Problemas de Matemáticas II
Ciencias y Tecnología

Por materias (Todas las comunidades autónomas)

(Selectividad 2022-Ordinaria y Extraordinaria)

Prof: **Isaac Musat Hervás**

última actualización:

21 de febrero de 2023

A mi familia,
a mis alumnos,
habéis aguantado estoicamente,
mis ausencias unos,
mis clases otros.
Con unos convivo,
a los otros les añoro.
Un Abrazo muy grande para cada uno.
Isaac Musat Hervás

Índice general

Capítulo 1

Álgebra

1.1. Resúmenes teóricos

Matrices

matriz A	dimensión	Transpuesta A^T	dimensión
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$m \times n$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$	$n \times m$
matriz cuadrada	orden	identidad	matriz triangular
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$	n	$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

- **Suma:** Tienen que tener la misma dimensión y se suman término a término.
- **Producto de una matriz por un número real:** Se multiplican todos los términos de la matriz por ese número.
- **Producto de dos matrices:** Se desarrolla multiplicando matriz fila por matriz columna de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

  El número de columnas de la primera matriz tiene que ser igual al número de filas de la segunda.

Determinante de una matriz

- La matriz tiene que ser cuadrada

  a) De orden dos: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

b) De orden tres: (Regla de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

- Propiedades:

a) $\begin{vmatrix} a+m & b+n & c+p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n & p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

b) $|A^T| = |A|$

c) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

d) Si cambiamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo.

e) Si una fila o una columna tiene todos sus elementos igual a cero el determinante vale cero.

f) Si dos filas o dos columnas son iguales el determinante vale cero.

g) Si dos filas o dos columnas son proporcionales el determinante vale cero.

h) Si una fila o columna es combinación lineal de las otras el determinante vale cero.

i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+a & h+b & i+c \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

j) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ xa & xb & xc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+xa & h+xb & i+xc \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila multiplicada por un número (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

Matriz Adjunta:

- Adjunto del elemento a_{ij} de una matriz es el valor del determinante resultante de eliminar la fila i y la columna j multiplicado por $(-1)^{i+j}$ y se le denomina A_{ij}.
- Matriz adjunta. $Adj(A) = (A_{ij})$

Cálculo del determinate de una matriz por adjuntos:
Se elige una fila o una columna (cualquiera es válida, siempre será mejor aquella que tenga más ceros), escojo la primera fila para el ejemplo:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Inversa de una matriz:

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^T}{|A|}$$

Una matriz tiene inversa si, y sólo si, $|A| \neq 0$.
A las matrices que tienen inversa se la llama **Regulares** y a las que no la tienen se las llama **Singulares**.

Rango de una matriz
Es el número de filas linealmente independientes.
De forma práctica se calcula por determinantes. Si tenemos una matriz de dimensión 3×4 cogemos matrices cuadradas que tengan el mayor orden posible, tendremos cuatro de orden 3, si el determinante de alguna de ellas es distinto de cero el rango es 3 y habremos terminado, si por el contrario todas son cero el rango ya no puede ser 3 y buscaremos menores de orden 2. Si alguno de estos menores es distinto de cero ya habremos terminado, y el rango será 2, si por el contrario todos son cero tendremos que buscar menores de orden 1, y en el momento que encontremos alguno distinto de cero el rango será 1.

Sistema de Ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \cdots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \quad = & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \cdots & +a_{mn}x_n = & b_m \end{array}\right.$$

Matriz del sistema: $A=\left(\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)$

Matriz ampliada: $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

Matriz de variables: $X=\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{array}\right)$,

Matriz de términos independientes: $B=\left(\begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{array}\right)$

Se trata de una ecuación matricial: $AX=B$.
Si $|A|\neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$ y en este caso el sistema se podrá resolver de la siguiente manera $X=A^{-1}B$

Antes de resolver un sistema estudiar si hay ecuaciones nulas, iguales o proporcionales, para el estudio del rango.

Teorema de Rouché

- Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) = nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Determinado (SCD). Y tiene solución única.
- Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) $<$ nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Indeterminado (SCI). Y tiene infinitas soluciones.
- Si Rango($\overline{A}$) $\neq$Rango(A) se trata de un Sistema Incompatible. Y no tiene solución.

Sistema homogéneos Son aquellos en los que $b_i=0$, estos siempre tienen solución $x_1=x_2=\cdots=x_m=0$ solución trivial, pero en el caso de que de que Rango(A) $<m$ (nº de incógnitas) estaríamos ante infinitas soluciones, es decir:

- Si Rango$(A) = m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCD $\Longrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ solución trivial.
- Si Rango$(A) < m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCI $\Longrightarrow$ infinitas soluciones.

Regla de Cramer
Sea $\overline{A} = (C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n, B)$, entoces sustituimos la columna B en la matriz $\overline{A}$ por cada una de las columnas y tendremos:

$$x_1 = \frac{|B, C_2, C_3, \cdots, C_n|}{|A|}, \;\; x_2 = \frac{|C_1, B, C_3, \cdots, C_n|}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{|C_1, C_2, \cdots, B|}{|A|}$$

1.2. Andalucia

1.2.1. Modelo

Problema 1.2.1 Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{l} mx+2y-z=1\\ 5x-4y+2z=0\\ x+3my=m+\dfrac{2}{5}\end{array}\right.$$

a) Discute el sistema según los valores de m.

b) Resuelve el sistema para $m=0$. ¿Hay alguna solución en la que $x=0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|c} m & 2 & -1 & 1\\ 5 & -4 & 2 & 0\\ 1 & 3m & 0 & m+2/5\end{array}\right)\quad |A|=-3m(2m+5)=0\Longrightarrow$$

$$m=0,\quad m=-\frac{5}{2}$$

Si $m\neq 0$ y $m\neq -\dfrac{5}{2}\Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $m=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|c} 0 & 2 & -1 & 1\\ 5 & -4 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 2/5\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\to F_3\\ F_3\to F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 0 & 2/5\\ 0 & 2 & -1 & 1\\ 5 & -4 & 2 & 0\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-5F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 0 & 2/5\\ 0 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -4 & 2 & -2\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+2F_2\end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 0 & 2/5\\ 0 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Si $m=-\dfrac{5}{2}$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|c} -5/2 & 2 & -1 & 1\\ 5 & -4 & 2 & 0\\ 1 & -15/2 & 0 & -21/10\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2+2F_1\\ F_3\end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|c} -5/2 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 1 & -15/2 & 0 & -21/10\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $m = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x = \dfrac{2}{5} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = \dfrac{2}{5} \\ \\ y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\lambda \\ \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

El valor de x es de $\dfrac{2}{5}$ y no puede ser nunca $x = 0$.

Problema 1.2.2 En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón. El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora.
¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?
Solución:
Sean x el número de botellas, y el número de garrafas y z el número de bidones.

$$\left\{\begin{array}{l} 50x + 100y + 1000z = 10000 \\ x = 2y \\ x + y + z = 52 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 2y + 20z = 200 \\ x - 2y = 0 \\ x + y + z = 52 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x = 30 \\ y = 15 \\ z = 7 \end{array}\right.$$

Produce 30 botellas, 15 garrafas y 7 bidones.

1.2.2. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.2.3 Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{l} x - y + mz = -3 \\ -mx + 3y - z = 1 \\ x - 4y + mz = -6 \end{array}\right.$$

a) Discute el sistema según los valores de m.

b) Para $m = 2$ resuelve el sistema, si es posible.

Solución:

a)
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & m & -3 \\ -m & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & m & -6 \end{array}\right) \quad |A| = 3m^2 - 3 = 0 \Longrightarrow$$
$$m = -1, \quad m = 1$$

Si $m \neq -1$ y $m \neq 1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $m = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & -6 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 4F_3+3F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -6 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2+F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3+3F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $m = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} x - y + 2z = -3 \\ -2x + 3y - z = 1 \\ x - 4y + 2z = -6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{array}\right.$$

Problema 1.2.4 Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{pmatrix}$, donde $m \geq 0$.

a) ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz A?

b) Para $m = 4$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX = 12I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Solución:

a) $|A| = m(m-1)^2 = 0 \Longrightarrow m = 0$ y $m = 1 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall m \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

b) Si $m = 4 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/12 & -1/6 & -1/6 \\ -1/6 & 1/3 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

$$AX = 12I \Longrightarrow X = 12A^{-1} = 12 \begin{pmatrix} 5/12 & -1/6 & -1/6 \\ -1/6 & 1/3 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1.2.3. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.2.5 Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de a para los que la matriz B no tiene inversa.

b) Para $a = 1$ calcula X tal que $AXB = C$, si es posible.

Solución:

a) $|B| = 2a(2-a) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 2$.
Si $a = 0$ o $a = 2 \Longrightarrow |B| = 0 \Longrightarrow \nexists B^{-1}$

b) Si $a = 1 \Longrightarrow A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \Longrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$
$\underset{2\times 3}{X} = \underset{2\times 2}{A^{-1}} \cdot \underset{2\times 3}{C} \cdot \underset{3\times 3}{B^{-1}}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 1.2.6 Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$.

a) Calcula: $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix}$

b) Calcula: $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ p & r & q \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} =$
$-6 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 12$

b) $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a-3p & b-3q & c-3r \\ -2a & -2b & -2c \end{vmatrix} =$
$-2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ a-3p & b-3q & c-3r \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a-3p & b-3q & c-3r \\ x & y & z \end{vmatrix} =$
$2 \left(\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} \right) = 2 \cdot (0 + 6) = 12$

1.3. Aragón

1.3.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.3.1 Dada la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Resuelve la ecuación matricial $AX - 2I = A^2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) Analiza el rango de la matriz $A - mB$, según los valores de $m \in \mathbb{R}$, siendo A la matriz del apartado anterior y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $AX - 2I = A^2 \Longrightarrow AX = A^2 + 2I \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(A^2 + 2I) \Longrightarrow X = A^{-1}(A^2 + 2I)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$X = A^{-1}(A^2 + 2I) =$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $A - mB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m-1 & 0 \\ -m & 0 & 1-m \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$, $|A - mB| = m^2 - 1 = 0 \Longrightarrow m = \pm 1$.

- Si $m \neq 1$ y $m \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$
- Si $m = 1$:
  $A - mB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $|A| = 0$ $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A - B) = 2$
- Si $m = -1$:
  $A - mB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $|A| = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A + B) = 2$

Problema 1.3.2 Se pide:

a) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = -2$, calcule justificadamente

$$\begin{vmatrix} -a+2 & -c+2 & -b+2 \\ x/2 & z/2 & y/2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

b) Comprueba que la matriz B es invertible y calcula su inversa, siendo

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} -a+2 & -c+2 & -b+2 \\ x/2 & z/2 & y/2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \dfrac{3}{2}\begin{vmatrix} -a+2 & -c+2 & -b+2 \\ x & z & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$
$-\dfrac{3}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & z & y \\ -a+2 & -c+2 & -b+2 \end{vmatrix} = \dfrac{3}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ -a+2 & -b+2 & -c+2 \end{vmatrix} =$
$\dfrac{3}{2}\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ -a & -b & -c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}\right) = -\dfrac{3}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = -\dfrac{3}{2}(-2) = 3$

b) $|B| = -4 \neq 0 \Longrightarrow \exists B^{-1}$
$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 5/4 & 3/4 & -3/4 \\ 5/4 & -1/4 & -3/4 \end{pmatrix}$

Problema 1.3.3 Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x + 3y + z = 5 \\ 2x + az = -4 \\ 4x - 3z = a + 1 \end{cases}$$

a) Discute según los valores de $a \in \mathbb{R}$ que tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible).

b) Resuelve el sistema para $a = 1$.

