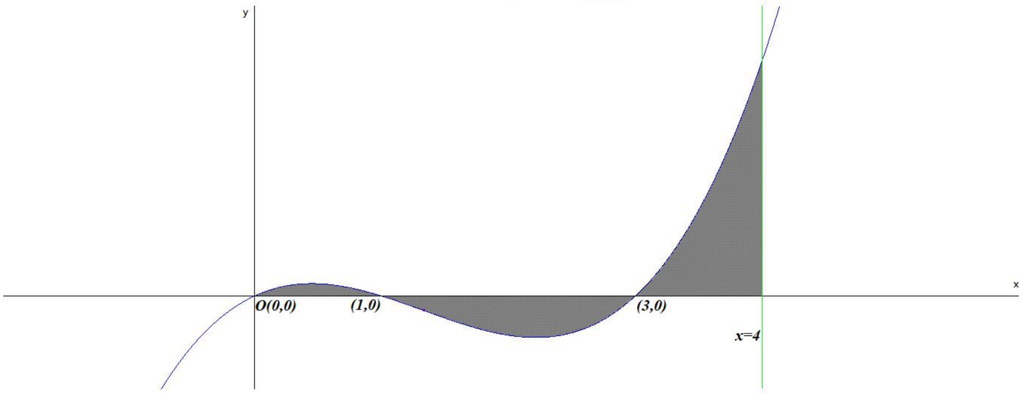
$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{7}}{3} \Longrightarrow x = 2,2153$ y $x = 0,4514$
$f''(x) = 6x - 8 \Longrightarrow f''(0,4514) = -5,29 < 0 \Longrightarrow (0,4514; 0,6311)$ es un máximo.

$f''(2,2153) = 5,29 > 0 \Longrightarrow (2,2153; -2,1126)$ es un mínimo.
$f''(x) = 6x - 8 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{4}{3} \simeq 1,3333$
$f'''(x) = 6 \Longrightarrow f'''(1,3333) = 6 \neq 0 \Longrightarrow (1,3333; -0,7407)$ es un punto de inflexión.
Con estos datos la representación gráfica sería la siguiente:



Tendríamos tres recintos: S_1 en $[0,1]$, S_2 en $[1,3]$ y S_3 en $[3,4]$ con $S = |S_1| + |S_2| + |S_3|$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}$$



$S_1 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = \frac{5}{12} + 0 = \frac{5}{12}$
$S_2 = \displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx = F(3) - F(1) = -\frac{9}{4} - \frac{5}{12} = -\frac{8}{3}$
$S_3 = \displaystyle\int_3^4 f(x)\,dx = F(4) - F(3) = \frac{8}{3} + \frac{9}{4} = \frac{59}{12}$
$S = |S_1| + |S_2| + |S_3| = \dfrac{5}{12} + \dfrac{8}{3} + \dfrac{59}{12} = 8\ u^2$

3.5. Cantabria

3.5.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.5.1 Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2x - 24}{x^2 + 2x - 8}$

a) ¿En qué puntos es discontinua f? ¿De qué tipo de discontinuidad se trata en cada caso?

b) ¿Se podría redefinir f para evitar alguna de estas discontinuidades?

c) ¿Cuáles son las asíntotas de f?

d) Esboce la gráfica de f, indicando únicamente los puntos de discontinuidad, las asíntotas y los cortes con los ejes OX y OY.

Solución:

a) La función es discontinua en los puntos en los que se anula el denominador $x^2+2x-8=0 \Longrightarrow x=-4$ y $x=2$. El $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-4,2\}$.

$\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{4x+2}{2x+2}=\dfrac{7}{3}$, en este punto hay una discontinuidad evitable. (Un agujero)
$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8}=\left[\dfrac{-12}{0}\right]=\pm\infty$, en este punto no hay discontinuidad evitable. (Un salto infinito)

b) Se puede evitar la discontinuidad en $x=-4$, la extensión por continuidad en este punto sería la función:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} & \text{si} \quad x\neq -4\\[2ex] \dfrac{7}{3} & \text{si} \quad x=-4\end{cases}$$

c) Asíntotas:

- Verticales: en $x=2$:
  $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8}=\left[\dfrac{-12}{0^-}\right]=\infty$,
  $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8}=\left[\dfrac{-12}{0^+}\right]=-\infty$.
- Horizontales: en $y=2$

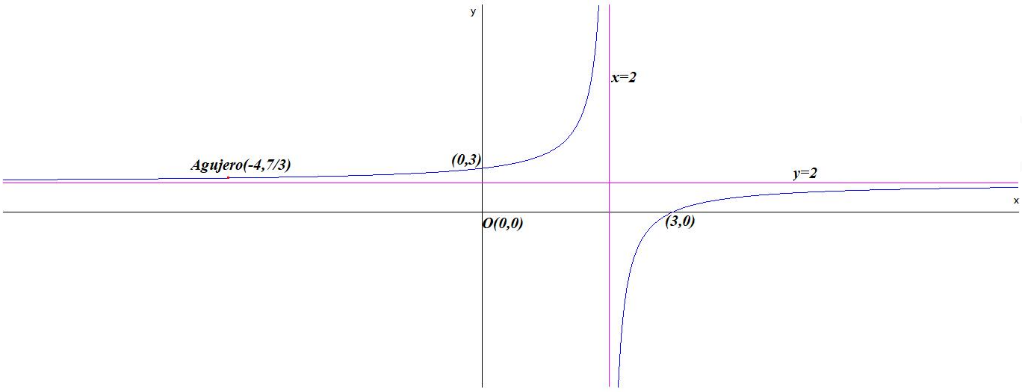
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8}=2$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

d) Puntos de corte:

- Con OY hacemos $x=0 \Longrightarrow (0,3)$
- Con OX hacemos $f(x)=0 \Longrightarrow 2x^2+2x-24=0 \Longrightarrow (-4,0)$ (No válido por ser discontinua) y $(3,0)$

Representación gráfica:



Problema 3.5.2 Un autónomo del sector del transporte ha determinado que los costes mensuales de su empresa responden a una función $C(\nu)$, donde ν representa el número de vehículos movilizados. Se sabe que la empresa dispone de un total de 36 vehículos y que los costes ascienden a 5000€ si no se moviliza ningún vehículo. Se sabe, además, que $C'(\nu) = \nu^2 - 32\nu + 112$ es la derivada de $C(\nu)$.

a) ¿Cuántos vehículos han de movilizarse para minimizar costes? ¿A cuánto ascenderían dichos costes?

b) ¿Para qué número de vehículos movilizados serían máximos los costes? ¿A cuánto ascenderían dichos costes?

Solución:

a) ☛ $\text{Dom}(C) = [0, 36]$

☛ Calculamo la función $C(\nu)$:

$$C(\nu) = \int (\nu^2 - 32\nu + 112)\, d\nu = \frac{\nu^3}{3} - 16\nu^2 + 112\nu + K$$

$$C(0) = 5000 \Longrightarrow 0 - 0 + 0 + K = 5000 \Longrightarrow K = 5000$$

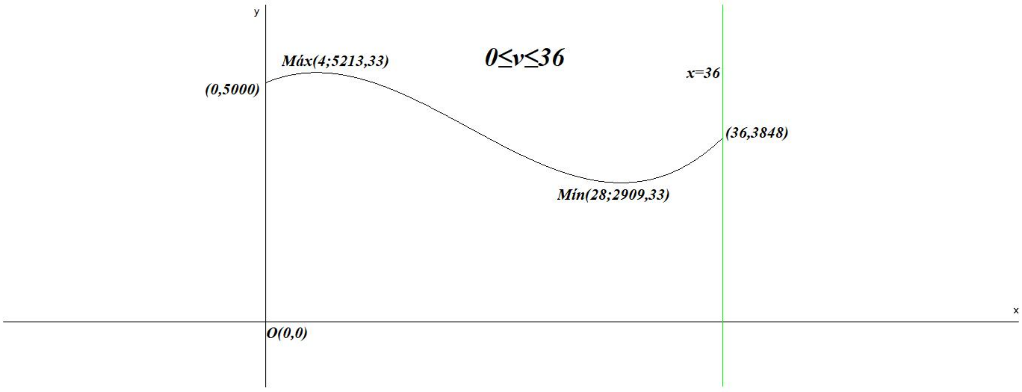
$$C(\nu) = \frac{\nu^3}{3} - 16\nu^2 + 112\nu + 5000$$

☛ $C'(\nu) = \nu^2 - 32\nu + 112 = 0 \Longrightarrow \nu = 4$ y $\nu = 28$.

	$(0, 4)$	$(4, 28)$	$(28, +\infty)$
$C'(\nu)$	$+$	$-$	$+$
$C(\nu)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(0, 4) \cup (28, +\infty)$ y decreciente en $(4, 28)$. Tiene un máximo relativo en el punto $(4; 5213, 33)$ y un mínimo relativo en el $(28; 2909, 33)$ En los extremos del intervalo dominio de la función tenemos $C(0) = 5000$ y $C(36) = 3848$ luego el mínimo relativo también es absoluto y podemos concluir que el menor coste se produce con la circulación de 28 vehículos y asciende a 2909,33€.

b) El máximo relativo es también absoluto y se puede afirmar que se produce cuando están circulando 4 vehículos y es de 5213,33€.



3.5.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.5.3 Dadas las funciones $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ y $g(x) = 2x^2 - 2x - 4$

a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones.

b) ¿Cuáles y de qué tipo (máximo/mínimo relativo/absoluto) son los extremos de ambas funciones?

c) Dibuje la gráfica de ambas funciones, indicando claramente sus puntos de corte con los ejes OX y OY, así como los puntos de corte entre f y g.

d) Calcule el área de la región que queda encerrada entre las funciones f y g.

Solución:

a) Monotonía:

☛ $f(x) = -x^2 - 2x + 8 \Longrightarrow f'(x) = -2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-1, +\infty)$ y creciente en $(-\infty, -1)$. Tiene un máximo relativo en el punto $(-1, 9)$

☛ $f(x) = 2x^2 - 2x - 4 \Longrightarrow f'(x) = 4x - 2 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$. Tiene un mínimo relativo en el punto $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{9}{2}\right)$

b) Resuelto en el apartado anterior.

c) Puntos de corte:

☛ $f(x) = f(x) = -x^2 - 2x + 8$

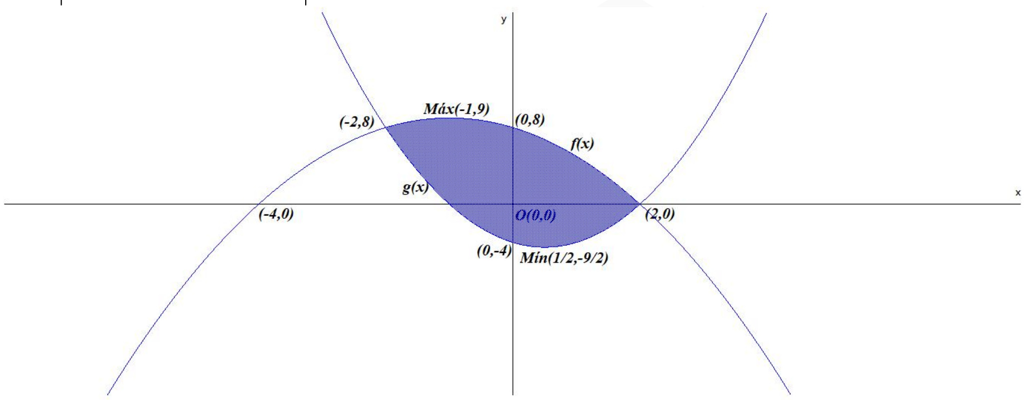
- Con OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 8)$
- Con OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow -x^2 - 2x + 8 = 0 \Longrightarrow (-4, 0)$ y $(2, 0)$

☛ $g(x) = 2x^2 - 2x - 4$

- Con OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, -4)$
- Con OX hacemos $g(x) = 0 \Longrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Longrightarrow (-1, 0)$ y $(2, 0)$

☛ Entre las dos curvas:
$f(x) = g(x) \Longrightarrow -x^2 - 2x + 8 = 2x^2 - 2x - 4 \Longrightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$
Los puntos de corte serían $(-2, 8)$ y $(2, 0)$

d) $S = \left| \int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\, dx \right| = \left| \int (-3x^2 + 12)\, dx \right| = \left| -x^3 + 12x \right]_{-2}^{2} \Big| = |32| = 32\ u^2$



Problema 3.5.4 Se sabe que la evolución del precio del oro en el mercado (P, expresado en €/kg) a lo largo de un mes de 31 días viene dado por la siguiente función:

$$P(d) = \frac{1}{3}d^3 - 15d^2 + 144d + 1500, \quad \text{con} \quad 1 \leq d \leq 31$$

donde d indica el día del mes.

a) ¿Qué día del mes habría que vender el oro para obtener la máxima ganancia? ¿A cuánto ascendería dicha ganancia si se vendiesen 4 kg de oro?

b) ¿Qué día del mes es el peor para vender oro? ¿Cuál sería la ganancia si se vendiesen los 4 kg de oro ese día?

c) Si se viese obligado a vender 1 kg de oro entre los días 20 y 31 del mes y quisiera obtener la máxima ganancia, ¿en qué día lo haría? ¿Cuánto ganaría con la venta?

Solución:

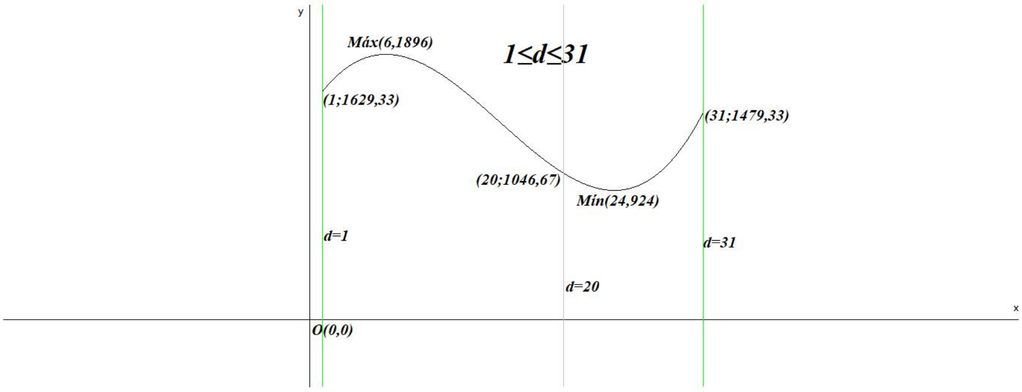
a) $P'(d) = d^2 - 30d + 144 = 0 \Longrightarrow d = 6$ y $d = 24$

	$(0,6)$	$(6,24)$	$(24,31)$
$P'(d)$	$+$	$-$	$+$
$P(d)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(0,6) \cup (24,31)$ y decreciente en el $(6,24)$. Presenta un máximo relativo en el punto $(6,1896)$ y un mínimo relativo en el $(24,924)$.
Además $P(1) = 1629,333333$ y $P(31) = 1479,33$.
Luego la ganancia máxima se produce el día 6 con 1896€/kg·4kg= 7584€.

b) A la vista del apartado anterior el peor día es el día 24 con una ganancia de 924€/kg·4kg= 3696€.

c) $P(20) = 1046,67$€ y $P(31) = 1479,33$€ luego el mejor día sería el 31 con un beneficio de 1479,33€.



3.6. Castilla La Mancha

3.6.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.6.1 Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x \le c \\ -(x-3)^2 + 2 & \text{si } x > c \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = c$?

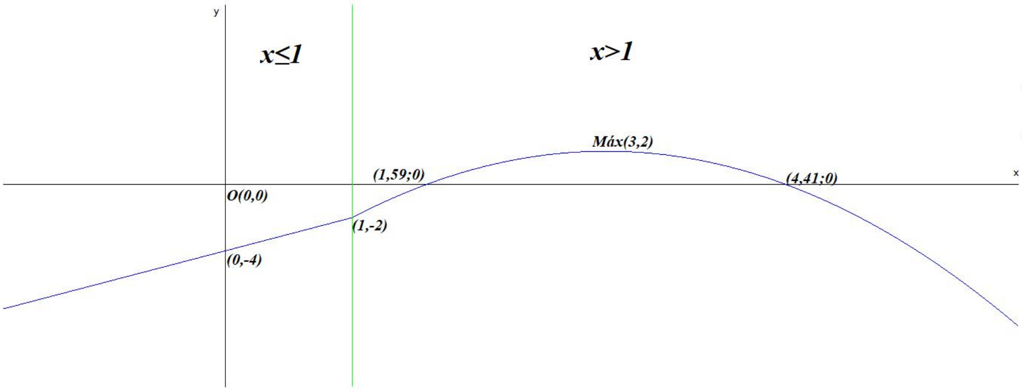
b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $c = 1$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^-} (2x-4) = 2c - 4$ y $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \lim\limits_{x\to c^-} (-(x-3)^2 + 2) = -c^2 + 6c - 7 \Longrightarrow$ $2c - 4 = -c^2 + 6c - 7 \Longrightarrow c^2 - 4c + 3 = 0 \Longrightarrow c = 1$ y $c = 3$.

b) $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x \le 1 \\ -(x-3)^2 + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
La rama $x \le 1$ es una recta que pasa por los puntos $(1,-2)$ y $(0,-4)$
La rama $x > 1$ es una parábola que corta al eje OX en los puntos $-(x-3)^2 + 2 = 0 \Longrightarrow$ $(1,59;0)$ y $(4,41;0)$
$f'(x) = -2(x-3) = 0 \Longrightarrow x = 3$ y $f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(3) = -2 < 0 \Longrightarrow (3,2)$ es un

máximo relativo.
Con estos datos representamos gráficamente:



Problema 3.6.2 La función $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ tiene un mínimo en el punto $(-1, 0)$ y corta al eje OY en el punto de ordenada $y = 1$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c.
Solución:

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c \Longrightarrow f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 1 \Longrightarrow c = 1 \\ f'(-1) = 0 \Longrightarrow -4a - 2b = 0 \\ f(-1) = 0 \Longrightarrow a + b + c = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{array}\right.$$

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

Comprobamos que $x = -1$ es un mínimo: $f'(x) = 4x^3 - 4x \Longrightarrow f''(x) = 12x^2 - 4 \Longrightarrow f''(-1) = 8 > 0 \Longrightarrow (-1, 0)$ es un mínimo relativo.

Problema 3.6.3 Se considera la función $f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} (x + t + 1)^2 & \text{si} & x < -1 \\ 1 & \text{si} & x = -1 \\ -x^2 + (t + 2)x + 5 & \text{si} & x > -1 \end{array}\right.$

a) Halla el valor de t para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$.

b) Para $t = 0$; calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, \infty)$.

c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-1, \infty)$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} ((x + t + 1)^2) = t^2$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (-x^2 + (t + 2)x + 5) = -t + 2 \Longrightarrow t^2 = -t + 2 \Longrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Longrightarrow t = 1$ y $t = -2$ esta última no es válida.

Si $t = 1$: $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} ((x + 2)^2) = 1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (-x^2 + 3x + 5) = 1 \\ f(-1) = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow f$ continua en $x = -1$

Si $t = 2$: $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} ((x - 1)^2) = 4 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (-x^2 + 5) = 4 \\ f(-1) = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow f$ no es continua en $x = -1$

b) Si $t = 0 \Longrightarrow f(x) = -x^2 + 2x + 5 \Longrightarrow f'(x) = -2x + 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$

	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-1,1)$ y decreciente en el $(1,\infty)$ Presenta un máximo relativo en el punto de abscisa $x = 1$. $(1,6)$

c) Resuelto en el apartado anterior.

Problema 3.6.4 El número de socios de una protectora de animales durante los cinco primeros años de su existencia viene dado por la siguiente función $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ con $x =$ años y $(1 \le x \le 5)$.

a) ¿En qué intervalos aumenta el número de socios? ¿Y en cuáles disminuye?

b) ¿Cuándo hay mayor número de socios y cuántos son?

c) ¿En qué año son menos socios y cuántos hay?

Solución:

a) $P'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = 3$

	$(1,3)$	$(3,5)$
$P'(x)$	$-$	$+$
$P(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(1,3)$ y creciente en el $(3,5)$ Presenta un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = 3$. $(3,4)$
El número de socios disminuye de uno a tres años y aumenta de tres a cinco años.

b) Los valores máximos están en los extremos del intervalo $[1,5]$. $P(1) = 8$ y $P(5) = 24$ El mayor número de socios es en el año 5 con 24 de ellos.

c) El menor número de socios es de 4 en el año 3. (obsérvese que el año 1 tiene 5 socios y la función decrece hasta el año 3)

3.6.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.6.5 Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 2t & \text{si} & x < -1 \\ t + 1 & \text{si} & -1 \le x \le 1 \\ -x^3 + 4x^2 + 3x - 1 & \text{si} & x > 1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = -1$?

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1,\infty)$.

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(1,\infty)$.

Solución:

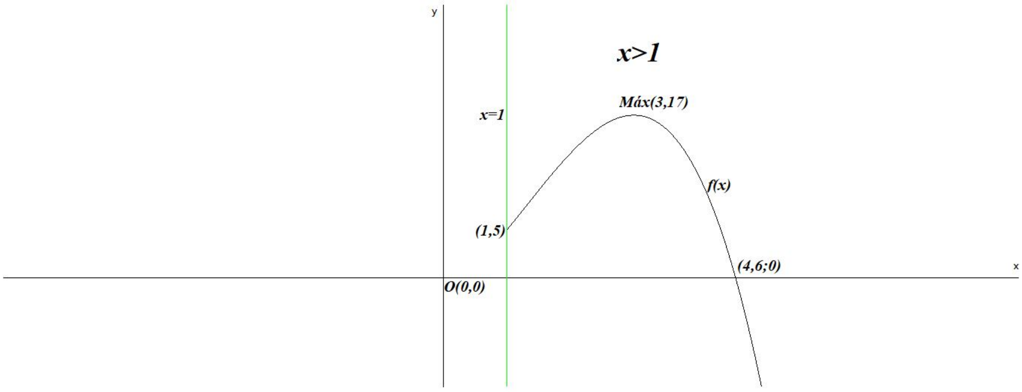
a) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}(2x + 2t) = -2 + 2t$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}(t + 1) = t + 1$ y $f(-1) = t + 1 \Longrightarrow -2 + 2t = t + 1 \Longrightarrow t = 3$.

b) $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 3x - 1 \Longrightarrow f'(x) = -3x^2 + 8x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$ (no vale, no está en la rama) y $x = 3$.

	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(1,3)$ y decreciente en el $(3,\infty)$ Presenta un máximo relativo en el punto de abscisa $x = 3$. $(3,17)$

c) Contestado en el apartado anterior.



Problema 3.6.6 La función $f(x) = ax^3 + bx + c$ presenta un mínimo en el punto $(2,1)$ y la pendiente de la recta tangente en $x = 0$ es -12. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c.
Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 3ax^2 + b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(2) = 1 \Longrightarrow 8a + 2b + c = 1 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12a + b = 0 \\ f'(0) = -12 \Longrightarrow b = -12 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -12 \\ c = 17 \end{array}\right.$$

$$f(x) = x^3 - 12x + 17$$

Comprobamos que $x = 2$ es un mínimo: $f'(x) = 3x^2 - 12 \Longrightarrow f''(x) = 6x \Longrightarrow f''(2) = 12 > 0 \Longrightarrow$ $(2,1)$ es un mínimo relativo.

Problema 3.6.7 Se considera la función $f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} (x+2)^2 + t & \text{si} & x < -1 \\ 3 & \text{si} & -1 \le x \le 2 \\ x^2 - 6x + 9 + t & \text{si} & x > 2 \end{array}\right.$

a) ¿Existe un valor de t para el que la función $f(x)$ es continua en $x = -1$ y en $x = 2$?.

b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $t = 0$.

Solución:

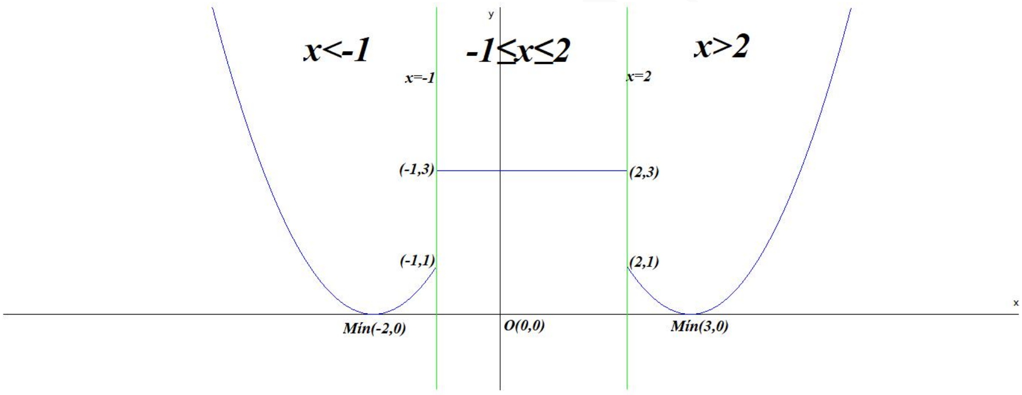
a) En $x = -1$:
$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} ((x+2)^2 + t) = t + 1$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} 3 = 3$ y $f(-1) = 3 \Longrightarrow$ $t + 1 = 3 \Longrightarrow t = 2 \Longrightarrow t = 2$.

En $x=2$:
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} 3 = 3$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2-6x+9+t) = 1+t$ y $f(2)=3 \Longrightarrow$ $t+1=3 \Longrightarrow t=2 \Longrightarrow t=2$.

b) $t=0 \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si} \quad x<-1 \\ 3 & \text{si} \quad -1\le x\le 2 \\ x^2-6x+9 & \text{si} \quad x>2 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 2(x+2) & \text{si} \quad x<-1 \\ 0 & \text{si} \quad -1\le x\le 2 \\ 2x-6 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

La rama $x<-1$ tiene un punto de corte con el eje OX en $(x+2)^2=0 \Longrightarrow (-2,0)$. Tiene un extremo relativo en $f'(x)=2(x+2)=0 \Longrightarrow (-2,0)$ y como $f''(x)=2 \Longrightarrow f''(2)=2>0$ es un mínimo relativo. Tenemos también $f(-1)=1 \Longrightarrow (-1,1)$.
La rama $-1\le x\le 2$ es una recta desde el punto $(-1,3)$ al $(2,3)$

La rama $x>2$ tiene un punto de corte con el eje OX en $x^2-6x+9=0 \Longrightarrow (3,0)$. Tiene un extremo relativo en $f'(x)=2x-6=0 \Longrightarrow (3,0)$ y como $f''(x)=2 \Longrightarrow f''(3)=2>0$ es un mínimo relativo. Tenemos también $f(2)=1 \Longrightarrow (2,1)$.
Representación gráfica:



Problema 3.6.8 El tiempo de publicidad (en minutos) en una emisora de radio a lo largo de la semana viene dado por la siguiente función $S(x) = x^3 - \dfrac{21}{2}x^2 + 30x + 36$ con $x =$ días y $(1 \le x \le 7)$.

a) ¿Cuántos minutos de publicidad emite el tercer día?

b) ¿Durante qué día se emite más publicidad y cuánto tiempo?

c) ¿Qué día emitieron menos publicidad? ¿Cuántos minutos?

Solución:

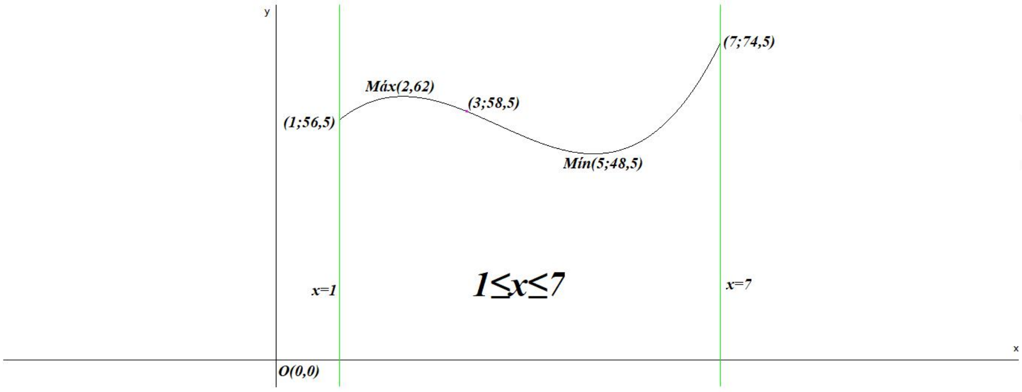
a) $S(3) = 58,5$ minutos.

b) $S'(x) = 3x^2 - 21x + 30 = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $x = 5$.

	$(1,2)$	$(2,5)$	$(5,7)$
$S'(x)$	$+$	$-$	$+$
$S(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(2,5)$ y creciente en el $(1,2)\cup(5,7)$ Presenta un mínimo relativo en el punto $(5;48,5)$ y un máximo relativo en el $(2,62)$
En los extremos del intervalo $[1,7]$ tenemos: $S(1)=56,5$ y $S(7)=74,5$.
El máximo de publicidad se emite el día 7 con 74,5 minutos.

c) El mínimo de publicidad se emite el día 5 con 48,5 minutos.



3.7. Castilla León

3.7.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.7.1 Un estudio realizado por el Centro Nacional de Ciberseguridad español ha revelado que el número de dispositivos móviles hackeados en España viene determinado, en millones de aparatos, por la función $f(t) = \dfrac{t^2+15}{(t+1)^2}$, donde t indica el tiempo medido en años, siendo $t = 0$ el tiempo que corresponde al año 2005.

a) ¿Cuál es el número inicial de dispositivos hackeados?

b) Calcular el número mínimo de dispositivos hackeados, ¿En qué año se alcanza ese mínimo?

c) Calcular el número de dispositivos que habrá hackeados en España a largo plazo.

Solución:

a) $f(0) = 15 \Longrightarrow 15000000$ aparatos hackeados en el año 2005.

b) $f'(t) = \dfrac{2(t-15)}{(t+1)^3} = 0 \Longrightarrow t = 15$
(Observamos que el denominador no se anula en el dominio de la función $[0, \infty)$)

	$(0, 15)$	$(15, \infty)$
$f'(t)$	$-$	$+$
$f(t)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(0, 15)$ y creciente en el $(15, \infty)$ con un mínimo relativo en el punto $(15; 0,9375)$. El mínimo se produce el año 2020 con 937500 aparatos hackeados.

c) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^2+15}{(t+1)^2} = 1 \Longrightarrow\Longrightarrow$ el número de aparatos hackeados se estabilizará a largo plazo en 1000000 de dispositivos.

Problema 3.7.2 Sabiendo que la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, si $0 \le x \le 60$ pasa por el punto $(0, 20)$ y que alcanza un máximo de 36 en el punto de abscisa $x = 40$, se pide

a) Determinar a, b y c. Justificar la respuesta.

b) Calcular el área de la región del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 60$.

Solución:

a) $f'(x) = 2ax + b$:

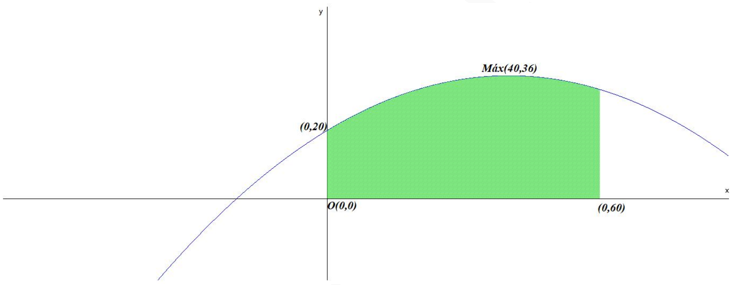
$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 20 \Longrightarrow c = 20 \\ f(40) = 36 \Longrightarrow 1600a + 40b + c = 36 \\ f'(40) = 0 \Longrightarrow 80a + b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -\dfrac{1}{100} \\ b = \dfrac{4}{5} \\ c = 20 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$f(x) = -\frac{1}{100}x^2 + \frac{4}{5}x + 20$$

Comprobamos que $x = 40$ es un máximo:
$f'(x) = -\dfrac{1}{50}x + \dfrac{4}{5} = 0 \Longrightarrow x = 40$ y $f''(x) = -\dfrac{1}{50} \Longrightarrow f''(40) = -\dfrac{1}{50} < 0 \Longrightarrow x = 40$ es un máximo.

b) Calculamos los puntos de corte de $f(x)$ con OX en el intervalo $[0, 60]$
$f(x) = -\dfrac{1}{100}x^2 + \dfrac{4}{5}x + 20 = 0 \Longrightarrow x = -20$ y $x = 100$. Los dos valores están fuera del intervalo, luego solo hay una superficie a calcular S en $[0, 60]$:

$$S = \left|\int_0^{60} \left(-\frac{1}{100}x^2 + \frac{4}{5}x + 20\right) dx\right| = \left|-\frac{x^3}{300} + \frac{2x^2}{5}x + 20x\right]_0^{60}\right| = |1920| = 1920\ u^2$$



Problema 3.7.3 Justificar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: la función $f(x) = -x^3$ tiene un máximo relativo en el punto $x = 0$.
Solución :
$f'(x) = -3x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $f''(x) = -6x \Longrightarrow f''(0) = 0 \Longrightarrow x = 0$ no es un extremo relativo, es un punto de inflexión ya que $f'''(0) = -6 \neq 0$.
En $x = 0$ la función pasa de decrecer a decrecer, la función es decreciente en todo el dominio. $(\text{Dom}(f) = \mathbb{R})$.

3.7.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.7.4 El consumo (medido en litros/hora) de combustible, en una explotación industrial durante un turno de 8 horas, se puede expresar por la función:

$$f(t) = \left\{\begin{array}{lll} -t^2 + 6t + 3 & \text{si} & 0 \le t \le 2 \\ -t + a & \text{si} & 2 < t \le 8 \end{array}\right.$$

donde t representa el tiempo desde el inicio del turno, medido en horas.

a) Establecer el valor de a para que el consumo sea continuo a lo largo de todo el turno. ¿A partir de la segunda hora cuánto cambia el consumo por cada hora que pasa?

b) ¿En qué momento se alcanza el máximo consumo? ¿Cuánto se está consumiendo en ese momento? ¿En qué periodo de tiempo el consumo supera los 8 litros/hora?

Solución:

a) Las dos ramas son continuas, hay que imponer la continuidad en $t = 2$:

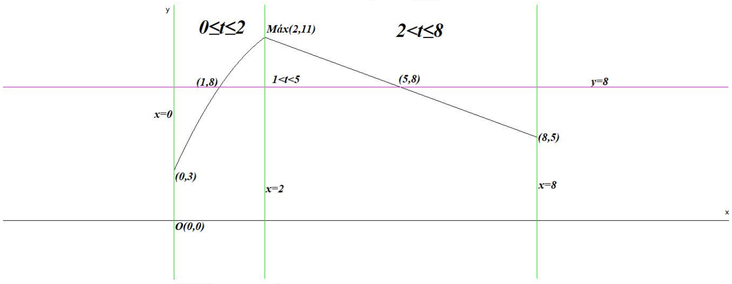
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 2^-} f(t) = \lim\limits_{t\to 2^-}(-t^2+6t+3) = 11 \\ \lim\limits_{t\to 2^+} f(t) = \lim\limits_{t\to 2^+}(-t+a) = -2+a \\ f(2) = 11 \end{array}\right. \Longrightarrow 11 = -2+a \Longrightarrow a = 13$$

A partir de la segunda hora $f(t) = -t+13 \Longrightarrow f'(t) = -1 \Longrightarrow f$ es decreciente en todo el intervalo $(2, 8)$, es consumo se va haciendo más pequeño.

b) Si $0 \le t \le 2$ la función es $f(t) = -t^2+6t+3 \Longrightarrow f'(t) = -2t+6 = 0 \Longrightarrow t = 3$ fuera de la rama y no hay extremos relativos. En el intervalo $(0, 2) \Longrightarrow f'(t) > 0 \Longrightarrow f$ es creciente.
Tenemos $f(0) = 3$ y $f(2) = 11$
Si $2 < t \le 8$ la función es $f(t) = -t+11$ siempre decreciente con $f(2) = 11$ y $f(8) = 3$
El máximo consumo se daría a las 2 horas con 11 litros/hora.

$$f(t) = 8 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -t^2+6t+3 = 8 \Longrightarrow t = 1\ t = 5\,(\text{no vale}) \\ -t+13 = 8 \Longrightarrow t = 5 \end{array}\right. \Longrightarrow (1, 5)$$

El consumo es superior a 8 litros/hora desde la hora 1 hasta la hora 5.



Problema 3.7.5 El número de usuarios de una estación de metro a lo largo de un domingo evoluciona según la función $N(x) = -2x^3+75x^2-600x+2000$ con $0 \le x < 24$, donde x indica la hora del día.

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento del número de usuarios de la estación a lo largo del domingo.

b) ¿A qué hora el número de usuarios es máximo y a qué hora es mínimo? Calcular el número de usuarios correspondiente a dichas horas.

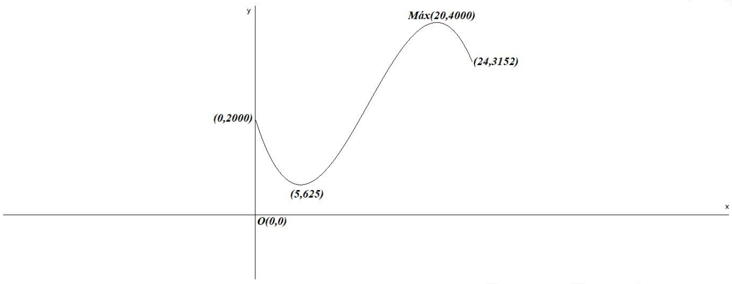
Solución:

a) $N'(x) = -6x^2 + 150x - 600 = 0 \Longrightarrow x = 5$ y $x = 20$

	$(0,5)$	$(5,20)$	$(20,24)$
$N'(x)$	$-$	$+$	$-$
$N(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente para el número de viajeros en el intervalo horario $(0,5) \cup (20,24)$ y creciente en el $(5,20)$

b) El máximo de viajeros se produce a las 20 horas con $f(20) = 4000$ usuarios y el mínimo a las 5 horas con $f(5) = 625$ usuarios.
(Observamos que $f(0) = 2000$ y $f(24) = 3152$ no influyen en el estudio del máximo o mínimo, respectivamente)



Problema 3.7.6 Dada $f(x) = \dfrac{ax^2+1}{5x}$. Dar un valor de a para que en $x = 1$ haya un extremo relativo de $f(x)$.
Solución :
$f'(x) = \dfrac{ax^2-1}{5x^2} = 0 \Longrightarrow ax^2 - 1 = 0$ y $f'(1) = 0 \Longrightarrow a - 1 = 0 \Longrightarrow a = 1$

3.8. Cataluña

3.8.1. Convocatoria Ordinaria-Serie 2

Problema 3.8.1 Experimentalmente se ha comprobado que la producción de un determinado tipo de fruta que se cultiva en invernaderos depende de la temperatura, según la función $f(x) = -x^2 + 46x - 360$, donde x representa la temperatura del invernadero en grados Celsius y $f(x)$ es la producción anual en centenares de kilogramos por hectárea. El precio de venta de la fruta se mantiene estable a 1,2 euros por cada kilogramo. vendidas.

a) Determine el intervalo de temperaturas entre las que hay que mantener el invernadero para que haya producción de fruta. Calcule los ingresos anuales por hectárea si se mantiene el invernadero a 20°C de temperatura.

b) ¿A qué temperatura se obtiene la producción máxima de fruta? ¿Qué ingresos por hectárea se obtienen en este caso?

Solución:

a) Hay que estudiar cuando $f(x) > 0$:
$f(x) = -x^2 + 46x - 360 = 0 \Longrightarrow x = 10$ y $x = 36$

	$(0,10)$	$(10,36)$	$(36,\infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

La temperatura tiene que estar entre 10°C y 36°C.
Si $x = 20 \Longrightarrow f(20) = 160 \Longrightarrow$ 16000kgs por hectárea.
Se generan unos ingresos por venta de $16000 \cdot 1,2 = 19200$€

b) $f'(x) = -2x + 46 = 0 \Longrightarrow x = 23$ y $f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(23) = -2 < 0 \Longrightarrow x = 23$ es un máximo relativo (en nuestro caso absoluto)
Para tener una producción máxima la temperatura del invernadero debe de ser 23°C con una producción de $f(23) = 16900$kgs por hectárea.
Se generan unos ingresos por venta de $16900 \cdot 1,2 = 20280$€

Problema 3.8.2 Un grupo de biólogos está estudiando un cultivo de bacterias. La población de estas bacterias (en centenares) viene dada por la función $P(t) = a + \dfrac{12t}{t^2+b}$, donde a y b son constantes positivas reales y $t \geq 0$ es el tiempo transcurrido en minutos. Se sabe que en el instante inicial del estudio la población de bacterias era de 6 centenares y que el valor máximo de población se ha alcanzado al cabo de 2 minutos de haber iniciado el estudio.

a) Encuentre los valores de las constantes a y b.

b) Calcule la población máxima de bacterias y estudie su comportamiento a largo plazo, es decir, hacia qué valor se estabiliza el número de bacterias.

Solución:

a) $P'(t) = -\dfrac{12(t^2-b)}{(t^2+b)^2}$

$$\begin{cases} P(0) = a + \dfrac{0}{b} = 6 \Longrightarrow a = 6 \\ P'(2) = -\dfrac{12(4-b)}{(4+b)^2} = 0 \Longrightarrow 4 - b = 0 \Longrightarrow b = 4 \end{cases}$$

Comprobamos que en $t = 2$ la función $P(t) = 6 + \dfrac{12t}{t^2+4}$ tiene un máximo:
$P'(t) = -\dfrac{12(t^2-4)}{(t^2+4)^2} \Longrightarrow P''(t) = \dfrac{24t(t^2-12)}{(t^2+4)^3} \Longrightarrow P''(2) = -\dfrac{3}{4} < 0 \Longrightarrow x = 2$ es un máximo.

b) La población es máxima cuando $t = 2 \Longrightarrow P(2) = 9 \Longrightarrow$ 900 bacterias.
$\lim\limits_{t\to\infty} \left(6 + \dfrac{12t}{t^2+4}\right) = 6 \Longrightarrow$ la población se estabiliza en 600 bacterias.

Problema 3.8.3 En los modelos matemáticos que se utilizan para describir la evolución de una enfermedad, se denomina R_0 al número medio de nuevas infecciones que cada persona infectada provoca en la población. Cuando este número es inferior a 1, cada individuo infectado transmite la enfermedad, de media, a menos de una persona y la enfermedad tiende a desaparecer. En cambio, si R_0 es mayor que 1, la enfermedad se extiende y se produce una epidemia. Cuando se descubre una vacuna efectiva contra la enfermedad, se puede controlar la epidemia vacunando solo a una proporción p de la población. Es lo que se conoce como inmunidad de grupo. Efectivamente, una vez vacunada una proporción $p \in (0,1)$ de la población, la nueva R_0, que se denomina efectiva y se denota con R_e, es el producto de la R_0 original por la proporción de individuos que no están vacunados, $1 - p$. Y se consigue controlar la epidemia si la R_e es inferior a 1.

a) En el caso del sarampión, se estima que $R_0 = 15$. Si se analiza una población con un porcentaje de individuos vacunados del 95 %, según el modelo descrito, ¿hay riesgo de que se produzca una epidemia de sarampión en esta población?

b) En el caso concreto de la denominada gripe española del 1918, se estima que $R_0 = 4$. Calcule qué porcentaje de población se tendría que haber vacunado, como mínimo, para parar la epidemia de esta enfermedad.

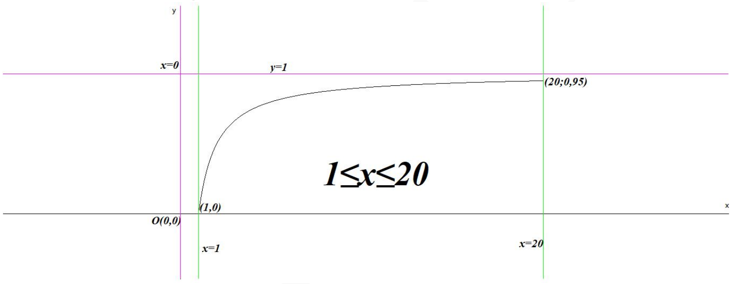
c) Exprese, en general, el umbral de población mínima que debe vacunarse en función del valor R_0 de una enfermedad. Realice un esbozo de esta función para los valores de R_0 entre 1 y 20.

Solución

a) $R_e = R_0(1-p) = 15(1-0,95) = 15 \cdot 0,05 = 0,75 < 1 \Longrightarrow$ no hay riesgo de que se produzca una epidemia de sarampión.

b) $Re = 4(1-p) < 1 \Longrightarrow 4 - 4p < 1 \Longrightarrow -4p < -3 \Longrightarrow 4p > 3 \Longrightarrow p > \dfrac{3}{4} \simeq 0,75.$
Luego el porcentaje de individuos vacunados debe ser mayor del 75 %.

c) $R_0(1-p) < 1 \Longrightarrow 1 - p < \dfrac{1}{R_0} \Longrightarrow -p < \dfrac{1}{R_0} - 1 \Longrightarrow p > 1 - \dfrac{1}{R_0}$
Hacemos $x = R_0$ y será $p = f(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$ con $1 \le x \le 20$:
La función corta al eje $OX \Longrightarrow f(x) = 0 \Longrightarrow (1,0)$ y no corta al eje OY.
$f(1) = 0$ y $f(20) = \dfrac{19}{20} = 0,95$
$f'(x) = \dfrac{1}{x^2} \neq 0 \Longrightarrow$ no tiene extremos relativos. Como $f'(x) > 0$ en todo el dominio de la función, la función es siempre creciente.
Representación gráfica:



3.8.2. Convocatoria Ordinaria-Serie 5

Problema 3.8.4 El valor de un producto electrónico, en función del número de meses que hace que está a la venta, t, viene dado por la función $f(t) = -(t+25)(t-75)$.

a) Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(t)$. ¿En qué momento el producto alcanzará el valor máximo? ¿Cuál es ese valor máximo?.

b) Se sabe que el producto dejará de comercializarse cuando llegue a un valor de 475€. ¿En qué momento dejará de comercializarse?

Solución:

a) $f(t) = -(t+25)(t-75) = -t^2 + 50t + 1875 \Longrightarrow f'(t) = -2t + 50 = 0 \Longrightarrow t = 25$

	$(0,25)$	$(25,\infty)$
$f'(t)$	$+$	$-$
$f(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(0, 25)$ y decreciente en el $(25, \infty)$ con un máximo relativo en $t = 25$ meses con $f(25) = 2500$€

b) $f(t) = 475 \Longrightarrow -t^2 + 50t + 1400 = 0 \Longrightarrow t = -20$(no válida) y $t = 70$ meses.
Se dejará de comercializar el producto a partir de 70 meses.

Problema 3.8.5 Una fábrica de vehículos produce coches de un modelo llamado Paradís y los vende a 58000€. Se sabe que los costes mensuales de producción vienen dados por la función $C(x) = \frac{1}{2}x^2 - 64x + 4704$ (en miles de euros), donde x denota el número de coches que se fabrican mensualmente.

a) Suponiendo que se venden todos los coches que se fabrican, verifique que la función de beneficios es $B(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 122x - 4704$ (en miles de euros).

b) Determine el número de coches que hay que fabricar mensualmente para no tener pérdidas. ¿Para qué número de unidades producidas se obtiene el beneficio máximo y cuál es ese beneficio máximo?

c) Se quiere aumentar el precio de venta por unidad, de forma que el beneficio máximo se obtenga con 130 unidades (la función que da el coste mensual en miles de euros no varía). ¿Cuál tiene que ser el nuevo precio de venta del coche?

Solución:

a) La función ingresos sería $I(x) = 58x$ y la función beneficio $B(x) = I(x) - C(x) = 58x - \left(\frac{1}{2}x^2 - 64x + 4704\right) = -\frac{1}{2}x^2 + 122x - 4704$

b) $B(x) \geq 0$:
$B(x) = 0 \Longrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 122x - 4704 = 0 \Longrightarrow x = 48$ y $x = 196$

	$(0, 48)$	$(48, 196)$	$(196, \infty)$
$B(x)$	$-$	$+$	$-$

Para no entrar en pérdidas se deben fabricar entre 48 y 196 vehículos.

$B'(x) = -x + 122 = 0 \Longrightarrow x = 122$, $B''(x) = -1 \Longrightarrow B''(122) = -1 < 0 \Longrightarrow x = 122$ coches es un máximo relativo con un beneficio de $B(122) = 2738 \Longrightarrow 2738000$€

c) Sea λ el nuevo precio de venta de cada automóvil entonces $I(x) = \lambda x$ y $B(x) = \lambda x - \left(\frac{1}{2}x^2 - 64x + 4704\right) = -\frac{1}{2}x^2 + (\lambda + 64)x - 4704$
$B'(x) = -x + (\lambda + 64) = 0 \Longrightarrow x = \lambda + 64 = 130 \Longrightarrow \lambda = 66 \Longrightarrow$ el nuevo precio de cada coche debe ser de 66000€

Problema 3.8.6 Considere la función $f(x) = e^{3x}$.

a) Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de esta función en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Obtenga la ecuación de esta recta tangente.

Solución

a) $f'(x) = 3e^{3x} \Longrightarrow m \Longrightarrow m = f'(0) = 3$

b) $f(0) = 1 \Longrightarrow (0, 1)$ es el punto de tangencia y la tangente es $y - 1 = 3(x - 0) \Longrightarrow y = 3x + 1$.

3.8.3. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.8.7 El coste de producción (en euros) de x unidades de un producto determinado viene dado por la función $C(x) = 0,02x^2 + 3x + 100$. Estas unidades se ponen a la venta y el precio de venta unitario (en euros) depende del número de unidades producidas x. Concretamente, viene dado por la función $p(x) = 47 - 0,06x$. Se supone que se venden todas las unidades que se producen.

a) Determine la función que da los beneficios obtenidos en función del número de unidades producidas x.

b) Determine cuántas unidades hay que producir para obtener el máximo beneficio y diga cuál es ese beneficio.

Solución:

a) $B(x) = xp(x) - C(x) = 47x - 0,06x^2 - (0,02x^2 + 3x + 100) = -0,08x^2 + 44x - 100$

b) $B'(x) = -0,16x + 44 = 0 \Longrightarrow x = 275$
$B''(x) = -0,16 \Longrightarrow B''(275) = -0,16 < 0 \Longrightarrow x = 275$ es un máximo relativo, en nuestro caso también es absoluto.
Se tienen que producir 275 unidades con un beneficio de $B(275) = 5950$€

Problema 3.8.8 El Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) tiene previsto montar una exposición. Se estima que el número de visitantes semanales que recibirá la exposición, expresado en decenas de personas, viene dado por la función $f(x) = \dfrac{240x}{x^2 - 2x + 4}$. donde $x \geq 1$ representa el tiempo, expresado en semanas, que hace que la exposición está abierta al público.

a) ¿Cuántas personas irán a ver la exposición la primera semana? Calcule la tasa de variación media del número de visitantes entre la semana 1 y la semana 4.

b) ¿Qué semana se prevé que irá más gente a ver la exposición? ¿Cuántos visitantes se estima que irán aquella semana?

Solución:

a)
- ☛ $f(1) = 80 \Longrightarrow 800$ visitantes.
- ☛ $TVM[1,4] = \dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \dfrac{80 - 80}{3} = 0$
  En ambas semanas se espera un mismo número de visitantes.

b) $f'(x) = -\dfrac{240(x^2 - 4)}{(x^2 - 2x + 4)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$, la solución negativa no es válida.

	$(1,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

El número de visitante es creciente hasta la segunda semana donde se produce el máximo y decrece pasada dicha semana.
El máximo número de visitantes se produce en la semana 2 con un número de visitantes $f(2) = 120 \Longrightarrow 1200$ visitantes.

Problema 3.8.9 Un inversor se da cuenta de que en el momento actual sus acciones tienen unas pérdidas de 2.000€. Su asesor financiero tiene una previsión del valor de las acciones para los próximos 30 días. Le dice que el valor de las acciones ya ha empezado a aumentar y que dentro de pocos días dejará de tener pérdidas. Según las previsiones, durante los próximos 10 días el valor de las acciones crecerá; del día 10 al día 20 los beneficios disminuirán, y a partir de ese día los beneficios volverán a crecer. El asesor también le dice al inversor que la previsión de los beneficios para los próximos 30 días tiene como modelo la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, donde $x \in [0, 30]$.

a) Calcule los valores de los parámetros a, b y c.

b) Si el inversor quiere vender sus acciones durante esos 30 días, ¿cuál es el día en el que obtendrá más beneficios por la venta? ¿Qué beneficios obtendrá?

Solución

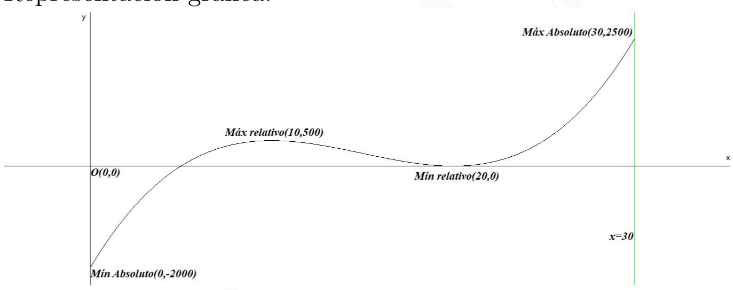
a) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = -2000 \Longrightarrow c = -2000 \\ f'(10) = 0 \Longrightarrow 300 + 20a + b = 0 \\ f'(20) = 0 \Longrightarrow 1200 + 40a + b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -45 \\ b = 600 \\ c = -2000 \end{array}\right.$$

$$f(x) = x^3 - 45x^2 + 600x - 2000$$

b) Según el planteamiento del problema, el día 10 es el máximo relativo con un beneficio de $f(10) = 500$€, pero el día 30 tiene un beneficio de $f(30) = 2500$€ y sería el máximo absoluto en el intervalo $[0, 30]$. Interesa vender el día 30.

Representación gráfica:



3.9. Comunidad Valenciana

3.9.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.9.1 Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{(x+1)^2}$

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales, si existen.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Solución:

a) El denominador se anula en $x = -1 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, -2)$
Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow (-2, 0)$ y $(1, 0)$

b) Asíntotas:

- ☛ Verticales: $x = -1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2 + x - 2}{(x+1)^2} = \left[\dfrac{-2}{0^+}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^2 + x - 2}{(x+1)^2} = \left[\dfrac{-2}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

- ☛ Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x - 2}{(x+1)^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - 2}{(x+1)^2} = 1$$

- ☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales

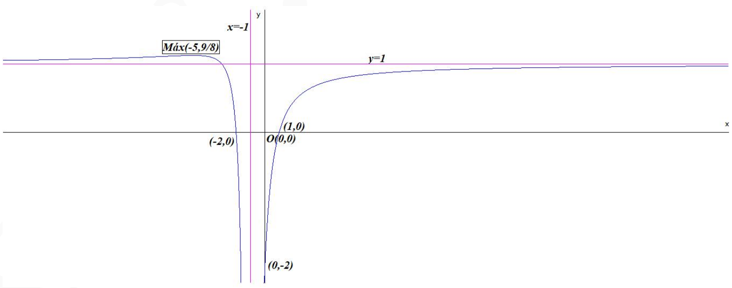
c) $f'(x) = \dfrac{x+5}{(x+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = -5.$

	$(-\infty, -5)$	$(-5, -1)$	$(-1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función decrece en el intervalo $(-5, -1)$ y crece en el intervalo $(-\infty, -5) \cup (-1, \infty)$.

d) La función tiene un máximo local en el punto $\left(-5, \dfrac{9}{8}\right)$ y no tiene mínimos locales.

e) Gráfica:



Problema 3.9.2 En una empresa se ha comprobado que sus beneficios están relacionados con su inversión en publicidad según la función $B(x) = 50000 + 40x - \left(\dfrac{x}{10}\right)^2$, donde x es la inversión en publicidad (≥ 0) y $B(x)$ es el beneficio obtenido, ambos en euros.

a) Calcula la cantidad invertida en publicidad que produce un beneficio máximo. ¿Cuál es dicho beneficio máximo?

b) Calcula los intervalos para la inversión en publicidad en los que los beneficios crecen o decrecen a medida que se invierte en publicidad.

c) ¿Existe un valor para la inversión en publicidad a partir del cual los beneficios obtenidos serían menores que si no se invirtiera nada en publicidad? En caso afirmativo, determínalo.

Solución:

a) $B'(x) = 40 - \dfrac{x}{50} = 0 \Longrightarrow x = 2000$. Recurrimos a la segunda derivada $B''(x) = -\dfrac{1}{50} \Longrightarrow$ $\Longrightarrow B''(2000) = -\dfrac{1}{50} < 0 \Longrightarrow x = 2000$€ es un máximo relativo. El beneficio sería de $B(2000) = 90000$€

b) La función crece en el intervalo $(0, 2000)$ $(B'(x) > 0 \nearrow)$ y decrece en el $(2000, \infty)$ $(B'(x) < 0 \searrow)$

c) Si no invierten nada $x = 0 \Longrightarrow B(0) = 50000$€
$B(x) < 50000 \Longrightarrow 50000 + 40x - \left(\dfrac{x}{10}\right)^2 < 50000 \Longrightarrow 40x - \left(\dfrac{x}{10}\right)^2 < 0 \Longrightarrow x\left(40 - \dfrac{x}{100}\right) < 0$
$x\left(40 - \dfrac{x}{100}\right) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 4000$

	$(0, 4000)$	$(4000, \infty)$
$B(x)$	$+$	$-$

Luego a partir de 4000€ de inversión el beneficio es menor al de no haber invertido nada.

3.9.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.9.3 Se considera la función $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1}$

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales, si existen.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Solución:

a) El denominador se anula en $x^2 - x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Longrightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$

Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 4)$
Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0 \Longrightarrow \left(-\dfrac{2}{3}, 0\right)$ y $(2, 0)$

b) Asíntotas:

☛ Verticales:

- $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,6180$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^-} \dfrac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1} = \left[\dfrac{-0,382}{0^+}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^+} \dfrac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1} = \left[\dfrac{-0,382}{0^-}\right] = +\infty \end{array}\right.$$

- $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^-} \dfrac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1} = \left[\dfrac{-2{,}6180}{0^-}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^+} \dfrac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1} = \left[\dfrac{-2{,}6180}{0^+}\right] = -\infty \end{array}\right.$$

☛ Horizontales: $y = 3$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1} = 3$$

☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales

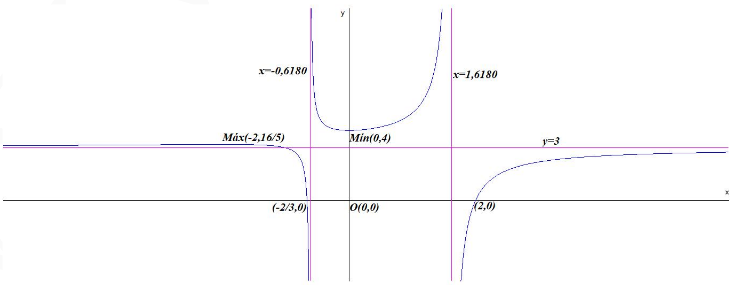
c) $f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x^2-x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -2$.

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,\infty)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función decrece en el intervalo $\left(-2, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ y crece en el intervalo $(-\infty,-2) \cup \left(0, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$.

d) La función tiene un máximo local en el punto $\left(-2, \dfrac{16}{5}\right)$ y un mínimo local en $(0,4)$.

e) Gráfica:



Problema 3.9.4 Una máquina está productiva durante un año desde su compra. Se sabe que el rendimiento (en porcentaje) que tiene la máquina x meses después de su compra viene dado por la función

$$f(x) = \frac{1}{10}\left(800 + 15x + 6x^2 - x^3\right)$$

para cualquier x entre 0 y 12.

a) ¿Es el rendimiento que tiene la máquina un mes después de su compra superior al rendimiento que tiene dos meses después de su compra?

b) ¿Tras cuántos meses después de su compra alcanza la máquina su mayor rendimiento?; ¿cuál es dicho rendimiento máximo?

c) A lo largo del año, ¿tiene en algún momento la máquina un rendimiento inferior al 10 %?

Solución:

a) $f(1) = 82\,\%$ y $f(2) = 84,6\,\%$ el rendimiento a un mes de la compra es inferior al de dos.

b) $f'(x) = -\dfrac{3}{10}\left(x^2 - 4x - 5\right) = 0 \Longrightarrow x = -1$ no válida y $x = 5$ meses. Recurrimos a la segunda derivada para analizar qué tipo de extremo es:
$f''(x) = -\dfrac{3}{10}(2x - 4) \Longrightarrow f''(5) = -\dfrac{9}{5} < 5 \Longrightarrow x = 5$ es un máximo relativo $(5, 90)$, el rendimiento es de 90 %.
Este rendimiento es superior al inicial $f(0) = 80\,\%$ y al final $f(12) = 11,6$ y, por tanto, es un máximo absoluto.

c) $f(0) = 80\,\%$ y $f(12) = 11,6$. El rendimiento crece desde el momento inicial con el 80 % hasta el mes 5 con el 90 % y decrece hasta el mes 12 con 11,6 %. Nunca inferior al 10 %.

3.10. Extremadura

3.10.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.10.1 Los beneficios de una empresa (en miles de euros) $B(t)$ durante los primeros 10 años dependen del tiempo transcurrido t (en años) desde su creación según la función:

$$B(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 2A & \text{si} \quad 1 \le t < 6 \\ Bt & \text{si} \quad 6 \le t \le 10 \end{cases}$$

Calcular, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la función $B(t)$ es continua y que en el año 8 obtuvo unos beneficios de 16 mil euros.

Solución:

☛ La función es continua en ambas ramas, estudiamos la continuidad en $t = 6$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 6^-} B(t) = \lim\limits_{t\to 6^-}(t^2 - 8t + 2A) = -12 + 2A \\ \lim\limits_{t\to 6^+} B(t) = \lim\limits_{t\to 6^+}(Bt) = 6B \\ f(6) = 6B \end{array}\right. \Longrightarrow -12 + 2A = 6B \Longrightarrow A - 3B = 6$$

- ☛ $B(8) = 8B = 16 \Longrightarrow B = 2$

- ☛ $\left\{\begin{array}{l} A - 3B = 6\\ B = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 12\\ B = 2 \end{array}\right.$

Problema 3.10.2 El precio de cierto perfume, $P(x)$, (en euros) depende del porcentaje que contiene de la esencia de cierta flor, x, (en tanto por ciento), de acuerdo con la función:

$$P(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 90 \quad 0 \le x \le 4$$

Se pide determinar, razonando las respuestas, para qué porcentajes alcanza este perfume sus precios máximo y mínimo y a cuánto ascienden estos precios.

Solución: Tenemos $P(0) = 90$ y $P(4) = 154$.
$P'(x) = 12x^2 - 12x - 24 = 0 \Longrightarrow x = -1$ (no válida) y $x = 2$.
$P''(x) = 24x - 12 \Longrightarrow P''(2) = 36 > 0 \Longrightarrow x = 2$ es un mínimo relativo y $f(2) = 50$.
Luego $x = 2\,\%$ es un mínimo absoluto con un precio de 50€. El máximo será $x = 4\,\%$ con un precio de 154€.

Problema 3.10.3 Se pide:

a) Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x) = -x^2 + x$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$.

b) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función: $g(x) = \dfrac{3 - 2x^2}{-x^2 + x}$

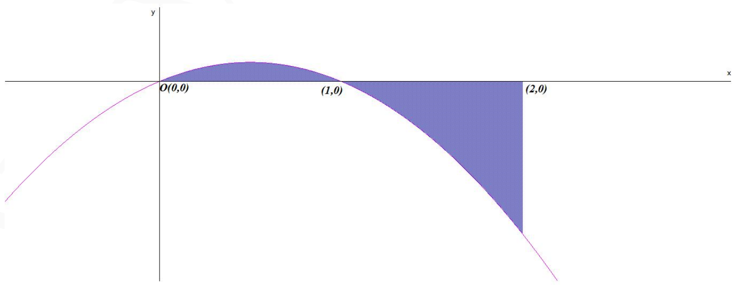
Solución:

a) $-x^2 + x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 1$. El punto $x = 1$ se encuentra dentro del intervalo $[0, 2]$ de integración, luego tendremos dos recintos de integración S_1 en $[0, 1]$ y S_2 en $[1, 2]$.

$$S_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (-x^2 + x)\,dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\bigg]_0^1 = \frac{1}{6}$$

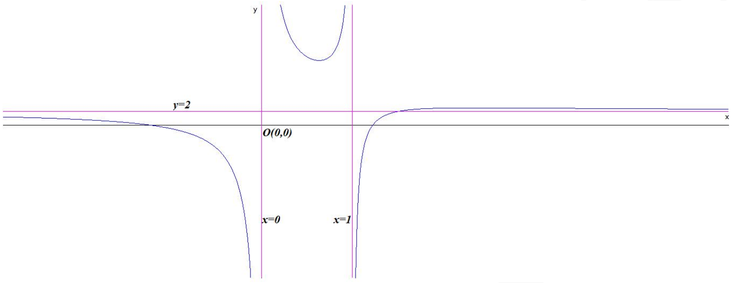
$$S_2 = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (-x^2 + x)\,dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\bigg]_1^2 = -\frac{5}{6}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \left|\frac{1}{6}\right| + \left|-\frac{5}{6}\right| = 1\ u^2$$



b) $-x^2 + x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 1 \Longrightarrow \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$.
Asíntotas:

- ☛ Verticales:
  En $x = 0$:
$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{3-2x^2}{-x^2+x} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{3-2x^2}{-x^2+x} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$
  En $x = 1$:
$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{3-2x^2}{-x^2+x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{3-2x^2}{-x^2+x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$
- ☛ Horizontales: $y = 2$.
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{3-2x^2}{-x^2+x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3-2x^2}{-x^2+x} = 2$$
- ☛ Oblícuas: No hay por haber horizontales.



3.10.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.10.4 El consumo eléctrico de una tienda $C(t)$ (en kilovatios) durante las 8 horas que permanece abierta depende del tiempo t (en horas) desde que abrió según la función:

$$C(t) = 10 + 6Bt + 6At^2 + t^3 \quad 1 \le t \le 8$$

Calcular, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que su consumo máximo se alcanza a las 6 horas y asciende a 10 kilovatios.

Solución:
$C'(t) = 6B + 12At + 3t^2$

- ☛ $C'(6) = 0 \Longrightarrow 72A + 6B + 108 = 0$
- ☛ $C(6) = 10 \Longrightarrow 216A + 36B + 226 = 10$
- ☛ $\begin{cases} 72A + 6B + 108 = 0 \\ 216A + 36B + 226 = 10 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 6 \end{cases}$
- ☛ comprobamos que en $t = 6$ hay un máximo:
  $C''(t) = 12(-2) + 6(6) = -24 + 36 = 12 > 0 \Longrightarrow t = 6$ es un mínimo y no un máximo como dice el problema.

Problema 3.10.5 La cantidad de pescado capturado en cierto lago en pequeñas embarcaciones, $P(x)$ (en kg) es una función de la longitud de la embarcación, x, que oscila entre 1 y 12 metros. La función que relaciona ambas magnitudes es la siguiente:

$$P(x) = 3x^3 - 45x^2 + 144x + 230 \quad 1 \le x \le 12$$

Se pide, razonando las respuestas:

a) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la cantidad de pescado capturado en función de la longitud de la embarcación utilizada.

b) Representar gráficamente la función $P(x)$.

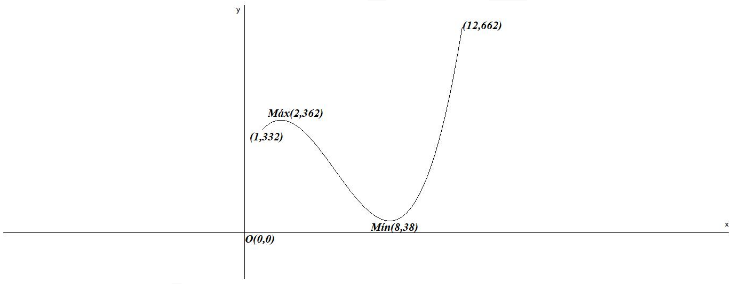
Solución:

a) $P'(x) = 9x^2 - 90x + 144 = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $x = 8$.

	$(1,2)$	$(2,8)$	$(8,12)$
$P'(x)$	$+$	$-$	$+$
$P(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(1,2) \cup (8,12)$ y decreciente en el $(2,8)$. Tiene un máximo relativo en el punto $(2,362)$ y un mínimo relativo en el $(8,38)$
Podemos decir que cuando la longitud de las embarcaciones es entre 2 y 8 metros o entre 8 y 12 el número de capturas aumenta, por el contrario, si las embarcaciones tienen entre 2 y 8 metros el número de capturas disminuye.

b) Tenemos: $P(1) = 332$ y $P(12) = 662$
Representación gráfica:



Problema 3.10.6 Se pide:

a) Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x) = 4 - x^2$ y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$.

b) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función: $g(x) = \dfrac{3x^2+2}{4-x^2}$

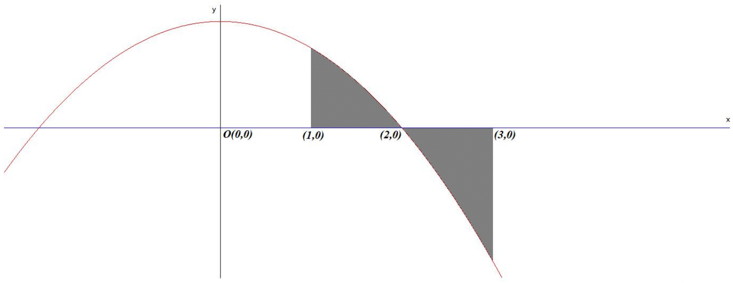
Solución:

a) $4 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $x = -2$. El punto $x = 2$ se encuentra dentro del intervalo $[1,3]$ de integración, luego tendremos dos recintos de integración S_1 en $[1,2]$ y S_2 en $[2,3]$.

$$S_1 = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^1 (4-x^2)\,dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Big]_1^2 = \frac{5}{3}$$

$$S_2 = \int_2^3 f(x)\,dx = \int_1^2 (4-x^2)\,dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Big]_2^3 = -\frac{7}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \left|\frac{5}{3}\right| + \left|-\frac{7}{3}\right| = 4\ \ u^2$$



b) $4 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = -2$ y $x = 2 \Longrightarrow \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.
Asíntotas:

- Verticales:
  En $x = -2$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -2^-} \dfrac{3x^2+2}{4-x^2} = \left[\dfrac{14}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -2^+} \dfrac{3x^2+2}{4-x^2} = \left[\dfrac{14}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

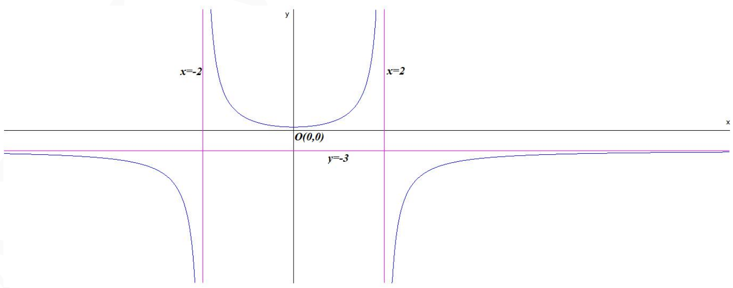
  En $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} \dfrac{3x^2+2}{4-x^2} = \left[\dfrac{14}{0^+}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} \dfrac{3x^2+2}{4-x^2} = \left[\dfrac{14}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

- Horizontales: $y = 2$.

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{3x^2+2}{4-x^2} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{3x^2+2}{4-x^2} = -3$$

- Oblícuas: No hay por haber horizontales.



3.11. Galicia

3.11.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.11.1 En una zona protegida de un parque natural el número de aves $N(t)$, en cientos, en función del tiempo t (años transcurridos desde que se contabilizan las aves) viene dado por
$N(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & \text{si} \quad 0 \le t \le 10 \\ 95 - \dfrac{250}{t} & \text{si} \quad t > 10 \end{cases}$

a) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $N(t)$ ¿Entre qué años crece la función? ¿Entre qué años decrece?

b) ¿Cuándo se alcanza el número mínimo de aves en el parque? ¿Cuántas aves hay en ese momento?

c) Calcule el intervalo de tiempo en el que la población de aves se mantiene entre 5000 y 7500 aves. ¿A qué valor tiende la población de aves con el paso del tiempo?

Solución:

a) Hay que analizar si $N(t)$ es continua en $t = 10$:
$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 10^-} C(t) = \lim\limits_{t\to 10^-} \left(t^2 - 8t + 50\right) = 70 \\ \lim\limits_{t\to 10^+} C(t) = \lim\limits_{t\to 10^-} \left(95 - \dfrac{250}{t}\right) = 70 \\ N(10) = 70 \end{cases} \Longrightarrow N(t)$ continua en $t = 10$ y en todo su dominio.
$C'(t) = \begin{cases} 2t - 8 & \text{si} \quad 0 \le t \le 10 \\ \dfrac{250}{t^2} & \text{si} \quad t > 10 \end{cases}$

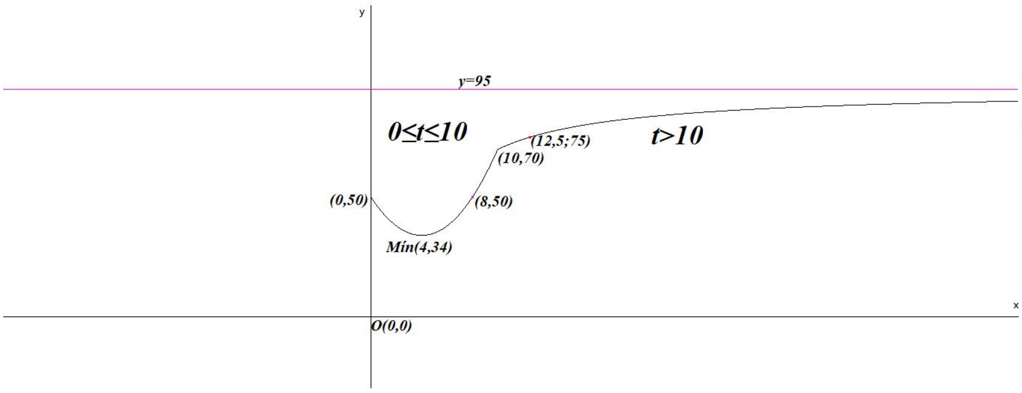
- En la rama $0 \le t \le 10 \Longrightarrow C'(t) = 2t - 8 = 0 \Longrightarrow t = 4 \Longrightarrow C'(t) < 0$ si $t \in (0, 4)$ y es decreciente en este intervalo. En $(4, 10) \Longrightarrow C'(t) > 0$ y la función es creciente.
- En la rama $t > 10 \Longrightarrow C'(t) = \dfrac{250}{t^2} > 0 \Longrightarrow N(t)$ es creciente en el intervalo $(10, \infty)$.
- El número de aves decrece hasta el año 4, a partir del cual siempre es creciente.

b) El año 4 la función pasa de decrecer a crecer por lo que hay un mínimo relativo con una población de $N(4) = 34 \Longrightarrow 3400$ aves, como la función es decreciente en el intervalo $(0, 4)$ podemos afirmar que el mínimo es absoluto.

c) En la rama $0 \le t \le 10 \Longrightarrow N(t) = t^2 - 8t + 50 = 50 \Longrightarrow t = 0$ y $t = 8$. $N(t) = t^2 - 8t + 50 = 75 \Longrightarrow t = -2,403, \;\; t = 10,403$ no válidas por no estar en la rama.
En la rama $t > 10 \Longrightarrow N(t) = 95 - \dfrac{250}{t} = 50 \Longrightarrow t = 5,556$ no válida por no estar en la rama y $N(t) = 95 - \dfrac{250}{t} = 75 \Longrightarrow t = 12,5$
La población de aves se mantiene entre 5000 y 7500 aves entre el año 8 y el 12,5. La población seguirá creciendo a partir de ese año.

$$\lim_{t\to\infty} \left(95 - \frac{250}{t}\right) = 95$$

La población de aves se estabilizará en 9500 aves con el paso del tiempo.



Problema 3.11.2 Dada la función $f(x) = x^3 - ax^2 + 8x$

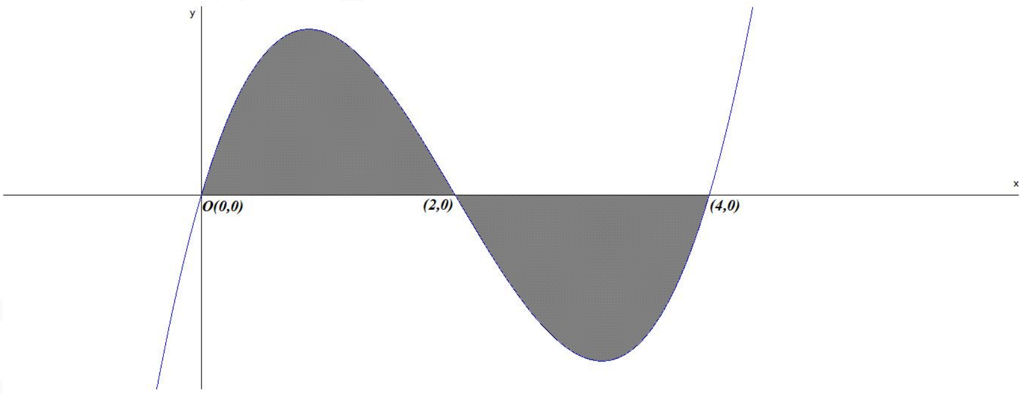
a) Calcule el valor del parámetro "a" teniendo en cuenta que la función $f(x)$ presenta un punto de inflexión en $x = 2$.

b) Para $a = 6$, calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX.

Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 - 2ax + 8 \Longrightarrow f''(x) = 6x - 2a \Longrightarrow f''(2) = 12 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 6$
Como $f'''(x) = 6 \Longrightarrow f'''(2) = 6 \neq 0 \Longrightarrow x = 2$ es un punto de inflexión.

b) $x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \Longrightarrow x = 0$, $x = 2$ y $x = 4$. Hay dos recintos $S_1 : [0,2]$ y $S_2 : [2,4]$.
$$S_1 = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 = 4$$
$$S_2 = \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4 = -4$$
$S = |S_1| + |S_2| = |4| + |-4| = 8\ u^2$



3.11.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.11.3 Los costes de una empresa, en cientos de miles de euros, vienen dados por la función: $C(t) = t^3 - \frac{21}{2}t^2 + 30t - 12$, t es el tiempo en años $1 \le t \le 6$

a) Calcule los costes máximos alcanzados. ¿En qué momento se producen?

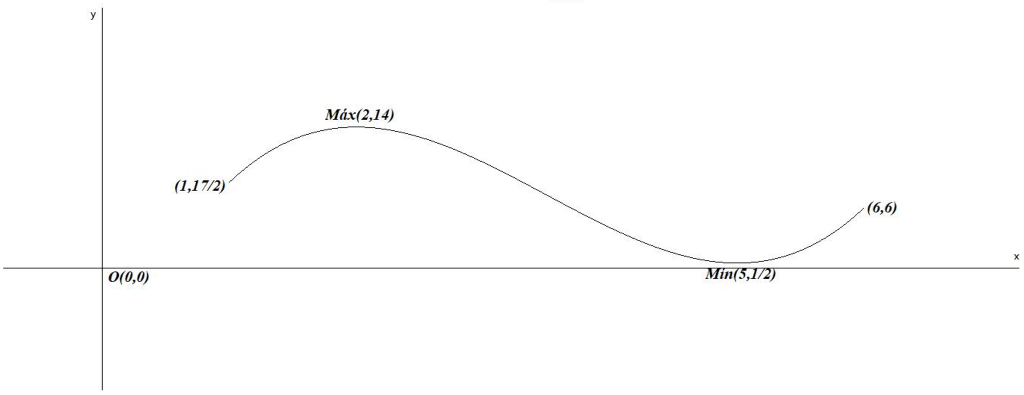
b) Estudie el crecimiento y decrecimiento de los costes. Determine el coste mínimo y en qué momento se alcanza.

c) ¿Cuáles son los costes al inicio y al final del periodo en estudio?