Solución:

a)
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & a & -4 \\ 4 & 0 & -3 & a+1 \end{array}\right); \quad |A| = 12a + 18 = 0 \Longrightarrow a = -\frac{3}{2}$$

- Si $a \neq -\dfrac{3}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -\dfrac{3}{2}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3/2 & -4 \\ 4 & 0 & -3 & -1/2 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 + 4F_1 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 1/2 & 6 \\ 0 & 12 & 1 & 39/2 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 1/2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 15/2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{r} -x+3y+z=5 \\ 2x+z=-4 \\ 4x-3z=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=2 \\ z=-2 \end{array}\right.$$

1.3.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.3.4 Dada la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix}$

a) Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que se verifique $A^2 = 3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) Calcula, para $k = 0$, la matriz B^n con $B = 2A - I$, siendo I la matriz identidad de orden 2, y $n \in \mathbb{N}$.

Solución:

a) $A^2 = 3I \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1-k & k(k+2) \\ -k-2 & k^2+k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1-k=3 \\ k(k+2)=0 \\ -k-2=0 \\ k^2+k+1=3 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$k = -2$$

b) Si $k = 0 \Longrightarrow B = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}, \dots, B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2n & 1 \end{pmatrix}$

Problema 1.3.5 Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1-m & 1 \\ 2 & 2m \\ m-1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Estudia, según los valores de $m \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz $P = AB^T + C$, donde B^T es la matriz traspuesta de B.

b) Para el valor $m = 1$, calcula la inversa de la matriz P del apartado anterior.

Solución:

a) $P = AB^T + C = \begin{pmatrix} 1-m & -1 \\ 2 & 2m \\ m-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$P = \begin{pmatrix} 2-m & 0 & 2-m \\ 2 & 2m+1 & 3 \\ m-1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$|P| = 2m(2-m) = 0 \Longrightarrow m = 0$ y $m = 2$

- ☛ Si $m \in \mathbb{R} - \{0, 2\} \Longrightarrow |P| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(P) = 3$
- ☛ Si $m = 0 \Longrightarrow |P| = 0$ y $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

  el menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(P) = 2$
- ☛ Si $m = 2 \Longrightarrow |P| = 0$ y $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

  el menor $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(P) = 2$

b) Si $m = 1 \Longrightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -3/2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

Problema 1.3.6 Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + ay + z = 0 \\ x + y + a^2 z = 0 \\ x + y + 2az = 0 \end{cases}$$

a) Discute según los valores de $a \in \mathbb{R}$ que tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible).

b) Resuelve el sistema para $a = 0$.

Solución:
Se trata de un sistema homogéneo y no puede ser incompatible.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & 2a \end{pmatrix}; \quad |A| = a^3 - 3a^2 + 2a = 0 \Longrightarrow a = 0, \ a = 1, \ a = 2$$

- ☛ Si $a \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
  (Solución trivial $x = y = z = 0$)
- ☛ Si $a = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

☛ Si $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

☛ Si $a = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $a = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right.$$

1.4. Asturias

1.4.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.4.1 Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$

a) Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.

b) Para $a = 1$ ¿existe P^{-1}? En caso afirmativo calcúlala.

c) Calcula, en caso de que exista, los valores de a tal que $det(P) = det(P^{-1})$.

Solución:

a) $|P| = 2 - a = 0 \Longrightarrow a = 2$
Si $a \neq 2 \Longrightarrow |P| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(P) = 3$
Si $a = 2 \Longrightarrow |P| = 0$ y el menor $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(P) = 2$

b) Si $a = 1 \Longrightarrow |P| \neq 0 \Longrightarrow \exists P^{-1}$
$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $|P| = |P^{-1}| = \dfrac{1}{|P|} \Longrightarrow |P|^2 = 1 \Longrightarrow (2 - a)^2 = 1 \Longrightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \Longrightarrow a = 1$ y $a = 3$

Problema 1.4.2 Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left\{\begin{array}{c} -x+2y=-1 \\ -x+2y+2z=1 \\ ax-2y+z=2 \end{array}\right.$$

a) Discute el sistema según los valores de a.

b) Estudia si es posible encontrar un valor de a para el cual la solución del sistema verifique que $x=0$.

c) Si $a=0$, resuelve el sistema si es posible.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ a & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad |A|=4a-4=0 \Longrightarrow a=1$$

Si $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3+F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3-F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

b) Si $x=0$:

$$\left\{\begin{array}{l} 2y=-1 \\ 2y+2z=1 \\ -2y+z=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=0 \\ y=-1/2 \\ z=1 \end{array}\right.$$

Estos valores cumplen las tres ecuaciones.

c) Si $a=0$:

$$\left\{\begin{array}{l} -x+2y=-1 \\ -x+2y+2z=1 \\ -2y+z=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=0 \\ y=-1/2 \\ z=1 \end{array}\right.$$

1.4.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.4.3 Dado $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A=\left(\begin{array}{rrr} -1 & -1 & -2 \\ -1 & x-1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$,

$B=\left(\begin{array}{r} 1 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right)$ y $C=\left(\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$.

a) Calcula los valores de x para los cuales la matriz A no posee inversa.

b) Calcula el rango de A según los valores de x.

c) Para $x = 1$, calcula en caso de que sea posible $A \cdot B$ y $A \cdot C$ o indica por qué no se puede realizar.

Solución:

a) $|A| = x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$, luego si $x = 1 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$

b) $|A| = x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$
Si $x \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$
Si $x = 1 \Longrightarrow |A| = 0$ y el menor $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$

c) Si $x = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$\underset{3\times 3}{A} \cdot \underset{3\times 1}{B} = \underset{3\times 1}{AB}$
$\underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}}$
$\underset{3\times 3}{A} \cdot \underset{1\times 3}{C}$ no se pueden multiplicar, el número de columnas de A no coincide con el número de filas de C

Problema 1.4.4 Dado $m \in \mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = -1 \\ 3x + 3y + 2z = m \end{array} \right.$$

a) Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo en los casos en los que sea posible.

b) Estudia si es posible encontrar una solución en la que $z = 3$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & m \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 + 3F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 2m - 3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] =$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2m \end{array} \right)$
Si $m = 0 \Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado.
Si $m \neq 0 \Longrightarrow$ Sistema incompatible.
Para $m = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 - 3\lambda \end{array} \right.$$

b) Para $z = 3 \Longrightarrow 3 = -3 - 3\lambda \Longrightarrow \lambda = -2 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{array} \right.$

1.5. Cantabria

1.5.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.5.1 Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro t.

$$\left\{ \begin{array}{c} tx + y - 2z = 0 \\ x + y - tz = -1 \\ x + y + z = t \end{array} \right.$$

a) Determine para qué valores de t el sistema tiene solución única. Resuélvalo para $t = 0$ si es posible.

b) Determine para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para qué valores de t el sistema no tiene solución.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccr|c} t & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -t & -1 \\ 1 & 1 & 1 & t \end{array} \right); \quad |A| = t^2 - 1 = 0 \Longrightarrow t = \pm 1$$

Si $t \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
Si $t = 0$ el sitema tiene solución única es SCD:

$$\left\{ \begin{array}{c} y - 2z = 0 \\ x + y = -1 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = -3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

b) Si $t = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

$$\left\{ \begin{array}{c} -x + y - 2z = 0 \\ x + y + z = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{array} \right.$$

Problema 1.5.2 Sean las matrices $A = \left(\begin{array}{rr} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{array} \right)$, $B = \left(\begin{array}{rr} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{array} \right)$.

a) Compruebe que las matrices A y B son regulares.

b) Calcule las matrices inversas de A y B.

c) Despeje X en la ecuación matricial $AXB = A^t - 3B$ en donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

d) Calcule X.

Solución:

a) Una matriz es **regular** si tiene inversa. Es decir, tiene que ser una matriz cuadrada con determinante distinto de cero.
$|A| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} \Longrightarrow A$ es regular.
$|B| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists B^{-1} \Longrightarrow A$ es regular.

b) $A = \left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{array} \right) \Longrightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{array} \right)$
$B = \left(\begin{array}{cc} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow B^{-1} = \left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{array} \right)$

c) $AXB = A^t - 3B \Longrightarrow A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}(A^t - 3B)B^{-1} \Longrightarrow$
$X = A^{-1}(A^t - 3B)B^{-1}$

d) $X = \left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{array} \right) \left[\left(\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{array} \right) - 3 \left(\begin{array}{cc} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{array} \right) \right] \left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{array} \right) =$
$\left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 5 & 8 \\ 0 & -8 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 28 & 38 \\ -18 & -23 \end{array} \right)$

1.5.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.5.3 Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro t.

$$\left\{ \begin{array}{r} tx + y + z = 4 \\ x - ty + z = 1 \\ x + y + z = t + 2 \end{array} \right.$$

a) Determine para qué valores de t el sistema tiene solución única.

b) Determine para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para qué valores de t el sistema no tiene solución.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} t & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -t & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t+2 \end{array} \right); \quad |A| = 1 - t^2 = 0 \Longrightarrow t = \pm 1$$

Si $t \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\underline{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

b) Si $t = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

$$\left\{ \begin{array}{l} -x + y + z = 4 \\ 2y + 2z = 5 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{2} \\ \\ y = \dfrac{5}{2} - \lambda \\ \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

c) Si $t = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

Problema 1.5.4 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule A^2 y comprueba que es regular.

b) Calcule la matriz inversa de A^2.

c) Despeje X en la ecuación matricial $A^2X + B = C$.

d) Calcule la matriz X de orden 2×2, que verifica $A^2X + B = C$.

Solución:

a) Una matriz es **regular** si tiene inversa. Es decir, tiene que ser una matriz cuadrada con determinante distinto de cero.
$|A^2| = |A|^2 = 4 \neq 0 \Longrightarrow \exists (A^2)^{-1} \Longrightarrow A^2$ es regular.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

c) $A^2X + B = C \Longrightarrow A^2X = C - B \Longrightarrow X = (A^2)^{-1}(C - B)$

d) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right] =$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

1.6. Castilla La Mancha

1.6.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.6.1 Se pide:

a) Encuentra todas las matrices X que conmutan con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) ¿Existe alguna matriz simétrica que conmute con A y cuyo determinante valga 4?

Solución:

a) Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $AX = XA \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & -b \\ 2c+d & -d \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2a = 2a+b \\ 2b = -b \\ a-c = 2c+d \\ -d = -d \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b = 0 \\ a = 3c+d \end{array} \right. \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 3c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

b) Para que sea simétrica $c = 0$ y $|X| = d(3c+d) = 4 \Longrightarrow d^2 = 4 \Longrightarrow d = \pm 2$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ o } X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 1.6.2 Estudia el rango de la matriz M en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, siendo

$$M = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:
Se trata de una matriz $3 \times 4 \Longrightarrow \text{Rango}(M) \le 3$

$$|M_1| = \begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & m \end{vmatrix} = 2m(1-m) = 0 \Longrightarrow m = 0, \ \ m = 1$$

$$|M_2| = \begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2m^2 - 3m + 1) = 0 \Longrightarrow m = \frac{1}{2}, \ \ m = 1$$

$$|M_3| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & m \\ 4 & m & 2 \end{vmatrix} = 2m(1-m) = 0 \Longrightarrow m = 0, \ \ m = 1$$

$$|M_4| = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix} = m(1-m^2) = 0 \Longrightarrow m = -1, \;\; m = 0, \;\; m = 1$$

El único valor que anula los cuatro determinantes es $m = 1$ y el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.
Concluimos:
Si $m \neq 1 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 3$ y si $m = 1 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 2$.