Solución:

a) $C'(t) = 3t^2 - 21t + 30 = 0 \Longrightarrow t = 2$ y $t = 5$

	$(1,2)$	$(2,5)$	$(5,6)$
$C'(t)$	$+$	$-$	$+$
$C(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$



La función crece en el intervalo $(1,2) \cup (5,6)$ y decrece en el $(2,5)$. Tiene un máximo relativo en el punto $(2,14)$ y un mínimo relativo en el $(5,1/2)$. Según se puede ver el la gráfica de la función, estos extremos son absolutos.
Contestando a la primera pregunta, el coste máximo se produce el año 2 con 1400000€.

b) Como se ha visto anteriormente, los costes crecen en los años 1 al 2 y del 5 al 6. Decrecen entre los años 2 al 5.
El coste mínimo se produce el año 5 con 50000€

c) El coste inicial es $C(1) = 17/2 = 8,5 \Longrightarrow$ 850000€ y el coste final es $C(6) = 6 \Longrightarrow$ 600000€

Problema 3.11.4 Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ 2x - a & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

a) Calcule el valor del parámetro "a" para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Para $a = 2$ calcule los extremos relativos de la función $f(x)$ y represéntela.

c) Calcule el área de la región delimitada por la función $f(x)$, para $a = 2$, y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = 2$.

Solución:

a) Las dos ramas son continuas hay que analizar la continuidad en $x = 1$:

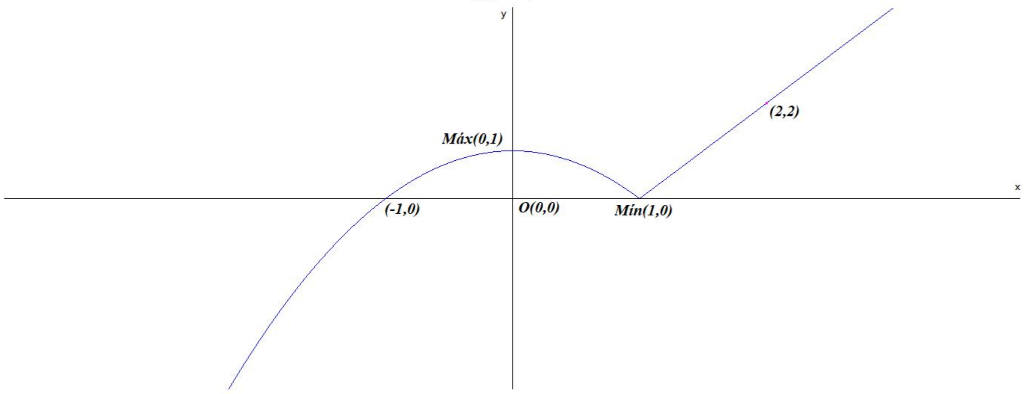
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(-x^2+1\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2x-a) = 2-a \\ f(1) = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow 2-a=0 \Longrightarrow a=2 \Longrightarrow$$

$f(x)$ continua en todo $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \left\{\begin{array}{lll} -x^2+1 & \text{si} & x \le 1 \\ 2x-2 & \text{si} & x > 1 \end{array}\right. \Longrightarrow f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} -2x & \text{si} & x \le 1 \\ 2 & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$

- ☛ En la rama $x \le 1 \Longrightarrow f'(x) = -2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y como $f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(0) = -2 < 0 \Longrightarrow (0,1)$ es un máximo relativo.
  Habría un mínimo relativo en $(1,0)$. La función pasa de decrecer a crecer.
  Esta rama corta al eje OX en el punto$(-1,0)$ y termina en el punto $(1,0)$
  La rama $x > 1$ es una recta que pasa por los puntos $(1,0)$ y $(2,2)$

- ☛ Con estos datos representamos la función:

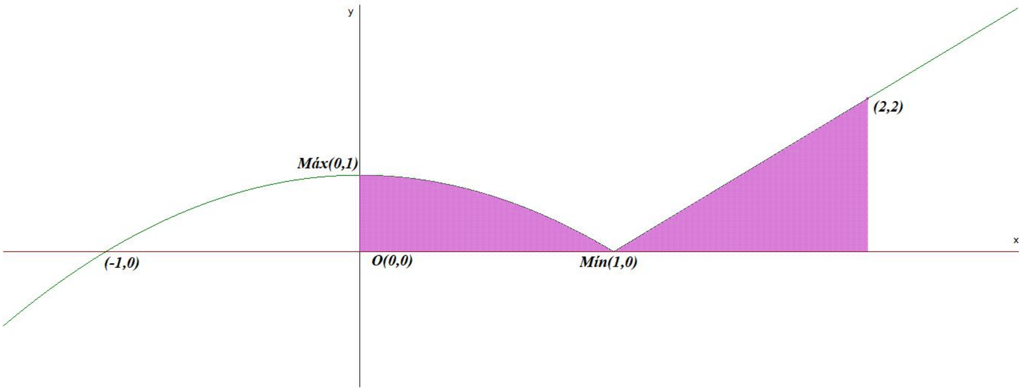


c) Hay dos recintos $S_1 : [0,1]$ y $S_2 : [1,2]$.

$$S_1 = \int_0^1 (-x^2+1)\,dx = -\frac{x^3}{3} + x\Big]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$S_2 = \int_1^2 (2x-2)\,dx = x^2 - 2x\Big]_1^2 = 1$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \left|\frac{2}{3}\right| + |1| = \frac{5}{3}\ u^2$$



3.12. Islas Baleares

3.12.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.12.1 Consideremos la función a trozos siguiente

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^3 + ax + 2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Calcular los valores de a qué $f(x)$ sea continua y derivable.

b) Para $a = 4$ calcular el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$.

Solución:

a) La función es continua y derivable en las dos ramas, falta analizar en $x = 0$.

☛ Estudiamos la continuidad en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \left(x^2 - 3x + 2\right) = 2 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \left(x^3 + ax + 2\right) = 2 \\ f(0) = 2 \end{cases} \Longrightarrow$$

Luego la función es continua para cualquier valor de a.

☛ Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si} \quad x < 0 \\ 3x^2 + a & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(0^-) = -3 \\ f'(0^+) = a \end{cases} \Longrightarrow$$

Luego si la función es derivable en $x = 0 \Longrightarrow a = -3$.

La función es continua y derivable cuando $a = -3$

b) Para $a = 4$ en el intervalo $[0, 1]$ la función es $f(x) = x^3 + 4x + 2$. Esta función es siempre positiva en esta rama y, por tanto, no tiene puntos de corte con el eje OX.
$S = \int_0^1 \left(x^3 + 4x + 2\right) dx = \left.\dfrac{x^4}{4} + 2x^2\right]_0^1 = \dfrac{17}{4} = 4,25\ u^2$

Problema 3.12.2 El gasto mensual en euros en lotería de un trabajador viene determinado por su salario mediante la función:

$$f(x) = \frac{100x}{b + x^2}$$

en la que $x \ge 0$ representa el salario en miles de euros y $b > 0$ es un parámetro.

a) Encuentre el valor de b para el cual el máximo del gasto se obtiene con un salario mensual de 2 mil euros.

b) Para $b = 9$, determine el salario para que el gasto sea máximo. ¿A cuánto asciende este gasto?

c) Para $b = 9$, ¿para qué salarios el gasto mensual es superior a 10 euros?

Solución:

$$\text{Dom}(f) = [0, \infty)$$

a) $f'(x) = -\dfrac{x^2 - b}{(b + x^2)^2} \Longrightarrow f'(2) = -\dfrac{4 - b}{(b + 4)^2} = 0 \Longrightarrow b = 4$

Comprobamos si $x = 2$ es un máximo: $f'(x) = -\dfrac{x^2 - 4}{(4 + x^2)^2}$

	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

Los gastos decrecen en el intervalo $(2, \infty)$ y crecen en el intervalo $(0, 2)$. Hay un máximo relativo en el punto $(2, 25)$.

b) $f(x) = \dfrac{100x}{9 + x^2} \Longrightarrow f'(x) = -\dfrac{x^2 - 9}{(9 + x^2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 3$, la solución negativa no está en el dominio.

	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

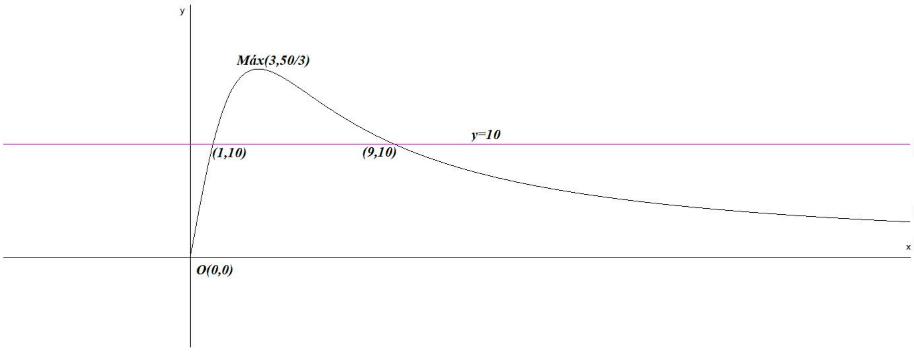
Los gastos decrecen en el intervalo $(3, \infty)$ y crecen en el intervalo $(0, 3)$. Hay un máximo relativo en el punto $\left(3, \dfrac{50}{3}\right)$.

El gasto máximo en lotería lo tienen personas que ganan 3000€ mensuales y es de $\dfrac{50}{3} \simeq 16,6667$€.

c) $\dfrac{100x}{9 + x^2} > 10 \Longrightarrow \dfrac{-10(x^2 - 10x + 9)}{9 + x^2} > 0 \Longrightarrow x^2 - 10x + 9 < 0$
$P(x) = x^2 - 10x + 9 = 0 \Longrightarrow x = 1$ Y $x = 9$

	$(0, 1)$	$(1, 9)$	$(9, \infty)$
$P(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x) - 10$	$-$	$+$	$-$

Los gastos en lotería son superiores a 10€ en trabajadores que cobran entre 1000€ y 9000€



Problema 3.12.3 Si el precio de la entrada de un cine es de 8 euros, van 500 personas. El propietario sabe por experiencia que por cada aumento de 1,5 euros en el precio de la entrada van 30 espectadores menos.
Encuentre:

a) La función que determina el número de espectadores en función del precio de la entrada.

b) La función que determina los ingresos del cine en función del precio de la entrada.

c) El precio de la entrada para que los ingresos del propietario sean máximos.

d) El número de espectadores que irán al cine cuando el precio sea el que corresponde a los ingresos máximos y estos ingresos máximos.

Solución:

a) Si llamamos x al precio de la entrada tenemos que el número de espectadores vendría dado por la función $g(x) = 500 - \dfrac{x-8}{1,5}30 = -20x + 660$

b) Los ingresos serán el precio de la entrada x por el número de espectadores $g(x)$: $f(x) = xg(x) = -20x^2 + 660x$

c) $f'(x) = -40x + 660 = 0 \Longrightarrow x = 16,5$. Recurrimos a la segunda derivada $f''(x) = -40 \Longrightarrow f''(16,5) = -40 < 0 \Longrightarrow x = 16,5$€ es un máximo.

d) $f(16,5) = 5445$€ de ingresos máximos.
$g(16,5) = 330$ espectadores para los ingresos máximos.

3.12.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.12.4 Dada la función $f(x) = -\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+3}$

a) Encuentre su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Encuentre una primitiva de $f(x)$.

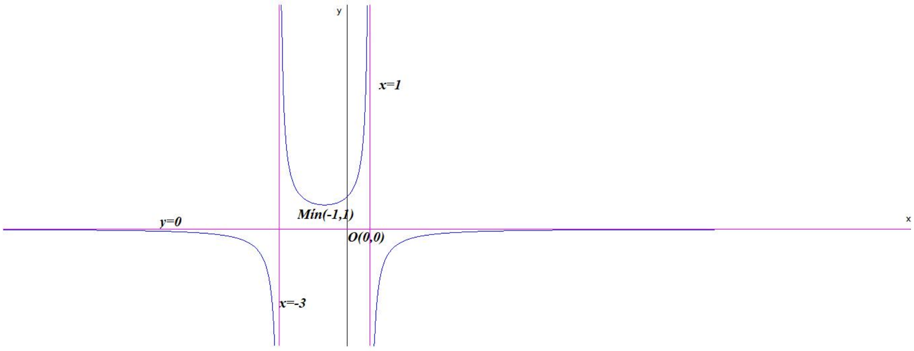
c) Calcule el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y las rectas $x = 4$, $x = 7$ e $y = 0$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$
$f'(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{(x+3)^2} = \dfrac{8(x+1)}{(x-1)^2(x+3)^2} = 0 \Longrightarrow x = -1$

	$(0, -1)$	$(-1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función crece en el intervalo $(-1, 1) \cup (1, \infty)$ y decrece en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (-3, -1)$. Hay un mínimo relativo en el punto $(-1, 1)$.

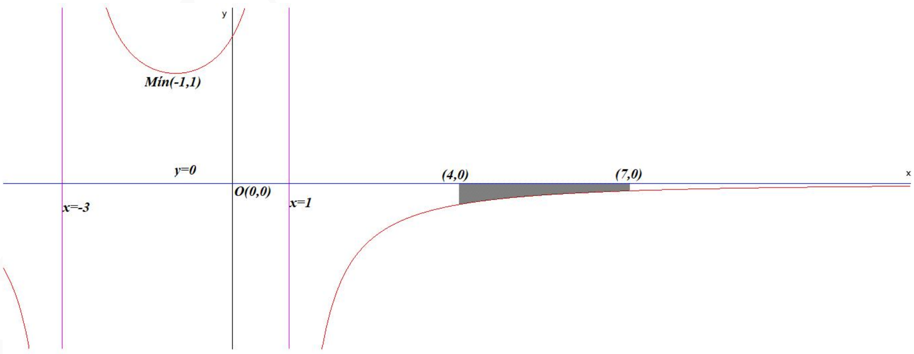


b) $F(x) = \displaystyle\int \left(-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3}\right) dx = -\ln|x-1| + \ln|x+3| + C$

c) $f(x) = -\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+3} = -\dfrac{4}{(x-1)(x+3)} \neq 0 \Longrightarrow f(x)$ no corta al eje OX y solo hay un recinto de integración S_1 en $[4, 7]$:

$$S = |S_1| = \left| \int_4^7 f(x)\, dx \right| = |F(7) - F(4)| = |\ln 5 - \ln 3 - (\ln 7 - \ln 3)| = |\ln 5 - \ln 7| =$$

$$\ln 7 - \ln 5 = \ln \frac{7}{5} \simeq 0,3365\ u^2$$



Problema 3.12.5 Una academia de inglés cobra una cuota de 50 euros mensuales y cuenta con 200 estudiantes. Un estudio de mercado afirma que por cada 2 euros que sube (o baja) la cuota se pierden (o se ganan) 10 estudiantes.

a) Escriba el número de estudiantes de la academia en función del precio de la cuota.

b) ¿Para qué valor de la cuota la academia se quedaría sin estudiantes?

c) Determine en qué precio se debe fijar la cuota para obtener un ingreso mensual máximo. ¿Cuál sería ese ingreso y cuántos estudiantes tendría la academia?.

Solución:

a) Si llamamos x al precio de la cuota tenemos que el número de estudiantes vendría dado por la función $g(x) = 200 - \dfrac{x-50}{2}10 = -5x + 450$

b) $g(x) = -5x + 450 = 0 \Longrightarrow x = 90$, si se sube la cuota a 90€ la academia se queda sin estudiantes.

c) Los ingresos serán el precio de la cuota x por el número de estudiantes $g(x)$:
$f(x) = xg(x) = -5x^2 + 450x$
$f'(x) = -10x + 450 = 0 \Longrightarrow x = 45$. Recurrimos a la segunda derivada $f''(x) = -10 \Longrightarrow f''(45) = -10 < 0 \Longrightarrow x = 45$€ es un máximo.
El precio a fijar sería de 45€ para obtener un ingreso máximo de $f(45) = 10125$€ y el número de estudiantes sería de $g(45) = 225$.

Problema 3.12.6 La evolución de la población de un Estado, en millones de habitantes, se puede aproximar mediante la función

$$P(t) = \frac{20t}{4+t^2} + 40, \quad t \geq 0$$

donde t es el tiempo en años.

a) Calcule la población actual (para $t = 0$)

b) Determine el límite de $P(t)$ cuando t tiende a infinito.

c) Determine al cabo de cuántos años la población será máxima y el número de habitantes que la función predice para este máximo.

Solución:

a) $P(0) = 40 \Longrightarrow$ 40,000,000 habitantes.

b) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{20t}{4+t^2} + 40\right) = 40$ la población se estabiliza en el tiempo en 40.000.000 habitantes.

c) $P'(t) = -\dfrac{20(t^2-4)}{(t^2+4)^2} = 0 \Longrightarrow t = \pm 2$, la solución negativa no es válida.

	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

Los gastos decrecen en el intervalo $(2,\infty)$ y crecen en el intervalo $(0,2)$. Hay un máximo relativo en el punto $(2,45)$.
A los 2 años la población es máxima con 45.000.000 habitantes.

3.13. Islas Canarias

3.13.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.13.1 Durante los últimos 15 meses se ha consumido agua de un depósito (en decenas de miles de metros cúbicos) según la siguiente función:

$$c(m) = \begin{cases} \dfrac{1}{10}(m^2 - 9m + 30) & 0 \le m < 10 \\ \\ \dfrac{1}{5}(m^2 - 25m + 170) & 10 \le m \le 15 \end{cases}$$

a) Representar gráficamente la función. Justificando las respuestas, decir si es continua, y determinar cuándo es creciente y cuándo es decreciente.

b) ¿Cuándo se alcanzaron los consumos mínimos y máximos? ¿Cuáles fueron los correspondientes valores?

c) ¿Cuándo el consumo fue igual a 10 millones de litros (10.000m^3)?

Solución:

a) ☛ Corte con eje de ordenadas: $m = 0 \Longrightarrow (0, 3)$. Corte con eje de abscisas: $f(m) = 0$ no tiene solución en las dos ramas y no hay puntos de corte con este eje.

☛ Continuidad en $[0, 15]$. Las dos ramas son continuas y hay que analizar la continuidad en $m = 10$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{m\to 10^-} c(m) = \lim\limits_{m\to 10^-} \left(\dfrac{1}{10}(m^2 - 9m + 30)\right) = 4 \\ \\ \lim\limits_{m\to 10^+} c(m) = \lim\limits_{m\to 10^+} \left(\dfrac{1}{5}(m^2 - 25m + 170)\right) = 4 \\ \\ c(10) = 4 \end{cases} \Longrightarrow c(m) \text{ es continua}$$

en $m = 10$.
Luego la función es continua en $[0, 15]$.

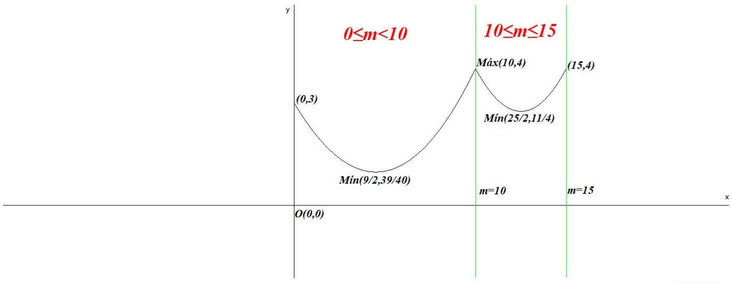
☛ Monotonía:

$$c'(m) = \begin{cases} \dfrac{2m - 9}{10} = 0 \Longrightarrow m = \dfrac{9}{2} & 0 \le m < 10 \\ \\ \dfrac{2m - 25}{5} = 0 \Longrightarrow m = \dfrac{25}{2} & 10 \le m \le 15 \end{cases}$$

	$\left(0, \frac{9}{2}\right)$	$\left(\frac{9}{2}, 10\right)$	$\left(10, \frac{25}{2}\right)$	$\left(\frac{25}{2}, 15\right)$
$c'(m)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$c(m)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $\left(0, \dfrac{9}{2}\right) \cup \left(10, \dfrac{25}{2}\right)$
y creciente en el $\left(\dfrac{9}{2}, 10\right) \cup \left(\dfrac{25}{2}, 15\right)$.
Tiene un mínimo relativo en $\left(\dfrac{9}{2}, \dfrac{39}{40}\right)$ y otro en $\left(\dfrac{25}{2}, \dfrac{11}{4}\right)$.
Tiene un máximo relativo en $(10, 4)$.

☛ Representación gráfica:



b) Los consumo mínimo se alcanza a los 4,5 meses con 9750 m^3. El consumo máximo se presenta el mes 10 o el 15 con 40000 m^3

c) $c(m) = 1$:

$$c(m) = \begin{cases} \dfrac{1}{10}(m^2 - 9m + 30) = 1 \Longrightarrow m = 4,\ m = 5 & 0 \le m < 10 \\ \\ \dfrac{1}{5}(m^2 - 25m + 170) = 1 \Longrightarrow \text{sin solución} & 10 \le m \le 15 \end{cases}$$

En el mes 4 y el mes 5 el consumo es de 10000 m^3

Problema 3.13.2 En una pared se quiere pintar un mural abstracto. En ese mural hay que pintar la figura encerrada dentro de la parábola $y = x^2 - 1$, y limitada por encima por la recta $y = 11 - x$ y por debajo por el eje OX. Las distancias en los ejes están definidas en metros.

a) ¿Cuántos metros cuadrados mide la figura?

b) El trozo de figura a la izquierda de la recta $x = -1$ se pinta de azul, y el trozo a la derecha de gris. Si cada metro cuadrado de pintura azul cuesta 2€, y pintar el mural ha costado en total 95€, ¿cuánto cuesta cada m^2 de pintura gris?

Solución:

a) ☛ $x^2 - 1 = 11 - x \Longrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Longrightarrow x = -4$ y $x = 3$. Corte de la recta y la parábola.
$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$. Corte de la parábola y el eje OX
Habrá tres recintos: $S_1 : [-4,^- 1]$ entre recta y parábola, $S_2 : [-1, 1]$ entre recta y eje OX y $S_3 : [1, 3]$ entre recta y parábola.

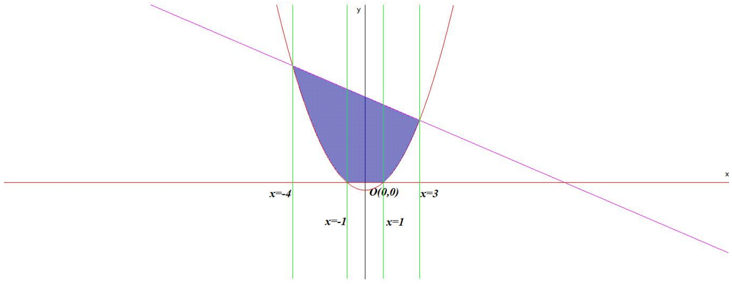
☛ Si no se quiere analizar la posición entre recta y parábola $S = |S_1| + |S_2| + |S_3|$:

$$S_1 = \int_{-4}^{-1} (x^2 + x - 12)\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 12x \Big]_{-4}^{-1} = -\frac{45}{2}$$

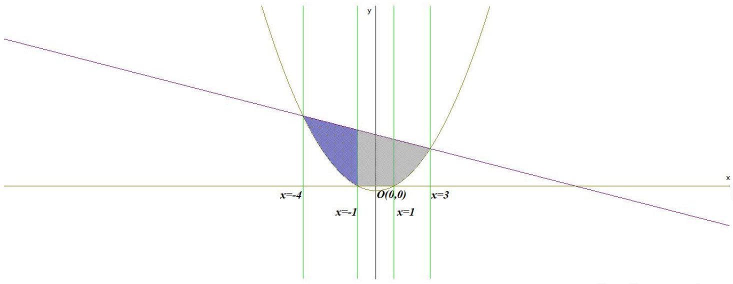
$$S_2 = \int_{-1}^{1} (11 - x)\, dx = 11x + \frac{x^2}{2} \Big]_{-1}^{1} = 22$$

$$S_3 = \int_{1}^{3} (x^2 + x - 12)\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 12x \Big]_{-4}^{-1} = -\frac{34}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| + |S_3| = \left|-\frac{45}{2}\right| + |22| + \left|-\frac{34}{3}\right| = \frac{45}{2} + 22 + \frac{34}{3} = \frac{335}{6}\ m^2$$



b) Pintamos los recintos:



El recinto de la derecha a costado $\dfrac{45}{2} \cdot 2 = 45$€ y el resto a costado $95 - 45 = 50$€. Luego $\left(22 + \dfrac{34}{3}\right) m = 50 \Longrightarrow m = 1,5$€

El coste de la zona gris a sido de 1,5€/m^2.

3.13.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.13.3 De acuerdo con los datos disponibles, el número mensual de casos activos de COVID-19, por cada 100.000 personas mayores de 70 años en Canarias entre marzo y diciembre de 2020, puede aproximarse mediante la función:

$$c(t) = \begin{cases} -15t^2 + 150t - 315 & 3 \le t \le 6,5 \\ \dfrac{53}{8}t - \dfrac{269}{16} & 6,5 < t \le 8,5 \\ -18t^2 + 360t - 1720 & 8,5 < t \le 12 \end{cases}$$

donde t es el tiempo (en meses) transcurrido desde el 1 de enero de 2020.

a) Representar gráficamente esta función. ¿Es continua?

b) Describir la variación de la curva de casos activos (cuando crece y cuando decrece) ¿Cuándo se produjeron los picos del número de casos activos de COVID en estas personas? ¿Cuántos casos activos había en esos momentos?

c) ¿En qué momento se alcanzaron por primera vez los 62 casos activos por cada 100.000 personas de este grupo de edad?

Solución:

a) ☛ Corte con eje de ordenadas: $t \leq 3 \Longrightarrow$ no hay punto de corte con el eje de ordenadas.
Corte con eje de abscisas: $c(t) = 0$

- en el intervalo $[3; 6,5]$: $-15t^2 + 150t - 315 = 0 \Longrightarrow t = 3$ y $t = 7$(no vale) luego $(3, 0)$
- en el intervalo $(6,5; 8,5]$: $\dfrac{53}{8}t - \dfrac{269}{16} = 0 \Longrightarrow t = 2,5377$(no vale)
- en el intervalo $(8,5; 12]$: $-18t^2 + 360t - 1720 = 0 \Longrightarrow t = 7,8918$(no vale) y $t = 12,1082$(no vale)

☛ Continuidad en $[3, 12]$. Las tres ramas son continuas y hay que analizar la continuidad en $t = 6,5$ y $t = 8,5$:

- Continuidad en $t = 6,5$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 6,5^-} c(t) = \lim\limits_{t\to 6,5^-} \left(-15t^2 + 150t - 315\right) = 26,25 \\ \\ \lim\limits_{t\to 6,5^+} c(t) = \lim\limits_{t\to 6,5^+} \left(\dfrac{53}{8}t - \dfrac{269}{16}\right) = 26,25 \\ \\ c(6,5) = 26,25 \end{cases} \Longrightarrow$$

$c(t)$ es continua en $t = 6,5$.

- Continuidad en $t = 8,5$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 8,5^-} c(t) = \lim\limits_{t\to 8,5^-} \left(\dfrac{53}{8}t - \dfrac{269}{16}\right) = 39,5 \\ \\ \lim\limits_{t\to 8,5^+} c(t) = \lim\limits_{t\to 8,5^+} \left(-18t^2 + 360t - 1720\right) = 39,5 \\ \\ c(8,5) = 39,5 \end{cases} \Longrightarrow$$

$c(t)$ es continua en $t = 8,5$.

- Luego la función es continua en $[3, 12]$.

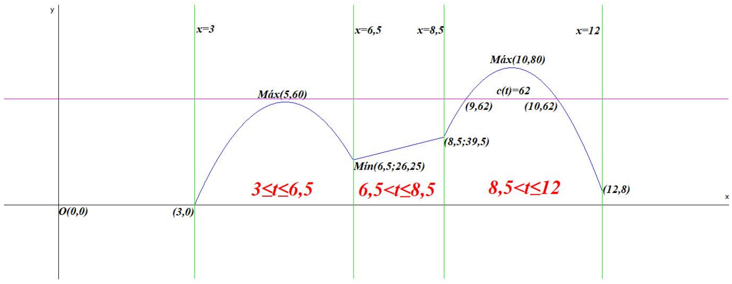
☛ Monotonía:

$$c'(t) = \begin{cases} -30t + 150 = 0 \Longrightarrow t = 5 & 3 \leq t \leq 6,5 \\ \\ \dfrac{53}{8} \neq 0 & 6,5 < t \leq 8,5 \\ \\ -36t + 360 = 0 \Longrightarrow t = 10 & 8,5 < t \leq 12 \end{cases}$$

	$(0; 5)$	$(5; 6,5)$	$(6,5; 8,5)$	$(8,5; 10)$	$(10; 12)$
$c'(t)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
$c(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $(5; 6,5) \cup (10; 12)$
y creciente en el $(0; 5) \cup (6,5; 8,5) \cup (8,5; 10)$.
Tiene un mínimo relativo en $(6,5; 26,25)$ y dos máximos relativos en $(5, 60)$ y en el $(10; 80)$.
Tenemos además $c(12) = 8 \Longrightarrow (12, 8)$

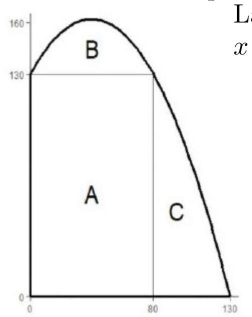
☛ Representación gráfica:



b) A la vista del apartado anterior se observa que el número de infectados, por 100000 personas mayores de 60 años, crece desde el momento inicial hasta el mes 5 donde se produce el primer pico con 60 infectados, después decrece el número de infectados hasta el mes 6,5 con $26,25 \simeq 26$ afectados a partir de este momento el número de afectados crece hasta el mes 10 en el que se produce el segundo pico con 80 afectados, el máximo absoluto, y decrece hasta el mes 12 con 8 afectados.

c) $c(t) = 62$. A la vista de la gráfica, hay dos puntos en la tercera rama y ninguno en las otras.
$-18t^2 + 360t - 1720 = 62 \Longrightarrow t = 9$ y $t = 11$
Luego el primer mes en el que se llega a 62 afectados es en el mes 9.

Problema 3.13.4 Un agricultor dispone de un terreno cuya forma coincide con el área limitada entre los ejes de coordenadas y la parábola $f(x) = -0,02x^2 + 1,6x + 130$. El agricultor ha dividido el terreno en tres parcelas A, B y C tal como se muestra en la figura adjunta.



Las líneas que dividen las parcelas corresponden, respectivamente, a las rectas $x = 80$ e $y = 130$ (las distancias se miden en metros).

a) Calcular la superficie de cada parcela.

b) El agricultor dedicará una de las parcelas a plantar trigo, otra a plantar millo y la tercera a plantar cebada. El coste total anual de producción de toda la finca (mano de obra, maquinaria, semillas, agua, transporte, etc.) asciende a 22134€. Si el trigo le produce un ingreso anual de 4 €/m^2, el millo 3,5 €/m^2, y la cebada 2 €/m^2, ¿Qué deberá plantar el agricultor en cada parcela si quiere maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio total anual?

Solución:

a)
- ☛ El área $A = 80 \cdot 130 = 10400\text{m}^2$
- ☛ El área $B = \displaystyle\int_0^{80} (f(x) - 130)\, dx = \int_0^{80} (-0,02x^2 + 1,6x)\, dx =$
  $-0,02\dfrac{x^3}{3} + 1,6\dfrac{x^2}{2}\Big]_0^{80} = \dfrac{5120}{3}\text{m}^2$
- ☛ El área $C = \displaystyle\int_{80}^{130} f(x)\, dx = \int_{80}^{130} (-0,02x^2 + 1,6x + 130)\, dx =$
  $-0,02\dfrac{x^3}{3} + 1,6\dfrac{x^2}{2} + 130x\Big]_{80}^{130} = \dfrac{11000}{3}\text{m}^2$
- ☛ $S = |A| + |B| + |C| = 10400 + \dfrac{5120}{3} + \dfrac{11000}{3} = \dfrac{47320}{3}\text{m}^2$

b) El agricultor plantará el producto más rentable en la parcela más grande y este pensamiento lo irá aplicando a las restantes:
Beneficio= $10400 \cdot 4 + 3,5 \cdot \dfrac{11000}{3} + 2 \cdot \dfrac{5120}{3} - 22134 = \dfrac{107138}{3} = 35712,667$€

3.14. La Rioja

3.14.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.14.1 Representa conjuntamente, en el intervalo de abscisas $[-2, 3]$, las gráficas de las funciones f y g dadas por

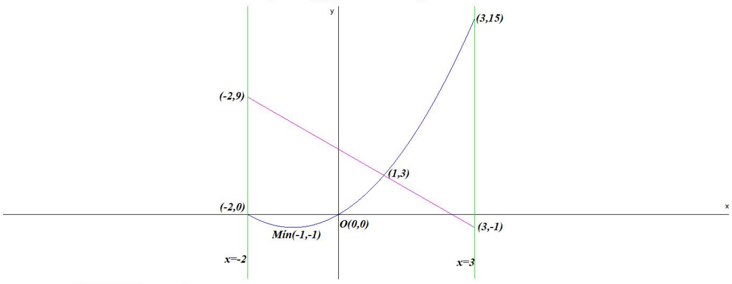
$$f(x) = x^2 + 2x \;\text{ y }\; g(x) = 5 - 2x$$

¿Qué punto a hace que sea continua la función

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad -2 \le x < a) \\ g(x) & \text{si} \quad a \le x \le 3 \end{cases} ?$$

Resalta la gráfica de h en el dibujo anterior. ¿Cuáles son el máximo y el mínimo de los valores de h en $[-2, 3]$?.
Solución:

- f es una parábola y g una recta, haciendo una tabla de valores:
  Para f tenemos $f(-2) = 0 \Longrightarrow (-2, 0)$, $f(3) = 15 \Longrightarrow (3, 15)$, $f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
  $f'(x) = 2x+2 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(-1) = 2 > 0 \Longrightarrow (-1, -1)$ es un mínimo relativo.
  Para g tenemos $g(-2) = 9 \Longrightarrow (-2, 9)$ y $g(3) = -1 \Longrightarrow (3, -1)$
  Las dos funciones se cortan en el punto $x^2 + 2x = 5 - 2x \Longrightarrow x = -5$(no vale) y $x = 1 \Longrightarrow (1, 3)$,

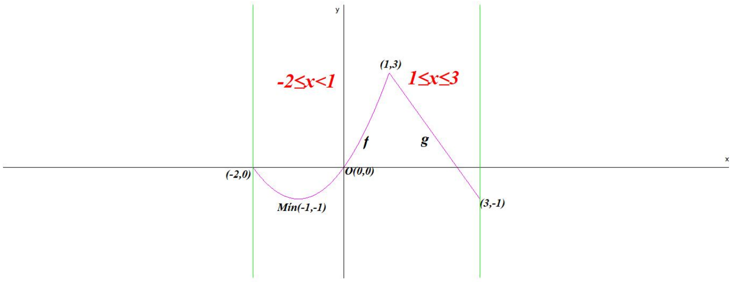


- La función es continua en a:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a^-} h(x) = \lim\limits_{x \to a^-} (x^2 + 2x) = a^2 + 2a \\ \lim\limits_{x \to a^+} h(x) = \lim\limits_{x \to a^+} (5 - 2x) = 5 - 2a \\ h(a) = 5 - 2a \end{cases} \Longrightarrow a^2 + 2a = 5 - 2a \Longrightarrow$$

  $a^2 + 4a - 5 = 0 \Longrightarrow -5$(no vale) y $a = 1$.

☛ La gráfica de h estaría señalada en rojo:



Problema 3.14.2 La distancia que ha recorrido un coche hasta el instante t, desde que arrancó en t = 0, viene dada por la siguiente función $e(t)$ entre $t = 1$ y $t = 4$:

$$e(t) = \begin{cases} 120t + 90 & \text{si} \quad 1 \le t < 3 \\ C - 240t + 150t^2 - 20t^3 & \text{si} \quad 3 \le t \le 4 \end{cases}$$

En $t = 4$ se para, de forma que $e(t) = e(4)$ para cada t en $(4, 5]$.

(I) Calcula el valor de C, considerando que $e(t)$ define una función continua.

(II) La velocidad en cada instante $v(t)$ es la derivada del espacio recorrido, es decir, $v(t) = e'(t)$. Expresa cuánto vale dicha derivada en cada punto, e investiga si es una función continua en $[1, 5]$. ¿Cómo expresarías, en términos de la velocidad, que la gráfica de $e(t)$ es recta en el intervalo $[1, 3]$ y en el intervalo $[4, 5]$?

(III) Calcula la distancia recorrida entre $t = 3$ y $t = 4$, es decir $e(4) - e(3)$. ¿Por qué es igual a $\displaystyle\int_3^4 v(t)\, dt$?

Solución:

(I) Las dos ramas son continuas, hay que analizar en $t = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{t \longrightarrow 3^-} e(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow 3^-} (120t + 90) = 450 \\ \lim\limits_{t \longrightarrow 3^+} e(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow 3^+} \left(C - 240t + 150t^2 - 20t^3\right) = C + 90 \quad \Longrightarrow \\ e(3) = C + 90 \end{array} \right.$$

$$450 = C + 90 \Longrightarrow C = 360$$

(II) En $[1, 5]$ y $e(4) = 520$:

$$e(t) = \begin{cases} 120t + 90 & \text{si} \quad 1 \le t < 3 \\ 360 - 240t + 150t^2 - 20t^3 & \text{si} \quad 3 \le t \le 4 \\ 520 & \text{si} \quad 4 < t \le 5 \end{cases} \Longrightarrow$$

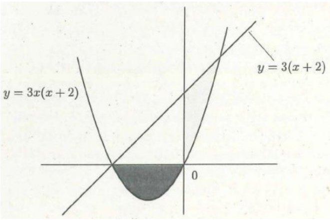
$$v(t) = e'(t) = \begin{cases} 120 & \text{si} \quad 1 \le t < 3 \\ -240 + 300t - 60t^2 & \text{si} \quad 3 \le t \le 4 \\ 0 & \text{si} \quad 4 < t \le 5 \end{cases}$$

Analizamos la derivada en $t = 3$:
$e'(3^-) = e'(3^+) = 120 \Longrightarrow e(t)$ es derivable en $t = 3$

Analizamos la derivada en $t = 4$:
$e'(4^-) = e'(4^+) = 0 \Longrightarrow e(t)$ es derivable en $t = 4$
Si la función espacio es una recta su derivada es una constante, es decir, la velocidad es constante, no cambia de valor.

(III) $e(4) - e(3) = 520 - 450 = 70$
Tenemos $\displaystyle\int v(t)\,dt = \int e'(t)\,dt = e(t) \Longrightarrow \int_3^4 v(t)\,dt = e(4) - e(3) = 70$

Problema 3.14.3 Calcula el área de las dos regiones sombreadas en la siguiente figura:



Solución:
$3x(x+2) = 3(x+2) \Longrightarrow x = -2$ y $x = 1$
La figura sombreada en negro es entre el eje de abscisas y la parábola entre $3x(x+2) = 0 \Longrightarrow x = -2$ y $x = 0$:

$$|S_1| = \left|\int_{-2}^{0} (3x^2 + 6x)\,dx\right| = \left|x^3 + 3x^2\right]_{-2}^{0}\Big| = |-4| = 4\ u^2$$

La figura sombreada en gris es entre la recta y la parábola entre $x = 0$ y $x = 1$:

$$|S_2| = \left|\int_0^1 (-3x^2 - 3x + 6)\,dx\right| = \left|-x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x\right]_0^1\Bigg| = \left|\frac{7}{2}\right| = \frac{7}{2}\ u^2$$

3.14.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.14.4 Consideramos la función f dada (en los valores reales x donde la expresión tiene sentido) por

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$$

a) ¿Cuál es el dominio de dicha función?

b) Calcula la derivada $f'(x)$. ¿En qué puntos x es $f'(x) = -1$? ¿En cuáles es $f'(x) = 1$? ¿Tiene extremos relativos?

c) Dibuja la gráfica de f, señalando los cortes con los ejes y las asíntotas horizontales y verticales.