Problema 1.6.3 Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros, lo mismo que dos cuadernos y una agenda. ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguno es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50?

Solución:
Sean x el precio de un lápiz, y el precio de un cuaderno y z el precio de una agenda.

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + y + z = 500 \\ 2y + z = 500 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 500 - 6\lambda \end{array}\right.$$

Como $x > 0$, $y > 0$ y $z > 0 \Longrightarrow 0 < \lambda < \dfrac{500}{6}$ y λ es múltiplo de $50 \Longrightarrow \lambda = 50$
Luego los lápices cuestan 0,50 €, los cuadernos 1,5 € y la agenda 2 €.

1.6.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.6.4 Se pide:

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{c} x + 2y + 3z = a + 1 \\ ax + z = 0 \\ x + y + 2z = 1 \end{array}\right.$$

b) Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 1$, si es posible.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a+1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = 1 - a = 0 \Longrightarrow a = 1$$

- ☛ Si $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- ☛ Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

b) Si $a=1$:

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y+3z=2\\ x+z=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

Problema 1.6.5 Sea el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z\\ a & b & c\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=2,$$

donde $x,y,z,a,b,c\in\mathbb{R}$ Calcula razonadamente (e indicando las propiedades de los determinantes que utilizas) el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ a-2 & b-4 & c-6\\ 2x & 2y & 2z\end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ a-2 & b-4 & c-6\\ 2x & 2y & 2z\end{vmatrix}=\left[\begin{array}{c} F_1\to F_3\\ \text{sacar } 2\end{array}\right]=-2\begin{vmatrix} x & y & z\\ a-2 & b-4 & c-6\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=$$

$$[\text{desdoble de } F_2]=-2\left[\begin{vmatrix} x & y & z\\ a & b & c\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x & y & z\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}\right]=\left[\begin{array}{c} F_2=2F_3\\ det=0\end{array}\right]=$$

$$-2\begin{vmatrix} x & y & z\\ a & b & c\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=-2\cdot 2=-4$$

Problema 1.6.6 Despeja la matriz X de la ecuación matricial $AX+B=X$, siendo X, A y B matrices cuadradas cualesquiera. Calcula X para las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Solución:

$AX+B=X\Longrightarrow AX-X=-B\Longrightarrow (A-I)X=-B\Longrightarrow X=-(A-I)^{-1}B$

$$X=-\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3/2 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

1.7. Castilla León

1.7.1. Modelo

Problema 1.7.1 Se pide:

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ.

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda x+z=1\\ x+y+\lambda z=1\\ x-y+z=1\end{array}\right.$$

b) Resolverlo para $\lambda=1$

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$, $|A| = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -2$ y $\lambda = 1$.

- Si $\lambda \neq -2$ y $\lambda \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $\lambda = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 + F_1 \\ 2F_3 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $\lambda = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) $\lambda = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{array} \right.$$

Problema 1.7.2 Dadas las matrices $A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{array} \right)$, $B = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right)$ y $M = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ a & b \end{array} \right)$, calcúlense a y b para que se verifiquen $|MA| = 2$ y $|M + B| = 3$, donde se esta usando la notación habitual (con barras verticales) para denotar al determinante de una matriz.

Solución:

$$|MA| = \left| \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ a & b \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{array} \right) \right| = \left| \begin{array}{cc} 3 & 7 \\ a + 2b & 2a + 5b \end{array} \right| = b - a = 2$$

$$|M + B| = \left| \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ a & b \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \right| = \left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ a + 1 & b + 1 \end{array} \right| = -a + 2b + 1 = 3 \Longrightarrow -a + 2b = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -a + b = 2 \\ -a + 2b = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -2 \\ b = 0 \end{array} \right.$$

1.7.2. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.7.3 Dado el sistema: $\left\{ \begin{array}{l} 2x + 2my - z = 0 \\ x + 2y + mz = 0 \\ x - my + mz = 0 \end{array} \right.$

a) Discute el sistema según los distintos valores de m.

b) Resuelva el sistema si $m = -2$.

Solución:
Se trata de un sistema homogéneo.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2m & -1 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & -m & m \end{pmatrix}$, $|A| = 2m^2 + 5m + 2 = 0 \Longrightarrow m = -2$ y $m = -\dfrac{1}{2}$.

- Si $m \neq -2$ y $m \neq -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única, la trivial: $x = y = z = 0$)
- Si $m = -\dfrac{1}{2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 - 2F_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

- Si $m = -2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

Un sistema homogéneo no puede ser incompatible.

b) $m = -2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 4y - z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{5}{4}\lambda \\ \\ y = \dfrac{3}{8}\lambda \\ \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 1.7.4 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule el valor de a que hace que:

$$A^2 = A^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:
$A^2 = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 + a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 = A^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & a^2+a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\begin{pmatrix} a^2 & a^2+a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a^2 = \dfrac{1}{a} \\ \\ a^2 + a = 2 \end{cases} \Longrightarrow a = 1$

1.7.3. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.7.5 Se pide:

a) Discuta según los valores del parámetro m el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + mz = 4 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

b) Resuélvalo para $m = 2$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & m & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$, $|A| = 3 - 3m = 0 \Longrightarrow m = 1$.

- Si $m \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

b) $m = 2$:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 1.7.6 Se pide:

a) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, hállese la matriz X tal que $AX + B = C$

b) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,, explíquese cuales de los productos MN, MP, NP pueden calcularse, y calcúlense cuando se pueda.

Solución:

a) $AX + B = C \Longrightarrow AX = C - B \Longrightarrow X = A^{-1}(C - B) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)
- ☛ $\underset{2\times3}{M} \cdot \underset{2\times2}{N} \Longrightarrow$ No se pueden multiplicar.
- ☛ $\underset{2\times3}{M} \cdot \underset{3\times2}{P} = \underset{2\times2}{MP} \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ☛ $\underset{2\times2}{N} \cdot \underset{3\times2}{P} \Longrightarrow$ No se pueden multiplicar.

1.8. Cataluña

1.8.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.8.1 Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax + 2y + 3z = 2 \\ 2x + ay + z = a \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a.

b) Resuelve, si es posible, el sistema para el caso $a = 2$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 3 & 2 \\ 2 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 4a^2 - 4a - 8 = 0 \Longrightarrow a = -1$ y $a = 2$

- ☛ Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)
- ☛ Si $a = -1$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 7 & 3 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} =$
$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones)

☛ Si $a = 2$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + 5F_2 \end{array}\right] =$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones)}$$

☛ Si $a = 2$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema compatible}$$
indeterminado (infinitas soluciones)

b) Si $a = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x + y + 4z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + 2y + z = 2 \\ x + y + 4z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Problema 1.8.2 Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, que depende de los parámetros a, b y c.

a) Calcular las matrices X tales que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Determine los valores de a, b y c para que la matriz inversa de X sea $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solución:

a)
$$X^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2 = 1 \\ a + b = 0 \\ b^2 = 1 \\ b + c = 0 \\ c^2 = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \;\; b = -1 \;\; c = 1 \\ a = -1 \;\; b = 1 \;\; c = -1 \end{array}\right.$$

b) $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{ab} & \frac{1}{abc} \\ 0 & \frac{1}{b} & -\frac{1}{bc} \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{ab} = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{abc} = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{b} = 1 \\ -\frac{1}{bc} = 1 \\ \frac{1}{c} = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{array}\right.$$

De otra manera sería: $X \cdot X^{-1} = I \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 1 - \frac{a}{2} & 1 - \frac{a}{2} \\ 0 & b & b-1 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{a}{2} = 1 \\ 1 - \frac{a}{2} = 0 \\ b = 1 \\ b - 1 = 0 \\ -c = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{array}\right.$$

1.8.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.8.3 Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{pmatrix}$, que depende el parámetro a.

a) Calcule el rango de la matriz A para los diferentes valores del parámetro a.

b) Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, resuelva la siguiente ecuación matricial
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) $|A| = 15(a^2 - 4) = 0 \Longrightarrow a = \pm 2$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{\pm 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.
- Si $a = 2$:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.
- Si $a = -2$:
$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

b) Se trata de un sistema homogéneo y $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado con un grado de libertad:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 1.8.4 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, en la que a es un parámetro real.

a) Calcule los valores del parámetro a para los cuales la matriz A es invertible.

b) Para el caso $a = 3$, resuelva la ecuación $AX = B - 3I$ donde $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = a^3 - 3a^2 + 2a = 0 \Longrightarrow a = 0$, $a = 1$ y $a = 2$.

$$\exists A^{-1} \ \ \forall a \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$$

b) $AX = B - 3I \Longrightarrow X = A^{-1}(B - 3I) =$
$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right) =$
$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 13/3 & -3 & -1 \\ -14/3 & 7/2 & 1 \end{pmatrix}$

1.9. Comunidad Valenciana

1.9.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.9.1 Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Demostrar que $C - AB^T$ tiene inversa y calcularla.

b) Calcular la matriz X que verifica $CX = AB^TX + I$, donde I es la matriz identidad.

c) Justificar que $(AB^T)^n = 2^nI$ para todo número natural n.

Solución:

a) $C - AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$|C - AB^T| = 3 \neq 0 \Longrightarrow \exists (C - AB^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$

b) $CX = AB^TX + I \Longrightarrow CX - AB^TX = I \Longrightarrow (C - AB^T)X = I \Longrightarrow$

$X = (C - AB^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$

c) $AB^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$

$AB^T = 2I \Longrightarrow (AB^T)^n = 2^nI = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Problema 1.9.2 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{pmatrix}$,

Determinar:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro real m.

b) La matriz inversa de A en el caso $m = 2$.

c) El número real m para el cual el determinante de la matriz $2A$ es igual a -8.

Solución:

a) $|A| = m^2(2 - 3m) = 0 \Longrightarrow m = 0$ y $m = \dfrac{2}{3}$

- Si $m \neq 0$ y $m \neq \dfrac{2}{3} \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

- Si $m = 0 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 1$.

☛ Si $m = \dfrac{2}{3} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -4/3 & 1/9 & 1 \\ 0 & 4/3 & 1 \end{pmatrix}$ y el menor $\begin{vmatrix} 2/3 & 0 \\ -4/3 & 1/9 \end{vmatrix} = \dfrac{2}{27} \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$.

b) La matriz es invertible cuando su rango sea 3, o lo que es lo mismo, cuando su determinante es distinto de cero:

$$\exists A^{-1}\ \forall m \in \mathbb{R} - \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$$

Si $m = 2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/8 & 3/8 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) $|2A| = 2^3|A| = 8|A| = -8 \Longrightarrow |A| = -1 \Longrightarrow m^2(2-3m) = -1 \Longrightarrow -3m^3 + 2m^2 + 1 = 0 \Longrightarrow m = 1$

1.9.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.9.3 Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + ay + (a-1)z = a \end{cases}$$

a) Discutir el sistema en función del parámetro real a.

b) Encontrar todas las soluciones del sistema cuando este sea compatible.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 & a \end{array}\right)$, $|A| = -a^2 - a + 2 = 0 \Longrightarrow a = 1$ y $a = -2$.

☛ Si $a \neq 1$ o $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 + F_1 \\ 2F_3 + F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 3F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

☛ Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = [\ F_1 = F_3\ ] \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

b) ☛ Si $a \neq 1$ o $a \neq -2$:

$$x = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & a & a-1 \end{pmatrix}}{|A|} = \frac{2}{a+2}$$

$$y = \frac{\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{pmatrix}}{|A|} = \frac{1}{a+2}$$

$$z = \frac{\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a \end{pmatrix}}{|A|} = \frac{a+1}{a+2}$$

☛ $a = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{array} \right.$$

Problema 1.9.4 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$:

a) Calcular los valores de los parámetros a y b para que se cumpla $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4.

c) Calcular $det(A^{-50})$ cuando $a^2 - b^2 \neq 0$.

Solución:

a) $AA^{-1} = I \Longrightarrow \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b = 1 \\ a - b = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \end{array} \right.$$

b) Si $a = 1$ y $b = 0 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Tenemos $|A| = (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \neq 0$

$$\left|A^{-50}\right| = |A|^{-50} = \frac{1}{|A|^{-50}} = \frac{1}{(a^2 - b^2)^{-50}}$$

1.10. Extremadura

1.10.1. Modelo

Problema 1.10.1 Calcule $A^{2021} - A^{2022}$, siendo A la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$A^{2021} - A^{2022} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4042 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4044 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 1.10.2 Añadir una ecuación al sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

de modo que sea:

a) Un sistema incompatible.

b) Un sistema compatible determinado.

Solución:

a) Basta con añadir un plano paralelo a uno de los dos que componen el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x + y - z = 5 \end{cases}$$

b) Basta con añadir un plano secante a los dos y que no sea combinación lineal de ellos:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x + y + z = 7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2/3 \\ y = 13/3 \\ z = 2 \end{cases}$$

1.10.2. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.10.3 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcular, cuando sea posible, las matrices $C \cdot B^t$, $B^t \cdot C$, $B \cdot C$, donde B^t es la matriz traspuesta de B.

b) Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que el sistema $x \cdot A + y \cdot B = C$ de tres ecuaciones y dos incógnitas x e y, sea compatible determinado y resolverlo para ese valor de a.

Solución:

a) $\underset{3\times 1}{C} \cdot \underset{1\times 3}{B^t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 6 & -2 & -8 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}}$

$\underset{1\times 3}{B^t} \cdot \underset{3\times 1}{C} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underset{1\times 1}{\begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix}}$

$\underset{3\times 1}{B} \cdot \underset{3\times 1}{C}$ No se pueden multiplicar, el número de columnas de B es distinto al número de filas de C.

b)

$$x \cdot A + y \cdot B = C \Longrightarrow x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 2 \\ ax - 4y = 1 \end{cases}$ para que sea compatible determinado la tercera ecuación tiene que ser combinación lineal de las dos primeras:

$\begin{cases} (2x + 3y = 1)\alpha \\ (x - y = 2)\beta \\ ax - 4y = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = a \\ 3\alpha - \beta = -4 \\ \alpha + 2\beta = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \\ a = 2\alpha + \beta = -1 \end{cases}$

Para $a = -1$:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 2 \\ -x - 4y = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{5} \\ y = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Problema 1.10.4 Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Calcular la matriz X cuadrada de orden 3 que cumple $MX - N = 2X$

Solución:

$MX - N = 2X \Longrightarrow MX - 2X = N \Longrightarrow (M - 2I)X = N \Longrightarrow X = (M - 2I)^{-1}N$

$M - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$(M - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$X = (M - 2I)^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

1.10.3. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.10.5 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Estudiar el rango de la matriz $A - \lambda I$ según los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 2×2.

b) Para $\lambda = 2$ solucionar el sistema $AX = \lambda X$, donde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Solución:

a) $B = A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$|B| = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$ y $\lambda = 2$

- ☛ Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2 \Longrightarrow |B| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(B) = 2$
- ☛ Si $\lambda = -1 \Longrightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(B) = 1$
- ☛ Si $\lambda = 2 \Longrightarrow B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(B) = 1$

b) Si $\lambda = 2 \Longrightarrow \text{Rango}(A - \lambda I) = 1 = \text{Rango}(A) <$número de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

$$AX = X \Longrightarrow AX - 2X = I \Longrightarrow (A - 2I)X = I \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow x - y = 1 \Longrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$$

Problema 1.10.6 Discutir en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x + y - 2az = a \\ ax - y + z = 0 \\ y - az = -1 \end{cases}$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -2a & a \\ a & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -a & -1 \end{array}\right),\ |A| = -a^2 + 4a - 4 = 0 \Longrightarrow a = 2.$$

- ☛ Si $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- ☛ Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

1.11. Galicia

1.11.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.11.1 Despeje X de la ecuación matricial $AB(X-I)=C$, donde I es la matriz identidad (asuma que el producto AB tiene inversa). Luego, calcule X si

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\ \text{ y } C=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:
$AB(X-I)=C\Longrightarrow X-I=(AB)^{-1}C\Longrightarrow X=(AB)^{-1}C+I$

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 6\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$(AB)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3\\ 0 & 1 & 0\\ -1/2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X=(AB)^{-1}C+I=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3\\ 0 & 1 & 0\\ -1/2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$X=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 1.11.2 Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema:

$$\begin{cases} x+(m-3)y+mz=1\\ (m-3)y+(m^2-m)z=1\\ x+m^2z=0 \end{cases}$$

Solución:
$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-3 & m & 1\\ 0 & m-3 & m^2-m & 1\\ 1 & 0 & m^2 & 0 \end{array}\right)$, $|A|=2m(m-1)(m-3)=0\Longrightarrow m=0$, $m=1$ y $m=3$.

- ☛ Si $m\in\mathbb{R}-\{0,1,3\}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- ☛ Si $m=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

☛ Si $m=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & -1\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

☛ Si $m=3$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 6 & 1\\ 1 & 0 & 9 & 0\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 6 & 1\\ 0 & 0 & 6 & -1\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 6 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

1.11.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.11.3 Se pide:

a) Obtenga la matriz antisimétrica A de orden 2×2 tal que $a_{12}=1$. Luego, calcule su inversa en caso de que exista. **Nota:** a_{ij} es el elemento que está en la fila i y en la columna j de A.

b) Sea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Si $B=\begin{pmatrix} 0 & b_{12}\\ 1 & b_{22}\end{pmatrix}$, halle los valores de b_{12} y de b_{22} sabiendo que B no tiene inversa y que $det(A^{-1}B+A)=-1$.

Solución:

a) Una matriz A es antisimétrica si $A^t=-A\Longrightarrow A^t+A=O$

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 1\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\Longrightarrow A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21}\\ 1 & a_{22}\end{pmatrix}$ y $O=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21}\\ 1 & a_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{11} & 1\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{21}+1\\ a_{21}+1 & 2a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases} a_{11}=0\\ a_{21}=-1\\ a_{22}=0\end{cases}\Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

b) B no tiene inversa si $|B|=0\Longrightarrow\begin{vmatrix} 0 & b_{12}\\ 1 & b_{22}\end{vmatrix}=-b_{12}=0\Longrightarrow b_{12}=0$. Luego $B=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & b_{22}\end{pmatrix}$ y A es la matriz del apartado anterior.

$$A^{-1}B+A=\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & b_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1-b_{22}\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$|A^{-1}B+A|=1-b_{22}=-1\Longrightarrow b_{22}=2\Longrightarrow B=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Problema 1.11.4 Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} (m+1)x + my + z = 0 \\ y + (m-2)z = -2 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3 \end{array}\right.$$

Solución:

$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m+1 & m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m-2 & -2 \\ m+1 & m & m-1 & -3 \end{array}\right)$, $|A| = m^2 - m - 2 = 0 \Longrightarrow m = -1$ y $m = 2$.

- Si $m \in \mathbb{R} - \{-1, 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $m = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - 3F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

- Si $m = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

1.12. Islas Baleares

1.12.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.12.1 Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y λ un parámetro real cualquiera.

a) Calcule la matriz $A - \lambda I$.

b) Calcule la matriz $(A - \lambda I)^2$.

c) Halle, si existen, los valores del parámetro λ para los cuales se satisface la relación $(A-\lambda I)^2 = B$.

Solución:

a) $A-\lambda I=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 0 & -\lambda\end{pmatrix}$

b) $(A-\lambda I)^2=\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 0 & -\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 0 & -\lambda\end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix} \lambda^2+2 & 1-2\lambda & -2\lambda\\ 1-2\lambda & \lambda^2-2\lambda+2 & 1\\ -2\lambda & 1 & \lambda^2+1\end{pmatrix}$$

c) $(A-\lambda I)^2=B\Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \lambda^2+2 & 1-2\lambda & -2\lambda\\ 1-2\lambda & \lambda^2-2\lambda+2 & 1\\ -2\lambda & 1 & \lambda^2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -3 & -4\\ -3 & 2 & 1\\ -4 & 1 & 5\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda^2+2=6\\ 1-2\lambda=-3\\ -2\lambda=-4\\ \lambda^2-2\lambda+2=2\\ \lambda^2+1=5\end{cases}\Longrightarrow \lambda=2$$

Problema 1.12.2 Considere el sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro a,

$$\begin{cases} 3x-2y=4\\ ay=-3\\ ax+3z=0\end{cases}$$

a) Discuta el sistema según el parámetro a.

b) Para el valor del parámetro a para el cual el sistema tiene solución, resuélvalo.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 4\\ 0 & a & 0 & -3\\ a & 0 & 3 & 0\end{array}\right);\quad |A|=9a=0\Longrightarrow a=0$$

- Si $a\neq 0\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$ Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) Si $a\neq 0$ resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0\\ -3 & a & 0\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{4a-6}{3a}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ a & 0 & 3\end{vmatrix}}{|A|}=-\frac{3}{a}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4\\ 0 & a & -3\\ a & 0 & 0\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{6-4a}{9}$$

1.12.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.12.3 Considere las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ \lambda & 2 & -1\\ 2 & \lambda & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} \lambda & 3\lambda & 6\end{pmatrix}$$

a) Calcule el determinante de la matriz A.

b) En función del parámetro λ, halle el rango de la matriz A.

c) Para el valor de $\lambda=1$, halle la matriz inversa de A, A^{-1}.

d) Para el valor de $\lambda=1$, resuelva la ecuación matricial $XA=B$.

Solución:

a) $|A|=-\lambda^2+2\lambda$

b) $-\lambda^2+2\lambda=0\Longrightarrow \lambda=0$ y $\lambda=2$

- Si $\lambda\in\mathbb{R}-\{0,2\}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3$.
- Si $\lambda=0\Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$ con $|A|=0$ y el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$.
- Si $\lambda=2\Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$ con $|A|=0$ y el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$.

c) $\lambda=1\Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}$

d) $XA=B\Longrightarrow X=BA^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix} -22 & 9 & 7\end{pmatrix}$$

Problema 1.12.4 Durante un año, cierta empresa vende 21000 vehículos de tres modelos A, B y C, al precio de 10000, 15000 y 20000 euros, respectivamente. El total de las ventas es de 332 millones de euros. Se ha observado que también se han vendido 21000 vehículos contando tan solo los del modelo B y λ veces los del modelo A.

a) Plantee un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema, en función del número de vehículos vendidos de cada modelo.

b) Calcule el número de vehículos vendidos de cada modelo, suponiendo $\lambda = 3$.

c) Determine si existe algún valor del parámetro λ para el cual la anterior situación no se pueda dar.