Solución:

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

b) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} \neq 0 \Longrightarrow$ la función no tiene extremos relativo y como $f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ es decreciente en el todo el dominio.
$-\dfrac{1}{(x-1)^2} = -1 \Longrightarrow (x-1)^2 = 1 \Longrightarrow x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$
$-\dfrac{1}{(x-1)^2} = 1 \Longrightarrow (x-1)^2 = -1 \Longrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \Longrightarrow$ no tiene solución y ningún x del dominio cumple esta condición.

c) Puntos de corte:

- Con OX hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 2)$
- Con OY hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow 3x - 2 = 0 \Longrightarrow \left(\frac{2}{3}, 0\right)$

Asíntotas:

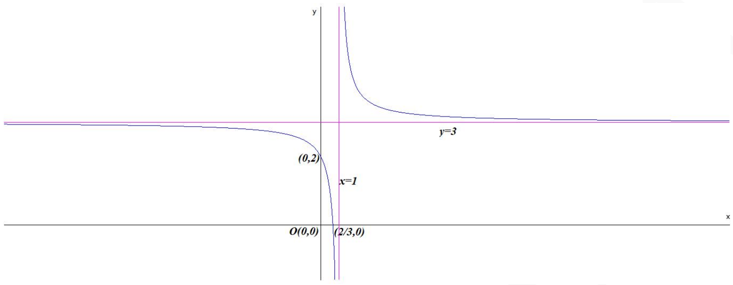
- Verticales: $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{3x-2}{x-1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{3x-2}{x-1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 3$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x-2}{x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x-2}{x-1} = 3$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.



Problema 3.14.5 Encuentra los valores de a y b que hacen que la función dada por

$$f(x) = x^3 - ax^2 - bx + 1$$

cumpla las dos propiedades siguientes:

(I) Su derivada vale lo mismo en $x = 0$ y en $x = 1$.

(II) Tiene un extremo relativo en $x = -1$.

¿Qué propiedad cumplen las rectas tangentes a la gráfica $y = f(x)$ en los puntos de abscisa 0 y 1? ¿Qué tipo de extremo relativo (máximo o mínimo) tiene f en -1?
Solución:

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax - b$$

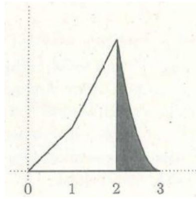
- $\begin{cases} f'(0) = f'(1) \Longrightarrow -b = 3 - 2a - b \\ f'(-1) = 0 \Longrightarrow 3 + 2a - b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ \\ b = 6 \end{cases} \Longrightarrow f(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + 1$

- Las pendientes de las rectas tangentes a la función en 0 y 1 son iguales y, por tanto, estas rectas son paralelas.

- $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 \Longrightarrow f''(x) = 6x - 3 \Longrightarrow f''(-1) = -9 < 0 \Longrightarrow x = -1$ es un máximo relativo.

Problema 3.14.6 El diseño del nuevo logo de Climbing Sports se ajusta en altura a la gráfica de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 2x + a & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ b(x-3)^2 & \text{si} \quad 2 \le x \le 3 \end{cases}$$



a) Calcula los valores de a y b.

b) El material de la parte más oscura elevará el coste de producción de las pruebas de la marca. ¿Cuánto vale el área de dicha parte?

Solución:

a) La función es continua en $[0,3]$. Hay que imponer la continuidad en $x = 1$ y en $x = 2$:

- En $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2x+a) = 2 + a \\ f(1) = 2 + a \end{array} \right. \Longrightarrow 1 = 2 + a \Longrightarrow a = -1$$

- En $x = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (2x+a) = 4 + a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} b(x-3)^2 = b \\ f(2) = b \end{array} \right. \Longrightarrow 4 + a = b \Longrightarrow a - b = -4$$

- $\left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ a - b = -4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 3 \end{array} \right.$

b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ 3(x-3)^2 & \text{si} \quad 2 \le x \le 3 \end{cases}$

$$S = \left| \int_2^3 3(x-3)^2\,dx \right| = 3 \left| \int_2^3 (x^2 - 6x + 9)\,dx \right| = 3 \left| \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x \right]_2^3 \right| = 1\ u^2$$

3.15. Madrid

3.15.1. Modelo

Problema 3.15.1 Se considera la función real de variable real $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Calcule $\displaystyle\int_0^1 2xf(x)\,dx$

Solución:

a) $x = a = 0 \Longrightarrow b = f(0) = 1$
$f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Longrightarrow m = f'(0) = 0$
$y - b = m(x-a) \Longrightarrow y - 1 = 0 \Longrightarrow y = 1$

b) $F(x) = \displaystyle\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int 2x(1+x^2)^{1/2}\,dx = \begin{bmatrix} t = 1+x^2 \\ dt = 2xdx \\ dx = \dfrac{dt}{2x} \end{bmatrix} = \int 2xt^{1/2}\,\dfrac{dt}{2x} = \int t^{1/2}\,dt =$
$\dfrac{t^{3/2}}{3/2} + C = \dfrac{2\sqrt{(1+x^2)^3}}{3} + C$
$\displaystyle\int_0^1 2xf(x)\,dx = F(1) - F(0) = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{2}-2}{3} \simeq 1,219$

Problema 3.15.2 Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{10}{x^2+2x-3}$$

a) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule sus asíntotas.

b) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine los extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.

Solución:

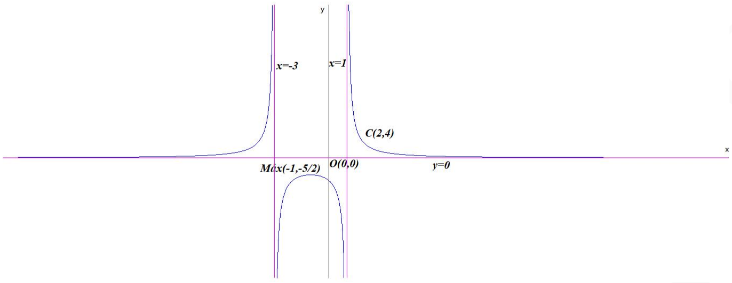
a) $x^2 + 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = -3 \Longrightarrow \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$.
Asíntotas:

- Verticales:
  - En $x = -3$:
$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -3^-} \frac{10}{x^2+2x-3} = \left[\frac{10}{0^+}\right] = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -3^+} \frac{10}{x^2+2x-3} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$
  - En $x = 1$:
$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{10}{x^2+2x-3} = \left[\frac{10}{0^-}\right] = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{10}{x^2+2x-3} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$
- Horizontales: $y = 0$.
$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{10}{x^2+2x-3} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^3+4}{x^2} = 0$$
- Oblícuas: No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\dfrac{20(x+1)}{(x^2+2x-3)^2} = 0 \Longrightarrow x = -1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (-3, -1)$, y decreciente en el intervalo $(-1, 1) \cup (1, \infty)$, tiene un máximo relativo en el punto $\left(-1, -\dfrac{5}{2}\right)$.



Problema 3.15.3 Considere la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x & \text{si} \quad x \le 2 \\ \\ \ln(x-1) & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la función $f(x)$ es continua en su dominio.

b) Para $a = 1$, halle el área de la región acotada delimitada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$, $x = 0$.

Solución:

a) Las dos ramas son continuas.
Estudiamos la continuidad en $x = 2$

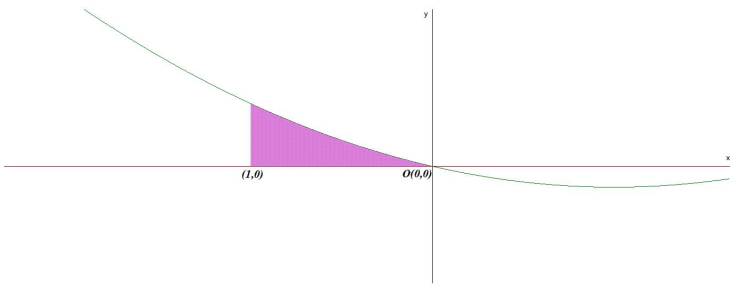
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} \left(ax^2 - 2x\right) = 4a - 4 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} \ln(x-1) = 0 \\ \\ f(2) = 4a - 4 \end{cases} \Longrightarrow 4a - 4 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

Si $a = 1 \Longrightarrow f$ es continua en todo el dominio de la función $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

b) En esa rama $f(x) = x^2 - 2x$ que corta al eje de abscisas en $x = 0$. Luego el único punto de corte con el eje OX está en la frontera del intervalo $[-1, 0]$.

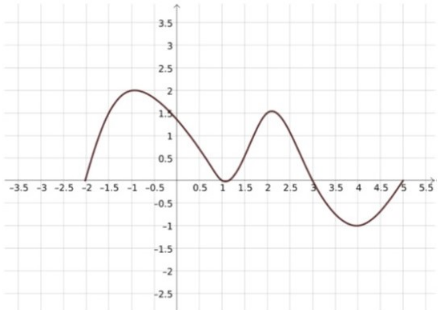
$$S_1 = \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} = \frac{4}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{4}{3} \simeq 1{,}3333\ u^2$$



3.15.2. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.15.4 La figura dada representa la gráfica de cierta función f.



La gráfica representada tiene tangentes horizontales en $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$ y $x = 4$.

a) Determine razonadamente los intervalos en los que $f'(x) > 0$.

b) Determine razonadamente cuál es el signo de

$$\int_{-2}^{5} f(x)\,dx$$

Solución:

a) $f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ creciente $(-2,-1) \cup (1,2) \cup (4,5)$.

b) $\displaystyle\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = \int_{-2}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{5} f(x)\,dx = S_1 + S_2$

Tenemos $S_1 > 0$, $S_2 < 0$ y $|S_1| > |S_2| \Longrightarrow S_1 + S_2 > 0$

Problema 3.15.5 Considere la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

a) Determine sus asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).

b) Calcule $f'(x)$ y halle el valor de $f'(2)$.

Solución:

a) Asíntotas:

☛ Verticales: $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = +\infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

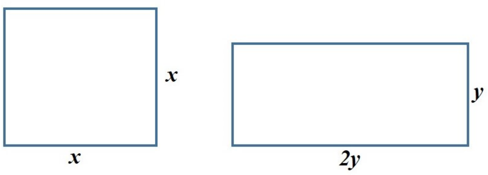
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x - 1}\right) = 0$$

$$y = x$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \Longrightarrow f'(2) = 0$

Problema 3.15.6 Un escultor quiere dividir un alambre muy fino en dos trozos que se utilizarán para delimitar, respectivamente, un cuadrado y un rectángulo cuya base debe medir el doble que su altura. Posteriormente, se fabricarán ambas figuras planas con un material que cuesta 16 céntimos de euro/cm^2 para el cuadrado y 10 céntimos de euro/^{2} para el rectángulo. Si el alambre inicial mide 450 cm, determine la función de coste total de ambas figuras. Obtenga la longitud de cada trozo de alambre para que el coste total de estas piezas sea mínimo.
Sugerencia: Exprese el coste total en función de la altura del rectángulo y utilice 3 cifras decimales para realizar los cálculos.
Solución:



- $L(x, y) = 4x + 6y = 450 \Longrightarrow y = \dfrac{225 - 2x}{3}$
- $C(x, y) = 16x^2 + 20 \cdot y^2 \Longrightarrow$
  $C(x) = 16x^2 + 20\left(\dfrac{225 - 2x}{3}\right)^2 = \dfrac{4(56x^2 - 4500x + 253125)}{9}$
- $C'(x) = \dfrac{16(28x - 1125)}{9} = 0 \Longrightarrow x = 40,179$ cm $C''(x) = \dfrac{448}{9} \Longrightarrow C''(40,179) = \dfrac{448}{9} > 0 \Longrightarrow x = 40,179$
  cm es un mínimo relativo, con $y = \dfrac{225 - 2 \cdot 40,179}{3} = 48,214$ cm
- Para el cuadrado necesita $4x = 4 \cdot 40,179 = 160,714$ cm y para hacer el rectángulo $6y = 6 \cdot 48,214 = 289,284$ cm

3.15.3. Convocatoria Ordinaria(coincidente)

Problema 3.15.7 Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} 2x - a & \text{si} \quad x < -2 \\ x^2 & \text{si} \quad -2 \le x \le 1 \\ x + b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Determine los valores de a y b que hacen que f sea continua en $\mathbb{R}$.

b) Para $a = b = -8$, calcule

$$\int_{-3}^{0} f(x)\, dx$$

Solución:

a) Las tres ramas son continuas, habrá que estudiar la continuidad en $x = -2$ y $x = 1$.
En $x = -2$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} (2x - a) = -4 - a \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} x^2 = 4 \\ f(-2) = 4 \end{cases} \Longrightarrow -4 - a = 4 \Longrightarrow a = -8$$

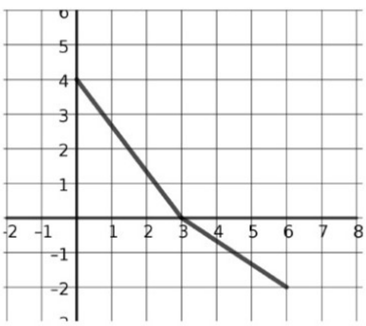
En $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x + b) = 1 + b \\ f(1) = 1 \end{cases} \Longrightarrow 1 = 1 + b \Longrightarrow b = 0$$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x + 8 & \text{si} \quad x < -2 \\ x^2 & \text{si} \quad -2 \le x \le 1 \\ x - 8 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ $\displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)\, dx = \int_{-3}^{-2} (2x{+}8)\, dx + \int_{-2}^{0} x^2\, dx = x^2 + 8x\Big]_{-3}^{-2} + \frac{x^3}{3}\Big]_{-2}^{0} =$

$4 - 16 - (9 - 24) + 0 + \dfrac{8}{3} = \dfrac{17}{3}$

Problema 3.15.8 La siguiente figura representa la gráfica de una función lineal a trozos $f : [0, 6] \longrightarrow \mathbb{R}$



a) Determine razonadamente el valor de la integral definida $\int_0^3 f(x)\,dx$

b) ¿Cuál número es mayor, $\int_0^3 f(x)\,dx$ o $\int_0^6 f(x)\,dx$? Razone tu respuesta.

Solución:

a) $\int_0^3 f(x)\,dx = \left[S = \dfrac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}\right] = \dfrac{3\cdot 4}{2} = 6$

b) $\int_3^6 f(x)\,dx = -\dfrac{3\cdot 2}{2} = -3$

$\int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^6 f(x)\,dx = 6-3=3$

Luego $\int_0^3 f(x)\,dx > \int_0^6 f(x)\,dx$

Problema 3.15.9 Considere la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-K)^2}$$

a) Obtenga el valor de la constante K para que la recta tangente a la función en $x=9$ sea paralela al eje de las x. Indique la expresión de dicha recta.

b) Para $K=3$, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ y clasifique los extremos relativos de esta función.

Solución:

a) La pendiente de esta tangente $m = f'(9) = 0$.

$f'(x) = \dfrac{x^2(x-3k)}{(x-k)^3} \Longrightarrow f'(9) = \dfrac{243(k-3)}{(k-9)^3} = 0 \Longrightarrow K=3$

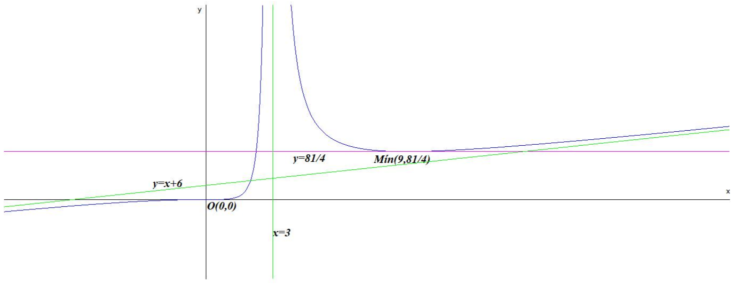
Para $K=3 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{x^3}{(x-3)^2} \Longrightarrow f(9) = \dfrac{81}{4}$

La recta horizontal es $y = \dfrac{81}{4}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-3)^2} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{x^2(x-9)}{(x-3)^3} = 0 \Longrightarrow x=0$ y $x=9$

	$(-\infty,0)$	$(0,3)$	$(3,9)$	$(9,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,0)\cup(0,3)\cup(9,\infty)$ y decreciente en el $(3,9)$. La función tiene un mínimo relativo en el punto $\left(9, \dfrac{81}{4}\right)$.



3.15.4. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.15.10 Considere las funciones reales de variable real $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x^2 + ax + 3$.

a) Se define $h(x)$ de la siguiente manera:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \le 1 \\ g(x) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

¿Qué valor debe darle a la constante $a \in \mathbb{R}$ para que la función h sea continua en $\mathbb{R}$?

b) Para $a = 2$, halle el área de la región acotada del plano que está delimitada por las gráficas de f y de g.

Solución:

a) $h(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -x^2 + ax + 3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ las dos ramas son polinómicas y continuas. Hay que estudiar la continuidad en $x = 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2 - 4x + 3) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (-x^2 + ax + 3) = a + 2 \\ h(1) = 0 \end{cases}$$

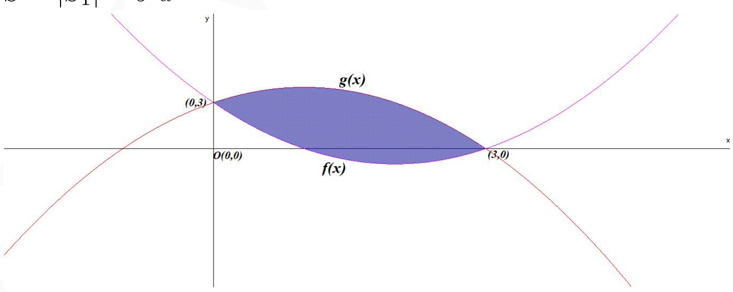
Para que h sea continua en $x = 1 \Longrightarrow a + 2 = 0 \Longrightarrow a = -2$

En conclusión si $a = -2$ la función h es continua en $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 2x + 3 \Longrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 3$.

$F(x) = \displaystyle\int (f(x) - g(x))\,dx = \int (2x^2 - 6x)\,dx = \frac{2x^3}{3} - 3x^2 + C$ $S_1 = \displaystyle\int_0^3 (f(x) - g(x))\,dx = F(3) - F(0) = -9$

$S = |S_1| = 9\ u^2$



Problema 3.15.11 a) Determine los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = ax + \dfrac{b}{x}$ verifique que $f(2) = 4$ y $f'(2) = 0$.

b) Encuentre todas las asíntotas de la función $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Solución:

a) $f(x) = ax + \dfrac{b}{x} \Longrightarrow f'(x) = a - \dfrac{b}{x^2}$

$$\left\{\begin{array}{l} f(2) = 4 \Longrightarrow 2a + \dfrac{b}{2} = 4 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow a - \dfrac{b}{4} = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4a + b = 8 \\ 4a - b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 4 \end{array}\right.$$

b) Asíntotas de $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

- ☛ Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- ☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$$

- ☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$y = x$$

Problema 3.15.12 Un investigador ha desarrollado un fertilizante para un determinado cultivo. Los estudios de mercado indican que los ingresos, $I(x)$, en miles de euros, vienen expresados por la función

$$I(x) = x\frac{170 - 0,85x}{5},$$

en la que x representa la demanda del producto, expresada en miles de litros. Por otra parte, los costes de producción que asume la empresa, en miles de euros, se expresan en función de la demanda mediante la función $C(x) = 10 + 2x + x^2$.

a) Proporcione una expresión para la función beneficio en términos de la demanda x y encuentre la cantidad de producto que debería venderse para maximizarlo. Obtenga también el beneficio máximo.

b) Determine entre qué valores debería encontrarse la cantidad demandada de fertilizante para que el coste medio, $C(x)/x$, no supere los diez mil euros.

Nota: Exprese los resultados con 2 cifras decimales.

Solución:

a) La función beneficio sería:
$B(x) = I(x) - C(x) = x\dfrac{170 - 0,85x}{5} - (10 + 2x + x^2) \Longrightarrow$
$B(x) = -\dfrac{117x^2 - 3200x + 1000}{100}$
$B'(x) = \dfrac{1600 - 117x}{50} = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1600}{117} \Longrightarrow 13675,21\,\text{litros}$
$B''(x) = -\dfrac{117}{50} \Longrightarrow B''\left(\dfrac{1600}{117}\right) < 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1600}{117}$ es un máximo relativo con un beneficio de $B\left(\dfrac{1600}{117}\right) = 208,8034188 \Longrightarrow 208803,42$€

b) $\dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{x^2 + 2x + 10}{x} \le 10 \Longrightarrow \dfrac{x^2 + 2x + 10}{x} - 10 \le 0 \Longrightarrow$
$\dfrac{x^2 - 8x + 10}{x} \le 0 \Longrightarrow x \in [1,550510257; 6,449489742]$.
Los costes medios inferiores a 10.000 euros se consiguen con una producción comprendida entre 1550,51 y 6449,48 litros.

3.15.5. Convocatoria Extraordinaria (coincidente)

Problema 3.15.13 a) Halle $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2x^2 + 5}\,dx$

b) Considere $f(x) = \dfrac{x}{2x^2 + 5}$ y $g(x) = \ln x$
Halle la derivada de la función compuesta $f \circ g(x)$

Solución:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2x^2 + 5}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4x}{2x^2 + 5}\,dx = \frac{1}{4}\ln|2x^2 + 5|\Big]_0^1 =$
$\dfrac{1}{4}(\ln 7 - \ln 5) = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{7}{5} \simeq 0,08412$

b) Por la regla de la cadena $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$
$f'(x) = -\dfrac{2x^2 - 5}{(2x^2 + 5)^2} \Longrightarrow f'(g(x)) = -\dfrac{2(\ln x)^2 - 5}{(2(\ln x)^2 + 5)^2}$
$g'(x) = \dfrac{1}{x}$
$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = -\dfrac{2(\ln x)^2 - 5}{(2(\ln x)^2 + 5)^2} \cdot \dfrac{1}{x} = -\dfrac{2(\ln x)^2 - 5}{x(2(\ln x)^2 + 5)^2}$

Problema 3.15.14 Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 1 & \text{si } x \le 1 \\ (x - a)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ que hacen que f sea una función continua en su dominio.

b) Para $a = 1/2$, determine, si existen, los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de las x.

Solución:

a) Las ramas son continuas, son polinomios, hay que calcular a en $x = 1$:
$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (ax^2 - 1) = a - 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x-a)^2 = (1-a)^2 \\ f(1) = a - 1 \end{cases} \Longrightarrow a - 1 = (1-a)^2 \Longrightarrow a = 1$ y $a = 2$. Con cualquiera de estos valores la función f es continua en el dominio de la función.

b) Si $a = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

En la rama $x \le 1$ es $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 1$

Corte con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow \dfrac{x^2}{2} - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ la solución positiva no es válida está fuera del intervalo, luego el punto de corte es $(-\sqrt{2}, 0)$

En la rama $x > 1$ es $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$

Corte con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ la solución no es válida está fuera del intervalo.

Problema 3.15.15 Un ensayo clínico indica que la cantidad de glucosa en sangre en ratones tras la ingesta de un determinado fármaco depende del tiempo transcurrido, t (en minutos), según la siguiente función expresada en mg/dl:

$$f(t) = 90 + Ct^2 e^{-t/5}, \quad 0 \le t \le 60$$

a) Obtenga razonadamente el valor de la constante C sabiendo que la tasa de variación instantánea de la cantidad de glucosa a los 5 minutos de la ingesta del producto es $15/e$.

b) Para $C = 3$, indique a partir de qué momento disminuye la cantidad de glucosa en sangre. Señale también la cantidad máxima de glucosa en sangre alcanzada tras la ingesta del fármaco.

Nota: Exprese los resultados con 2 cifras decimales.

Solución:

a) $f'(t) = \dfrac{Cte^{-t/5}(10-t)}{5}$, $f'(5) = \dfrac{5C}{e} = \dfrac{15}{e} \Longrightarrow C = 3$

b) Si $C = 3 \Longrightarrow f(t) = 90 + 3t^2 e^{-t/5}$ y $f'(t) = \dfrac{3te^{-t/5}(10-t)}{5} = 0 \Longrightarrow t = 10$

	$(0, 10)$	$(10, 60)$
$f'(t)$	$+$	$-$
$f(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(0, 10)$ y decrece en el $(10, 60)$ con un máximo relativo en el punto $(10; 130, 60)$.
La cantidad de glucosa aumenta hasta los 10 minutos donde alcanza el máximo con 130,60 mg/dl. A partir de este tiempo decrece hasta los 60 minutos.

3.16. Murcia

3.16.1. Convocatoria Ordinaria

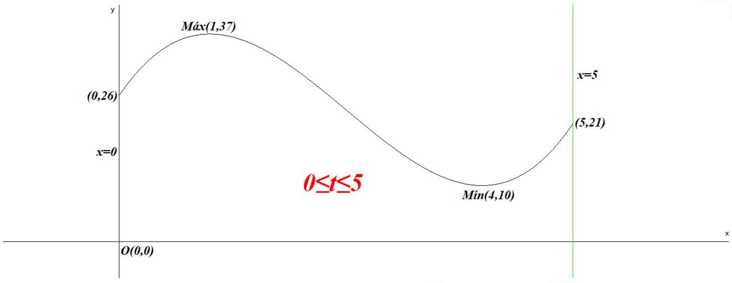
Problema 3.16.1 Se estima que los beneficios, en miles de euros, obtenidos en una sala de conciertos inaugurada hace 5 años, viene dado por la función $B(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 26$ donde $t \in [0, 5]$ es el tiempo, medido en años, que lleva funcionando la sala. Se quiere conocer:

a) ¿En qué momento se alcanza el máximo beneficio de la sala de conciertos? Razone su respuesta

b) ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

Solución:

a) $B'(t) = 6t^2 - 30t + 24 = 0 \Longrightarrow t = 1$ y $t = 4$
$$B''(t) = 12t - 30 \Longrightarrow \begin{cases} B''(1) = -18 < 0 \Longrightarrow t = 1 \text{ Máximo relativo} \\ B''(4) = 18 > 0 \Longrightarrow t = 4 \text{ Mínimo relativo} \end{cases}$$
Tenemos $(1, 37)$ Máximo relativo y $(4, 10)$ Mínimo relativo. Además $B(0) = 26$ y $B(5) = 21$, luego estos extremos son absolutos.



El mayor beneficio se obtiene al cumplirse el primer año.

b) El beneficio máximo es de $B(1) = 37 \Longrightarrow 37000$€

Problema 3.16.2 Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - kx + 3 & \text{si} \quad x \le 2 \\ 2x + k & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

a) Calcular el valor de k para que la función sea continua en $x = 2$.

b) Para este valor determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -1$.

Solución:

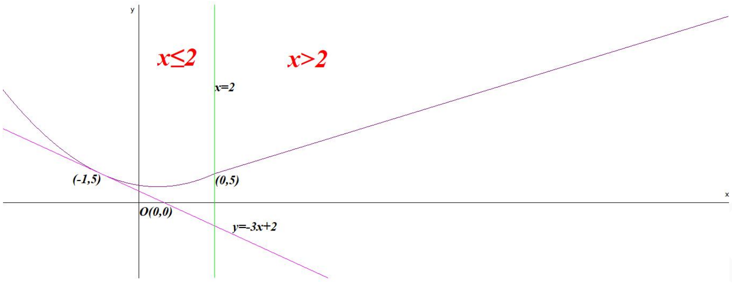
a) Continuidad en $x = 2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2 - kx + 3) = 7 - 2k \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (2x + k) = 4 + k \\ f(2) = 7 - 2k \end{cases} \Longrightarrow 7 - 2k = 4 + k \Longrightarrow k = 1$$

b) Si $k = 1$:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & \text{si} \quad x \le 2 \\ 2x + 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si} \quad x < 2 \\ 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$
Como $f'(2^-) = 3$ y $f'(2^+) = 2$ la función no es derivable en $x = 2$.

En $x=-1 \Longrightarrow m=f'(-1)=-3$ y $b=f(a)=f(-1)=5$

$$y-b=m(x-a) \Longrightarrow y-5=-3(x+1) \Longrightarrow y=-3x+2$$



Problema 3.16.3 Dada la función $f(x)=x^2e^x$, calcule:

a) El dominio de definición de la función.

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Máximos y mínimos locales.

d) Calcule la derivada de la función $f(x)=x^2e^x$ en el punto de abscisa $x=1$.

Solución:

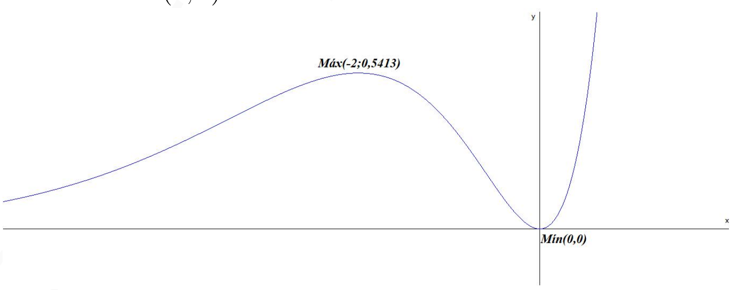
a) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$

b) $f'(x)=e^x(x^2+2x)=0 \Longrightarrow x=0$ y $x=-2$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$ y decreciente en el $(-2,0)$

c) La función tiene un máximo relativo en el punto $\left(-2,\dfrac{4}{e^2}\right)\simeq(-2;0,5413)$ y un mínimo relativo en el $(0,0)$



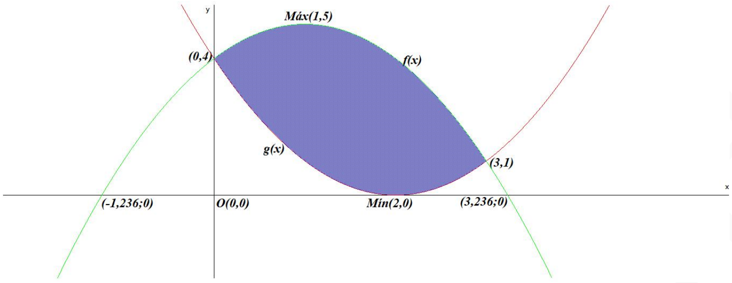
d) $f'(1)=e(1+2)=3e$

Problema 3.16.4 Representar la región del plano limitado por las parábolas $f(x)=-x^2+2x+4$ y $g(x)=x^2-4x+4$. Calcular su área.

Solución:
Los puntos de corte entre las dos gráficas son:

$$-x^2 + 2x + 4 = x^2 - 4x + 4 \Longrightarrow -2x^2 + 6x = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow (0, 4), \quad x = 3 \Longrightarrow (3, 1)$$

Para $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ tenemos corte con el eje OY el $(0, 4)$ y con el OX hacemos $f(x) = -x^2 + 2x + 4 = 0 \Longrightarrow (-1, 236; 0)$ y $(3, 236; 0)$. $f'(x) = -2x + 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$, $f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(1) = -2 < 0 \Longrightarrow (1, 5)$ es un máximo.
Para $g(x) = x^2 - 4x + 4$ tenemos corte con el eje OY el $(0, 4)$ y con el OX hacemos $f(x) = x^2 - 4x + 4 = 0 \Longrightarrow (2, 0)$. $f'(x) = 2x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$, $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(2) = 2 > 0 \Longrightarrow (2, 0)$ es un mínimo.



$$S_1 = \int_0^3 (-x^2 + 2x + 4 - (x^2 - 4x + 4))\,dx = \int_0^3 (-2x^2 + 6x)\,dx = -\frac{2x^3}{3} + 3x^2\Big]_0^3 = 9$$

$$S = |S_1| = 9\ u^2$$

Problema 3.16.5 Dada la función $f(x) = \dfrac{2xe^{x^2}}{e^{x^2} + 2}$

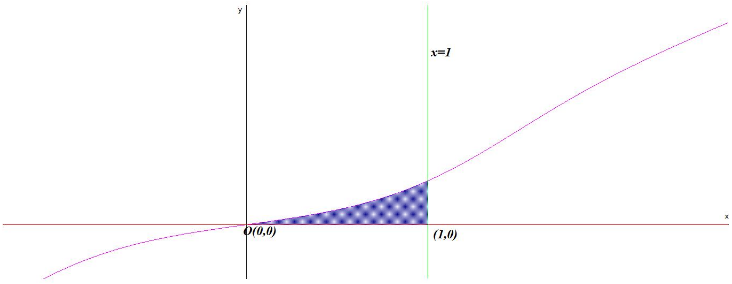
a) $\displaystyle\int \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2} + 1}\,dx$

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisa y la recta $x = 1$.

Solución:

a) $\displaystyle\int \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2} + 1}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = e^{x^2} + 1 \\ dt = 2xe^{x^2}dx \\ dx = \dfrac{dt}{2xe^{x^2}} \end{array}\right] = \int \frac{2xe^{x^2}}{t}\,\frac{dt}{2xe^{x^2}} = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln\left|e^{x^2} + 1\right| + C$

b) $f(x) = \dfrac{2xe^{x^2}}{e^{x^2} + 2} = 0 \Longrightarrow 2xe^{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$
$\displaystyle S_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \ln\left|e^{x^2} + 2\right|\Big]_0^1 = \ln\frac{e + 2}{3} \simeq 0,4528$ $S = |S_1| = \ln\dfrac{e + 2}{3} \simeq 0,4528\ u^2$



3.16.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.16.6 La ecuación de demanda de un determinado producto viene dado por la expresión $p = 400 - 2q$, y su función de coste total es $C(q) = 0,2q^2 + 4q + 400$ donde q es el número de unidades de dicho producto y p se expresa en euros por unidad. Determine:

a) La expresión de la función de beneficios de la empresa.

b) El nivel de producción, q, para el que se maximiza la función de beneficios de la empresa.

c) El precio para el que el beneficio es máximo.

d) El beneficio máximo.

Solución:

a) Ingresos: $I(q) = q(400 - 2q)$
Costes: $C(q) = 0,2q^2 + 4q + 400$
Beneficio: $B(q) = I(q) - C(q) = q(400 - 2q) - 0,2q^2 - 4q - 400 = -2,2q^2 + 396q - 400$

b) $B'(q) = -4,4q + 396 = 0 \Longrightarrow q = 90$ unidades
$B''(q) = -4,4 \Longrightarrow B''(90) = -4,4 < 0 \Longrightarrow q = 90$ es un Máximo relativo.

c) $p = 400 - 2 \cdot 90 = 220€$

d) El beneficio máximo es de $B(90) = 17420€$

Problema 3.16.7 Sea la función $f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} xe^x & \text{si} & x \le 0 \\ ax + b & \text{si} & 0 < x < 1 \\ 1 + x\ln x & \text{si} & x \ge 1 \end{array} \right.$

a) Calcular el valor de los parámetros a y b para que la función sea continua en todo su dominio.

b) Para este valor determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

a) ☛ Las ramas son continuas, hay que imponer la continuidad en $x = 0$ y $x = 1$

☛ Continuidad en $x = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (xe^x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (ax + b) = b \\ f(0) = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow b = 0$$

☛ Continuidad en $x = 1$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (ax+b) = a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (1+x\ln x) = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow a+b=1$$

☛ $\left\{\begin{array}{l} b=0 \\ a+b=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=0 \end{array}\right.$

b) $f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} xe^x & \text{si} & x\le 0 \\ x & \text{si} & 0<x<1 \\ 1+x\ln x & \text{si} & x\ge 1 \end{array}\right. \Longrightarrow f'(x) = \left\{\begin{array}{ccc} (x+1)e^x & \text{si} & x<0 \\ 1 & \text{si} & 0<x<1 \\ 1+\ln x & \text{si} & x\ge 1 \end{array}\right.$

En $x = 0$: $f'(0^-) = 0$ y $f'(0^+) = 1 \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.
En $x = 1$: $f'(1^-) = 1$ y $f'(1^+) = 1 \Longrightarrow f$ si es derivable en $x = 1$ y $m = f'(1) = 1$.
Por otra parte $b = f(a) = f(1) = 1$ e $y - b = m(x - a) \Longrightarrow y - 1 = x - 1 \Longrightarrow y = x$

Problema 3.16.8 Dada la función $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2-4}$, calcule:

a) El dominio de definición de la función y el punto de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas verticales y horizontales, si las hay.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Máximos y mínimos locales.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$ Puntos de corte:

☛ Con OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow \left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$

☛ Con OX hacemos $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2-4} = 0 \Longrightarrow (-1, 0)$ y $(1, 0)$

b) Asíntotas:

☛ Verticales:

- En $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \left[\frac{-3}{0^-}\right] = +\infty; \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \left[\frac{-3}{0^+}\right] = -\infty$$

- En $x = -2$:

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \left[\frac{-3}{0^+}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\to -2^+} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \left[\frac{-3}{0^-}\right] = +\infty$$

☛ Horizontales: $y = -1$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \lim_{x\to \infty} \frac{1-x^2}{x^2-4} = -1$$

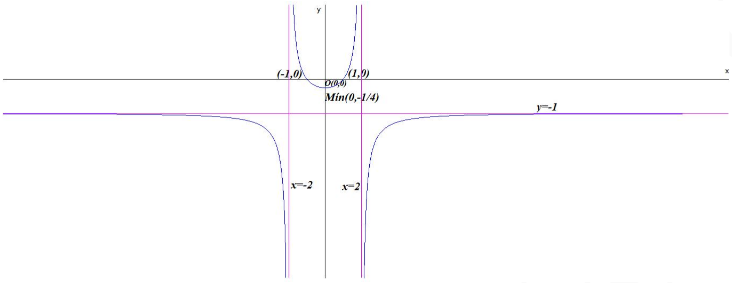
☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

c) $f'(x) = \dfrac{6x}{(x^2-4)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(0,2)\cup(2,\infty)$ y decreciente en el $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$

d) La función tiene un mínimo relativo en el punto $\left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$



Problema 3.16.9 Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

a) Calcular la derivada $f'(x)$

b) Calcular $\displaystyle\int f(x)\, dx$

c) Calcular $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$

Solución:

a) $f'(x) = -\dfrac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$

b) $$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = 1+x^2 \\ dt = 2x dx \\ dx = \dfrac{dt}{2x} \end{array}\right] = \int \frac{x}{t}\,\frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C$$

c) $$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\Big]_0^1 = \frac{\ln 2}{2} \simeq 0,3466$$

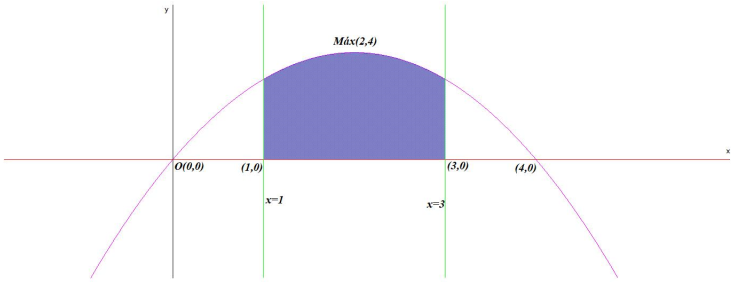
Problema 3.16.10 Dada la función $f(x) = 4x - x^2$:

a) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 3$

b) Calcule el área del recinto del apartado anterior.