Solución:
Sean x el número de vehículos A, y el número de vehículos B y z el número de vehículos C,

a) $$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=21000 \\ 10000x+15000y+20000z=332000000 \\ \lambda x+y=21000 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=21000 \\ 2x+3y+4z=66400 \\ \lambda x+y=21000 \end{array}\right.$$

b) Si $\lambda = 3$:
$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=21000 \\ 2x+3y+4z=66400 \\ 3x+y=21000 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=3400 \\ y=10800 \\ z=6800 \end{array}\right.$$

Se han vendido 3400 del modelo A, 10800 del B y 6800 del C.

c) $$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21000 \\ 2 & 3 & 4 & 66400 \\ \lambda & 1 & 0 & 21000 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = \lambda - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2$$

- Si $\lambda \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\underline{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $\lambda = 2$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21000 \\ 2 & 3 & 4 & 66400 \\ 2 & 1 & 0 & 21000 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] =$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21000 \\ 0 & 1 & 2 & 24400 \\ 0 & -1 & -2 & -21000 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] =$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21000 \\ 0 & 1 & 2 & 24400 \\ 0 & 0 & 0 & 3400 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

Para $\lambda = 2$ el sistema no tiene solución.

1.13. Islas Canarias

1.13.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.13.1 Averigua qué dos matrices de dimensiones 3×3, X e Y, verifican las siguientes condiciones:

- La suma de ambas matrices X e Y da como resultado la matriz I_3 (siendo I_3 la matriz identidad 3×3)
- Siendo $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -7 \\ 14 & -12 & 0 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix}$, la matriz traspuesta de A es el resultado de realizar la resta del doble de la matriz X y cinco veces la matriz Y.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{r} X+Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 2X-5Y=\begin{pmatrix} 9 & 14 & 0 \\ 0 & -12 & -7 \\ -7 & 0 & -5 \end{pmatrix} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} X=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ Y=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

Problema 1.13.2 Dado el siguiente sistema de ecuaciones con un parámetro k:

$$\left\{\begin{array}{l} kx - y - z = 1 \\ x + ky + 2kz = k \\ x + y + z = -1 \end{array}\right.$$

a) Discute la resolución del sistema de ecuaciones, según los valores que pueda tomar el parámetro k

b) Resuelve el sistema para $k = 1$

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 2k & k \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$; $|A| = -k(k+1) = 0 \Longrightarrow k = 0, \ \ k = -1$

- ☛ Si $k \neq 0$ y $k \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $k = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- ☛ Si $k = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b) Si $k=1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x-y-z=1\\ x+y+2z=1\\ x+y+z=-1\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=-3\\ z=2\end{array}\right.$$

1.13.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.13.3 Resuelve los siguientes apartados:

a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}$, para $k\in\mathbb{R}$ sea C_k la matriz dada por:

$$C_k = A^t + kB\cdot A$$

Averigua para qué valores de k, la matriz C tiene rango 2

b) Encuentra la matriz X, de dimensión 3×3, que verifica $M^t\cdot X = I-M$, donde $M=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$

Solución:

a) $C=A^t+kB\cdot A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k&0\\1&1+k\end{pmatrix}$
$|C|=1-k^2=0\Longrightarrow k=\pm 1$
Si $k\in\mathbb{R}-\{\pm 1\}\Longrightarrow |C|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(C)=2$.

b) $M^t\cdot X=I-M\Longrightarrow X=(M^t)^{-1}(I-M)=$
$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}^{-1}\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\right]=$
$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&0\\0&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&-1&0\\0&1&-2\end{pmatrix}$

Problema 1.13.4 Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+6y+kz=0\\ kx+4y+2z=2\\ kx+6y+2z=k-2\end{array}\right.$$

a) Discute la resolución del sistema según los valores que puede tomar el parámetro k.

b) Resuelve el sistema cuando el parámetro k toma el valor $k=0$.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}2&6&k&0\\k&4&2&2\\k&6&2&k-2\end{array}\right);\quad |A|=2(k^2-4)=0\Longrightarrow k=2,\ \ k=-2$

- ☛ Si $k\neq 2$ y $k\neq -2\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=\text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $k=-2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 6 & -2 & 0\\ -2 & 4 & 2 & 2\\ -2 & 6 & 2 & -4\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2+F_1\\ F_3+F_1\end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 6 & -2 & 0\\ 0 & 10 & 0 & 2\\ 0 & 12 & 0 & -4\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 5F_3-6F_2\end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 6 & -2 & 0\\ 0 & 10 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -32\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

☛ Si $k=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 6 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 2 & 2\\ 2 & 6 & 2 & 0\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 6 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b) Si $k=0$:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+6y=0\\ 4y+2z=2\\ 6y+2z=-2\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=6\\ y=-2\\ z=5\end{array}\right.$$

1.14. La Rioja

1.14.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.14.1 Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible determinado e indeterminado.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+az=a\\ ax+ay+z=1\\ x+ay+z=a\end{array}\right.$$

Solución:

☛ $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a\\ a & a & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & a\end{array}\right)$, $|A|=a^3-a^2-a+1=(a+1)(a-1)^2=0\Longrightarrow$

$$a=1 \quad a=-1$$

. Si $a\in\mathbb{R}-\{\pm1\}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

$$x=\frac{\left|\begin{array}{ccc} a & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & a & 1\end{array}\right|}{|A|}=-1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & a & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{|A|} = 1$$

☛ Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - z = -1 \\ x - y + z = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

☛ Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

Tiene dos grados de libertad:

$$x + y + z = 1 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \mu \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 1.14.2 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Determina para que valores de a la matriz AB tiene inversa.

b) Resuelve para $a = 0$ la ecuación matricial $ABX = 3I$, siendo I la matriz identidad.

Solución:

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+6 & 2a+4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$|AB| = -3a - 2 = 0 \Longrightarrow a = -\dfrac{2}{3} \Longrightarrow \exists (AB)^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \left\{ -\dfrac{2}{3} \right\}$

b) Si $a = 0 \Longrightarrow AB = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$ABX = 3I \Longrightarrow (AB)^{-1}(AB)X = (AB)^{-1}3I \Longrightarrow X = 3(AB)^{-1} = 3\begin{pmatrix} -1/2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & 6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$

Problema 1.14.3 Determina los valores de los parámetros a, b y c para los que $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ es solución del sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} 2ax + by + z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a \\ 5ax - 2y + cz = -4b \end{array} \right.$$

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{c} 2a + 2b + 3 = 3c \\ 3 - 4b - 6c = a \\ 5a - 4 + 3c = -4b \end{array} \right. \Longrightarrow\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2a + 2b - 3c = -3 \\ -a - 4b - 6c = -3 \\ 5a + 4b + 3c = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{array} \right.$$

1.14.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.14.4 Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible determinado e indeterminado.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x + 2y + az = 8 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{array} \right.$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a & 8 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right), \ |\overline{A}| = -6a - 18 = 0 \Longrightarrow a = -3.$$

- Si $a \neq -3 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(\overline{A}) = 4 \neq$ Rango(A) y el sistema es incompatible.

- Si $a = -3$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \\ F_4 - F_1 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 3F_2 \\ F_4 + 2F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -15 & 15 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ 15F_4 - 8F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -15 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema compatible determinado}$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

Problema 1.14.5 Calcula sin desarrollar el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 2 & a & b+c \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix}$$

Justifica en cada paso la propiedad de determinante que has utilizado.
Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 2 & a & b+c \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 0 & a-b & b-a \\ 0 & c-b & b-c \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a-b & b-a \\ c-b & b-c \end{vmatrix} =$$

$$\left[\text{ Factor común } \right] = 2(a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(a-b)(b-c) \cdot 0 = 0$$

Problema 1.14.6 Resuelve la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:
Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.15. Madrid

1.15.1. Modelo

Problema 1.15.1 En una academia de idiomas se imparten clases de inglés, francés y alemán. Cada alumno está matriculado en un único idioma. El número de alumnos matriculados en inglés representa el 60 % del total de alumnos de la academia. Si diez alumnos de francés se hubiesen matriculado en alemán, ambos idiomas tendrían el mismo número de alumnos. Además, la cuarta parte de los alumnos de inglés excede en ocho al doble de la diferencia entre los alumnos matriculados en francés y alemán. Calcule el número de alumnos matriculados en cada idioma.

Solución:
Sean x número de alumnos de inglés, y número de alumnos de francés y z número de alumnos de alemán.

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0,6(x+y+z) \\ y-10 = z+10 \\ \dfrac{x}{4} = 8+2(y-z) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-3y-3z = 0 \\ y-z = 20 \\ x-8y+8z = 32 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 192 \\ y = 74 \\ z = 54 \end{array}\right.$$

Problema 1.15.2 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcular los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa.

b) Para $a = 1$, calcular la inversa de la matriz A.

c) Para $a = 2$, resolver el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$.

Solución:

a) $|A| = a^2 + a = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = -1$, para estos valores $\nexists A^{-1}$

b) Si $a = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) Si $a = 2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}$

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

1.15.2. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.15.3 Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m:

$$\left\{\begin{array}{c} x-2my+z = 1 \\ mx+2y-z = -1 \\ x-y+z = 1 \end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema en función de los valores de m.

b) Resuelva el sistema para $m = \dfrac{1}{2}$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2m & 1 & 1 \\ m & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = 2m^2 + m - 1 = 0 \Longrightarrow m = -1 \;\; m = \frac{1}{2}$$

- Si $m \neq -1$ y $m \neq \dfrac{1}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\underline{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 4F_3 - 3F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

- Si $m = \dfrac{1}{2}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - \frac{1}{2}F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

b) Si $m = \dfrac{1}{2}$:

$$\left\{\begin{array}{r} x - y + z = 1 \\ \\ \dfrac{1}{2}x + 2y - z = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{5}\lambda \\ \\ y = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{5}\lambda \\ \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 1.15.4 Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Además, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio la diferencia entre lo que recibe Pablo y lo que recibe Alicia es de 420 euros, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

Solución:
Sean x la edad de Pablo, y la edad de Alejandro y z la edad de Alicia.
El reparto proporcional a la edad sería:

$$\frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z} = 1 \Longrightarrow \frac{x}{45} + \frac{y}{45} + \frac{z}{45} = 1$$

Tenemos:

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 45 \\ x + y = 2z - 3 \\ \dfrac{9450x}{45} - \dfrac{9450z}{45} = 420 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x + y + z = 45 \\ x + y - 2z = 3 \\ x - z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 16 \\ y = 15 \\ z = 14 \end{array}\right.$$

Pablo tiene 15 años, Alejandro tiene 16 años y Alicia 14 años. El reparto será:
Pablo recibe $\dfrac{16\cdot 9450}{45} = 3360$€
Alejandro recibe $\dfrac{15\cdot 9450}{45} = 3150$€
Alicia recibe $\dfrac{14\cdot 9450}{45} = 2940$€

1.15.3. Convocatoria Ordinaria(coincidente)

Problema 1.15.5 Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x + y - z = 0 \\ mx + (m+1)y - z = m-1 \\ -x - 2y + (2m-1)z = 1-m \end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema en función de los valores de m.

b) Resuelva el sistema para el valor $m = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ m & m+1 & -1 & m-1 \\ -1 & -2 & 2m-1 & 1-m \end{array}\right); \quad |A| = 2m^2 + 4m - 6 = 0 \Longrightarrow$$

$$m = 1, \ \ m = -3$$

- Si $m \neq 1$ y $m \neq -3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & -7 & 4 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 + 3F_1 \\ 2F_3 + F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & -3 & -15 & 8 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 3F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 + F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b) Si $m = 1$:

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + y - z = 0 \\ 3y - z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3\lambda \end{array}\right.$$

Problema 1.15.6 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+c & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcular el valor de a para que el sistema de ecuaciones $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sea compatible.

b) Calcular los valores de a, b y c para que la multiplicación de dos de las matrices sea igual a la restante.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} a+2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow |\overline{A}| = a + 1 = 0 \Longrightarrow a = -1$

Si $a \neq -1 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A) \leq 2 \Longrightarrow$ Sistema incompatible.