Solución:

a) $f(x)$ es una parábola que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(4,0)$. $f'(x) = 4 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(2) = -2 < 0 \Longrightarrow (2,4)$ es un máximo relativo.



b) $S = \displaystyle\int_1^3 (4x - x^2)\,dx = 2x^2 - \frac{x^3}{3}\Big]_1^3 = \frac{22}{3}\ u^2$

3.17. Navarra

3.17.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.17.1 Sea la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$.

a) Estudie la continuidad de $f(x)$, clasificando los puntos de discontinuidad.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente en $x = 1$.

c) Calcule $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$. La función es continua en todo el dominio de la función
Analizamos la continuidad en $x = -2$:

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x}{x^2-4} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\to -2^+} \frac{x}{x^2-4} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty$$

En $x = -2$ la función es discontinua no evitable, hay un salto de $-\infty$ a $+\infty$.
Analizamos la continuidad en $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x^2-4} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

En $x = 2$ la función es discontinua no evitable, hay un salto de $-\infty$ a $+\infty$.

b) $f'(x) = -\dfrac{x^2+4}{(x^2-4)^2} \Longrightarrow m = f'(1) = -\dfrac{5}{9}$, $b = f(a) = f(1) = -\dfrac{1}{3}$ y $y - b = m(x-a) \Longrightarrow$ $y + \dfrac{1}{3} = -\dfrac{5}{9}(x-1) \Longrightarrow y = -\dfrac{5}{9}x + \dfrac{2}{9}$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-4}\,dx = \frac{\ln|x^2-4|}{2} + C$

Problema 3.17.2 Sea la función $f(x) = x(x-3)^2$

a) Calcule los puntos de corte con los ejes.

b) Calcule los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Dibuje el recinto limitado por la función $f(x)$ y el eje OX.

d) Calcule el área de dicho recinto.

Solución:

a) Puntos de corte

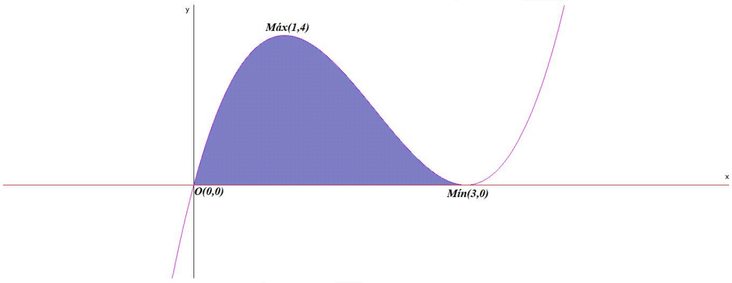
- Con OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
- Con OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x(x-3)^2 = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ y $(3, 0)$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = 3$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ y decreciente en el $(1, 3)$.
Hay un máximo relativo en el punto $(1, 4)$ y un mínimo relativo en el $(3, 0)$

c) El recinto estaría entre $x = 0$ y $x = 3$:



d) $S = \displaystyle\int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 9\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{27}{4} \simeq 6,75\ u^2$

3.17.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.17.3 Se pide:

a) Calcule la derivada de la siguiente función: $y = \dfrac{3}{(2x-3)^2} + \ln(2x^4 - 3)$

b) Calcule la siguiente integral: $\displaystyle\int (\sin 2x + e^{x/5})\,dx$

c) Calcule la siguiente integral: $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{2x^2+1}\,dx.$

Solución:

a) $y' = \dfrac{-12(2x-3)}{(2x-3)^4} + \dfrac{8x^3}{2x^4-3} = \dfrac{-12}{(2x-3)^3} + \dfrac{8x^3}{2x^4-3}$

b) $\displaystyle\int (\sin 2x + e^{x/5})\,dx = \int \sin 2x\,dx + \int e^{x/5})\,dx = \frac{1}{2}\int 2\sin 2x\,dx + 5\int \frac{1}{5}e^{x/5})\,dx = -\cos 2x + 5e^{x/5} + C$

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{2x^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{4x}{2x^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\ln|2x^2+1|\Big]_1^2 = \frac{\ln 3}{4} \simeq 0,2747$

Problema 3.17.4 Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, responda a las siguientes cuestiones:

a) Determine el valor de los parámetros a y b de forma que la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$ y la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ tenga pendiente $m = -2$.

b) Tomando los valores $a = -2$ y $b = -4$, determine los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de la función $f(x)$.

Solución:

a) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$\left\{\begin{array}{l} f'(1) = 0 \Longrightarrow 3 + 2a + b = 0 \\ f'(0) = -2 \Longrightarrow b = -2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -\dfrac{1}{2} \\ \\ b = -2 \end{array}\right.$$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{2}{3}$ y $x = 2$.

	$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$	$\left(-\frac{2}{3}, 2\right)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $\left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right) \cup (2, \infty)$ y decreciente en el $\left(-\dfrac{2}{3}, 2\right)$.

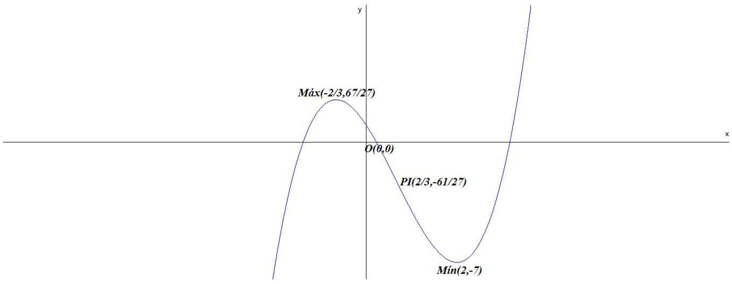
Hay un máximo relativo en el punto $\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{67}{27}\right)$ y un mínimo relativo en el $(2, -7)$

$f''(x) = 6x - 4 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{2}{3}$

	$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa $\frown$ en el intervalo $\left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right)$ y concava $\smile$ en el intervalo $\left(\dfrac{2}{3}, \infty\right)$.

Tiene un punto de inflexión en $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{61}{27}\right)$



3.18. País Vasco

3.18.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.18.1 Sea la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{1-2x} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - x - a & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$.

a) Encuentra el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x = 0$.

b) En el caso $a = 2$, analiza los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, y los máximos y mínimos relativos.

c) En el caso $a = 2$, realiza la representación gráfica de la función.

Solución:

a) Las dos ramas son continuas en su dominio, para que sea continua en $x = 0$ se tiene que cumplir

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x+1}{1-2x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^2 - x - a\right) = -a \\ f(0) = -a \end{cases} \Longrightarrow -a = 1 \Longrightarrow a = -1$$

b) Si $a = 2$ la función no es continua y sería $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{1-2x} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - x - 2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{(2x-1)^2} > 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

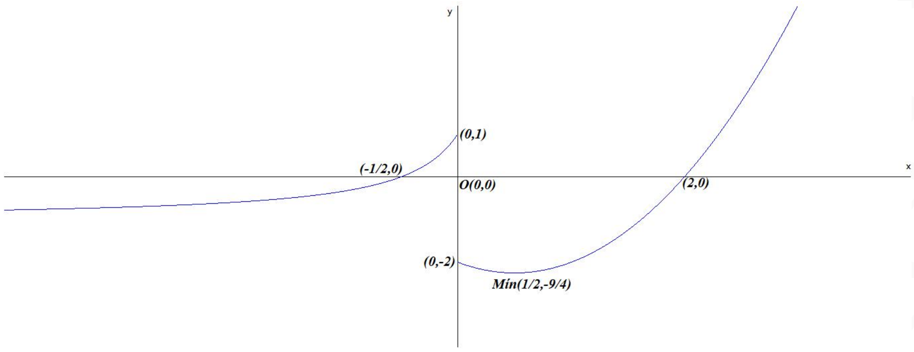
	$(-\infty, 0)$	$(0, 1/2)$	$(1/2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$ y decrece en el $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

La función presenta un mínimo relativo en el punto $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{9}{4}\right)$.

No hay máximo relativo en $x = 0$ por no ser continua en ese punto.

c) Representación:



Problema 3.18.2 Se pide:

a) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = (x^2 - 1)(3x^3 + 5x)^3 \qquad g(x) = \frac{\ln(3x)}{e^{2x}}$$

b) Determina la ecuación de la recta tangente a la función $h(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

$$h(x) = \frac{3x + 6}{2x + 1}$$

c) Determina, si existen, las asíntotas verticales y horizontales de la función $h(x)$.

d) Calcula: $\displaystyle\int \left(e^{3x} - 3x^2 + \frac{2}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2} \right) dx$

Solución:

a) $f'(x) = 2x(3x^3 + 5x)^3 + 3(x^2 - 1)(9x^2 + 5)(3x^3 + 5x)^2 = (3x^3 + 5x)^2(33x^4 - 2x^2 - 15)$

$$g'(x) = \frac{\frac{3}{3x}e^{2x} - 2\ln(3x)e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{\frac{1}{x} - 2\ln(3x)}{e^{2x}} = \frac{1 - 2x\ln(3x)}{xe^{2x}}$$

b) $b = h(a) = h(1) = 3$, $h'(x) = \dfrac{-9}{(2x+1)^2} \Longrightarrow m = h'(1) = -1$, $y - b = m(x - a) \Longrightarrow y - 3 = -(x - 1) \Longrightarrow y = -x + 4$

c) Asíntotas:

- Verticales: en $x = -\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x \to -1/2^-} \frac{3x+6}{2x+1} = \left[\frac{9/2}{0^-}\right] = -\infty; \qquad \lim_{x \to -1/2^+} \frac{3x+6}{2x+1} = \left[\frac{9/2}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = \dfrac{3}{2}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x+6}{2x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x+6}{2x+1} = \frac{3}{2}$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

d) $\displaystyle\int \left(e^{3x} - 3x^2 + \frac{2}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2} \right) dx = \frac{e^{3x}}{3} - x^3 + 2\ln|x+2| + \frac{4}{x+2} + C$

3.18.2. Convocatoria Extraordinaria

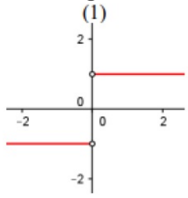
Problema 3.18.3 Se pide:

a) Asocia, razonadamente, las funciones:

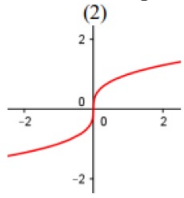
$$A)\ f(x) = \frac{x}{x^2-1};\quad B)\ g(x) = \frac{|x|}{x};\quad C)\ h(x) = \sqrt[3]{x}$$

con las siguientes representaciones gráficas:

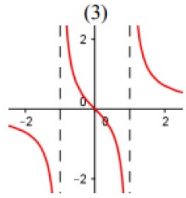
(1)



(2)



(3)



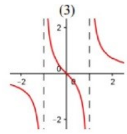
b) En cada caso, a partir de su representación gráfica, indica el dominio y recorrido de la función.

Solución:

a) ☛ $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

pasa por el punto $(0,0)$, tiene dos asíntotas verticales en $x = \pm 1$, una horizontal en $y = 0$ y es impar (simétrica respecto al origen de coordenadas)

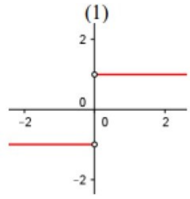
(3)



☛ $g(x) = \dfrac{|x|}{x} =$

$$\begin{cases} \dfrac{-x}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

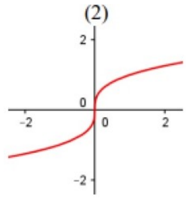
(1)



☛ $h(x) = \sqrt[3]{x}$

es una función que pasa por el origen de coordenadas y es impar.

(2)



b) ☛ $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ y $\text{Rec}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

☛ $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$

$\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{0\}$ y $\text{Rec}(g) = \{-1, 1\}$

☛ $h(x) = \sqrt[3]{x}$

$\text{Dom}(h) = \mathbb{R}$ y $\text{Rec}(h) = \mathbb{R}$

Problema 3.18.4 La velocidad que lleva un patinete $v(t)$, en función del tiempo t, viene dada por la siguiente función:

$$v(t) = \begin{cases} 7t^2 & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ 2t + a & \text{si} \quad 1 \le t \le 5 \\ -t^2 + 12t + b & \text{si} \quad 5 < t \le 10 \end{cases}.$$

a) Determina los valores de a y b para que la función $v(t)$ sea continua en los instantes $t = 1$ y $t = 5$.

b) Para $a = 5$ y $b = -20$, ¿en qué momento el patinete alcanza la velocidad máxima? Concreta la velocidad máxima mencionada.

c) En el caso $a = 5$ y $b = -20$, realiza la representación gráfica de la función.

Solución:

a) ☛ Continua el $t = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 1^-} v(t) = \lim\limits_{t\to 1^-} 7t^2 = 7 \\ \lim\limits_{t\to 1^+} v(t) = \lim\limits_{t\to 1^+} (2t + a) = 2 + a \\ v(1) = 2 + a \end{array} \right. \Longrightarrow 7 = 2 + a \Longrightarrow a = 5$$

☛ Continua el $t = 5$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 5^-} v(t) = \lim\limits_{t\to 5^-} (2t + a) = 10 + a \\ \lim\limits_{t\to 5^+} v(t) = \lim\limits_{t\to 5^+} \left(-t^2 + 12t + b\right) = 35 + b \\ v(5) = 10 + a \end{array} \right. \Longrightarrow 10 + a = 35 + b \Longrightarrow a - b = 25$$

☛ $\left\{ \begin{array}{l} a = 5 \\ a - b = 25 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 5 \\ b = -20 \end{array} \right.$

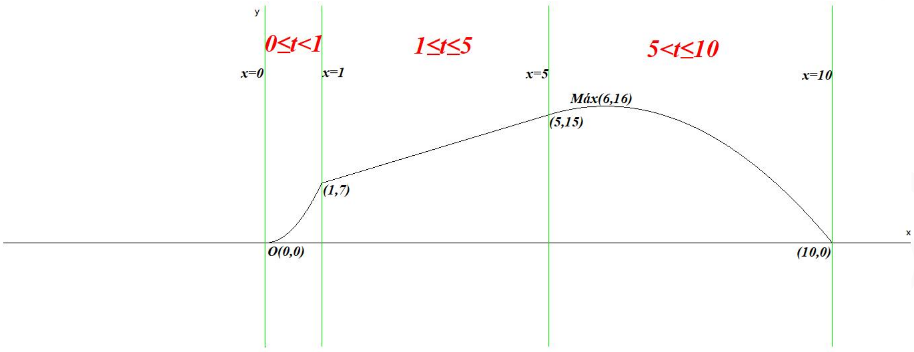
b) $v(t) = \begin{cases} 7t^2 & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ 2t + 5 & \text{si} \quad 1 \le t \le 5 \\ -t^2 + 12t - 20 & \text{si} \quad 5 < t \le 10 \end{cases} \Longrightarrow$

$$v'(t) = \begin{cases} 14t = 0 \Longrightarrow t = 0 & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ 2 > 0 & \text{si} \quad 1 \le t \le 5 \\ -2t + 12 = 0 \Longrightarrow t = 6 & \text{si} \quad 5 < t \le 10 \end{cases}.$$

	$(0,1)$	$(1,5)$	$(5,6)$	$(6,10)$
$v'(t)$	$+$	$+$	$+$	$-$
$v(t)$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo (0,6) y decreciente en el (6,10), con un máximo relativo en el punto (6,16) La velocidad es máxima cuando $t = 6$ y es de 16.

c) Representación gráfica:


y
0≤t<1
1≤t≤5
5<t≤10
x=0
x=1
x=5
x=10
Máx(6,16)
(5,15)
(1,7)
x
O(0,0)
(10,0)

Capítulo 4

Probabilidad

4.1. Resúmenes teóricos

Frecuencia absoluta de un suceso A es el número de veces que se repite dicho suceso $\Longrightarrow f(A)$

Frecuencia relativa de un suceso A es la proporción de veces que ha sucedido A de N experiencias $\Longrightarrow f_r(A) = \dfrac{f(A)}{N}$

Ley de los grandes números: $\lim\limits_{N \longrightarrow \infty} f_r(A) = P(A)$

Ley de Laplace: $P(A) = \dfrac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$

$\Omega \equiv$ **Espacio muestral** es el de todos los sucesos, sería el suceso seguro: $P(\Omega) = 1$.

$\emptyset \equiv$ **Espacio vacío** es el de ningún suceso, sería el suceso imposible: $P(\emptyset) = 0$.

Diagramas de Venn: (esquemas usados en la teoría de conjuntos)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

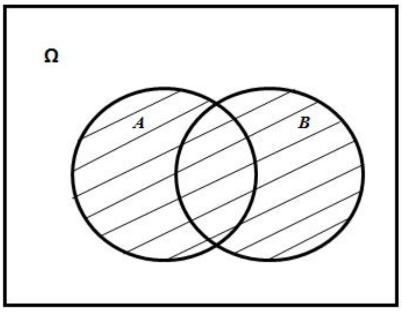
En el caso de que los dos sucesos sean incompatibles la fórmula quedaría:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Sucesos independientes: Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

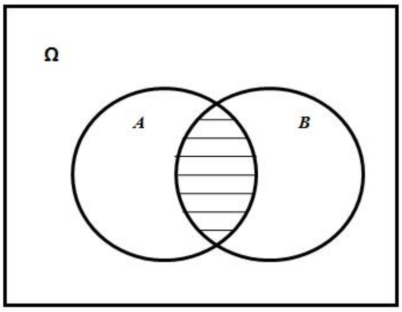
Leyes de Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

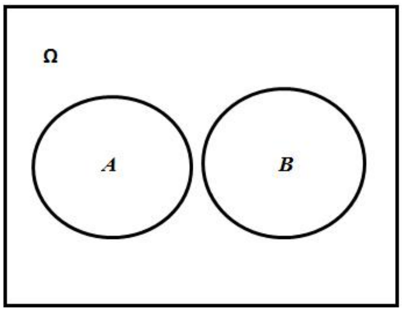
Probabilidad condicionada: es la probabilidad de que ocurra un suceso A sabiendo que ha ocurrido el suceso B: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$



Unión de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos del conjunto A con todos los de B: $A \cup B$

Intersección de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos comunes entre los conjuntos A y B: $A \cap B$



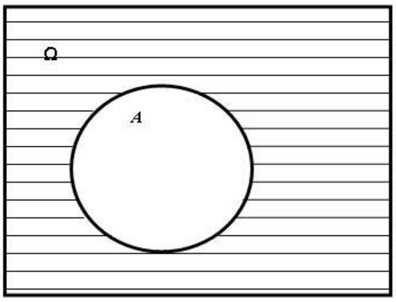


Sucesos Incompatibles: Dos sucesos son incompatibles si su intersección es vacía. $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cap B) = 0$

Teorema de Bayes: $P(A|B) = \dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

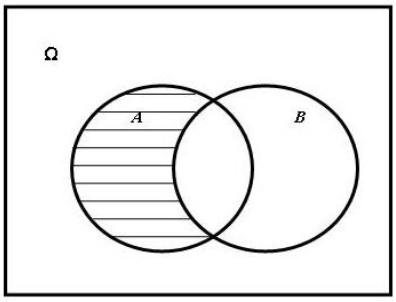
Teorema de la probabilidad total: Si $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \Omega$ y los sucesos A_i con $i = 1, ..., 5$ son incompatibles dos a dos (intersección vacía), entonces:

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) + P(A_4)P(A|A_4) + P(A_5)P(A|A_5)$$



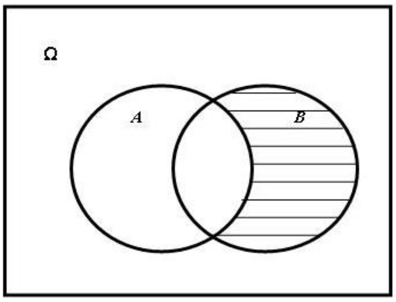
$\overline{A}$ es el suceso contrario o complementario de A:

$$\overline{A} = \Omega - A \Longrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$



$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

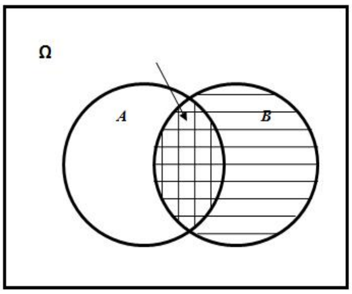


Organización por árboles:

Organización por tablas de contingencia:

	Renault	Seat	Mercedes	Totales
Blanco	15	20	10	45
Negro	300	455	200	955
	315	475	210	1000

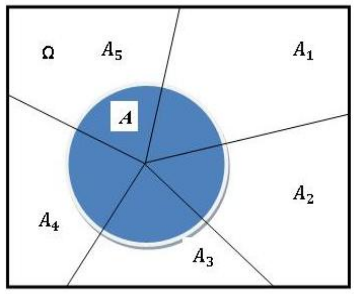
$$P(B|S) = \frac{20}{475},\ \ P(N|M) = \frac{200}{210},\ \ P(B) = \frac{45}{1000},\ \ P(M) = \frac{210}{1000}$$



Probabilidad condicionada:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

probabilidad total



$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1)+P(A_2)P(A|A_2)+P(A_3)P(A|A_3)+P(A_4)P(A|A_4)+P(A_5)P(A|A_5)$$

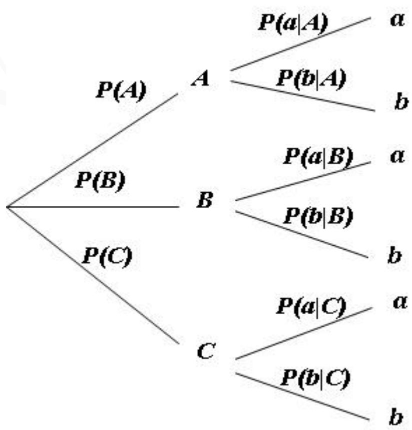
Problemas

4.2. Andalucia

4.2.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 4.2.1 En un estudio realizado en una sucursal se ha determinado que el 70 % de los créditos concedidos son hipotecarios y el 25 % de los créditos superan los 200 000€. El 20 % de los créditos son hipotecarios y de más de 200 000€. Se elige al azar un cliente al que le han concedido un crédito. Calcule la probabilidad de que:

a) El crédito no sea hipotecario y no supere los 200000€



b) Si su crédito no es hipotecario, este no supere los 200000€

c) Si su crédito supera los 200 000€, que este no sea hipotecario.

Solución:
Sean H crédito hipotecario y S supera los 200000€
$P(H) = 0,7$, $P(S) = 0,25$ y $P(H \cap S) = 0,2$

a) $P(\overline{H} \cap \overline{S}) = P(\overline{H \cup S}) = 1 - P(H \cup S) = 1 - (P(H) + P(S) - P(S \cap H)) = 1 - (0,7 + 0,25 - 0,2) = 0,25$

b) $P(\overline{S}|\overline{H}) = \dfrac{P(\overline{H} \cap \overline{S})}{P(\overline{H})} = \dfrac{0,25}{0,3} = 0,8333$

c) $P(\overline{H}|S) = \dfrac{P(\overline{H} \cap S)}{P(S)} = \dfrac{P(S) - P(H \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,25 - 0,2}{0,25} = 0,2$

Problema 4.2.2 En su tiempo libre, el 65 % de los estudiantes de un centro educativo juega con videojuegos, el 45 % lee libros y el 15 % no hace ninguna de las dos cosas. Elegido al azar un estudiante de dicho centro, calcule la probabilidad de que:

a) Juegue con video juegos o lea libros.

b) Juegue con video juegos y no lea libros.

c) Lea libros sabiendo que no juega con videojuegos.

Solución:
Sean V juegan a los videojuegos y L leen libros.
$P(V) = 0,65$, $P(L) = 0,45$ y $P(\overline{V} \cap \overline{L}) = 0,15$.

	V	$\overline{V}$	Total
L			$0,45$
$\overline{L}$		$0,15$	
Total	$0,65$		1

$\Longrightarrow$

	V	$\overline{V}$	Total
L	$0,25$	$0,20$	$0,45$
$\overline{L}$	$0,40$	$0,15$	$0,55$
Total	$0,65$	$0,35$	1

a) $P(V \cup L) = P(V) + P(L) - P(V \cap L) = 0,65 + 0,45 - 0,25 = 0,85$

b) $P(V \cap \overline{L}) = 0,4$

c) $P(L|\overline{V}) = \dfrac{P(L \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} = \dfrac{0,20}{0,35} = 0,5714$

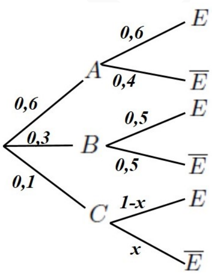
4.2.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 4.2.3 En una determinada región hay tres universidades A, B y C. De los estudiantes que terminaron sus estudios el año pasado, el 60 % procedían de la universidad A, el 30 % de la universidad B y el resto de C. Además, se conoce que la probabilidad de que un estudiante de la universidad A no encuentre trabajo en su región es 0,4 y para un estudiante de B es 0,5.

a) Si la probabilidad de que un estudiante no encuentre trabajo en su región es 0,395, determine la probabilidad de que un estudiante de la universidad C encuentre trabajo en su región.

b) Calcule la probabilidad de que un estudiante que no haya encontrado trabajo en su región proceda de la universidad A o de la B.

Solución:
Sean A universidad A, B universidad B, C universidad C, E encuentra trabajo y $\overline{E}$ no encuentra trabajo



a) $P(\overline{E}) = P(\overline{E}|A)P(A) + P(\overline{E}|B)P(B) + P(\overline{E}|C)P(C) =$
$0,6 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,3 + x \cdot 0,1 = 0,395 \Longrightarrow x = P(\overline{E}|C) = 0,05$
$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - 0,05 = 0,95$

b) $P(A \cup B|\overline{E}) = \dfrac{P((A \cup B) \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} =$
$\dfrac{P(\overline{E}|A)P(A) + P(\overline{E}|B)P(B)}{P(\overline{E})} = \dfrac{0,6 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,3}{0,395} = 0,9873$

Problema 4.2.4 Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral tales que:

$$P(A \cup B) = \frac{3}{7},\ \ P(A^c) = \frac{5}{7},\ \ P(B^c) = \frac{2}{3}$$

a) ¿Son A y B independientes? ¿Son A y B incompatibles?

b) Calcule $P(A^c \cap B^c)$.

c) Calcule $P(B|A^c)$.

Solución:
Por comodidad y costumbre utilizo $A^c = \overline{A}$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow \dfrac{3}{7} = \dfrac{2}{7} + \dfrac{1}{3} - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = \dfrac{2}{7}\dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{7} = \dfrac{4}{21}$
$P(A) \cdot P(B) = \dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{21} \neq P(A \cup B) = \dfrac{4}{21} \Longrightarrow A$ y B no son independientes.
Para que sean incompatibles tienen que ser $A \cap B = \varnothing \Longrightarrow P(A \cap B) = 0$, luego no son incompatibles.

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \dfrac{3}{7} = \dfrac{4}{7}$

c) $P(B|\overline{A}) = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(\overline{A})} = \dfrac{\frac{1}{3} - \frac{4}{21}}{\frac{5}{7}} = \dfrac{1}{5}$

4.3. Aragón

4.3.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 4.3.1 Se ha realizado una encuesta sobre la compra de ropa por internet, en concreto sobre compra de ropa nueva y compra de ropa de segunda mano. De los entrevistados, el 90 % dice que compra ropa (usada o nueva), el 15 % compra ropa de ambos tipos y el 60 % no compra ropa de segunda mano. Para un encuestado elegido al azar:

1.1 Calcule la probabilidad de que compre ropa nueva y no de segunda mano.

2.2 Si dice que no compra ropa de segunda mano ¿cuál es la probabilidad de que tampoco compre ropa nueva?

Solución:
Sean N compra ropa nueva y U compra ropa usada.
$P(N \cup U) = 0,9$, $P(N \cap U) = 0,15$ y $P(\overline{U}) = 0,6$

1.1 $P(N \cup U) = P(N) + P(U) - P(N \cap U) \Longrightarrow 0,9 = P(N) + 0,4 - 0,15 \Longrightarrow P(N) = 0,65$
$P(N \cap \overline{U}) = P(N) - P(N \cap U) = 0,65 - 0,15 = 0,5$

2.2 $P(\overline{N}|\overline{U}) = \dfrac{\overline{N} \cap \overline{U})}{P(\overline{U})} = \dfrac{P(\overline{N \cup U})}{P(\overline{U})} = \dfrac{1 - P(N \cup U}{P(\overline{U})} = \dfrac{1 - 0,9}{0,6} = 0,1667$

4.3.2. Convocatoria Extraordinaria

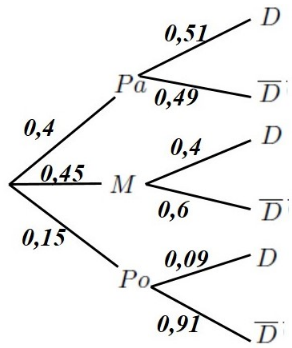
Problema 4.3.2 Una aseguradora ha lanzado seguros multidispositivos a jóvenes para contingencias de hurtos, roturas, daños, etc. de patinetes, teléfonos móviles y ordenadores portátiles. Los seguros de patinetes suponen el 40 % de su cartera, los móviles representan el 45 % y los portátiles el resto de su cartera. La compañía conoce que un 51 % de patinetes, un 40 % de teléfonos móviles y un 9 % de ordenadores dan lugar a un parte de siniestro.

1.1 Calcule la probabilidad de que se comunique un parte de siniestro.

2.2 Si llegara un parte de siniestro, calcule la probabilidad de haber sido una contingencia por un teléfono móvil.

3.3 Si llegara un parte de siniestro, ¿cuál de los tres dispositivos es más probable que haya causado la contingencia?

Solución:
Sean Pa patinetes, M móviles, Po portátiles, D da parte de siniestro y $\overline{D}$ no da parte de siniestro.



1.1 $P(D) =$
$P(D|Pa)P(Pa) + P(D|M)P(M) + P(D|Po)P(Po) =$
$0,51 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,45 + 0,09 \cdot 0,15 = 0,3975$

2.2 $P(M|D) = \dfrac{P(D|M)P(M)}{P(D)} = \dfrac{0,4 \cdot 0,45}{0,3975} = 0,4528$

3.3 $P(Pa|D) = \dfrac{P(D|Pa)P(Pa)}{P(D)} = \dfrac{0,51 \cdot 0,4}{0,3975} = 0,5132$

$P(Po|D) = \dfrac{P(D|Po)P(Pa)}{P(D)} = \dfrac{0,09 \cdot 0,15}{0,3975} = 0,0340$

Lo más probable es que se deba a un patinete.

4.4. Asturias

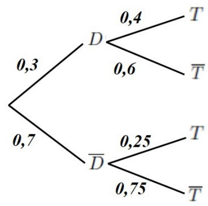
4.4.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 4.4.1 El 30 % de los estudiantes de un instituto hace deporte. De los que hacen deporte, el 40 % toca un instrumento y de los que no hacen deporte, una cuarta parte toca un instrumento. Elegido un estudiante de ese instituto al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haga deporte, pero no toque un instrumento?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haga deporte o toque un instrumento?

Solución:
Sean D hace deporte y T toca algún instrumento musical.
$P(D) = 0,3$, $P(T|D) = 0,4$ y $P(T|\overline{D}) = 0,25$.



a) $P(D \cap \overline{T}) = P(\overline{T}|D)P(D) = 0,6 \cdot 0,3 = 0,18$

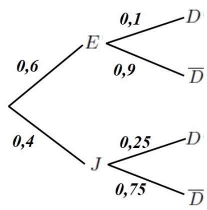
b) $P(D \cup T) = P(D) + P(T) - P(D \cap T) =$
$P(D) + P(T|D)P(D) + P(T|\overline{D})P(\overline{D}) - P(T|D)P(D) =$
$P(D) + P(T|\overline{D})P(\overline{D}) = 0,3 + 0,25 \cdot 0,7 = 0,475$

Problema 4.4.2 Una empresa tiene contratados dos operarios, Eva y Juan, para producir determinadas piezas. Eva realiza el 60 % de la producción de esas piezas y el resto lo realiza Juan. Eva obtiene una pieza defectuosa el 10 % de las veces, subiendo ese porcentaje hasta el 25 % en el caso de Juan.

a) Seleccionada una pieza al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?

b) Si se encuentra una pieza defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido hecha por Juan?

Solución:
Sean E produción de Eva, J producción de Juan y D pieza defectuosa.



a) $P(D) = P(D|E)P(E) + P(D|J)P(J) = 0,1 \cdot 0,6 + 0,25 \cdot 0,4 = 0,16$

b) $P(J|D) = \dfrac{P(D|J)P(J)}{P(D)} = \dfrac{0,25 \cdot 0,4}{0,16} = 0,625$

4.4.2. Convocatoria Extraordinaria

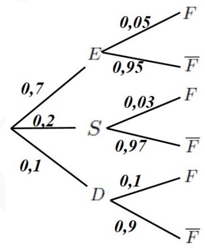
Problema 4.4.3 Una empresa láctea se encarga de procesar leche y envasarla en botellas. De estas, el 70 % son de leche entera, el 20 % de leche semidesnatada y el resto de leche desnatada. Además, se sabe que el 5 % de las botellas de leche entera se exportan fuera del país, así como el 3 % de las de leche semidesnatada y el 10 % de las de leche desnatada.

a) Si se elige una botella al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea exportada?

b) Si se elige una botella al azar de entre las exportadas, ¿cuál es la probabilidad de que contenga leche semidesnatada?

Solución:
Sean E leche entera, S leche semidesnatada, D leche desnatada, F se exporta fuera del país y $\overline{F}$

no se exporta fuera del país.



a) $P(\overline{F}) = P(\overline{F}|E)P(E) + P(\overline{F}|S)P(S) + P(\overline{F}|D)P(D) =$
$0,95 \cdot 0,7 + 0,97 \cdot 0,2 + 0,9 \cdot 0,1 = 0,949$

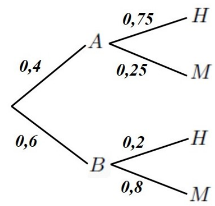
b) $P(S|F) = \dfrac{P(F|S)P(S)}{P(F)} = \dfrac{0,03 \cdot 0,2}{1 - 0,949} = 0,1176$

Problema 4.4.4 En la segunda vuelta de unas elecciones presidenciales el 40 % de los votantes votan al candidato A y el 60 % restante al B. De los votantes del candidato A, el 25 % son mujeres, mientras que un 20 % de los votantes del candidato B son hombres.

a) Calcula la probabilidad de que un votante, elegido al azar, sea mujer.

b) Calcula la probabilidad de que un votante, elegido al azar entre los hombres, haya votado al candidato A.

Solución:
Sean H hombre, M mujer y A vota al candidato A y B vota al candidato B.



a) $P(M) = P(M|A)P(A) + P(M|B)P(B) = 0,25 \cdot 0,4 + 0,8 \cdot 0,6 = 0,58$

b) $P(A|H) = \dfrac{P(H|A)P(A)}{P(H)} = \dfrac{0,75 \cdot 0,4}{1 - 0,58} = 0,7143$

4.5. Cantabria

4.5.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 4.5.1 En una cierta ciudad el 35 % del censo vota al partido A, el 45 % al partido B y el 20 % restante se abstiene. Se sabe, además, que el 20 % de los votantes del partido A, el 30 % de los del partido B y el 15 % de los que se abstienen son mayores de 60 años. Si se escoge al azar un ciudadano censado:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que vote al partido B y tenga como máximo 60 años?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que vote al partido A y sea mayor de 60 años?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor de 60 años?

d) Si es mayor de 60 años, ¿cuál es la probabilidad de que se haya abstenido en las elecciones?

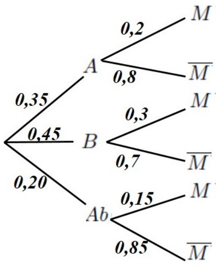
Solución:
Sean A vota al partido A, B vota al partido B, Ab se abstienen, M mayores de 60 años y $\overline{M}$ menores de 60 años.

a) $P(B\cap \overline{M}) = P(\overline{M}|B)P(B) = 0,7\cdot 0,45 = 0,315$

b) $P(A\cap M) = P(M|A)P(A) = 0,2\cdot 0,35 = 0,07$

c) $P(M) = P(M|A)P(A) + P(M|B)P(B) + P(M|Ab)P(Ab) = 0,2\cdot 0,35 + 0,3\cdot 0,45 + 0,15\cdot 0,2 = 0,235$

d) $P(Ab|M) = \dfrac{P(M|Ab)P(Ab)}{P(M)} = \dfrac{0,15\cdot 0,2}{0,235} = 0,1277$



4.5.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 4.5.2 El 65 % de los clientes de un cierto supermercado compra leche de origen animal, el 25 % compra leche de origen vegetal y el 10 % restante no compra leche de ningún tipo. Además, el 20 % de los que compran leche de origen animal, el 70 % de los que compran leche de origen vegetal y el 10 % de los que no compran leche de ningún tipo compran también galletas de soja. Si se escoge al azar un cliente del supermercado:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que compre leche de origen animal y galletas de soja?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que compre leche de origen vegetal y no compre galletas de soja?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que compre galletas de soja?

d) Si no compra galletas de soja, ¿cuál es la probabilidad de que compre leche de origen vegetal?

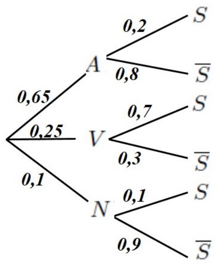
Solución:
Sean A compran leche de origen animal, V compran leche de origen vegetal, N no compran leche, S compran galletas de soja y $\overline{S}$ no compran galletas de soja.

a) $P(A\cap S) = P(S|A)P(A) = 0,2\cdot 0,65 = 0,13$

b) $P(V\cap \overline{S}) = P(\overline{S}|V)P(V) = 0,3\cdot 0,25 = 0,075$

c) $P(S) = P(S|A)P(A) + P(S|V)P(V) + P(S|N)P(N) = 0,2\cdot 0,65 + 0,7\cdot 0,25 + 0,1\cdot 0,1 = 0,315$

d) $P(V|\overline{S}) = \dfrac{P(\overline{S}|V)P(V)}{P(\overline{S})} = \dfrac{0,3\cdot 0,25}{1-0,315} = 0,1095$



4.6. Castilla La Mancha

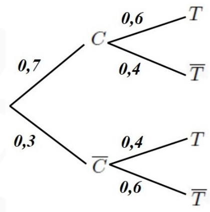
4.6.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 4.6.1 El 70 % de los turistas que visitan una determinada ciudad se alojan en el centro, y el resto lo hace en las afueras. El 60 % de los que se alojan en el centro y el 40 % de los que se alojan en las afueras lo hacen en hoteles de 3 o más estrellas, mientras que el resto lo hace en establecimientos de menor calidad.

a) Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se haya alojado en un hotel de 3 o más estrellas?

b) Si se sabe que una persona se ha alojado en un establecimiento de menor calidad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona se haya alojado en el centro?

Solución:
Sean C la persona se aloja en el centro, $\overline{C}$ la persona no se aloja en el centro, T hotel de tres o más estrellas y $\overline{T}$ hotel de menos de tres estrellas.



a) $P(T) = P(T|C)P(C) + P(T|\overline{C})P(\overline{C}) = 0,6 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,3 = 0,54$

b) $P(C|\overline{T}) = \dfrac{P(\overline{T}|C)P(C)}{P(\overline{T})} = \dfrac{0,4 \cdot 0,7}{1 - 0,54} = 0,6087$

Problema 4.6.2 El 40 % de las personas que acuden a una consulta médica lo hacen para diagnosticar una enfermedad, el 30 % para solicitar recetas y un 10 % para ambas cosas, diagnosticar enfermedad y solicitar recetas

a) Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que acuda a solicitar recetas o a diagnosticar una enfermedad o ambos?

b) Si se sabe que una persona ha acudido a diagnosticar una enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona también solicite recetas?

Solución:
Sean D consulta médica para diagnosticar una enfermedad y R consulta médica para recetas.

$$P(D) = 0,4; \quad P(R) = 0,3; \quad P(D \cap R) = 0,1$$

a) $P(D \cup R) = P(D) + P(R) - P(D \cap R) = 0,4 + 0,3 - 0,1 = 0,6$

b) $P(R|D) = \dfrac{P(D \cap R)}{P(D)} = \dfrac{0,1}{0,4} = 0,25$

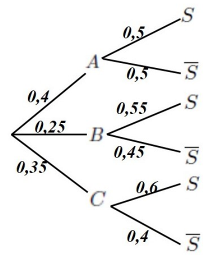
4.6.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 4.6.3 En un concurso se les proponen a los participantes 3 pruebas (A, B y C) de las que han de elegir una. El 40 % de los participantes eligen la prueba A, superándola el 50 % de estos. El 25 % eligen la prueba B y en este caso la prueba no es superada por el 45 % de los participantes. La prueba C la superan el 60 % de los participantes que la escogen.

a) Elegido un participante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya superado la prueba?

b) Si se sabe que un participante no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido la prueba A?

Solución:
Sean A elige la prueba A, B elige la prueba B, C elige la prueba C, S supera la prueba y $\overline{S}$ no supera la prueba.



a) $P(S) = P(S|A)P(A) + P(S|B)P(B) + P(S|C)P(C) = 0,5 \cdot 0,4 + 0,55 \cdot 0,25 + 0,6 \cdot 0,35 = 0,5475$

b) $P(A|\overline{S}) = \dfrac{P(\overline{S}|A)P(A)}{P(\overline{S})} = \dfrac{0,5 \cdot 0,4}{1 - 0,5475} = 0,442$

Problema 4.6.4 En un ejercicio de oposición, el opositor ha de presentar un tema de los cuatro que se seleccionan al azar de un programa de 40 temas. Si los cuatro temas seleccionados han de ser distintos y el opositor tiene bien preparados 22 temas,

a) ¿Qué probabilidad tiene el opositor de aprobar el examen?

b) ¿Qué probabilidad tiene el opositor de saberse exactamente uno de los cuatro temas elegidos?

Solución:
Sean S sabe el tema y $\overline{S}$ no sabe el tema. $P(S)=\dfrac{22}{40}$ y $P(\overline{S})=\dfrac{18}{40}$

a) $P(A)=1-P(\text{suspender})=1-\dfrac{18}{40}\cdot\dfrac{17}{39}\cdot\dfrac{16}{38}\cdot\dfrac{15}{37}=0,9665$

b) $P(\text{saber uno exáctamente})=P(S\,\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S})+P(\overline{S}\,S\,\overline{S}\,\overline{S})+P(\overline{S}\,\overline{S}\,S\,\overline{S})+P(\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\,S)=$
$\dfrac{22}{40}\cdot\dfrac{18}{39}\cdot\dfrac{17}{38}\cdot\dfrac{16}{37}+\dfrac{18}{40}\cdot\dfrac{22}{39}\cdot\dfrac{17}{38}\cdot\dfrac{16}{37}+\dfrac{18}{40}\cdot\dfrac{17}{39}\cdot\dfrac{22}{38}\cdot\dfrac{16}{37}+\dfrac{18}{40}\cdot\dfrac{17}{39}\cdot\dfrac{16}{38}\cdot\dfrac{22}{37}=4\cdot\dfrac{2244}{45695}=0,1964$

4.7. Castilla León

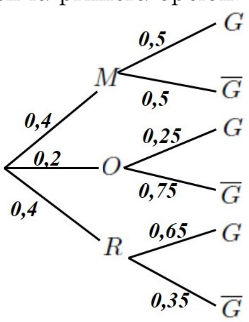
4.7.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 4.7.1 Un estudio realizado sobre los estudiantes de las universidades de Castilla y León determina que el 40 % de los estudiantes procede de la misma provincia en la que está situada la universidad, el 20 % procede de otras provincias de Castilla y León y el resto procede de otras comunidades autónomas. Además, cursan el grado elegido en primera opción el 50 % de los estudiantes que proceden de la misma provincia que la universidad, el 25 % de los procedentes de otras provincias de Castilla y León y el 65 % de los procedentes de otras comunidades autónomas. Se elige al azar un estudiante de las universidades de Castilla y León.

a) Calcular la probabilidad de que esté cursando el grado elegido en primera opción.

b) Si se ha elegido un estudiante que no está cursando el grado elegido en primera opción, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de otra comunidad autónoma diferente a Castilla y León?

Solución:
Sean M procede de la misma provincia, O procede de otra provincia, R procede de otra comunidad autónoma, G eligen grado en la primera opción y $\overline{G}$ no eligen grado en la primera opción.



a) $P(G)=P(G|M)P(M)+P(G|O)P(O)+P(G|R)P(R)=$
$0,5\cdot 0,4+0,25\cdot 0,2+0,65\cdot 0,4=0,51$

b) $P(R|\overline{G})=\dfrac{P(\overline{G}|R)P(R)}{P(\overline{G})}=\dfrac{0,35\cdot 0,4}{1-0,51}=0,2857$

Problema 4.7.2 Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral con $P(B)=\dfrac{3}{5}$, $P(\overline{A}\cup\overline{B})=\dfrac{3}{4}$. Calcular $P(A\cap B)$

Solución:
$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = \frac{3}{4} \Longrightarrow P(A \cap B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

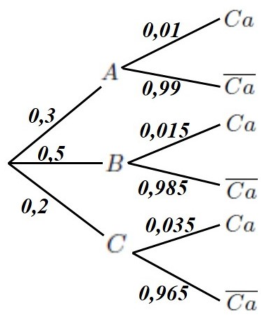
4.7.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 4.7.3 Una compañía ofrece seguros de cancelación de viajes a destinos exóticos: el 30 % de sus seguros se contratan para viajar al país A, el 50 % para viajar al país B y el resto para viajar al país C. Según estudios previos, se cancela el viaje en el 1 % de los seguros contratados para el país A, el 1,5 % de los contratados para B y el 3,5 % de los contratados para C. Elegido un seguro al azar,

a) Calcular la probabilidad de que sea un viaje que se cancela.

b) Si es un seguro de un viaje cancelado, calcular la probabilidad de que haya sido contratado para viajar al país C.

Solución:
Sean A seguro al país A, B seguro al país B, C seguro al país C, Ca se cancela el viaje y $\overline{Ca}$ no se cancela el viaje.



a) $P(Ca) = P(Ca|A)P(A) + P(Ca|B)P(B) + P(Ca|C)P(C) = 0,01 \cdot 0,3 + 0,015 \cdot 0,5 + 0,035 \cdot 0,2 = 0,0175$

b) $P(C|Ca) = \dfrac{P(Ca|C)P(C)}{P(C)} = \dfrac{0,035 \cdot 0,2}{0,0175} = 0,4$

4.8. Cataluña

4.8.1. Convocatoria Ordinaria-Serie 2

Sin problemas en esta materia.

4.8.2. Convocatoria Ordinaria-Serie 5

Sin problemas en esta materia.

4.8.3. Convocatoria Extraordinaria

Sin problemas en esta materia.

4.9. Comunidad Valenciana

4.9.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 4.9.1 Entre los clientes de una compañía de seguros de automóviles, un 30 % tiene menos de 30 años, un 55 % tiene entre 30 y 60 años, y el 15 % restante tiene más de 60 años. Se sabe que, entre los clientes de menos de 30 años, 3 de cada 4 no presentaron parte de accidente el año pasado; entre los clientes que tienen entre 30 y 60 años, 9 de cada 10 no presentaron parte de accidente el año pasado; y entre los clientes de más de 60 años, 2 de cada 5 no presentaron parte de accidente el año pasado. Seleccionamos al azar un cliente de la compañía.

a) Llamemos A al suceso "el cliente seleccionado tiene más de 60 años" y llamemos B al suceso "el cliente seleccionado no presentó parte de accidente año pasado". Calcula $P(A \cup B)$.

b) Llamemos C al suceso " el cliente seleccionado tiene 30 años o más" y D al suceso "el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado". Calcula $P(C \cap D)$.

c) Si sabemos que el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado, calcula la probabilidad de que tenga 60 años o menos.

Solución:
Sean A más de 60 años, M entre 30 y 60 años, J menos de 30 años, B no presentó parte y D presento parte.
$P(A) = 0,15$, $P(M) = 0,55$, $P(J) = 0,3$, $P(B|J) = \frac{3}{4}$, $P(B|M) = \frac{9}{10}$ y $P(B|A) = \frac{2}{5}$
$P(B\cap J) = P(B|J)P(J) = 0,225$, $P(B\cap M) = P(B|M)P(M) = 0,495$, $P(B\cap A) = P(B|A)P(A) = 0,06$

	A	M	J	Total
B	$0,06$	$0,495$	$0,225$	
D				
Total	$0,15$	$0,55$	$0,3$	1

$\Longrightarrow$

	A	M	J	Total
B	$0,06$	$0,495$	$0,225$	$0,78$
D	$0,09$	$0,055$	$0,075$	$0,22$
Total	$0,15$	$0,55$	$0,3$	1

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,15 + 0,78 - 0,06 = 0,87$

b) $C = A \cup M$, $P(C \cap D) = P((A \cup M) \cap D) = 0,09 + 0,055 = 0,145$

c) $P(J \cup M|D) = \dfrac{P((J \cup M) \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0,055 + 0,075}{0,22} = 0,5910$

Problema 4.9.2 En un juego se lanzan dos monedas equilibradas y un dado de seis caras equilibrado. Un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien, si obtiene exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado.

a) Calcula la probabilidad de que el jugador gane.

b) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

c) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera un cinco al lanzar el dado?

d) Llamemos A al suceso "el jugador no gana" y llamemos B al suceso "el jugador obtiene un seis al lanzar el dado". ¿Son independientes los sucesos A y B?

Solución:
Sean C cara en la moneda, X cruz en la moneda.
$\Omega_1 = \{CC, CX, XC, XX\}$ y $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a) $P(CC\text{PAR}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{8}$
$P((CX \cup XC)(5 \cup 6)) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$
$P(G) = P(CC\text{PAR}) + P((CX \cup XC)(5 \cup 6)) = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{7}{24}$

b) $P(CC|G) = \frac{P(CC\text{PAR})}{P(G)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{24}} = \frac{3}{7}$

c) $P(5|G) = \frac{P(CX, XC, 5)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{7}{24}} = \frac{2}{7}$

d) $P(A) = 1 - P(G) = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}$, $P(B) = \frac{1}{6}$ y $P(A)P(B) = \frac{17}{144}$
$P(A \cap B) = P(XX6) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$
Luego $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

4.9.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 4.9.3 Dados dos sucesos A y B, se sabe que $P(B) = 0,4$, $P(A^c \cap B^c) = 0,2$ y $P(A \cap B) = 0,3$, siendo A^c y B^c los sucesos complementarios de A y B, respectivamente. Se pide:

a) Calcular la probabilidad del suceso $P(A \cup B)$.

b) Calcular la probabilidad de que solamente se verifique uno de los sucesos.

c) Calcular la probabilidad de B condicionado a A.

d) ¿Son independientes los sucesos A y B?

Solución:
Por comodidas utilizo $A^c = \overline{A}$ y $B^c = \overline{B}$

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,2 \Longrightarrow P(A \cup B) = 0,8$

b) $P(\text{solamente uno}) = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$
$P(B) - P(A \cap B) + P(A) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,8 - 0,3 = 0,5$

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(B) = 0,8 + 0,3 - 0,4 = 0,7$
$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,7} = 0,4286$

d) $P(A)P(B) = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28$ y $P(A \cap B) = 0,3 \Longrightarrow P(A \cap B) \neq P(A)P(B) \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

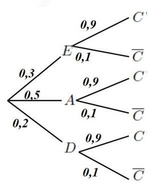
Problema 4.9.4 El director de una entidad que audita la contabilidad de empresas sabe, por experiencias pasadas, que cuando se hace una auditoría el 30 % de las empresas merece una calificación de ≪Excelente≫, el 50 % de las empresas merece la calificación de ≪Aceptable≫ y el 20 % restante merece una calificación de ≪Deficiente≫. El director también sabe que entre los auditores de su entidad hay un 90 % de auditores que siempre auditan correctamente y dan a cada empresa la calificación que merece; pero hay un 10 % de auditores que no auditan correctamente y dan siempre una calificación de ≪Aceptable≫.

a) ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación de ≪Deficiente≫?

b) ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación que realmente merece?

c) Para analizar si un determinado auditor audita correctamente o no, el director le encarga que audite la contabilidad de una empresa escogida al azar. No sabemos cuál es la calificación que merece esa empresa. Si el auditor da la calificación de ≪Aceptable≫, ¿cuál es la probabilidad de que este auditor sea uno de los que siempre auditan correctamente?

Solución:
Sean E excelente, A aceptable, D deficiente, C auditan correctamente y $\overline{C}$ no auditan correctamente.



a) $P(\text{deficiente}) = P(D)P(C|D) = 0,2 \cdot 0,9 = 0,18 \Longrightarrow 18\,\%$

b) $P(C) = P(C|E)P(E) + P(A) + P(C|D)P(D) = 0,3 \cdot 0,9 + 0,5 + 0,2 \cdot 0,9 = 0,95 \Longrightarrow 95\,\%$

c) $P(C|A) = \dfrac{P(C \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,5 \cdot 0,9}{0,1 \cdot 0,3 + 0,5 + 0,1 \cdot 0,2} = 0,8182$

4.10. Extremadura

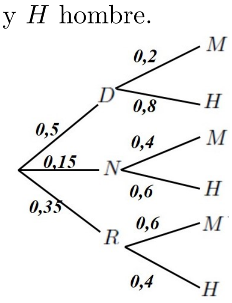
4.10.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 4.10.1 En un quiosco de prensa, el 50 % de los clientes compra prensa deportiva, el 15 % prensa nacional y el resto prensa regional. El 20 % de los clientes de prensa deportiva, el 40 % de los de prensa nacional y el 60 % de los de prensa regional son mujeres. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que un cliente de dicho quiosco sea mujer.

b) Calcular la probabilidad de que un cliente, que sabemos que es un hombre, compre prensa regional.

Solución:
Sean D prensa deportiva, N prensa nacional, R prensa regional, M mujer y H hombre.



a) $P(M) =$
$P(M|D)P(D) + P(M|N)P(N) + P(M|R)P(R) =$
$0,2 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,15 + 0,6 \cdot 0,35 = 0,37$

b) $P(R|H) = \dfrac{P(H|R)P(R)}{P(H)} = \dfrac{0,4 \cdot 0,35}{1 - 0,37} = 0,2222$

4.10.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 4.10.2 Un club de fútbol tiene 200 abonados de gran antigüedad, 500 abonados con varios años de antigüedad y 300 nuevos abonados. Se pregunta a los abonados si están de acuerdo con una subida de los precios de los abonos a cambio de que el club ofrezca servicios adicionales. Se muestran favorables a la subida 80 abonados de gran antigüedad, 280 con varios años de antigüedad y 120 nuevos abonados. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que un abonado sea nuevo y favorable a la subida.

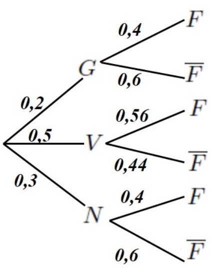
b) Calcular la probabilidad de que un abonado, que se sabe que es favorable a la subida, tenga una gran antigüedad en el club.

Solución:

Sean G abonados de gran antigüedad, V abonados con varios años de antigüedad, N nuevos abonados, F favorables a la subida y $\overline{F}$ no favorables a la subida.

$$P(G) = \frac{200}{1000} = 0,2; \;\; P(V) = \frac{500}{1000} = 0,5; \;\; P(N) = \frac{300}{1000} = 0,3$$

$$P(F|G) = \frac{80}{200} = 0,4; \;\; P(F|V) = \frac{280}{500} = 0,56; \;\; P(F|N) = \frac{120}{300} = 0,4$$



a) $P(N \cap F) = P(F|N)P(N) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$

b) $P(F) =$
$P(F|G)P(G) + P(F|V)P(V) + P(F|N)P(N) =$
$0,4 \cdot 0,2 + 0,56 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,3 = 0,48$
$P(G|F) = \dfrac{P(F|G)P(G)}{P(F)} = \dfrac{0,4 \cdot 0,2}{0,48} = 0,1667$

4.11. Galicia

4.11.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 4.11.1 Un estudio revela que 2 de cada 5 habitantes de una determinada población son menores de 30 años, el 70 % de los habitantes realizan ejercicio físico con regularidad y el 30 % de los habitantes son menores de 30 años y realizan ejercicio físico con regularidad.

a) ¿Qué porcentaje de la población ni es menor de 30 años ni realiza ejercicio físico con regularidad?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un habitante que no realiza ejercicio físico con regularidad sea menor de 30 años?

c) ¿Son independientes los sucesos ser menor de 30 años y realizar ejercicio físico con regularidad?

Justifique la respuesta.

Solución:

Sea M menores de 30años y F realizan ejercicio físico.
$P(M) = \frac{2}{5} = 0,4$, $P(F) = 0,7$ y $P(M \cap F) = 0,3$.

	F	$\overline{F}$	total
M	$0,3$		$0,4$
$\overline{M}$			
total	$0,7$		1

$\Longrightarrow$

	F	$\overline{F}$	total
M	$0,3$	$0,1$	$0,4$
$\overline{M}$	$0,4$	$0,2$	$0,6$
total	$0,7$	$0,3$	1

a) $P(\overline{M} \cap \overline{F}) = 0,3 \Longrightarrow 30\,\%$

b) $P(M|\overline{F}) = \frac{P(M \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{0,1}{0,3} = 0,3333 \Longrightarrow 33,33\,\%$

c) $P(M \cap F) = 0,3$, $P(M) = 0,4$ y $P(F) = 0,7 \Longrightarrow P(M)P(F) = 0,28 \neq P(M \cap F) \Longrightarrow M$ y F no son independientes.

4.11.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 4.11.2 Un estudio revela que el 70 % de las personas de una población sigue la serie de televisión A, el 60 % sigue la serie B y el 30 % sólo sigue la serie A.

a) ¿Qué porcentaje de la población sigue las dos series?

b) Si elegimos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que siga alguna de las dos series?

c) Si elegimos al azar una persona que sigue la serie A, ¿cuál es la probabilidad de que siga también la serie B?

Justifique la respuesta.

Solución:

Sea A sigue la serie A y B sigue la serie B.
$P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,6$ y $P(A \cap \overline{B}) = 0,3$.

	A	$\overline{A}$	total
B			$0,6$
$\overline{B}$	$0,3$		
total	$0,7$		1

$\Longrightarrow$

	A	$\overline{A}$	total
B	$0,4$	$0,2$	$0,6$
$\overline{B}$	$0,3$	$0,1$	$0,4$
total	$0,7$	$0,3$	1

a) $P(A \cap B) = 0,4 \Longrightarrow 40\,\%$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap A) = 0,7 + 0,6 - 0,4 = 0,9$

c) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,4}{0,7} = 0,5714$

4.12. Islas Baleares

4.12.1. Convocatoria Ordinaria

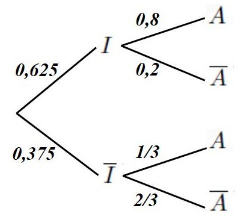
Problema 4.12.1 En cierta empresa de exportación, el 62,5 % de los empleados hablan inglés. Por otra parte, entre los empleados que hablan inglés, el 80 % habla también alemán. Entre los empleados que no hablan inglés, sólo la tercera parte sí habla alemán

a) ¿Qué porcentaje de empleados habla las dos lenguas?

b) ¿Qué porcentaje de empleados habla alemán?

c) Si un empleado no habla alemán, ¿cuál es la probabilidad que hable inglés?

Solución:
Sean I habla inglés, $\overline{I}$ no habla inglés, A habla alemán y $\overline{A}$ no habla alemán.



a) $P(I \cap A) = P(A|I)P(I) = 0,8 \cdot 0,625 = 0,5 \Longrightarrow 50\,\%$

b) $P(A) = P(A|I)P(I) + P(A|\overline{I})P(\overline{I}) = 0,8 \cdot 0,625 + \dfrac{1}{3} \cdot 0,375 = 0,625 \Longrightarrow 62,5\,\%$

c) $P(I|\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A}|I)P(I)}{P(\overline{A})} = \dfrac{0,2 \cdot 0,625}{1 - 0,625} = 0,3333$

4.12.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 4.12.2 Sean A y B dos sucesos tales que

$$P(B|A) = 0,9; \quad P(A|B) = 0,2; \quad P(A) = 0,1$$

a) Calcule $P(A \cap B)$ y $P(B)$.

b) ¿Son A y B sucesos independientes? Justifique la respuesta.

c) Calcule $P(A \cap \overline{B})$, donde $\overline{B}$ denota el suceso complementario de B.

Solución:

a) $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \Longrightarrow P(A \cap B) = (B|A)P(A) = 0,9 \cdot 0,1 = 0,09$
$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \dfrac{0,09}{0,2} = 0,45$

b) $P(A \cap B) = 0,09$ y $P(A)P(B) = 0,1 \cdot 0,45 = 0,045 \Longrightarrow P(A \cap B) \neq P(A)P(B) \Longrightarrow$ A y B no son independientes.

c) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,1 - 0,09 = 0,01$

4.13. Islas Canarias

4.13.1. Convocatoria Ordinaria

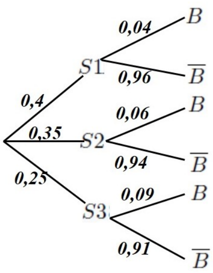
Problema 4.13.1 Un centro de estudios utiliza tres servidores para conectarse a Internet. El 40 % de los accesos a la red se realiza a través del servidor uno, el 35 % a través del servidor dos y el resto a través del tres. El 4 % de los accesos a la red que utilizan el servidor 1 resultan bloqueados. También se bloquean el 6 % de los accesos que se producen a través del servidor 2 y el 9 % de los que usan el servidor 3.

a) Dibuja el diagrama en árbol para describir esta situación

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un acceso a internet no resulte bloqueado?

c) Si un acceso a Internet resulta bloqueado, ¿cuál es la probabilidad de que el bloqueo haya ocurrido en el servidor 2?

Solución:
Sean $S1$ acceso por servidor 1, $S2$ acceso por servidor 2, $S3$ acceso por servidor 3, B bloqueado y $\overline{B}$ no bloqueado.



a) El árbol de probabilidad a la derecha.

b) $P(\overline{B}) =$
$P(\overline{B}|S1)P(S1) + P(\overline{B}|S2)P(S2) + P(\overline{B}|S3)P(S3) =$
$0,96 \cdot 0,4 + 0,94 \cdot 0,35 + 0,91 \cdot 0,25 = 0,9405$

c) $P(S2|B) = \dfrac{P(B|S2)P(S2)}{P(B)} = \dfrac{0,06 \cdot 0,35}{1 - 0,9405} = 0,3529$

4.13.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 4.13.2 Se dispone de tres urnas idénticas con bolas de colores dentro. La primera urna tiene 6 blancas y 4 negras. La segunda tiene 5 blancas y 2 negras y la tercera tiene 4 blancas y 7 negras.

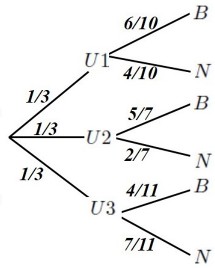
a) Se extrae una bola de una urna elegida al azar. Haz un diagrama con las probabilidades de los posibles resultados.

b) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra de una urna elegida al azar.

c) Se ha hecho una extracción de una bola al azar y ha resultado ser blanca. Calcula la probabilidad de que haya sido extraída de la primera urna.

Solución:
Sean $U1$ urna 1, $U2$ urna 2, $U3$ urna 3, B blanca y N negra.

a) El árbol de probabilidad a la derecha.



b) $P(N) =$
$P(N|U1)P(U1) + P(N|U2)P(U2) + P(N|U3)P(U3) =$
$\dfrac{4}{10}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{7}{11}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{509}{1155}\simeq 0,4407$

c) $P(U1|B) = \dfrac{P(B|U1)P(U1)}{P(B)} = \dfrac{\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{509}{1155}} = \dfrac{231}{646} \simeq 0,3576$

4.14. La Rioja

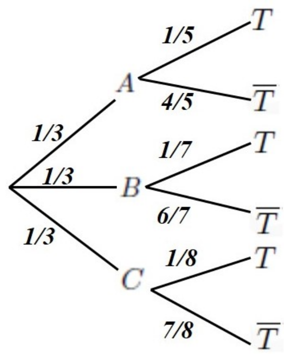
4.14.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 4.14.1 En una casa hay tres llaveros: A, B y C, el primero con cinco llaves, el segundo con siete y el tercero con ocho. En cada llavero hay una única llave que abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero, y de él se toma a su vez una llave al azar. Entendemos que, cuando se escoge una cosa al azar entre varias, todas ellas tienen la misma probabilidad de ser la escogida. Se pide:

a) La probabilidad de que la llave elegida abra el trastero.

b) Si resulta que lo abre, la probabilidad de que sea del llavero A.

Solución:
Sean T abre el trastero y $\overline{T}$ no abre el trastero.



a) $P(T) = P(T|A)P(A) + P(T|B)P(B) + P(T|C)P(C) =$
$\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{131}{840}\simeq 0,156$

b) $P(A|T) = \dfrac{P(T|A)P(A)}{P(T)} = \dfrac{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{131}{840}} = \dfrac{56}{131} \simeq 0,4275$

4.14.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 4.14.2 Un amigo meteorólogo nos ha facilitado algunas probabilidades de lluvia en la mañana del próximo sábado, concretamente para los siguientes sucesos:
A: "hay lluvia entre las 8 y las 9";
B: "hay lluvia entre las 8 y las 10";
C: "hay lluvia entre las 10 y las 14"
Nos ha dicho que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$ y $P(C) = 0,7$. A nosotros nos interesa sobre todo la probabilidad de $D =$ "hay lluvia entre las 9 y las 10". No nos la ha dado, pero nos ha dicho que $P(A \cap D) = 0,35$

a) ¿Cómo interpretarías $P(B)-P(A)$? Calcula entonces el valor de $P(D)$. ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva de 9 a 10?

b) Nos dice además que B y C son independientes, porque estará despejado entre las 10 y las 12. Calcula entonces la probabilidad de que llueva durante la mañana (entre las 8 y las 14).

Solución:

a) $P(B)-P(A)$ es probabilidad de que llueva entre 9 y 10, y no llueva de 8 a 9.

$$P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)\overset{A\subseteq B}{=}P(B)-P(A)=0,5-0,4=0,1$$

$$B=A\cup D\Longrightarrow P(B)=P(A)+P(D)-P(A\cap D)\Longrightarrow P(D)=P(B)-P(A)+P(A\cap D)=$$

$$0,5-0,4+0,35=0,45$$

$$P(\overline{D})=1-0,45=0,55$$

b) $P(B\cap C)=P(B)P(C)=0,5\cdot 0,7=0,35$

$$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)=0,5+0,7-0,35=0,85$$

Problema 4.14.3 Al 40 % de la población española no le gusta el vino. En España, de cada 1000 personas 7 son riojanas, pero entre quienes gustan del vino la proporción de personas es 1/120. Escogemos una persona española al azar y resulta que es riojana. ¿Cuál es la probabilidad de que le guste el vino?
Solución:

Sean R persona riojana y $\overline{R}$ no riojana, V le gusta el vino y $\overline{V}$.
$P(\overline{V})=0,4$, $P(R)=0,007$ y $P(R|V)=\dfrac{1}{120}=\dfrac{P(R\cap V)}{P(V)}\Longrightarrow P(R\cap V)=\dfrac{1}{120}(1-0,4)=0,005$

	V	$\overline{V}$	total
R	$0,005$		$0,007$
$\overline{R}$			
total		$0,4$	1

$\Longrightarrow$

	V	$\overline{V}$	total
R	$0,005$	$0,002$	$0,007$
$\overline{R}$	$0,595$	$0,398$	$0,993$
total	$0,6$	$0,4$	1

$$P(V|R)=\frac{P(V\cap R)}{P(R)}=\frac{0,005}{0,007}=0,7143$$

4.15. Madrid

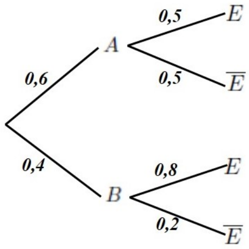
4.15.1. Modelo

Problema 4.15.1 Una empresa de reparto de comida a domicilio reparte platos de dos restaurantes. El 60 % de los platos que reparte proceden del primer restaurante y el 40 % restante del segundo. El 50 % de los platos que reparte del primer restaurante están cocinados con productos ecológicos, siendo este porcentaje de un 80 % para el segundo restaurante. Elegido un plato al azar:

a) Calcule la probabilidad de que esté cocinado con productos ecológicos.

b) Si el plato seleccionado no está cocinado con productos ecológicos, obtenga la probabilidad de que proceda del segundo restaurante.

Solución:
Sean A primer restaurante, B segundo restaurante, E ecológica y $\overline{E}$ no ecológica.



a) $P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) =$
$0,5 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,4 = 0,62$

b) $P(B|\overline{E}) = \dfrac{P(\overline{E}|B)P(B)}{P(\overline{E})} = \dfrac{0,2 \cdot 0,4}{1 - 0,62} = 0,2105$

Problema 4.15.2 Entre los deportistas profesionales, el 50 % disfrutan de una beca de alto rendimiento y el 30 % está cursando estudios superiores. Se sabe también que el 10 % de los deportistas profesionales disfrutan de una beca de alto rendimiento y además están cursando estudios superiores. Seleccionado un deportista profesional al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Disfrute de una beca de alto rendimiento o esté cursando estudios superiores.

b) No disfrute de una beca de alto rendimiento, sabiendo que no está cursando estudios superiores.

Solución:
Sean B disfruta de beca y E estudia cursos superiores.
$P(B) = 0,5$, $P(E) = 0,3$ y $P(B \cap E) = 0,1$

a) $P(B \cup E) = P(B) + P(E) - P(B \cap E) = 0,5 + 0,3 - 0,1 = 0,7$

b) $P(\overline{B}|\overline{E}) = \dfrac{P(\overline{B} \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \dfrac{P(\overline{B \cup E})}{1 - P(E)} = \dfrac{1 - P(B \cup E)}{1 - P(E)} = \dfrac{1 - 0,7}{1 - 0,3} = 0,4286$

4.15.2. Convocatoria Ordinaria

Problema 4.15.3 Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que: $P(A) = 0,6$, $P(A|B) = 0,4$ y $P(A|B^c) = 0,8$. Siendo B^c es el suceso complementario de B. Calcule:

a) $P(B)$.

b) ¿Son A y B independientes? Justifique su respuesta.

Solución:
Por costumbre utilizaremos $\overline{B} = B^c$.

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0,4 \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,4P(B)$
$P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = 0,8 \Longrightarrow P(A \cap \overline{B}) = 0,8P(\overline{B})$
$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,6 - 0,4P(B)$
$0,6 - 0,4P(B) = 0,8P(\overline{B}) = 0,8(1 - P(B)) \Longrightarrow$

$0,6-0,4P(B)=0,8-0,8P(B) \Longrightarrow 0,4P(B)=0,2 \Longrightarrow$
$P(B)=\dfrac{1}{2}=0,5$

b) $P(A\cap B)=0,4P(B)=0,4\cdot 0,5=0,2\neq P(A)\cdot P(B)=0,6\cdot 0,5=0,3 \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

Problema 4.15.4 Una carta escogida al azar es eliminada (sin ser vista) de un mazo de 52 cartas de póker, en el que hay 13 cartas de cada palo (diamantes, corazones, picas y tréboles). Una vez eliminada, se escoge al azar una carta, entre las que quedan en el mazo, y esta segunda carta es observada.

a) Calcule la probabilidad de que la carta observada sea de diamantes.

b) Si la carta observada no es diamantes, calcule la probabilidad de que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

Solución:
D_1: diamante en la primera extracción y D_2: diamante en la segunda extracción.

a) $P(D_2)=P(\overline{D_1}\cap D_2)+P(D_1\cap D_2)=\dfrac{39}{52}\cdot\dfrac{13}{51}+\dfrac{13}{52}\cdot\dfrac{12}{51}=\dfrac{1}{4}=0,25$

b) $P(\overline{D_1}|\overline{D_2})=\dfrac{P(\overline{D_1}\cap\overline{D_2})}{P(\overline{D_2})}=\dfrac{\frac{39}{52}\cdot\frac{38}{51}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{38}{51}\simeq 0,7451$

4.15.3. Convocatoria Ordinaria(coincidente)

Problema 4.15.5 Sean A y B sucesos independientes de un experimento aleatorio con $P(B)=1/2$.

a) Calcule $P(A)$ para el caso en que $P(A\cup B)=3/4$.

b) Calcule $P(A)$ para el caso en que $P(A\cap B^c)=1/4$.
Nota: B^c denota el suceso complementario de B.

Solución:

a) A y B sucesos independientes $\Longrightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)$
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B) \Longrightarrow \dfrac{3}{4}=P(A)+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}P(A) \Longrightarrow \dfrac{1}{2}P(A)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4} \Longrightarrow P(A)=\dfrac{1}{2}$

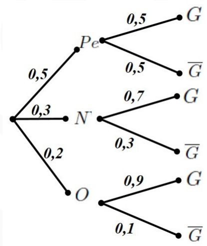
b) $P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(A)P(B) \Longrightarrow \dfrac{1}{4}=P(A)-\dfrac{1}{2}P(A) \Longrightarrow \dfrac{1}{2}P(A)=\dfrac{1}{4} \Longrightarrow P(A)=\dfrac{1}{2}$

Problema 4.15.6 Ganar en el juego del gambón depende de la actitud de los participantes. El 50 % de ellos son pesimistas y se sienten perdedores antes de haber jugado. El 30 % no lo ve claro y el resto son optimistas y se sienten ganadores antes de jugar. La probabilidad de que ganen los primeros es 0,5, de que ganen los segundos es 0,7 y de que ganen los últimos es 0,9.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador escogido al azar gane el juego?.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el ganador sea alguien que se haya sentido un perdedor antes de haber jugado el juego?

Solución:
Sean P_e a se sienten perdedores, N no lo ve claro, O son optimistas y G gana el juego.



a) $P(G) = P(G|Pe)P(Pe) + P(G|N)P(N)+$
$P(G|O)P(O) = 0,5 \cdot 0,5 + 0,7 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,2 = 0,64$

b) $P(Pe|G) = \dfrac{P(G|Pe)P(Pe)}{P(G)} =$
$\dfrac{0,5 \cdot 0,5}{0,64} = 0,390625$

4.15.4. Convocatoria Extraordinaria

Problema 4.15.7 Supongamos que el espacio muestral de cierto experimento aleatorio es la unión de los sucesos A y B. Esto es, $E = A \cup B$. Además suponga que $P(A \cap B) = 0,2$ y $P(B) = 0,7$.

a) Calcule $P(A^c)$.

b) Calcule $P(A^c \cup B^c)$.
Nota: A^c y B^c son, respectivamente, los sucesos complementarios de A y B.

Solución:
Por costumbre utilizaremos $\overline{B} = B^c$.

a) $P(A \cup B) = P(E) = 1 = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow$
$1 = P(A) + 0,7 - 0,2 \Longrightarrow P(A) = 0,5 \Longrightarrow P(\overline{A}) = 1 - 0,5 = 0,5$

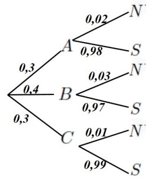
b) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,2 = 0,8$

Problema 4.15.8 Tres amigas (Ana, Berta y Carla) elaboran una lista para hacer una fiesta sorpresa a una compañera de trabajo. Ana enviará el 30 % de las invitaciones, Berta el 40 % y Carla las restantes. El 2 % de los nombres de la lista de Ana son incorrectos y las invitaciones no llegarán a su destino. En las listas de Berta y Carla, los porcentajes de nombres incorrectos son 3 % y 1 %, respectivamente.

a) Calcule la probabilidad de que una invitación no llegue a su destino.

b) Si una invitación no llegó a su destino, ¿cuál es la probabilidad de que la haya enviado Ana?

Solución:
A la envía Ana, B la envía Berta, C la envía Carla, N no llega y S si llega.



a) $P(N) = P(N|A)P(A) + P(N|B)P(B) + P(N|C)P(C) =$
$0,02 \cdot 0,3 + 0,03 \cdot 0,4 + 0,01 \cdot 0,3 = 0,021$

b) $P(A|N) = \dfrac{P(N|A)P(A)}{P(N)} = \dfrac{0,02 \cdot 0,3}{0,021} = 0,2857$

4.15.5. Convocatoria Extraordinaria (coincidente)

Problema 4.15.9 Sean A y B dos sucesos asociados a un mismo experimento aleatorio. Suponga que $P(A) = 0,7$, $P(B^c) = 0,7$ y $P(A \cap B) = 0,2$.

a) ¿Son A y B independientes? Justifique su respuesta.

b) Calcule $P(A^c \cap B^c)$.
Nota: A^c y B^c son, respectivamente, los sucesos complementarios de A y B.

Solución:
Por costumbre utilizaremos $\overline{B} = B^c$.

a) $P(A \cap B) = 0,2$ y $P(A)P(B) = 0,7(1 - 0,7) = 0,21 \Longrightarrow$
$P(A \cap B) \neq P(A)P(B) \Longrightarrow$ A y B no son independientes.

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) =$
$1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0,7 + 0,3 - 0,2) = 0,2$

Problema 4.15.10 Un virus muy peligroso está presente en el 5 % de la población nacional. Se tiene un test para detectar la presencia del virus que es correcto en el 85 % de los casos. Es decir, entre los portadores del virus, el test ha dado positivo el 85 % de las veces y entre los no portadores ha dado negativo el 85 % de las veces.

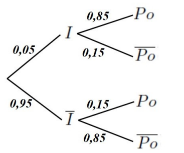
a) Si se practica el test a un individuo de la población escogido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dé positivo?

b) Si da positivo, ¿cuál es la probabilidad de que el individuo escogido realmente sea un portador del virus?

Solución:
I está infectado, $\overline{I}$ no está infectado, Po el test muestra positivo y $\overline{Po}$ el test muestra positivo.

a) $P(Po) = P(Po|I)P(I) + P(Po|\overline{I})P(\overline{I}) =$
$0,85 \cdot 0,05 + 0,15 \cdot 0,95 = 0,185$

b) $P(I|Po) = \dfrac{P(Po|I)P(I)}{P(Po)} = \dfrac{0,85 \cdot 0,05}{0,185} = 0,2297$



4.16. Murcia

4.16.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 4.16.1 En el departamento informático de unos grandes almacenes se encuentran a la venta ordenadores de distintas marcas comerciales. Hay 100 ordenadores de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un ordenador esté obsoleto es 0,01 para la marca A; 0,02 para la marca B y 0,03 para la marca C. Un comprador elige un ordenador al azar.

a) Calcule la probabilidad de que el ordenador esté obsoleto.

b) Sabiendo que el ordenador elegido es obsoleto, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca A?

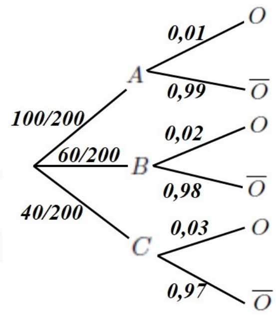
Solución:

Sean A ordenador de la marca A, B ordenador de la marca B, C ordenador de la marca C, O ordenador obsoleto y $\overline{O}$ ordenador no obsoleto.

a)

$$P(O) = P(O|A)P(A)+P(O|B)P(B)+P(O|C)P(C) =$$

$$0,01 \cdot \frac{100}{200} + 0,02 \cdot \frac{60}{200} + 0,03 \cdot \frac{40}{200} = 0,017$$



b)

$$P(A|O) = \frac{P(O|A)P(A)}{P(O)} = \frac{0,01 \cdot 0,5}{0,017} = 0,2941$$

4.16.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 4.16.2 Sean A y B dos sucesos independientes, tales que $P(A) = 0,3$ y $P(A \cap B) = 0,12$

a) Calcular $P(B)$.

b) Calcular $P(A \cup B)$

c) Calcular $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

Solución:

a) A y B son dos sucesos independientes$\Longrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A)P(B) \Longrightarrow P(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,12}{0,3} = 0,4$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,4 - 0,12 = 0,58$

c) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0,58 = 0,42$

4.17. Navarra

4.17.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 4.17.1 Una empresa vende tres productos (A, B y C) que distribuye a sus clientes a través de dos empresas de transporte (Trans y Logis). El año pasado, la empresa realizó 1500 ventas y encargó a Trans el 60 % del reparto y a Logis el 40 %. El 20 % de los productos distribuidos por Trans fueron tipo A, el 50 % fueron tipo B y el 30 % tipo C. Para la empresa Logis, estos porcentajes fueron 40 %, 35 % y 25 %, respectivamente.

a) Se selecciona al azar una venta realizada el año pasado. Calcule la probabilidad de que sea un producto tipo B y distribuido por Trans.

b) Se selecciona al azar una venta realizada el año pasado. Sabiendo que es un producto tipo C, calcule la probabilidad de que fuera distribuido por Logis.