Si $a = -1 \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow |\overline{A}| = 0$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2 = \text{Rango}(A) =$ número de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.

b) Para que se cumpla que el producto de dos de las matrices sea igual a la tercera tiene que ser $\underset{2\times 3}{B} \cdot \underset{3\times 2}{C} = \underset{2\times 2}{A}$, el resto de combinaciones posibles son falsas o imposibles.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+c & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+11 & 8 \\ 5a+3c+8 & 2(a+c+3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} a + 11 = c \\ 5a + 3c + 8 = 1 \\ 2(a + c + 3) = b + c \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -5 \\ b = 2 \\ c = 6 \end{array}\right.$$

1.15.4. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.15.7 En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías. Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos. Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas. Si retiráramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían ciento cinco libros. Calcule el número de libros de cada clase que hay en la estantería.

Solución:
Sean x número de ensayos, y número de novelas y z número de biografías.

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{3}{16}(x+y+z)=x\\[2mm] z+\dfrac{1}{3}x=2+y\\[2mm] \dfrac{x}{2}+\dfrac{4y}{5}+z=105\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}-13x+3y+3z=0\\ x-3y+3z=6\\ 5x+8y+10z=1050\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=24\\ y=55\\ z=49\end{array}\right.$$

La estantería tiene 24 ensayos, 55 novelas y 49 biografías.

Problema 1.15.8 Se consideran las matrices reales

$$A=\left(\begin{array}{ccc}1&-1&k\\ k&1&-1\end{array}\right),\quad B=\left(\begin{array}{cc}1&1\\ 1&-1\\ 1&0\end{array}\right)$$

a) Calcule para qué valores del parámetro k tiene inversa la matriz AB. Calcule la matriz inversa de AB para $k=1$.

b) Calcule BA y discuta su rango en función del valor del parámetro real k.

c) En el caso $k=1$, escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea BA.

Solución:

a) $AB=\left(\begin{array}{ccc}1&-1&k\\ k&1&-1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}1&1\\ 1&-1\\ 1&0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}k&2\\ k&k-1\end{array}\right)\Longrightarrow$
$|AB|=k(k-3)=0\Longrightarrow k=0$ y $k=3\Longrightarrow \exists (AB)^{-1}\ \forall k\in\mathbb{R}-\{0,3\}$
Si $k=1\Longrightarrow AB=\left(\begin{array}{cc}1&2\\ 1&0\end{array}\right)\Longrightarrow (AB)^{-1}=\left(\begin{array}{cc}0&1\\ 1/2&-1/2\end{array}\right)$

b) $BA=\left(\begin{array}{cc}1&1\\ 1&-1\\ 1&0\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc}1&-1&k\\ k&1&-1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc}k+1&0&k-1\\ 1-k&-2&k+1\\ 1&-1&k\end{array}\right)$
$|BA|=0\Longrightarrow$ Rango$(BA)<3$, cogemos el menor $\left|\begin{array}{cc}k+1&0\\ 1-k&-2\end{array}\right|=-2(k+1)=0\Longrightarrow k=-1$
Si $k\neq -1\Longrightarrow$ Rango$(BA)=2$.
Si $k=-1$
$BA=\left(\begin{array}{ccc}0&0&-2\\ 2&-2&0\\ 1&-1&-1\end{array}\right)$ el menor $\left|\begin{array}{cc}0&-2\\ -2&0\end{array}\right|=-4\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(BA)=2$.
Luego Rango$(BA)=2\ \forall k\in\mathbb{R}$

c) Con $k=1$

$$\left(\begin{array}{ccc}2&0&0\\ 0&-2&2\\ 1&-1&1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}x\\ y\\ z\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}a\\ b\\ c\end{array}\right)$$

$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Es $2F_3 = F_1 + F_2$, si ponemos $a = 1$, $b = 0$ y $c = 7$ la tercera fila ya no sería combinación lineal de las anteriores, por lo que el Rango$(\overline{BC})$ $\neq$Rango$(BC) \Longrightarrow$ sistema incompatible.

1.15.5. Convocatoria Extraordinaria (coincidente)

Problema 1.15.9 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Para $b = a^2$, determinar los valores de a para que la matriz A tenga inversa.

b) Para $b = 4$ y $a = -2$, calcular $A^{-1} \cdot (B + 2A) - (A^{-1} + B^t) \cdot B$.

c) Para $b = 1$, discutir el rango de la matriz $A + B$ en función del parámetro a.

Solución:

a) Si $b = a^2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} a & a^2 & 0 \\ a^2 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = a^3(1 - a^2) = 0 \Longrightarrow a = 0,\ a = \pm 1$

$$\exists A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{0, -1, 1\}$$

b) $A^{-1} \cdot (B + 2A) - (A^{-1} + B^t) \cdot B = A^{-1}B + 2A^{-1}A - A^{-1}B - B^tB = 2I - B^tB =$
$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

c) Si $b = 1 \Longrightarrow A + B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} a-1 & 1 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A + B| = a(a-2)^2 = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 2$.

- Si $a \in \mathbb{R} - \{0, 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3$.
- Si $a = 0 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y el menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A + B) = 2$.
- Si $a = 2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$Rango$(A + B) = 1$.

Problema 1.15.10 Los precios de las entradas para un musical son 8 euros para los asistentes menores de 18 años, 25 euros para los adultos de menos de 60 años, y 10 euros para aquellos de al menos 60 años. Tras el concierto, se sabe que se han vendido tantas entradas de 25 euros como de las otras dos categorías juntas; y también que ha habido 9 asistentes menores de edad por cada uno de aquellos de al menos 60 años. Si la recaudación final fue de 8300 euros, calcule el número de asistentes de cada rango de edad.

Solución:
Sean x número de asistentes menores, y número de asistentes adultos menores de 60 años y z número de asistentes mayores de 60 años.

$$\left\{\begin{array}{c} y = x + z \\ x = 9z \\ 8x + 25y + 10z = 8300 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x - y + z = 0 \\ x - 9z = 0 \\ 8x + 25y + 10z = 8300 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 225 \\ y = 250 \\ z = 25 \end{array}\right.$$

Ha habido 225 asistentes menores, 250 asistentes adultos menores de 60 años y 25 asistentes adultos mayores de 60 años.

1.16. Murcia

1.16.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.16.1 La suma de las edades de Carmela, Esperanza y Aurora es 68 años. La edad de Carmela es 5 años más que la mitad de la suma de las edades de Esperanza y Aurora. Además, dentro de 4 años la edad de Aurora será la edad que actualmente tiene Esperanza. Calcule las edades de cada una de ellas.
Solución:
Sean x la edad de Carmela, y la edad de Esperanza y z la de Aurora.

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 68 \\ x - 5 = \dfrac{y + z}{2} \\ z + 4 = y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 68 \\ 2x - y - z = 10 \\ y - z = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 26 \\ y = 23 \\ z = 19 \end{array}\right.$$

Problema 1.16.2 Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Si I denota la matriz identidad de orden 3, compruebe que $A^3 = -I$ y calcule A^{2023}.

b) Calcule la inversa de A.

c) Resuelva la ecuación matricial $AX - B^T = A^2$, donde B^T denota la matriz traspuesta de B.

Solución:

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$A^4 = A^3 \cdot A = -A$, $A^5 = -A \cdot A = -A^2$, $A^6 = A^5 \cdot A = I, \ldots$

$A^{2023} = \left(A^6\right)^{337} \cdot A = I \cdot A = A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

c) $AX - B^T = A^2 \Longrightarrow AX = A^2 + B^T \Longrightarrow X = A^{-1}(A^2 + B^T)$

$$A^2 + B^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(A^2 + B^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & -9 & -14 \\ 0 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

1.16.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.16.3 Un conocido defraudador fiscal tiene distribuido su dinero negro en tres paraísos fiscales, las Islas Caimán, Panamá y Fiji. La suma total de este dinero es de 150 millones de euros. Si perdiera la cuarta parte del dinero que tiene en las Islas Caimán, seguiría teniendo allí el triple del dinero que tiene en Panamá. Además, el dinero que tiene en Panamá sumado a las dos quintas partes del dinero que tiene en Fiji es exactamente la mitad del dinero que tiene en las Islas Caimán. Calcule cuánto dinero tiene en cada uno de los paraísos fiscales.
Solución:
Sean x dinero en Islas Caimán, y dinero en Panamá y z dinero en Fiji.

$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 150 \\ \dfrac{3x}{4} = 3y \\ y + \dfrac{2z}{5} = \dfrac{x}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 150 \\ x - 4y = 0 \\ 5x - 10y - 4z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 80 \\ y = 20 \\ z = 50 \end{array}\right.$ En las Islas Caimán hay 80 millones de euros, en Panamá hay 20 millones de euros y en Fiji hay 50 millones de euros.

Problema 1.16.4 Se dice que una matriz cuadrada A es idempotente si cumple que $A^2 = A$

a) Si A es una matriz idempotente, calcule razonadamente A^{2022}.

b) Si A es una matriz idempotente y regular (o inversible), calcule razonadamente su determinante.

c) Determine para que valores de a y b la siguiente matriz es idempotente

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

.

Solución:

a) $A^1 = A$, $A^2 = A$, $A^3 = A^2A = AA = A^2 = A$, $A^4 = A^3A = AA = A^2 = A, \ldots, A^n = A \Longrightarrow A^{2022} = A$

b) $1 = |I| = |AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = |A^2|\dfrac{1}{|A|} = \dfrac{|A||A|}{|A|} = |A|$

$$|A| = 1$$

c) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2 & (a-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \Longrightarrow$
Hay cuatro soluciones posibles:

- ☛ $a = 1$ y $b = 1$
- ☛ $a = 1$ y $b = 0$
- ☛ $a = 0$ y $b = 1$
- ☛ $a = 0$ y $b = 0$

1.17. Navarra

1.17.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.17.1 Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x + (a^2 - 2a)y - z = -a^2 \\ x + (a^2 - 4)y + (2a - 3)z = -a^2 - 2a \\ x + (a^2 - 4a + 4)y + (a^2 - 2a)z = -a^2 + a - 1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.
Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 - 2a & -1 & -a^2 \\ 1 & a^2 - 4 & 2a - 3 & -a^2 - 2a \\ 1 & a^2 - 4a + 4 & a^2 - 2a & -a^2 + a - 1 \end{array} \right),\ |A| = 2(a^3 - 2a^2 - a + 2) = 0 \Longrightarrow a = 2 \text{ y}$$
$a = \pm 1$.

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 1, 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a^2 & a^2 - 2a & -1 \\ -a^2 - 2a & a^2 - 4 & 2a - 3 \\ -a^2 + a - 1 & a^2 - 4a + 4 & a^2 - 2a \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{a^2 - a + 1}{a - 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a^2 & -1 \\ 1 & -a^2 - 2a & 2a - 3 \\ 1 & -a^2 + a - 1 & a^2 - 2a \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{a - 1}{a - 2}$$

$$z=\frac{\left|\begin{array}{ccc}1 & a^2-2a & -a^2\\ 1 & a^2-4 & -a^2-2a\\ 1 & a^2-4a+4 & -a^2+a-1\end{array}\right|}{|A|}=-\frac{1}{a-1}$$

- Si $a=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & -4\\ 1 & 0 & 1 & -8\\ 1 & 0 & 0 & -3\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c}F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 2 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c}F_1\\ F_2\\ F_3-2F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 2 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 9\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -3 & -1 & -3\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c}F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 0 & 0\end{array}\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{c}F_1\\ F_2\\ F_3+F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & -1 & -1\\ 1 & -3 & -5 & 1\\ 1 & 9 & 3 & -3\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c}F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & -1 & -1\\ 0 & -6 & -4 & 2\\ 0 & 6 & 4 & -2\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c}F_1\\ F_2\\ F_3+F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & -1 & -1\\ 0 & -6 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{\begin{array}{l}x+3y-z=-1\\ -6y-4z=2\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=3\lambda\\ y=-\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

Problema 1.17.2 Calcula los valores de t para los que la matriz $A^{26}+A^{25}$ es matriz singular, siendo

$$A=\left(\begin{array}{cc}0 & -1\\ 1 & t-1\end{array}\right)$$

Solución:
Una matriz es singular si no tiene inversa, es decir, su determinante es nulo.

$$B=A^{26}+A^{25}=A^{25}(A+I)\Longrightarrow |B|=|A^{25}(A+I)|=|A^25||A+I|=|A|^{25}|A+I|$$

$$|A|=1\Longrightarrow |A|^{25}=1^{25}=1$$

$$|A+I|=\left|\begin{array}{cc}1 & -1\\ 1 & t\end{array}\right|=t+1$$

$$|B|=1\cdot(t+1)=0\Longrightarrow t=-1$$

1.17.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.17.3 Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a^2-1)x + ay + a^2z = 1 \\ (a^2-1)x + (a+1)y + (a^2+a)z = 2 \\ y + (a^2+2a)z = a+2 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.
Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a^2-1 & a & a^2 & 1 \\ a^2-1 & a+1 & a^2+a & 2 \\ 0 & 1 & a^2+2a & a+2 \end{array} \right),\ |A| = a^4 + a^3 - a^2 - a = 0 \Longrightarrow a = 0,\ a = -1 \text{ y}$$
$a = 1$.

- Si $a \in \mathbb{R} - \{0, -1, 1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 2 & a+1 & a^2+a \\ a+2 & 1 & a^2+2a \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{1}{a+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a^2-1 & 1 & a^2 \\ a^2-1 & 2 & a^2+a \\ 0 & a+2 & a^2+2a \end{vmatrix}}{|A|} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a^2-1 & a & 1 \\ a^2-1 & a+1 & 2 \\ 0 & 1 & a+2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{a}$$

- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

$$\left\{\begin{array}{l} y+z=1 \\ 2z=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=0 \\ z=1 \end{array}\right.$$

- Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

Problema 1.17.4 Demuestra que se cumple $|A\cdot B|=0$ para toda matriz A de dimensión 3×2, siendo B la siguiente matriz:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

La matriz $A\cdot B$ tiene que ser cuadrada, luego $\dim(A)=3\times 2$, sea $A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \\ h & m \end{pmatrix}$ y tenemos

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \\ h & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y & x+2y \\ z & t & z+2t \\ h & m & h+2m \end{pmatrix}$$

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix} x & y & x+2y \\ z & t & z+2t \\ h & m & h+2m \end{vmatrix}=\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3-C_1-2C_2 \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ z & t & 0 \\ h & m & 0 \end{vmatrix}=0$$

1.18. País Vasco

1.18.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 1.18.1 Discute la existencia de soluciones del sistema de ecuaciones lineales que sigue en función de los valores del parámetro α:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+\alpha z=\alpha \\ 2x+\alpha y+\alpha z=1 \\ x+\alpha y+z=1 \end{array}\right.$$

Resolver el sistema para $\alpha=-1$ y $\alpha=1$, si es posible.
Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & \alpha \\ 2 & \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \end{array}\right);\quad |A|=2\alpha-2=0\Longrightarrow \alpha=1$$

- Si $\alpha\in\mathbb{R}-\{1\}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $\alpha=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

☛ Cuando $\alpha = 1$

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+y+z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=1-\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

☛ Cuando $\alpha = -1$

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=-1 \\ 2x-y+-z=1 \\ x-y+z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=-1 \\ z=0 \end{array}\right.$$

Problema 1.18.2 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

a) Determinar para qué valores del parámetro m la matriz A no tiene inversa.

b) Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $m = 0$.

Solución:

a) $|A| = 2(m^2-3m+2) = 0 \Longrightarrow m = 1$ y $m = 3 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$ para $m = 1$ y $m = 2$ por ser $|A| = 0$

b) Si $m = 0 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.18.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 1.18.3 Discute la existencia de soluciones del sistema de ecuaciones lineales que sigue en función de los valores del parámetro α:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha x+2y-2z=2 \\ 2x+2y-2z=\alpha \\ \alpha x+2y-z=1 \end{array}\right.$$

Resolver el sistema para $\alpha = 1$, si es posible.
Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & \alpha \\ \alpha & 2 & -1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = 2\alpha - 4 = 0 \Longrightarrow \alpha = 2$$

☛ Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $\alpha = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

☛ Cuando $\alpha = 1$

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y-2z=2 \\ 2x+2y-2z=1 \\ x+2y-z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ \\ y=\dfrac{1}{2} \\ \\ z=-1 \end{array}\right.$$

Problema 1.18.4 Calcula de manera razonada, aplicando las propiedades adecuadas, el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

sabiendo que

$$\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 6$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & q & r \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ 2x & 2y & 2z \\ p & q & r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & q & r \\ 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \\ p & q & r \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6 \Longrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -3$$

Capítulo 2

Geometría

2.1. Resúmenes teóricos

Vectores

Sean $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$

- $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente independientes si $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$. En caso contrario uno de los vectores es combinación lineal de los otros.

- Producto escalar: $\begin{cases} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \\ \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{u}|\cos\alpha \end{cases}$

- Producto vectorial: $\overrightarrow{t} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$; el vector $\overrightarrow{t}$ es perpendicular a los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$. Se cumple $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\sin\alpha$.
  $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = S$ donde S es el área del paralelogramo que describen los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ por paralelelismo. (El área de un triángulo será $\dfrac{1}{2}S$)

- Producto mixto: $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = V$, donde V es el volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores por paralelismo. El volumen de un paralelepípedo es también $V = S_{\text{base}} \cdot$Altura. Para calcular el volumen de un tetraedro tenemos dos fórmulas: $V_{\text{tetraedro}} = \dfrac{1}{6}V_{\text{paralelepípedo}}$ y $V_{\text{tetraedro}} = \dfrac{1}{3}S_{\text{base}} \cdot \text{Altura}$

Ecuaciones

Sea la recta $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (u_1, u_2, u_3) \\ P_r(a, b, c) \end{cases}$

Vectorial	Paramétrica	Continua	General
$\overrightarrow{x} = P_r + \lambda\overrightarrow{u_r}$	$\begin{cases} x = a + \lambda u_1 \\ y = b + \lambda u_2 \\ z = c + \lambda u_3 \end{cases}$	$\dfrac{x-a}{u_1} = \dfrac{y-b}{u_2} = \dfrac{z-c}{u_3}$	No hay

Sea el plano $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3) \\ \overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \\ P(a, b, c) \end{cases}$

Vectorial	Paramétrica	Continua	General
$\overrightarrow{x} = P + \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$	$\begin{cases} x = a + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = b + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = c + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$	No hay	$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x-a \\ u_2 & v_2 & y-b \\ u_3 & v_3 & z-c \end{vmatrix} = 0$ $Ax + By + Cz + D = 0$

Ideas:

- Tres puntos $P_1(a_1, b_1, c_1)$, $P_2(a_2, b_2, c_2)$ y $P_3(a_3, b_3, c_3)$ no están alineados si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$
- El vector $\overrightarrow{u_r}$ y la recta r tienen la misma dirección.
- El vector $\overrightarrow{u_\pi} = (A, B, C)$ y el plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ son perpendiculares.

Posiciones de rectas y planos:

- Dos rectas: $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{cases}$, $s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} \\ P_s \end{cases}$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$. Construimos la matriz $A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \\ \overrightarrow{P_rP_s} \end{pmatrix}$.

  Si Rango$(A) = 3 \Longrightarrow$ Se cruzan.

  Si Rango$(A) = 2$: $\begin{cases} \text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow \text{Se cortan} \\ \text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 1 \Longrightarrow \text{Son paralelas} \end{cases}$.

  Si Rango$(A) = 1 \Longrightarrow$ Coinciden.

- De una recta $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{cases}$ y un plano $\pi : Ax+By+Cz+D = 0$: Se pasa la recta a paramétricas y se sustituye en el plano: $A(a + \lambda u_1) + B(b + \lambda u_2) + C(c + \lambda u_3) + D = 0$ Al resolver esta ecuación pueden ocurrir tres casos:

  a) Encuentro un valor de $\lambda = k \Longrightarrow$ se cortan. El punto de corte se encuentra sustituyendo el valor de λ en la ecuación paramétrica de la recta.

  b) Encuentro infinitos valores de $\lambda \Longrightarrow$ la recta se encuentra contenida en el plano. (La solución de la ecuación queda de la forma $0 = 0$)

  c) No existen valores de $\lambda \Longrightarrow$ la recta es paralela al plano. (La solución de la ecuación queda de la forma $7 = 0$)

- De dos planos $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1$ y $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2$. Puede ocurrir:

  a) $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ o $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ o $\dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ en cualquiera de ellos los dos planos se cortan en una recta.

  b) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$ en este caso son paralelos.

  c) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$ en este caso coinciden.

- De tres planos $\pi_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1$, $\pi_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2$ y $\pi_3 : A_3x+B_3y+C_3z+D_3$. Se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y se discute por el teorema de Roché. Si el sistema tiene solución única los tres planos se cortan en un punto. En el caso de que tenga infinitas soluciones se analizan los planos dos a dos. En el caso de que no tenga soluciones se analizan los planos dos a dos.