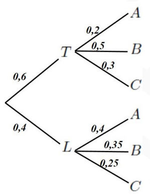
c) Se seleccionan al azar (sin reemplazamiento) dos ventas realizadas el año pasado. Calcule la probabilidad de que las dos ventas fueran distribuidas por Trans.

Solución:

Sean T empresa Trans, L empresa Logis, A producto A, B producto B y C producto C.

a) $P(B \cap T) = P(B|T)P(T) = 0,5 \cdot 0,6 = 0,30$

b) $P(L|C) = \dfrac{P(L \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(C|L)P(L)}{P(C|T)P(T) + P(C|L)P(L)} =$
$\dfrac{0,25 \cdot 0,4}{0,3 \cdot 0,6 + 0,25 \cdot 0,4} = 0,3571$



c) $1500 \cdot 0,6 = 900$ ventas de Trans y 600 de Logis

$$P(TT) = \frac{900}{1500} \cdot \frac{899}{1499} = 0,3598$$

4.17.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 4.17.2 Se considera que el 4 % de los deportistas federados consumen algún tipo de sustancia no permitida para mejorar su rendimiento. Se ha diseñado una nueva prueba de detección con dos posibles resultados: positivo y negativo. La prueba identifica correctamente el consumo de estas sustancias el 92 % de los casos. Sin embargo, si un deportista no consume estas sustancias, la prueba da positivo en el 10 % de los casos. Se selecciona un deportista al azar. Calcule (use 4 decimales):

a) La probabilidad de que obtenga un resultado positivo en la prueba.

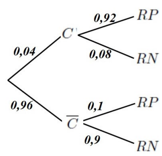
b) La probabilidad de que sea consumidor y la prueba tenga resultado negativo.

c) La probabilidad de que no sea consumidor sabiendo que la prueba ha dado resultado negativo.

Solución:

Sean C consume, $\overline{C}$ no consume, RP resultado positivo y RN resultado negativo.

a) $P(RP) = P(RP|C)P(C) + P(RP|\overline{C})P(\overline{C}) =$
$0,04 \cdot 0,92 + 0,96 \cdot 0,1 = 0,1328$



b) $P(C \cap RN) = P(RN|C)P(C) = 0,08 \cdot 0,04 = 0,0032$

c) $P(\overline{C}|RN) = \dfrac{P(RN|\overline{C})P(\overline{C})}{P(RN)} = \dfrac{0,9 \cdot 0,96}{1 - 0,1328} = 0,9963$

4.18. País Vasco

4.18.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 4.18.1 Un libro tiene 230 páginas repartidas en 3 capítulos. El primer capítulo tiene 100 páginas, y de ellas el 15 % tiene errores. El segundo consta de 80 páginas, de las cuales 8 tienen errores; y el tercero, de 50 páginas, sólo hay 40 que no tienen ningún error. Si abrimos el libro por una página al azar:

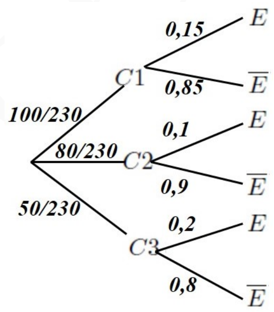
a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea del segundo capítulo?

b) Calcula la probabilidad de que la página elegida tenga errores y sea del tercer capítulo.

c) Calcula la probabilidad de que la página elegida no tenga errores.

d) Observamos que la página elegida tiene errores, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tercer capítulo?

Solución:
Sean $C1$ capítulo primero, $C2$ capítulo segundo, $C3$ capítulo tercero, E errores y $\overline{E}$ sin errores.



a) $P(C2) = \dfrac{80}{230} = 0,3478$

b) $P(E \cap C3) = P(E|C3)P(C3) = 0,2 \cdot \dfrac{50}{230} = 0,0435$

c) $P(\overline{E}) = P(\overline{E}|C1)P(C1) + P(\overline{E}|C2)P(C2) + P(\overline{E}|C3)P(C3) =$
$0,8 \cdot \dfrac{50}{230} + 0,9 \cdot \dfrac{80}{230} + 0,85 \cdot \dfrac{100}{230} = 0,8565$

d) $P(C3|E) = \dfrac{P(E|C3)P(C3)}{P(E)} = \dfrac{0,2 \cdot \frac{50}{230}}{1 - 0,8565} = 0,3030$

Problema 4.18.2 Sean A, B, C, D y E, sucesos de un determinado experimento aleatorio.

a) Sabemos que $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,3$ y $P(A \cup B) = 0,5$. Calcula la probabilidad de que ocurran A y B.

b) Sabemos que $P(C) = 0,5$; $P(D) = 0,6$ y $P(C \cup D) = 0,7$. Halla la probabilidad de que ocurra C sabiendo que ha ocurrido D.

c) Sabemos que $P(A) = 0,4$; $P(E) = 0,6$, y que los sucesos A y E son independientes. Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

Solución:

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow 0,5 = 0,4 + 0,3 - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,2$

b) $P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) \Longrightarrow 0,7 = 0,5 + 0,6 - P(C \cap D) \Longrightarrow P(C \cap D) = 0,4$
$P(C|D) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0,4}{P(0,6)} = 0,6667$

c) A y E independientes $\Longrightarrow P(A \cap E) = P(A)P(E) = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24$
$P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E) = 0,4 + 0,6 - 0,24 = 0,76$

4.18.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 4.18.3 Se van a sortear 4 viajes a Nueva York entre 40 personas utilizando una baraja de 40 cartas. Se reparte una carta por persona y cada una que recibe un rey ganará un viaje.

a) Calcula la probabilidad de que gane un viaje la primera persona que recibe la carta.

b) Calcula la probabilidad de que gane un viaje la segunda persona que recibe la carta.

c) Calcula la probabilidad de que ninguna de las dos primeras personas gane un viaje.

Solución:
Sean $G1$ gana el primero y $G2$ gana el segundo.

a) $P(G1) = \dfrac{4}{40} = 0,1$

b) $P(G2) = P(G1 \cap G2) + P(\overline{G1} \cap G2) = \dfrac{4}{40} \cdot \dfrac{3}{39} + \dfrac{36}{40} \cdot \dfrac{4}{39} = 0,1$

c) $P(\overline{G1} \cap \overline{G2}) = \dfrac{36}{40} \cdot \dfrac{35}{39} = 0,8077$

Problema 4.18.4 Deiene y Kattalin son jugadoras de baloncesto. Deiene encesta 2 de cada 5 tiros; Kattalin 3 de cada 7.
Si ambas tiran a canasta una sola vez, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Ambas han encestado.

b) Ninguna ha encestado.

c) Sólo Deiene ha encestado.

d) Al menos una ha encestado.

Solución:
Sean D encesta Deiene, K encesta Kattalin.
$P(D) = \dfrac{2}{5} = 0,4$ y $P(K) = \dfrac{3}{7} = 0,4286$

a) $P(D \cap K) = P(D)P(K) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{3}{7} = \dfrac{6}{35} \simeq 0,1714$

b) $P(\overline{D} \cap \overline{K}) = P(\overline{D})P(\overline{K}) = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{4}{7} = \dfrac{12}{35} \simeq 0,3429$

c) $P(D \cap \overline{K}) = P(D) - P(D \cap K) = \dfrac{2}{5} - \dfrac{6}{35} = \dfrac{8}{35} \simeq 0,2286$

d) $P(\text{al menos una ha encestado}) = 1 - P(\text{ninguna ha encestado}) = 1 - P(\overline{D} \cap \overline{K}) = 1 - \dfrac{12}{35} = \dfrac{23}{35} \simeq 0,6571$

Capítulo 5

Estadística

5.1. Resúmenes teóricos

Gráficos:

- Variable discreta: con diagrama de barras.

$$x_i, \;\; p(x_i) = p_i, \;\; \sum p_i = 1$$

$$\text{Media} = \mu = \sum x_i p_i, \quad \text{Varianza} = \sigma^2 = \sum p_i (x_i - \mu)^2 = \sum p_i x_i - \mu^2$$

$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$

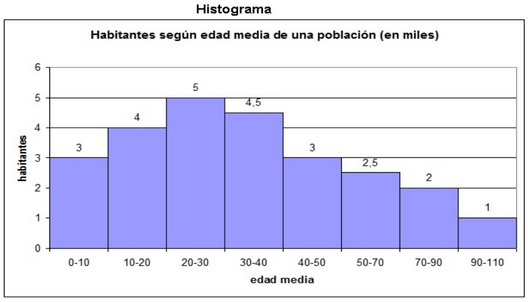
- Variable continua: histogramas (intervalos)

$$x_i, \;\; f_i,$$

$$\text{Media} = \overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum x_i}, \quad \text{Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \overline{X})^2}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \overline{X}^2$$

$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$

Histograma



Distribución Binomial $\mathrm{B}(n,p)$:

$$P(X=a)=\left(\begin{array}{c} n \\ a \end{array}\right)p^a q^{n-a}$$

p es la probabilidad de éxito y $q=1-p$ la probabilidad de fracaso. Por ejemplo, si $\mathrm{B}(7,0,4)\Longrightarrow$ $n=7$, $p=0,4$ y $q=0,6$:

$$P(X=2)=\left(\begin{array}{c} 7 \\ 2 \end{array}\right)0,4^2 0,6^5=0,261$$

$$P(X\leq 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3),\ \text{ó}$$

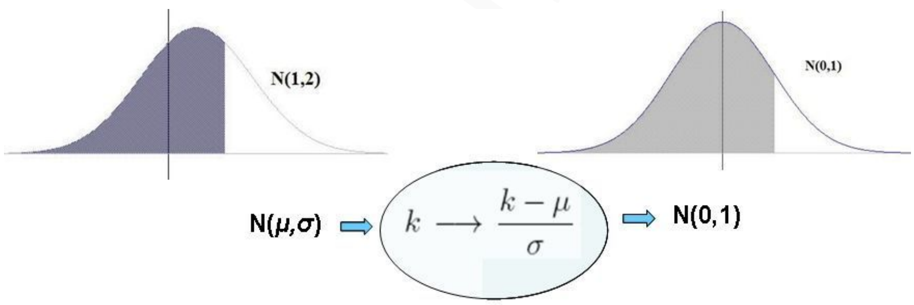
$$P(X\leq 3)=1-P(X>3)=1-(P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7))$$

Su Media$=\mu=np$, su Varianza$=\sigma^2=npq$ y su Desviación Típica$=\sqrt{\text{Varianza}}$.
Distribución Normal $\mathrm{N}(\mu,\sigma)$:

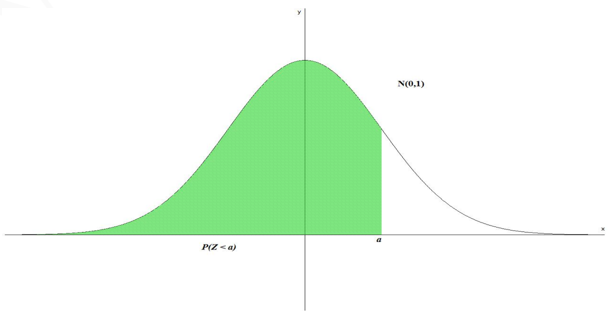
$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Tipificación Paso de una normal $\mathrm{N}(\mu,\sigma)$ a otra $\mathrm{N}(0,1)$: $k\longrightarrow\dfrac{k-\mu}{\sigma}$, si queremos calcular $P(a<X<b)$ y X es de una normal $\mathrm{N}(\mu,\sigma)$ entoces Z seguirá una normal $\mathrm{N}(0,1)$

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}<Z<\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$



Cuando una distribución binmial $B(n,p)$ cumple $np>3$ y $nq>3$, se aproxima a una normal $N(np,\sqrt{npq})$, si son mayores de 5 la aproximación es perfecta.



$$P(Z > a) = 1 - P(Z < a), \quad P(Z < -a) = 1 - P(Z < a)$$
$$P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$$

La corrección por continuidad de Yate seguirá las siguientes reglas:
$P(x = a) = P(a - 0,5 \leq X \leq a + 0,5)$
$P(X \leq a) = P(X \leq a + 0,5)$
$P(X < a) = P(X \leq a - 0,5)$
$P(X > a) = P(X \geq a + 0,5)$
$P(X \geq a) = P(X \geq a - 0,5)$
Cálculo de $z_{\alpha/2}$ con un **Nivel de confianza** del 95 %: $NC = 0,95 = 1 - \alpha$ ($\alpha =$**Nivel de significación**)$\Longrightarrow$ $\alpha = 0,05$. Para una distribución bilateral tendremos $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025 \Longrightarrow P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975$ se busca en la tabla $N(0,1)$ y obtenemos $z_{\alpha/2} = 1,96$
Para muestras aleatorias de tamaño n con media $\overline{X}$ de una $N(\mu, \sigma)$ la media $\overline{X}$ se distribuye como una normal $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
Error: $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Intervalo de Confianza: $(\overline{X} - E, \overline{X} + E) = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de medias.

Proporciones: Sea $\hat{p}$ proporción de la muestra de tamaño n, se distribuye como una $N\left(p, \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$

Error: $E = z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

Intervalo de Confianza: $(\hat{p} - E, \hat{p} + E) = \left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de proporciones.

Problemas

5.2. Andalucia

5.2.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.2.1 La resistencia media a la ruptura de una nueva gama de herramientas sigue una distribución Normal de desviación típica 15 MPa (megapascales). Se seleccionan al azar 100 herramientas forjadas en la misma máquina durante el mismo proceso de producción, obteniéndose una resistencia media de 800 MPa.

a) Realizando la estimación con un nivel de confianza del 92 %, ¿entre qué valores se estima la resistencia media poblacional de esta gama de herramientas?

b) Manteniendo el mismo nivel de confianza, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error máximo en la estimación de la resistencia media a la ruptura sea menor que 2 MPa?

Solución:

$$N(\mu; 15), \quad n = 100 \quad \overline{X} = 800$$

a) $NC = 0,92 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,08 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,04$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,04 = 0,96 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,75$

$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,75\dfrac{15}{\sqrt{100}} = 2,625$

$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (800 - 2,625, 800 + 2,625) = (797,375; 802,625)$

b) $2 = 1,75\dfrac{15}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n > \left(\dfrac{1,75 \cdot 15}{2}\right)^2 = 172,265625 \Longrightarrow n = 173$

Problema 5.2.2 Se quiere estudiar la proporción de perros que están vacunados en Andalucía. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 400 perros de los que 320 resultan estar vacunados.

a) Obtenga un intervalo con un nivel de confianza del 92 % para estimar la proporción de perros vacunados en Andalucía y calcule el error máximo cometido.

b) En una nueva muestra, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, ¿cuántos perros, como mínimo, hay que elegir para que el error sea menor que 0,02?

Solución:

$$n = 400 \;\; \hat{p} = \frac{320}{400} = 0,8, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,2$$

a) $NC = 92\,\% = 0,92 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,08 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,04$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,96 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,75$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,75\sqrt{\frac{0,8 \cdot 0,2}{400}} = 0,035$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,8 - 0,035; 0,8 + 0,035) = (0,765; 0,835) = (76,5\,\%, 83,5\,\%)$$

b) $E = 0,02$

$$0,02 = 1,75\sqrt{\frac{0,8 \cdot 0,2}{n}} \Longrightarrow n > \left(\frac{1,75}{0,02}\right)^2 (0,8 \cdot 0,2) = 1225 \Longrightarrow$$

$$n = 1226$$

5.2.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.2.3 Una fábrica de tornillos quiere hacer un estudio sobre la proporción de tornillos que cumplen las especificaciones del fabricante. Para ello ha seleccionado una muestra aleatoria de 1500 tornillos, resultando que 1425 cumplen las especificaciones del fabricante.

a) Determine un intervalo de confianza para la proporción de tornillos que cumplen con las especificaciones del fabricante con un nivel de confianza del 97 %.

b) Manteniendo la proporción muestral y el nivel de confianza del apartado anterior, ¿cuál tendría que ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1 %?

Solución:

$$n = 1500 \;\; \hat{p} = \frac{1425}{1500} = 0,95, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,05$$

a) $NC = 97\,\% = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,17\sqrt{\frac{0,95 \cdot 0,05}{1500}} = 0,0122$$

$$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,95-0,0122; 0,95+0,0122) = (0,9378; 0,9622) = (93,78\,\%, 96,22\,\%)$$

b) $E = 0,01$

$$0,01 = 2,17\sqrt{\frac{0,95 \cdot 0,05}{n}} \Longrightarrow n > \left(\frac{2,17}{0,01}\right)^2 (0,95 \cdot 0,05) = 2236,7275 \Longrightarrow$$

$$n = 2237$$

Problema 5.2.4 El número de días que los titulados en un cierto máster tardan en encontrar su primer trabajo sigue una distribución Normal de media μ desconocida y desviación típica 3 días.

a) Se elige una muestra aleatoria de 100 titulados obteniéndose una media muestral de 8,1 días. Calcule un intervalo de confianza al 97 % para estimar la media poblacional.

b) Con un nivel de confianza del 92 %, calcule el tamaño muestral mínimo necesario para que el error cometido, al estimar el número medio de días que estos titulados tardan en encontrar trabajo, sea inferior a un día.

c) Suponiendo $\mu = 7,61$ días y tomando muestras aleatorias de 36 titulados, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria media muestral? ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea superior a 8 días?

Solución:

$$N(\mu; 3)$$

a) $n = 100$, $\overline{X} = 8,1$ y $NC = 97\,\% = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17\dfrac{3}{\sqrt{100}} = 0,651$
$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (8,1 - 0,651, 8,1 + 0,651) = (7,449; 8,751)$

b) $NC = 0,92 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,08 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,04$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,04 = 0,96 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,75$
$1 = 1,75\dfrac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n > \left(\dfrac{1,75 \cdot 3}{1}\right)^2 = 27,5625 \Longrightarrow n = 28$

c) $N(7,61; 3)$ y $n = 36 \Longrightarrow \overline{X} \overset{N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}{\approx} N(7,61; 0,5)$
$P(\overline{X} \ge 8) = P\left(Z \ge \dfrac{8 - 7,61}{0,5}\right) = P(Z \ge 0,78) = 1 - P(Z \le 0,78) =$
$1 - 0,7823 = 0,2177$

5.3. Aragón

5.3.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.3.1 En una encuesta realizada a 64 jóvenes 8 se mostraron contrarios a llevar mascarillas en el interior de recintos de ocio. Calcule un intervalo de confianza al 97 % para determinar la proporción de jóvenes que son contrarios al uso de mascarilla en interiores de recintos de ocio. Por otro lado, el alcalde de la ciudad considera que si existe un 25 % de jóvenes adversos al uso de mascarilla se requiere aplicar algún tipo de medida de concienciación. A la vista del intervalo calculado ¿se debería implantar alguna medida de concienciación?
Solución:
$n = 64$ y $\hat{p} = 0,125$
$NC = 97\,\% = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,17\sqrt{\frac{0,125 \cdot 0,875}{64}} = 0,0897$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,125 - 0,0897; 0,125 + 0,0897) = (0,0353; 0,2147) = (3,53\,\%; 21,47\,\%)$$

La proporción de jovenes que son contrarios al uso de mascarillas en recintos cerrados es del 25 %, porcentaje que claramente no se encuentra dentro del intervalo de confianza. No sería necesario hacer campaña de concienciación.

Problema 5.3.2 Por una prueba de acceso a la Universidad realizada a los estudiantes de segundo de Bachillerato, se sabe que las calificaciones obtenidas se distribuyen según una distribución normal.

a) Si la media de la prueba selectiva es de 65 puntos y la desviación típica 8. Calcule la probabilidad de que la nota media de 25 estudiantes elegidos al azar sea mayor a 63 puntos.

b) Calcule un intervalo de confianza para la nota media de ingreso en DADE, con un nivel de confianza del 92 %, sabiendo que ingresan 100 estudiantes, que la nota media de acceso es de 80 puntos y que la desviación típica es 8,8 puntos.

c) Determine el tamaño de la muestra necesario para que el error máximo del intervalo de confianza calculado en el apartado anterior se reduzca a la mitad (con los datos del apartado b).

Solución:

$$N(\mu;\sigma)$$

a) $N(65;8)$, $n=25 \Longrightarrow \overline{X} \overset{N\left(\mu;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}{\approx} N(65;1,6)$
$P(X\geq 63)=P\left(Z\geq \dfrac{63-65}{1,6}\right)=P(Z\geq -1,25)=P(Z\leq 1,25)=0,8944$

b) $N(\mu;8,8)$, $n=100$, $\overline{X}=80$ y $NC=92\,\%$
$NC=92\,\%=0,92=1-\alpha \Longrightarrow \alpha=0,08 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2}=0,04$

$$P(Z\leq z_{\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}=0,96 \Longrightarrow z_{\alpha/2}=1,75$$

$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1,75\frac{8,8}{10}=1,54$$

$$IC=(\overline{X}-E,\overline{X}+E)=(80-1,54;80+1,54)=(78,46;81,54)$$

c)

$$E=\frac{1,54}{2}=0,77=1,75\frac{8,8}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n\geq\left(\frac{1,75\cdot 8,8}{0,77}\right)^2=400$$

$$n=400$$

5.3.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.3.3 En una ciudad se ha encuestado a 100 personas preguntándoles si tenían contratado algún seguro para su teléfono móvil. Se obtuvo como resultado que 15 personas tenían contratado este tipo de seguro. Determine un intervalo de confianza al 96 % para la proporción de personas de esa ciudad que tienen contratado un seguro para su móvil.

Solución:
$n=100$ y $\hat{p}=0,15$
$NC=96\,\%=0,96=1-\alpha \Longrightarrow \alpha=0,04 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2}=0,02$

$$P(Z\leq z_{\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}=0,98 \Longrightarrow z_{\alpha/2}=2,055$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,055\sqrt{\frac{0,15\cdot 0,85}{100}} = 0,0734$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,15 - 0,0734; 0,15 + 0,0734) = (0,0766; 0,2234) = (7,66\,\%; 22,34\,\%)$$

Problema 5.3.4 El tiempo de espera para recibir en casa «tu compra en pocos minutos» se distribuye según una distribución normal de varianza 16 minutos.

a) Si la media para el tiempo de espera fuera de 12 minutos, ¿cuál sería la probabilidad de que la media de 7 pedidos fuese de más de 10 minutos?

b) Si la media obtenida a partir de una muestra aleatoria de 49 encargos fue de 12 minutos, calcule un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza del 97 %.

c) Con datos de 16 encargos se ha calculado el intervalo de confianza (9,7; 13,5) minutos para el tiempo medio en recibir el pedido. Determine el nivel de confianza de ese intervalo.

Solución:

$$N(\mu; \sqrt{16}) = N(\mu; 4)$$

a) $N(12; 4)$, $n = 7 \Longrightarrow \overline{X} \overset{N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}{\approx} N(12; 1,512)$
$P(\overline{X} \geq 10) = P\left(Z \geq \dfrac{10-12}{1,512}\right) = P(Z \geq -1,32) = P(Z \leq 1,32) = 0,9066$

b) $N(\mu; 4)$, $n = 49$, $\overline{X} = 12$ y $NC = 97\,\%$
$NC = 97\,\% = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17\frac{4}{7} = 1,24$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (12 - 1,24; 12 + 1,24) = (10,76; 13,24)$$

c) $E = \dfrac{13,5 - 9,7}{2} = 1,9 = z_{\alpha/2}\dfrac{4}{\sqrt{16}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,9$
$P(Z \leq 1,9) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,9713 \Longrightarrow \alpha = 0,0574 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 0,9426$

$$NC = 94,26\,\%$$

5.4. Asturias

5.4.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.4.1 Se quiere hacer un estudio para estimar la proporción de personas que han viajado a América.

a) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de personas que han viajado a América a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,05 y un nivel de confianza del 90 %?

b) En una muestra aleatoria de 2000 personas, se sabe que 600 han viajado a América. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo para estimar la proporción poblacional de personas que han viajado a América.

Nota: Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Solución:

a) $NC = 90\,\% = 0,90 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,64$$

$$\hat{p} = 0,5, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,5$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 (\hat{p}\hat{q}) = \left(\frac{1,64}{0,05}\right)^2 (0,5\cdot 0,5) = 268,96 \Longrightarrow n = 269$$

b) $n = 2000$ $\hat{p} = \dfrac{600}{2000} = 0,3, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,7$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,64\sqrt{\frac{0,3\cdot 0,7}{2000}} = 0,0168$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,3 - 0,0168; 0,3 + 0,0168) = (0,2832; 0,3168) = (28,32\,\%; 31,68\,\%)$$

Problema 5.4.2 La duración de un tipo de pila, en horas, sigue una distribución normal con desviación típica de 80 horas.

a) Construye un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99 %, para la duración media de ese tipo de pila, a partir de una muestra de 100 pilas, en la que se ha obtenido que la suma de las duraciones de todas ellas ha sido de 55000 horas.

b) Si el tamaño muestral siguiese siendo de 100 pilas, pero la media aumenta, ¿qué le ocurriría a los extremos del intervalo anterior? ¿aumentarían o disminuirían? Y si la media siguiese siendo la misma, pero el tamaño muestral hubiese aumentado, ¿qué le ocurriría a la amplitud del intervalo anterior? ¿aumentaría o disminuiría?

Nota: Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Solución:

$$N(\mu; 80)$$

a) $n = 100$, $\overline{X} = \dfrac{55000}{100} = 550$ y $NC = 99\,\% = 0,99 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,58$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,58\frac{80}{\sqrt{100}} = 20,64$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (550 - 20,64; 550 + 20,64) = (529,36; 570,64)$$

b) Si la media aumenta y el tamaño muestral, la desviación típica y el nivel de confianza no varían; el error sería el mismo y los dos extremos del intervalo aumentarían con la media. El intervalo se desplazaría con la nueva media y sería de la misma longitud.
Si aumentamos el tamaño muestral y la media, la desviación típica y el nivel de confianza no varían; el error disminuye y la amplitud del intervalo se hace más pequeña.

5.4.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.4.3 Para estudiar el tiempo medio que tarda la compañía PhoneFun en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono, se consideró una muestra aleatoria de 200 clientes y se obtuvo que el tiempo medio de portabilidad para ellos fue de 40 horas. Se supone que el tiempo de portabilidad se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 10 horas.

a) Construye un intervalo de confianza para el tiempo medio de portabilidad en esa compañía, al 90 % de confianza.

b) ¿Cuál sería el número mínimo de clientes en la muestra necesario para estimar el verdadero tiempo medio de portabilidad en esa compañía mediante un intervalo de amplitud menor o igual a 2 horas y un nivel de confianza del 90 %?

Nota: Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Solución:

$$N(\mu; 10)$$

a) $n = 200$, $\overline{X} = 40$ y $NC = 90\,\% = 0,9 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,64$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,64\frac{10}{\sqrt{200}} = 1,1597$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (40 - 1,1597; 40 + 1,1597) = (38,8403; 41,1597)$$

b) $E = \dfrac{2}{2} = 1$

$$1 = 1,64\frac{10}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge (1,64 \cdot 10)^2 = 268,96 \Longrightarrow n = 269$$

Problema 5.4.4 En una determinada ciudad se ha seleccionado una muestra aleatoria de 300 hogares, de los que 240 reciclan sus envases de plástico habitualmente.

a) Halla, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo para estimar la proporción de hogares que reciclan el plástico habitualmente en esa ciudad.

b) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría a la amplitud del intervalo si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese aumentado el tamaño muestral?

Nota: Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Solución:

a) $NC = 95\,\% = 0,95 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$\hat{p} = \frac{240}{300} = 0,8, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,2$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,8\cdot 0,2}{300}} = 0,0453$$

$$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,8-0,0453; 0,8+0,0453) = (0,7547; 0,8453) = (75,47\,\%; 84,53\,\%)$$

b) $E = 0,0453$. Si aumenta el tamaño muestral, manteniendo el mismo nivel de confianza y proporción, el error se hace más pequeño, luego la amplitud del intervalo disminuye.

5.5. Cantabria

5.5.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.5.1 Un agricultor valenciano ha determinado que el peso de sus naranjas sigue una distribución normal con desviación típica de 15 gramos. De una muestra de 100 naranjas escogidas al azar se calcula un peso medio por naranja de 210 gramos.

a) Obtenga el intervalo de confianza del 93 % para el peso medio de una naranja.

b) ¿Cuál es el número mínimo de naranjas que habría que considerar para que el error cometido al estimar el peso medio por naranja, con un nivel de confianza del 97 %, fuese de 2 gramos?

Solución:

$$N(\mu; 15)$$

a) $n = 100$, $\overline{X} = 210$ y $NC = 93\,\% = 0,93 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,07 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,035$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,965 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,815$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,815\frac{15}{\sqrt{100}} = 2,7225$$

$$IC = (\overline{X}-E, \overline{X}+E) = (210-2,7225; 210+2,7225) = (207,2775; 212,7225)$$

b) $NC = 97\,\% = 0,97 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$E = 2 \Longrightarrow 2 = 2,17\frac{15}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{2,17\cdot 15}{2}\right)^2 = 264,875625 \Longrightarrow n = 265$$

5.5.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.5.2 La enóloga de una bodega ha determinado que el porcentaje de alcohol presente en sus botellas de vino sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,53 %. Una muestra de 120 botellas, escogidas al azar, arroja un valor promedio para el porcentaje de alcohol por botella de 12,05 %.

a) Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el valor promedio del porcentaje de alcohol por botella.

b) ¿Cuál es el número mínimo de botellas que habría que considerar para que el error cometido al estimar el valor medio del porcentaje de alcohol por botella, con un nivel de confianza del 97,5 %, fuese de 0,1 %?

Solución:

$$N(\mu; 0,53)$$

a) $n = 120$, $\overline{X} = 12,05$ y $NC = 95\,\% = 0,95 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{0,53}{\sqrt{120}} = 0,0948$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (12,05 - 0,0948; 12,05 + 0,0948) = (11,9552; 12,1448)$$

b) $NC = 97,5\,\% = 0,975 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,025 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,0125$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9875 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,24$$

$$0,1 = 2,24\frac{0,53}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{2,24 \cdot 0,53}{0,1}\right)^2 = 140,9444 \Longrightarrow n = 141$$

5.6. Castilla La Mancha

5.6.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.6.1 El número de pacientes que se atienden en un centro de salud a la semana sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 50$ pacientes. Se ha tomado una muestra aleatoria de 25 semanas y se ha registrado el número de pacientes atendidos, proporcionando una media de 322 pacientes.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del número de pacientes atendidos con un nivel de confianza del 95 %.

b) Explica razonadamente qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza aumentamos el tamaño de muestra.

c) ¿Se puede aceptar la afirmación de que la media de pacientes atendidos a la semana es de 330 con un nivel de confianza del 99 %? Justificar la respuesta.

Solución:

$$N(\mu; 50)$$

a) $n = 25$, $\overline{X} = 322$ pacientes y $NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{50}{\sqrt{25}} = 19,6 \text{ pacientes}$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (322 - 19,6; 322 + 19,6) = (302,4; 341,6)$$

b) Disminuye el error y, por tanto, la amplitud del intervalo se hace más pequeña.

c) Al aumentar el nivel de confianza aumenta el error y, por tanto, aumenta la amplitud del intervalo de confianza. Como tenemos $330 \in (302,4; 341,6)$ podemos aceptar el número medio de 330 pacientes atendidos por semana.

Problema 5.6.2 El número de libros que lee un estudiante de Bachillerato al año sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 6$ libros^2: Se ha tomado una muestra de 10 estudiantes de Bachillerato y el número de libros que han leído han sido 4, 8, 2, 9, 3, 7, 5, 6, 7 y 4 libros.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de libros leídos con un nivel de confianza del 97 %.

b) Explica razonadamente qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza.

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 64 estudiantes y un nivel de confianza del 95,96 %.

Solución:

$$N(\mu; \sqrt{6})$$

a) $n = 10$, $\overline{X} = 5,5$ libros y $NC = 97\,\% = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = 1,6809 \text{ libros}$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (5,5 - 1,6809; 5,5 + 1,6809) = (3,8191; 7,1809)$$

b) Si se disminuye el tamaño de la muestra el error se hace más grande y la amplitud del intervalo de confianza aumenta.

c) $NC = 95,96\,\% = 0,9596 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,0404 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,0202$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9798 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,05$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,05\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{64}} = 0,6277 \text{ libros}$$

5.6.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.6.3 El tiempo empleado para resolver un problema de Estadística sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 6,4$ minutos. Se ha tomado una muestra de 9 personas y los tiempos empleados en resolver el problema han sido 12, 11, 10, 9, 7, 12, 11, 8 y 10 minutos.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo empleado en resolver el problema con un nivel de confianza del 97 %.

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 3 minutos.

Solución:

$$N(\mu; 50)$$

a) $n = 9$, $\overline{X} = 10$ minutos y $NC = 97\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17\frac{6,4}{\sqrt{9}} = 4,6293 \text{ minutos}$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (10 - 4,6293; 10 + 4,6293) = (5,3707; 14,6293)$$

b) $3 = 2,17\dfrac{6,4}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\dfrac{2,17 \cdot 6,4}{3}\right)^2 = 21,4307 \Longrightarrow n = 22$

Problema 5.6.4 Una marca de neumáticos ha tomado una muestra aleatoria de 100 ruedas y ha medido la presión de inflado, proporcionando una media de 2,3 bares. Si se sabe que la presión de inflado sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 0,81$ bares^2:

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la presión de inflado con un nivel de confianza del 95 %.

b) Explica razonadamente qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza disminuimos el tamaño de muestra.

c) La marca de neumáticos afirma que la media de presión de inflado es de 2 bares. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza 90 %. Justificar la respuesta.

Solución:

$$N(\mu; \sqrt{0,81})$$

a) $n = 100$, $\overline{X} = 2,3$ bares y $NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{\sqrt{0,81}}{\sqrt{100}} = 0,1764 \text{ bares}$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (2,3 - 0,1764; 2,3 + 0,1764) = (2,1236; 2,4764)$$

b) Si se disminuye el tamaño de la muestra el error se hace más grande y la amplitud del intervalo de confianza aumenta.

c) Si el nivel de confianza disminuye el error también y el intervalo de confianza se haría más pequeño. Luego el 2 no pertenecería al intervalo de confianza calculado anteriormente y, con mayor razón, si el nivel de confianza es del 90 %. Rechazaríamos la afirmación del fabricante.

5.7. Castilla León

5.7.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.7.1 El peso de los huevos de una granja sigue una distribución normal de media 67 gramos y desviación típica 15 gramos. En función del peso, los huevos se clasifican en 4 tamaños.

a) Teniendo en cuenta que se consideran de tamaño XL los huevos que pesan más de 73 gramos, ¿cuál es la probabilidad de encontrar huevos de tamaño XL?

b) Si se elige al azar una muestra de 6 huevos, calcular la probabilidad de que la media del peso de la muestra se encuentre entre 53 y 63 gramos (tamaño M).

Solución:

$$N(67,15)$$

a) $P(X\geq 73)=P\left(Z\geq \dfrac{73-67}{15}\right)=P(Z\geq 0,4)=1-P(Z\leq 0,4)=1-0,6554=0,3446$

b) $n=6\Longrightarrow \overline{X}\approx N\left(67,\dfrac{15}{\sqrt{6}}\right)=N(67;6,1237)$

$P(53\leq \overline{X}\leq 63)=P\left(\dfrac{53-67}{6,1237}\leq Z\leq \dfrac{63-67}{6,1237}\right)=P(-2,29\leq Z\leq -0,65)=$
$P(Z\leq -0,65)-P(Z\leq -2,29)=1-P(Z\leq 0,65)-(1-P(Z\leq 2,29))=$
$P(Z\leq 2,29)-P(Z\leq 0,65)=0,9890-0,7422=0,2468$

5.7.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.7.2 La distancia recorrida para ir a clase por los estudiantes de cierta universidad se distribuye según un modelo normal de media μ kilómetros y varianza 2,25. Se toma una muestra de 100 estudiantes, obteniéndose una distancia media de 4 kilómetros para esa muestra. Tomando esta información, se pide

a) Hallar el intervalo de confianza para la media μ al nivel de confianza del 96 %.

b) ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra para que, al nivel de confianza del 95 %, el error máximo de estimación de la distancia media μ sea de 0,1 kilómetros?

Solución:

$$N(\mu,\sqrt{2,25})$$

a) $n=100$, $\overline{X}=4$ kms y $NC=96\,\%=0,96=1-\alpha\Longrightarrow \alpha=0,04\Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2}=0,02$

$P(Z\leq Z_{\alpha/2})=1-\dfrac{\alpha}{2}=0,98\Longrightarrow Z_{\alpha/2}=2,055$

$E=Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=2,055\dfrac{\sqrt{2,25}}{\sqrt{100}}=0,30825$

$IC=(\overline{X}-E,\overline{X}+E)=(4-0,30825;4+0,30825)=(3,69175;4,30825)$

b) $E = 0,1$ y $NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$0,1 = 1,96\frac{\sqrt{2,25}}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{1,96\sqrt{2,25}}{0,1}\right)^2 = 864,36 \Longrightarrow n = 865$$

Problema 5.7.3 La ficha técnica de una encuesta electoral realizada para las pasadas elecciones autonómicas indica que se ha encuestado a 1000 individuos con derecho a voto residentes en Castilla y León. La muestra se ha tomado mediante muestreo aleatorio simple. El error de estimación de la proporción de individuos de la población que vota al partido K es de $\pm 3,2\,\%$ fijada una confianza del 95,5 %.
Para esta ficha técnica, identificar los siguientes elementos: Población, diseño muestral, tamaño muestral, parámetro estimado.
Solución:
Población: individuos con derecho a voto.
Diseño muestral: muestreo aleatorio simple.
Tamaño muestral: 1000 individuos.
Parámetro estimado: proporción de votantes del partido K.

5.8. Cataluña

5.8.1. Convocatoria Ordinaria-Serie 2

Sin problemas de esta materia.

5.8.2. Convocatoria Ordinaria-Serie 5

Sin problemas de esta materia.

5.8.3. Convocatoria Extraordinaria

Sin problemas de esta materia.

5.9. Comunidad Valenciana

5.9.1. Convocatoria Ordinaria

Sin problemas de esta materia.

5.9.2. Convocatoria Extraordinaria

Sin problemas de esta materia.

5.10. Extremadura

5.10.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.10.1 El contenido de verdura de los botes de una marca de purés para bebés es una variable que se supone con distribución normal con desviación típica 23 gramos. Se seleccionan al

azar 121 botes, registrándose el contenido en verdura de dichos botes, resultando una media de 146 gramos. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95 %, para la cantidad media de verduras que contienen dichos botes de puré.
Razona la respuesta.
Solución:

$$N(\mu; 23)$$

$$NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$n = 121$ y $\overline{X} = 146$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{23}{\sqrt{121}} = 4,0982$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (146 - 4,0982; 146 - 4,0982) = (141,9018; 150,0982)$$

.

Problema 5.10.2 Una cadena de supermercados tiene en plantilla 3000 cajeros, 4000 reponedores y 1000 transportistas. Se desea obtener una muestra de 200 trabajadores para una encuesta sobre la satisfacción con el puesto de trabajo. Se pide, razonando las respuestas:

a) Atendiendo a razones de proporcionalidad, ¿cuántos cajeros, reponedores y transportistas debería seleccionar la empresa para la encuesta?

b) Si 30 de los cajeros encuestados estaban satisfechos con su trabajo, dar una estimación de la proporción de cajeros satisfechos con su puesto de trabajo.

Solución:

a) Se hace un reparto proporcional:
Cajeros: $200 \cdot \dfrac{3000}{8000} = 75$
Reponedores: $200 \cdot \dfrac{4000}{8000} = 100$
Transportistas: $200 \cdot \dfrac{1000}{8000} = 25$

b) $\hat{p} = \dfrac{30}{75} = 0,4 \Longrightarrow$ 40 % de los cajeros están satisfechos con su puesto de trabajo.

5.10.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.10.3 La producción de tomates en parcelas de una zona de regadío se ajusta a distribución normal con desviación típica 1 tonelada. Con objeto de estimar la producción media de la zona, se registran los datos de 36 parcelas que arrojan una producción media de 8,7 toneladas. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90 %, para la producción media de tomates de las parcelas de la zona. Razonar la respuesta.
Solución:

$$N(\mu; 1)$$

$NC = 95\,\% = 0,90 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$
$n = 36$ y $\overline{X} = 8,7$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{1}{\sqrt{36}} = 0,2742$$

$$IC = (\overline{X}-E, \overline{X}+E) = (8,7-0,2742; 8,7-0,2742) = (8,4258; 8,9742)$$

.

Problema 5.10.4 Se quiere realizar un estudio sobre la proporción de hogares españoles con conexión de fibra óptica. Como dicha proporción es desconocida, asumimos de principio un valor $P = 0,5$. Se pide determinar el número mínimo de hogares que hay que visitar si deseamos calcular un intervalo de confianza para dicha proporción con un nivel confianza del 99 % y cuya longitud sea inferior a 0,14. Razonar la respuesta.
Solución:
$E = \dfrac{0,14}{2} = 0,07$, $p = 0,5$ y $q = 0,5$
$NC = 99\,\% = 0,99 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,576$
$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{pq}{n}} = 2,576\sqrt{\dfrac{0,5\cdot 0,5}{n}} = 0,07 \Longrightarrow n \geq \left(\dfrac{2,576}{0,07}\right)^2 (0,5\cdot 0,5) = 338,56 \Longrightarrow n = 339$

5.11. Galicia

5.11.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.11.1 Tomamos una muestra aleatoria de 36 facturas de consumo mensual de luz (en euros) y el intervalo de confianza obtenido al 95 % para el consumo mensual medio es $[60,1; 69,9]$. Según esta información:

a) ¿Cuál fue el consumo medio muestral de luz?

b) ¿Cuál es el error máximo cometido?

c) Determine un intervalo de confianza al 90 % para el consumo medio de luz.

Solución:

a) $IC = (\overline{X}-E, \overline{X}+E) \Longrightarrow \overline{X} = \dfrac{69,9+60,1}{2} = 65$

b) $E = \dfrac{69,9-60,1}{2} = 4,9$

c) $NC = 95\,\% = 0,95 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1-\frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 4,9 = 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{36}} \Longrightarrow \sigma = 15$$

$$N(\mu, 15)$$

$NC = 90\,\% = 0,90 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1-\frac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{15}{\sqrt{36}} = 4,1125$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (65 - 4,1125; 65 + 4,1125) = (60,8875; 69,1125)$$

5.11.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.11.2 Se sabe que la edad de los trabajadores en las fábricas de una zona sigue una distribución normal de desviación típica 10 años. Con una muestra de trabajadores de la zona el intervalo de confianza al 90 % para la media de edad obtenido es $(39,25; 44,75)$

a) ¿Cuál ha sido el tamaño de la muestra utilizada?

b) ¿Cuánto vale la media muestral?

c) ¿Cuál sería el error cometido a un nivel de confianza del 95 %?

Solución:

a) $NC = 90\,\% = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$$

$$E = \frac{44,75 - 39,25}{2} = 2,75$$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2,75 = 1,645\frac{10}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{1,645 \cdot 10}{2,75}\right)^2 = 35,7821 \Longrightarrow n = 36$$

b) $IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) \Longrightarrow \overline{X} = \dfrac{44,75 + 39,25}{2} = 42$

c) $NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{10}{\sqrt{36}} = 3,2667$$

5.12. Islas Baleares

5.12.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.12.1 La producción en kilogramos de naranjas por naranjo en Sóller sigue una distribución normal de desviación típica 2 y media desconocida.

a) Calcule el tamaño de la muestra que se debe tomar para que al estimar la media poblacional con un nivel de confianza del 94 %, el error cometido sea inferior a 1,5 kg.

b) Si se toma una muestra aleatoria de 10 naranjos, con producciones en kilogramos:

30 25 4 70 45 60 21 32 9 47

Calcule el intervalo de confianza del 97 % para estimar la producción media de naranjas por árbol.

Solución:

$$N(\mu, 2)$$

a) $NC = 94\,\% = 0,94 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,06 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,03$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,97 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,88$$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1,5 = 1,88\frac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{1,88 \cdot 2}{1,5}\right)^2 = 6,2834 \Longrightarrow n = 7$$

b) $\overline{X} = \dfrac{30 + 25 + 4 + 70 + 45 + 60 + 21 + 32 + 9 + 47}{10} = 34,3$
$NC = 97\,\% = 0,94 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17\frac{2}{\sqrt{10}} = 1,3724$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (34,3 - 1,3724; 34,3 + 1,3724) = (32,9276; 35,6724)$$

5.12.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.12.2 En una universidad se ha observado que la distribución de las calificaciones de Física en los estudios de Ingeniería Informática sigue una ley normal de media $\mu = 5,1$ puntos y desviación típica $\sigma = 1,6$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar obtenga una nota inferior a 4 puntos?

b) ¿Cuál es la probabilidad que una muestra de 64 alumnos tenga una media superior a 5,9?

c) Si en un aula hay 50 alumnos, ¿cuántos alumnos se puede esperar que tengan una nota superior a 4 puntos?

Solución:

$$N(5,1; 1,6)$$

a) $P(X \le 4) = P\left(Z \le \dfrac{4 - 5,1}{1,6}\right) = P(Z \le -0,69) = 1 - P(Z \le 0,69) = 1 - 0,7549 = 0,2451$

b) $n = 64 \Longrightarrow \overline{X} \overset{N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}{\approx} N(5,1; 0,2)$
$P(\overline{X} \ge 5,9) = P\left(Z \ge \dfrac{5,9 - 5,1}{0,2}\right) = P(Z \ge 4) = 1 - P(Z \le 4) = 1 - 1 = 0$

c) $P(X > 4) = 1 - P(X \le 4) = 1 - 0,2451 = 0,7549 \Longrightarrow 50P(X > 4) = 50 \cdot 0,7549 = 37,745$ aproximadamente 38 alumnos.

5.13. Islas Canarias

5.13.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.13.1 Una compañía de seguros tiene asegurados 2500 coches, 560 guaguas y 220 motos. Se estima que las probabilidades de tener un accidente a lo largo de un año son 0,1 para los coches, 0,08 para las guaguas y 0,16 para las motos.

a) ¿Cuál es el número total de vehículos (sumando coches, guaguas y motos) que se puede esperar que tengan un accidente a lo largo del próximo año?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo año tengan un accidente al menos 270 de los coches asegurados?

c) La Administración Tributaria decide inspeccionar las cuentas de esta aseguradora. Para realizar la inspección elige al azar las pólizas de 10 de los vehículos asegurados por la compañía. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los vehículos elegidos haya al menos dos guaguas?

Solución:
Sean C coches, G guaguas, M motos, A accidente y $\overline{A}$ no accidente.

$$P(C) = \frac{2500}{3280} = 0,7622; \quad P(G) = \frac{560}{3280} = 0,1707; \quad P(M) = \frac{220}{3280} = 0,0671$$
$$P(A|C) = 0,1; \quad P(A|G) = 0,08; \quad P(A|M) = 0,16$$

a) $P(A) = P(A|C)P(C) + P(A|G)P(G) + P(A|M)P(M) =$
$\dfrac{2500}{3280} \cdot 0,1 + \dfrac{560}{3280} \cdot 0,08 + \dfrac{220}{3280} \cdot 0,16 = \dfrac{2500 \cdot 0,1 + 560 \cdot 0,08 + 220 \cdot 0,16}{3280} =$
$\dfrac{330}{3280} \Longrightarrow$ 330 vehículos se espera tendrán un accidente.

b) $p = P(A|C) = 0,1$ y $n = 2500 \Longrightarrow B(2500; 0,1)$
$n = 2500 > 10$, $np = 2500 \cdot 0,1 = 250 > 5$ y $nq = 2500 \cdot 0,9 = 2250 > 5 \Longrightarrow$
$B(2500; 0,1) \overset{N(np,\sqrt{npq})}{\approx} N(250; 15)$
$P(X \geq 270) = P\left(Z \geq \dfrac{269,5 - 250}{15}\right) = P(Z \geq 1,3) = 1 - P(Z \leq 1,3) =$
$1 - 0,9032 = 0,0968$

c) $p = \dfrac{560}{3280} = \dfrac{7}{41}$, $q = 1 - p = \dfrac{34}{41}$ y $n = 10 \Longrightarrow B\left(10, \dfrac{7}{41}\right)$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] =$$
$$1 - \left[\binom{10}{0}\left(\frac{7}{41}\right)^0 \cdot \left(\frac{34}{41}\right)^{10} + \binom{10}{1}\left(\frac{7}{41}\right)^1 \cdot \left(\frac{34}{41}\right)^9\right] = 0,5296$$

Problema 5.13.2 Se realiza un estudio sobre el gasto en electricidad en los hogares canarios durante el año en curso. A partir de una muestra de 289 viviendas se obtuvo el intervalo de confianza $[128,76; 134,32]$ para el gasto medio mensual (en euros). Sabiendo que la varianza del gasto en electricidad es $729€^2$:

a) ¿Cuál fue el gasto medio mensual por hogar en Canarias obtenido en la muestra? ¿Cuál fue el error de estimación cometido? ¿Cuál fue el nivel de confianza con que se obtuvo el intervalo?

b) Usando como valor de la media la estimación puntual obtenida en el apartado (a), y tomando una muestra de 576 hogares, ¿cuál es la probabilidad de que el gasto medio en electricidad de dichos hogares sea mayor que 130€?

Solución:

$$N(\mu; \sqrt{729}) = N(\mu; 27)$$

a) $\overline{X} = \dfrac{128,76 + 134,32}{2} = 131,54$
$E = \dfrac{134,32 - 128,76}{2} = 2,78$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2,78 = Z_{\alpha/2}\dfrac{27}{\sqrt{289}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,75$
$P(Z \le 1,75) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,9599 \Longrightarrow \alpha = 0,08 \Longrightarrow NC = 1 - 0,08 = 92\,\%$

b) $N(131,54; 27)$ y $n = 576 \Longrightarrow \overline{X} \overset{N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}{\approx} N(131,54; 1,125)$
$P(\overline{X} \ge 130) = P\left(Z \ge \dfrac{130 - 131,54}{1,125}\right) = P(Z \ge -1,37) = P(Z \le 1,37) = 0,9147$

Problema 5.13.3 En un periódico se lee el siguiente titular: "Un 63 % de los españoles valoran positivamente el teletrabajo".

a) Sabiendo que para obtener dicha proporción se han realizado 800 encuestas telefónicas, construir un intervalo de confianza al 90 % para la proporción de españoles que valoran positivamente el teletrabajo.

b) Utilizando el valor publicado por el periódico como estimación inicial de dicha proporción, ¿a cuántas personas habría que encuestar, para estimar la proporción de españoles que valoran positivamente el teletrabajo, con un error máximo del 1 % y con un nivel de confianza del 88 %?

Solución:

a) $\hat{p} = 0,63 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,37$, $n = 800$ y
$NC = 90\,\% = 0,9 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$ $P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow$
$Z_{\alpha/2} = 1,645$
$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,645\sqrt{\dfrac{0,63 \cdot 0,37}{800}} = 0,0281$
$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,63-0,0281; 0,63+0,0281) = (0,6019; 0,6581) = (60,19\,\%; 65,81\,\%)$

b) $NC = 88\,\% = 0,88 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,12 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,06$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,94 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,555$
$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,01 = 1,555\sqrt{\dfrac{0,63 \cdot 0,37}{n}} \Longrightarrow$
$n \ge \left(\dfrac{1,555}{0,01}\right)^2 (0,63 \cdot 0,37) = 5636,4163 \Longrightarrow n = 5637$

5.13.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.13.4 Se ha observado que el número de horas que dedican a caminar cada semana las personas adultas que viven en Canarias sigue una distribución normal de media 5,25 horas, con una desviación típica de 1,25 horas. En esta población:

a) Se elige una persona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana dedique a caminar más de 6 horas?

b) Calcula la probabilidad de que el número medio de horas semanales dedicadas a caminar por una muestra de 64 personas sea inferior a 5 horas.

c) En una muestra de 1000 personas, ¿cuál es el número esperado de personas que caminan al menos 5,5 horas a la semana?

Solución:

$$N(5,25;1,25)$$

a) $P(X\geq 6)=P\left(Z\geq \dfrac{6-5,25}{1,25}\right)=P(Z\geq 0,6)=1-P(Z\leq 0,6)=1-0,7257=0,2743$

b) $n=64\Longrightarrow \overline{X}\overset{N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}{\approx} N(5,25;0,15625)$
$P(\overline{X}\leq 5)=P\left(Z\leq \dfrac{5-5,25}{0,15625}\right)=P(Z\leq -1,6)=1-P(Z\leq 1,6)=1-0,9452=0,0548$

c) $P(X\geq 5,5)=P\left(Z\geq \dfrac{5,5-5,25}{1,25}\right)=P(Z\geq 0,2)=1-P(Z\leq 0,2)=1-0,5793=0,4207$
$E[X]=nP(X\geq 5,5)=1000\cdot 0,4207=420,7\approx 421$ personas.

Problema 5.13.5 En un estudio realizado por el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de una Universidad se lee el siguiente informe: "Se ha tomado una muestra del número de fotocopias (en miles), realizadas en 16 departamentos de la Universidad en una semana, y el intervalo de confianza al 95 % para el número medio de fotocopias ha sido $[17,9;24,1]$". Según esta información:

a) ¿Cuál fue el número medio muestral de fotocopias?

b) ¿Cuál fue la desviación típica?

c) Determinar un intervalo de confianza al 90 % para el número medio de fotocopias (en miles).

Solución:

a) $\overline{X}=\dfrac{24,1+17,9}{2}=21$
$E=\dfrac{24,1-17,9}{2}=3,1$

b) $NC=95\,\%=0,95=1-\alpha\Longrightarrow \alpha=0,05\Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2}=0,025$ $P(Z\leq Z_{\alpha/2})=1-\dfrac{\alpha}{2}=0,975\Longrightarrow Z_{\alpha/2}=1,96$
$E=Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\Longrightarrow 3,1=1,96\dfrac{\sigma}{\sqrt{16}}\Longrightarrow \sigma\simeq 6,3265$

c) $NC = 90\,\% = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$ $P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow$
$Z_{\alpha/2} = 1,645$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\dfrac{6,3265}{\sqrt{16}} = 2,6018$
$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (21 - 2,6018; 21 + 2,6018) = (18,3982; 23,6018)$

Problema 5.13.6 Se ha realizado una encuesta entre los médicos de los distintos centros sanitarios de las islas para evaluar la proporción de médicos que han sufrido episodios de ansiedad durante el último año. En la encuesta participaron 350 médicos elegidos al azar entre los distintos centros, de los cuáles 84 manifestaron haber tenido al menos uno de estos episodios en el último año.

a) ¿Cuál es la proporción de médicos de la muestra que han sufrido episodios de ansiedad el último año? Calcular un intervalo de confianza al 94 % para dicha proporción en la población de médicos de las islas.

b) Utilizando la proporción obtenida en el apartado anterior como estimador de la proporción de médicos con episodios de ansiedad, ¿de qué tamaño debe ser la muestra de médicos si se desea construir el intervalo anterior con un error máximo de 0,02?

c) ¿Cuál ha sido el nivel de confianza empleado si, con los mismos datos, el intervalo de confianza obtenido es [0,1905;0,2895]?

Solución:

a) $\hat{p} = \dfrac{84}{350} = 0,24 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,76,\ n = 350$ y
$NC = 94\,\% = 0,94 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,06 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,03$ $P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,97 \Longrightarrow$
$Z_{\alpha/2} = 1,88$
$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,88\sqrt{\dfrac{0,24 \cdot 0,76}{350}} = 0,0429$
$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,24-0,0429; 0,24+0,0429) = (0,1971; 0,2829) = (19,71\,\%; 28,29\,\%)$

b) $E = 0,02 = 1,88\sqrt{\dfrac{0,24 \cdot 0,76}{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\dfrac{1,88}{0,02}\right)^2 (0,24 \cdot 0,76) = 1611,6864 \Longrightarrow n = 1612$

c) $E = \dfrac{0,2895 - 0,1905}{2} = 0,0495$
$0,0495 = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{0,24 \cdot 0,76}{350}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = z = 2,17$
$P(Z \leq 2,17) = 0,9850 = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow NC = 97\,\%$

5.14. La Rioja

5.14.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.14.1 Una variable X es normal de media 25 y desviación típica 5, y otra Y es también normal, pero con media 28 y desviación típica 1.

a) Calcula las probabilidades $P(X > 30)$ y $P(Y > 30)$. ¿Cuál es mayor?

b) Tomamos una muestra de $n = 4$ valores independientes de X y anotamos su promedio $\overline{X}$. Calcula $P(\overline{X} > 30)$. ¿Cuál sería el resultado si $n = 9$?

c) ¿Cómo explicarías la comparación del resultado de (a) con el de (b), sin recurrir a fórmulas?

Solución:

$$X \approx N(25; 5), \quad Y \approx N(28; 1)$$

a) $P(X > 30) = P\left(Z > \dfrac{30-25}{5}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0,84134 = 0,15866$
$P(Y > 30) = P\left(Z > \dfrac{30-28}{1}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0,97725 = 0,02275$
Es mayor $P(X > 30)$

b) Si $n = 4 \Longrightarrow \overline{X} \overset{(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})}{\approx} N(25; 2,5)$
$P(\overline{X} > 30) = P\left(Z > \dfrac{30-25}{2,5}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0,97725 = 0,02275$
Si $n = 9 \Longrightarrow \overline{X} \overset{(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})}{\approx} N(25; 5/3)$
$P(\overline{X} > 30) = P\left(Z > \dfrac{30-25}{5/3}\right) = P(Z > 3) = 1 - P(Z < 3) = 1 - 0,99865 = 0,00135$

c) Si se aumenta el número de elementos de una muestra, la desviación típica se hace más pequeña. La probabilidad de acercarse a la media se hace más pequeña, siempre que la media sea la misma.
$$P(X > 30) > P(\overline{X} > 30) > P(\overline{X} > 30)$$

Problema 5.14.2 Como ya sabe la cifra de asistentes, el ayuntamiento de Zaragoza ha asegurado que la duración de la ofrenda de flores del día del Pilar tendrá, en horas, una distribución de probabilidad normal con media 8 y desviación típica $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

a) ¿Puedes afirmar, con al menos un 95 % de probabilidad de acierto, que la duración de la ofrenda será inferior a ocho horas y media? ¿Podemos hacerlo con probabilidad mayor del 99 %?

b) Una variable normal estándar Z cumple que $P(Z \le 2,3263) = 0,99$. ¿Qué desviación típica (en lugar de la dada, y manteniendo la media de ocho horas) debería tener la duración de la ofrenda para que la probabilidad de ser menor que ocho horas y media fuera del 99 %?

Solución:

a) $N\left(8; \dfrac{\sqrt{2}}{5}\right)$
$P(X < 8,5) = P\left(Z < \dfrac{8,5-8}{\sqrt{2}/5}\right) = P(Z < 1,77) = 0,96164$
$0,95 < P(X < 8,5) < 0,99$. Podemos afirmar con al menos un 95 % de probabilidad de acierto que la duración de la ofrenda será inferior a ocho horas y media. No lo podremos afirmar con probabilidad mayor del 99 %.

b) $N(8, \sigma)$
$P(X < 8,5) = P\left(Z < \dfrac{8,5-8}{\sigma}\right) = 0,99 \Longrightarrow \dfrac{8,5-8}{\sigma} = 2,3263 \Longrightarrow \sigma \simeq 0,2149$

5.14.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.14.3 En los poblados maruba utiliza el punde como media de distancia, y toman lo largo de una valla para fijar su valor. Este es distinto en cada poblado. Queremos estimar el valor medio de los distintos pundes en metros, considerando que la distribución es normal con desviación típica de 4 metros y que las medidas en todos los poblados son independientes entre sí. A partir de una muestra de 25 pundes calculamos un intervalo de confianza para situar dicho valor medio, y resulta el intervalo $(74,864; 77,496)$.

a) ¿Cuál es el valor promedio de nuestra muestra?

b) ¿Con qué nivel de confianza hemos obtenido el intervalo?

c) ¿Cuántos pundes necesitaríamos medir para reducir el error muestral a la mitad, con el mismo nivel de confianza?

Solución:

$$N(\mu; 4), \quad n = 25, \quad (74,864; 77,496)$$

a) $\overline{X} = \dfrac{74,864 + 77,496}{2} = 76,18$ y $E = \dfrac{77,496 - 74,864}{2} = 1,316$

b) $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1,316 = z_{\alpha/2}\dfrac{4}{\sqrt{25}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$
$P(Z \le 1,645) = 0,95 = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 0,9 = 90\,\%$

c) $E = \dfrac{1,316}{2} = 0,658 = 1,645\dfrac{4}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\dfrac{1,645 \cdot 4}{0,658}\right)^2 = 100 \Longrightarrow n = 100$

5.15. Madrid

5.15.1. Modelo

Problema 5.15.1 El tiempo diario de juego con videoconsolas de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 0,25 horas.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ no supere las 2,9 horas si $\mu = 2,75$ horas.

b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 64 personas se ha obtenido un intervalo de confianza (2,9388;3,0613) para μ, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

Solución:

$$N(\mu; 0,25)$$

a) $n = 25$, $\overline{X} \overset{N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}{\approx} N(2,75; 0,05)$
$P(\overline{X} \le 2,9) = P\left(Z \le \dfrac{2,9 - 2,75}{0,05}\right) = P(Z \le 3) = 0,9987$

b) $\overline{X} = \dfrac{2,9388 + 3,0613}{2} = 3,00005$ y $2E = 3,0613 - 2,9388 = 0,1225 \Longrightarrow E = 0,06125$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,06125 = z_{\alpha/2}\frac{0,25}{\sqrt{64}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{8\cdot 0,06125}{0,25} = 1,96$$

$$P\left(Z \le z_{\alpha/2}\right) = P(Z \le 1,96) = 0,975 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 0,95$$

Luego el nivel de confianza es del 95 %.

Problema 5.15.2 Una empresa que gestiona una aplicación de movilidad sostenible sabe que el tiempo que tardan en llegar a la universidad en coche los estudiantes se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 6$ minutos.

a) Una muestra aleatoria simple de 81 universitarios proporciona un tiempo medio de traslado hasta la universidad de 44 minutos. Calcule el intervalo de confianza al 90 % para estimar μ.

b) Determine el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para obtener un intervalo de confianza para μ de amplitud a lo sumo de 3 minutos, con un nivel de confianza del 95 %.

Solución:

$$N(\mu; 6)$$

a) Tenemos $\overline{X} = 44$, $n = 81$ y $NC = 90\,\%$
$NC = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,10 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{6}{\sqrt{81}} = 1,0967$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (44 - 1,0967; 44 + 1,0967) = (42,9033; 45,0967)$$

b) $E = \dfrac{3}{2} = 1,5$ y $NC = 95\,\%$
$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{6}{\sqrt{n}} = 1,5 \Longrightarrow n \ge \left(\frac{1,96\cdot 6}{1,5}\right)^2 = 61,4656$$

Luego $n = 62$.

5.15.2. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.15.3 Una cementera rellena sacos de cemento cuyo peso en kilogramos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 2 kg.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es 50 kg. Determine un intervalo de confianza del 99 % para el peso medio de un saco de cemento.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kilogramo, con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

$$N(\mu, 2)$$

a) $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$

$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\dfrac{2}{\sqrt{20}} = 1,1516$

$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (50 - 1,1516, 50 + 1,1516) = (48,8484; 51,1516)$

b) $NC = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$

$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1,645\dfrac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge (1,645 \cdot 2)^2 = 10,8241 \Longrightarrow n = 11.$

Problema 5.15.4 Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica σ. Sea $\overline{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 10.

a) Determine el valor de σ sabiendo que $I = (58,2; 73,8)$ es un intervalo de confianza del 95 % para μ.

b) Si $\sigma = 20$, calcule $P(-10 < \overline{X} - \mu < 10)$.

Solución:

$$N(\mu; \sigma)$$

a) $n = 10$, $E = \dfrac{73,8 - 58,2}{2} = 7,8$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 7,8 = 1,96\dfrac{\sigma}{\sqrt{10}} \Longrightarrow \sigma = \dfrac{7,8\sqrt{10}}{1,96} = 12,58$

b) $n = 10$ y $\sigma = 20 \Longrightarrow X : N(\mu; \sigma) \longrightarrow \overline{X} : N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\mu, \dfrac{20}{\sqrt{10}}\right) = N(\mu; 6,32)$

$P(-10 < \overline{X} - \mu < 10) = P\left(\dfrac{-10}{6,32} < Z < \dfrac{-10}{6,32}\right) =$

$P(-1,58 < Z < 1,58) = P(z < 1,58) - P(z < -1,58) =$

$P(z < 1,58) - (1 - P(z < 1,58)) = 2P(z < 1,58) - 1 = 2 \cdot 0,9429 - 1 = 0,8858$

5.15.3. Convocatoria Ordinaria(coincidente)

Problema 5.15.5 Para estimar la proporción poblacional de las familias que tienen internet en una determinada ciudad se ha tomado una muestra de familias al azar.

a) Si la proporción poblacional fuese $P = 0,8$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de familias para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 6 %.

b) Tomada al azar una muestra de 200 familias, se encontró que 170 tenían internet. Determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de familias que tienen internet.

Solución:

a) $p = 0,8 \Longrightarrow q = 1 - p = 0,2$
$NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$
$P\left(Z \le Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 2,575\sqrt{\frac{0,8 \cdot 0,2}{n}} = 0,06$$

$$n \ge \frac{2,575^2 \cdot 0,8 \cdot 0,2}{0,06^2} = 294,694 \Longrightarrow n = 295$$

b) $n = 200$ y $p = \dfrac{170}{200} = 0,85 \Longrightarrow q = 1 - 0,85 = 0,15$
$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P\left(Z \le Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,85 \cdot 0,15}{200}} = 0,04949$$

$$IC = (p - E, p + E) = (0,85 - 0,04949; 0,85 + 0,04949) =$$
$$(0,80051, 0,89949) = (80,051\,\%; 89,949\,\%)$$

Problema 5.15.6 Sea una población donde observamos la variable aleatoria X con distribución normal de media 20 y desviación típica 5. Sea $\overline{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 25.

a) ¿Cuál es la distribución de $\overline{X}$?

b) Calcule $P(19 < \overline{X} < 22)$.

Solución:

$$N(20, 5)$$

a) $\overline{X} \approx N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(20; 1)$

b) $P(19 < \overline{X} < 22) = P\left(\dfrac{19-20}{1} < Z < \dfrac{22-20}{1}\right) = P(-1 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -1) = P(Z < 2) - (1 - P(Z < 1)) =$
$P(Z < 2) + P(Z < 1) - 1 = 0,9772 + 0,8413 - 1 = 0,8185$

5.15.4. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.15.7 Una muestra de tornillos, tomada de una compañía encargada de fabricarlos, ha permitido obtener un intervalo de confianza del 95 % para estimar la proporción de tornillos con defectos de fabricación, siendo 0,2 y 0,3 los extremos de dicho intervalo.

a) Estime la proporción de tornillos con defectos de fabricación a partir de esa muestra y dé una cota del error de estimación al nivel de confianza considerado.

b) Utilizando el mismo nivel de confianza, ¿cuál sería el error máximo de estimación si esa misma proporción se hubiera observado en una muestra de 700 tornillos?

Solución:

$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

a) $IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,2; 0,3) \Longrightarrow 2E = 0,1 \Longrightarrow E = 0,05$ y $\hat{p} = 0,25$

b) $E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\dfrac{0,25 \cdot 0,75}{700}} = 0,03208$

Problema 5.15.8 Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 15. Se toma una muestra aleatoria simple para estimar la media muestral que arroja un intervalo de confianza cuyos extremos son 157,125 y 182,875.

a) Calcule el valor de la media muestral.

b) Si el tamaño de la muestra es 9, ¿cuál es el nivel de confianza para este intervalo?

Solución:

$$N(\mu; 15)$$

a) $IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (157,125; 182,875) \Longrightarrow$
$\overline{X} = \dfrac{157,125 + 182,875}{2} = 170$
$E = \dfrac{182,875 - 157,125}{2} = 12,875$

b) $E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 12,875 = Z_{\alpha/2}\dfrac{15}{\sqrt{9}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = \dfrac{12,875}{5} = 2,575$
$P(Z \le 2,575) = 0,9950 = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow NC = 99\,\%$

5.15.5. Convocatoria Extraordinaria (coincidente)

Problema 5.15.9 El peso en gramos de ciertas bolsas de palomitas se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 10.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 200. Determine un intervalo de confianza del 95 % para el peso medio de dichas bolsas de palomitas.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 gramos, con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

$$N(\mu; 10)$$

a) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\dfrac{10}{\sqrt{20}} = 4,3827$
$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (200 - 4,3827; 200 + 4,3827) = (195,6173; 204,3827)$

b) $NC = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,10 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,5 = 1,645\dfrac{10}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\dfrac{16,45}{0,5}\right)^2 = 1082,41 \Longrightarrow n = 1083$

Problema 5.15.10 El 64 % de los individuos de una población tienen una misma característica. Se escoge una muestra al azar de 120 individuos.

a) ¿Cuál es la distribución aproximada que sigue la proporción de individuos con esa característica de la muestra?

b) Halle la probabilidad de que más del 70 % de los individuos de la muestra posean dicha característica.

Solución:

a) Se trata de $B(120; 0,64)$, como $n = 120 > 10$, $np = 76,8 > 5$ y $nq = 43,2 > 5$ se puede aproximar mediante una normal $N(np; \sqrt{npq}) = N(76,8; 5,26)$

b) $120 \cdot 0,7 = 84$
$P(X > 84) = P\left(Z \ge \dfrac{84,5 - 76,8}{5,26}\right) = P(Z \ge 1,46) = 1 - P(Z \le 1,46) = 1 - 0,9279 = 0,0721$

5.16. Murcia

5.16.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.16.1 El salario mensual de los hogares de un municipio se distribuye según una variable Normal con desviación típica igual a 160 euros. Seleccionados 40 hogares al azar, han tenido un salario medio mensual de 1100 euros. Calcule un intervalo de confianza para el salario medio mensual de los hogares de ese municipio con un nivel de confianza del 95 %.

Solución:
$N(\mu, 160)$, $n = 40$, $\overline{X} = 1100$ y
$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\dfrac{160}{\sqrt{40}} = 49,5845$
$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (1100 - 49,5845, 1100 + 49,5845) = (1050,4155; 1149,5845)$

5.16.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.16.2 En una estación del AVE, el tiempo que tarda un viajero para acceder al tren desde que llega al control de equipajes sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 2 minutos. Se tomó una muestra aleatoria de 50 viajeros, y se observó que el tiempo medio de espera era de 16 minutos. Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de espera de la maleta en ese aeropuerto con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:
$N(\mu, 2)$, $n = 50$, $\overline{X} = 16$ y
$NC = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,64$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,64\dfrac{2}{\sqrt{50}} = 0,4639$
$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (16 - 0,4639, 16 + 0,4639) = (15,5361; 16,4639)$

5.17. Navarra

5.17.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.17.1 El consumo energético mensual (en kWh) de los hogares de una región sigue una distribución normal con varianza 400. Se elige una muestra de 64 hogares, obteniéndose una suma total del consumo de 17280 kWh.

a) Calcule un intervalo de confianza al 92 % para el consumo energético medio en hogares.

b) Determine el tamaño de la muestra necesario para que, manteniendo el mismo nivel de confianza, el error máximo se reduzca a la mitad.
(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

Solución:

$$N(\mu; \sqrt{400}) = N(\mu; 20)$$

a) $n = 64$ $\overline{X} = \dfrac{17280}{64} = 270$, y $NC = 0,92$
$NC = 0,92 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,08 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,04$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,04 = 0,96 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,75$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,75\frac{20}{\sqrt{64}} = 4,375$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (270 - 4,375; 270 + 4,375) =$$

$$(265,625; 274,375)$$

b) Ahora $E = \dfrac{4,375}{2} = 2,1875 \Longrightarrow 2,1875 = 1,75\dfrac{20}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\dfrac{1,75 \cdot 20}{2,1875}\right)^2 = 256 \Longrightarrow$

$$n = 256$$

5.17.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.17.2 En una encuesta realizada a 300 jóvenes navarros entre los 18 y los 30 años, 180 contestaron que utilizaban habitualmente una determinada red social.

a) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que no utilizan dicha red social, con un nivel de confianza del 96 %.

b) Con los datos de esa muestra se ha calculado el siguiente intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que usan habitualmente la red social: [0.544563, 0.655437].
Determine el nivel de confianza de este intervalo, justificando su respuesta.
(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

Solución:

a) $n = 300$ $\hat{p} = \dfrac{120}{300} = 0,4$, y $NC = 0,96$
$NC = 0,96 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,04 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,02$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,02 = 0,98 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,055$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,055\sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{300}} = 0,0581$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (0,4 - 0,0581; 0,4 + 0,0581) =$$

$$(0,3419; 0,4581) = (34,19\,\%; 45,81\,\%)$$

b) Ahora $\hat{p} = 0,6$:
$E = \dfrac{0,655437 - 0,544563}{2} = 0,055437 \Longrightarrow 0,055437 = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{0,6 \cdot 0,4}{300}} \Longrightarrow$
$Z_{\alpha/2} = 1,96 \Longrightarrow P(Z \leq 1,96) = 0,975 = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow NC = 0,95 = 95\,\%$

5.18. País Vasco

5.18.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.18.1 En el examen de Lengua Inglesa el 30 % del alumnado examinado obtuvo una puntuación superior a 7,6 puntos. Sabemos que la puntuación obtenida en dicho examen sigue una distribución normal de media 6,8 puntos

a) Calcula la desviación típica de la distribución de la puntuación.

b) Si la desviación típica es 1,5 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 20 % del alumnado?

c) Si la desviación típica es 1,5 puntos y el *Aprobado* se obtiene con una puntuación igual o superior a 5, ¿qué porcentaje del alumnado ha aprobado el examen?

Solución:

$$N(6,8; \sigma)$$

a) $P(X\ge 7,6)=P\left(Z\ge \dfrac{7,6-6,8}{\sigma}\right)=P\left(Z\ge \dfrac{0,8}{\sigma}\right)=1-P\left(Z\le \dfrac{0,8}{\sigma}\right)=0,3\Longrightarrow$
$P\left(Z\le \dfrac{0,8}{\sigma}\right)=0,7\Longrightarrow \dfrac{0,8}{\sigma}=0,525\Longrightarrow \sigma=\dfrac{0,8}{0,525}=1,5238$

b) $N(6,8;1,5)$
$P(X\ge a)=0,20\Longrightarrow P(X\le a)=0,8\Longrightarrow P(X\le a)=P\left(Z\le \dfrac{a-6,8}{1,5}\right)=0,8\Longrightarrow$
$\dfrac{a-6,8}{1,5}=0,845\Longrightarrow a=8,0675$
El 20 % del alumnado obtienen un resultado superior a 8,0675.

c) $P(X\ge 5)=P\left(Z\ge \dfrac{5-6,8}{1,5}\right)=P(Z\ge -1,2)=P(Z\le 1,2)=0,8849$
Han *Aprobado* el 88,49 % de los alumnos.

Problema 5.18.2 Se ha diseñado un experimento para comprobar el porcentaje de una población que ha sido vacunada frente a una determinada enfermedad. Para ello se ha elegido una muestra al azar de 1000 personas, y se les ha preguntado si han recibido la vacuna o no. De ellas, 860 han respondido que sí y el resto que no. Con esta información:

a) Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que han recibido la vacuna.

b) Calcular el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.

c) Interpretar los resultados obtenidos.

Solución:

a) $n=1000$, $\hat{p}=\dfrac{860}{1000}=0,86$,$\hat{q}=1-\hat{p}=0,14$ y $NC=0,95=1-\alpha\Longrightarrow \alpha=0,05\Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2}=0,025$
$P(Z\le Z_{\alpha/2})=1-\dfrac{\alpha}{2}=1-0,025=0,975\Longrightarrow Z_{\alpha/2}=1,96$
$E=Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=1,96\sqrt{\dfrac{0,86\cdot 0,14}{1000}}=0,0215$
$IC=(\hat{p}-E,\hat{p}+E)=(0,86-0,0215;0,86+0,0215)=(0,8385;0,8815)=(83,85\,\%;88,15\,\%)$
La población se estima vacunada entre el 83,85 % y el 88,15 % con una confianza del 95 %.

b) $E=0,0215\Longrightarrow 2,15\,\%$

c) Con una confianza del 95 % se puede afirmar que el porcentaje de vacunados se encuentra entre 83,85 % y el 88,15 %, con un margen de error de 2,15 %

5.18.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.18.3 La temperatura en un determinado mes sigue una distribución normal de media 10 grados y de varianza 16 grados^2.

a) Obtén el intervalo característico para el 80 %.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura de un día sea superior a 11°?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura de un día esté entre 8° y 10°?

d) ¿Cuál es la proporción de días con más de 9°?

e) Si consideramos un mes de 30 días, ¿en cuántos días la temperatura ha sido inferior a 12°?

Solución:

$$N(10; \sqrt{16}) = N(10; 4)$$

a) $NC = 0,80 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,20 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,10$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,10 = 0,9 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,285$
$E = Z_{\alpha/2}\sigma = 1,285 \cdot 4 = 5,14$
$IC = (10 - 5,14; 10 + 5,14) = (4,86; 15,14)$

b) $P(X \ge 11) = P\left(Z \ge \dfrac{11-10}{4}\right) = P(Z \ge 0,25) = 1 - P(Z \le 0,25) = 1 - 0,5987 = 0,4013$

c) $P(8 \le X \le 10) = P\left(\dfrac{8-10}{4} \le Z \dfrac{10-10}{4}\right) = P(-0,5 \le Z \le 0) =$
$P(Z \le 0) - P(Z \le -0,5) = P(Z \le 0) - (1 - P(Z \le 0,5)) = 0,5 - (1 - 0,6915) = 0,1915$

d) $P(X \ge 9) = P\left(Z \ge \dfrac{9-10}{4}\right) = P(Z \ge -0,25) = P(Z \le 0,25) = 0,5987 \Longrightarrow 59,87\,\%$

e) $P(X \le 12) = P\left(Z \le \dfrac{12-10}{4}\right) = P(Z \le 0,5) = 0,6915$
$30 \cdot P(X \le 12) = 30 \cdot 0,6915 = 20,745 \simeq 21$ días la temperatura será inferior a 12°.

Problema 5.18.4 Para estimar el peso medio de las chicas de 16 años de una ciudad, se ha tomado una muestra aleatoria de tamaño 100, a partir de la que se han obtenido los siguientes valores:

$$\overline{X} = 52,5 \text{ kg y } s = 5,3 \text{ kg}$$

Hemos hecho la siguiente afirmación:
"El peso medio de las chicas de 16 años de esta ciudad está entre 51 kg y 54 kg".
¿Con qué nivel de confianza se puede hacer esta afirmación?
Solución:
Si $IC = (51; 54)$ tenemos $X = \dfrac{51+54}{2} = 52,5$ y $E = \dfrac{54+51}{2} = 1,5$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1,5 = Z_{\alpha/2}\dfrac{5,3}{\sqrt{100}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,83$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = P(Z \le 2,83) = 0,9977 = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,0046 \Longrightarrow NC = 1 - 0,0046 = 0,9954 = 99,54\,\%$

Prof: **Isaac Musat Hervás**

Profesor de Matemáticas en el colegio Villaeuropa de Móstoles

Bachillerato y Selectividad en las dos opciones

Ferroviario en la Dirección de Cercanías de Madrid

Diferentes estudios y trabajos

Jubilado en la actualidad

La educación ha sido mi pasión, el recuerdo del aula, el olor a tiza
y el pantalón manchado de polvo blanco lo llevo siempre conmigo.
Las voces con las preguntas de mis alumnos y mis respuestas,
acertadas o no, quedan en nuestros recuerdos valiosos.
He sido un afortunado, mi trabajo ha sido mi diversión favorita.