Fórmulas:

- Distancia entre dos puntos: $d(A,B) = |\overrightarrow{AB}|$
- Distancia de un punto a una recta: $d(P,r) = \dfrac{|\overrightarrow{PP_r} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}$
- Distancia de un punto a un plano: $d(P,\pi) = \dfrac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
- Distancia entre dos rectas que se cruzan: $d(r,s) = \dfrac{|[\overrightarrow{PP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|}$
- Ángulo entre dos vectores: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|}$
- Ángulo entre dos rectas: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_r}|}$
- Ángulo entre dos planos: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}}}{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}||\overrightarrow{u_{\pi_2}}|}$
- Ángulo entre una recta y un plano: $\sin\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_\pi}|}$
- Punto medio de P y Q es $A = \dfrac{P+Q}{2}$
- Punto simétrico de P respecto de Q es $A = 2Q - P$
- Esfera: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ es una esfera de centro $C(a,b,c)$ y radio$= r$.

Ideas métricas:

- Punto simétrico de P respecto al plano π:
  - Calculo r que pasa por P perpendicular a π, $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi}$.
  - Calculo el punto de corte P' de r con π.
  - $P'' = 2P' - P$
- Punto simétrico de P respecto a la recta r:
  - Calculo π perpendicular a r que contenga a P, $\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r}$.
  - Calculo el punto de corte P' de r con π.
  - $P'' = 2P' - P$

- Recta perpendicular a otras dos que se cruzan (y las corta): Se calcula como intersección de los dos planos $\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} \\ \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{cases}$, $\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} \\ \overrightarrow{u_s} \\ P_s \end{cases}$
donde $\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$

- Recta que pasa por un punto P y corta a dos rectas que se cruzan: Se calcula como intersección de los dos planos
$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{P_rP} \\ \overrightarrow{u_r} \\ P_r \text{ o } P \end{cases} \quad , \quad \pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{P_sP} \\ \overrightarrow{u_s} \\ P_s \text{ o } P \end{cases}$$

- Recta paralela a un plano π y que corta a otra recta t que a su vez corta a π y que pasa por el punto P:
    - Calculo un plano π' paralelo a π que contenga a P.
    - Calculo P' punto de corte de π' y t.
    - La recta buscada es la que une los puntos P y P'.

- Ecuación de la circunferencia resultante de cortar una esfera con un plano (vertical u horizontal). Si el plano es $z = k$, se sustituye en la ecuación y resulta una circunferencia. Tened cuidado, el centro de esta circunferencia es (a, b, k).

- Plano tangente a una esfera de centro C en el punto de tangencia P: $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{CP} \\ \text{Contiene a } P \end{cases}$

- Encontrar los puntos de una recta r que están a una distancia λ de un punto P: Se calcula la ecuación de una esfera de centro P y radio λ. Se buscan los puntos de corte de esta esfera y la recta r.

- Plano Mediador π entre dos puntos P_1 y P_2: Es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que cumplen $d(P, P_1) = d(P, P_2)$.

- Plano Bisector π entre dos planos π_1 y π_2:Es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que cumplen $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$.

2.2. Andalucia

2.2.1. Modelo

Problema 2.2.1 Considera las rectas
$r:\left\{\begin{array}{l} 2x-3y+z-2=0\\ -3x+2y+2z+1=0\end{array}\right.$ y $s:\left\{\begin{array}{l} x=3-2\lambda\\ y=-1+\lambda\\ z=-2+2\lambda\end{array}\right.$

a) Calcula el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto $P(1,0,-5)$.

b) Calcula el seno del ángulo que forma la recta r con el plano $\pi:-2x+y+2z=0$.

Solución:

a) $s:\left\{\begin{array}{l} x=3-2\lambda\\ y=-1+\lambda\\ z=-2+2\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(-2,1,2)\\ P_s(3,-1,-2)\end{array}\right.$ $s\perp\pi' \Longrightarrow \overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{u_{\pi'}} \Longrightarrow \pi':-2x+y+2z+\lambda=0$, como $P\in\pi' \Longrightarrow -2\cdot 1+0+2\cdot(-5)+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=12 \Longrightarrow \pi':-2x+y+2z+12=0$

b) $\overrightarrow{u_r}=\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 2 & -3 & 1\\ -3 & 2 & 2\end{array}\right|=-(8,7,5)$

$$\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha=\frac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_\pi}|}{|\overrightarrow{u_r}|\cdot|\overrightarrow{u_\pi}|}=\frac{|(8,7,5)\cdot(-2,1,2)|}{|(8,7,5)|\cdot|(-2,1,2)|}=\frac{|-16+7+10|}{\sqrt{138}\cdot\sqrt{9}}=$$

$$\frac{1}{3\sqrt{138}}=\frac{\sqrt{138}}{414}$$

Problema 2.2.2 La recta $r:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z-3}{3}$ y la recta s, que pasa por los puntos $P(1,0,2)$ y $A(a,1,0)$, se cortan en un punto. Calcula el valor de a y el punto de corte.

Solución:

$r:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z-3}{3} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-3+2\lambda\\ y=-4+2\lambda\\ z=3+3\lambda\end{array}\right.$

$s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{PA}=(a-1,1,-2)\\ P_s=P(1,0,2)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+(a-1)\mu\\ y=\mu\\ z=2-2\mu\end{array}\right.$

Hacemos:
$\left\{\begin{array}{l} x=-3+2\lambda=1+(a-1)\mu\\ y=-4+2\lambda=\mu\\ z=3+3\lambda=2-2\mu\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda=1\\ \mu=-2\\ a=2\end{array}\right.$

Sustituyendo en cualquiera de las rectas tenemos el punto de corte de ambas rectas $P'(-1,-2,6)$

2.2.2. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.2.3 Se consideran los vectores $\overrightarrow{u}=(-1,2,3)$, $\overrightarrow{v}=(2,0,-1)$, así como el punto $A(-4,4,7)$.

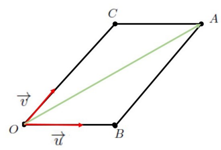
a) Calcula a y b para que el vector $\overrightarrow{w}=(1,a,b)$ sea ortogonal a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

b) Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y que tiene al vector $\overrightarrow{OA}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas.

Solución:

a) $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 5, -4) = k(1, a, b) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k = -\dfrac{1}{2} \\ a = -\dfrac{5}{2} \\ b = 2 \end{array} \right.$

b) Hacemos dibujo de la situación:
$\overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{u} = (-\lambda, 2\lambda, 3\lambda) \Longrightarrow B(-\lambda, 2\lambda, 3\lambda)$
$\overrightarrow{OC} = \mu \overrightarrow{v} = (2\mu, 0, -\mu) \Longrightarrow C(2\mu, 0, -\mu)$
Tenemos $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OB} \Longrightarrow (-4, 4, 7) - (2\mu, 0, -\mu) = (-\lambda, 2\lambda, 3\lambda) \Longrightarrow$
$(-4 - 2\mu, 4, 7 + \mu) = (-\lambda, 2\lambda, 3\lambda) \Longrightarrow \lambda = 2 \Longrightarrow$
$(-4-2\mu, 4, 7+\mu) = (-2, 4, 6) \Longrightarrow \mu = -1$. En conclusión: $\lambda = 2$ y $\mu = -1$.



Los vértices son $O(0,0,0)$, $A(-4,4,7)$, $B(-2,4,6)$ y $C(-2,0,1)$
(A la misma conclusión se llega haciendo $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA}$)

Problema 2.2.4 Considera la recta $r \equiv x - 2 = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$ así como la recta s determinada por el punto $P(1, 2, 3)$ y el vector director $\overrightarrow{v} = (1 + a, -a, 3a)$.

a) Calcula a para que las rectas r y s se corten.

b) Calcula a para que las rectas r y s sean perpendiculares.

Solución:

$$r : x - 2 = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2} \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, -1, 2) \\ P_r(2, 0, 1) \end{array} \right.$$

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1 + a, -a, 3a) \\ P_s(1, 2, 3) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + (1 + a)\mu \\ y = 2 - a\mu \\ z = 3 + 3a\mu \end{array} \right.$$

a) Hacemos:
$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda = 1 + (1 + a)\mu \\ y = -\lambda = 2 - a\mu \\ z = 1 + 2\lambda = 3 + 3a\mu \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -8 \\ \mu = -1 \\ a = 6 \end{array} \right.$$
Luego si $a = 6$ las dos rectas se cortan y, sustituyendo en cualquiera de las rectas, tenemos el punto de corte de ambas rectas $P'(-6, 8, -15)$

b) $r \perp s \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_s} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = 0$

$$\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 2) \cdot (1 + a, -a, 3a) = 1 + a + a + 6a = 0 \Longrightarrow a = -\frac{1}{8}$$

2.2.3. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.2.5 Considera las rectas $r \equiv x+1 = y-a = -z$ y $s \equiv \begin{cases} x = 5+2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2-\lambda \end{cases}$

a) Calcula a para que r y s se corten. Determina dicho punto de corte.

b) Halla la ecuación del plano que pasa por $P(8,-7,2)$ y que contiene a la recta s.

Solución:

$$r: x+1 = y-a = -z \Longrightarrow r: \begin{cases} x = -1+\mu \\ y = a+\mu \\ z = -\mu \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,1,-1) \\ P_r(-1,a,0) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2,0,-1) \\ P_s(5,-3,2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 5+2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2-\lambda \end{cases}$$

a) Hacemos:

$$\begin{cases} x = -1+\mu = 5+2\lambda \\ y = a+\mu = -3 \\ z = -\mu = 2-\lambda \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = -8 \\ \mu = -10 \\ a = 7 \end{cases}$$

Luego si $a = 7$ las dos rectas se cortan y, sustituyendo en cualquiera de las rectas, tenemos el punto de corte de ambas rectas $P'(-11,-3,10)$

b) $$\pi: \begin{cases} \overrightarrow{P_sP} = (3,-4,0) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,0,-1) \\ P_s(5,-3,2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} x-5 & y+3 & z-2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi: -4x-3y-8z+27 = 0 \Longrightarrow \pi: 4x+3y+8z-27 = 0$$

Problema 2.2.6 Sea el plano $\pi \equiv x+y-z = 2$ y la recta $r \equiv x = \dfrac{y}{3} = z-1$.

a) Calcula, si existe, el punto de intersección de π y r.

b) Dado el punto $Q(2,6,3)$, halla su simétrico respecto del plano π.

Solución:

$$r: x = \frac{y}{3} = z-1 \Longrightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,3,1) \\ P_r(0,0,1) \end{cases}$$

a) Sustituimos r en $\pi \Longrightarrow \lambda+3\lambda-1-\lambda = 2 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow P(1,3,2)$ La recta r corta al plano π en el punto $P(1,3,2)$.

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

- ☛ Calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $Q \in t$:

$$t: \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,1,-1) \\ P_t = Q(2,6,3) \end{cases} \Longrightarrow t: \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 6+\lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases}$$

- ☛ Calculamos el punto de corte Q' de t con π:

$$(2+\lambda)+(6+\lambda)-(3-\lambda) = 2 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow Q'(1,5,4)$$

- ☛ Q' es el punto medio entre Q y el punto Q'' que buscamos:

$$\frac{Q+Q''}{2} = Q' \Longrightarrow Q'' = 2Q'-Q = (2,10,8)-(2,6,3) = (0,4,5)$$

2.3. Aragón

2.3.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.3.1 Se pide:

a) Escribe la ecuación del plano que contiene a las rectas r_1 y r_2, y además pasa por el punto $(-1, 2, 1)$, siendo

$$r_1 \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}, \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$$

b) Dado el vector $\overrightarrow{v} = (2, k, 2k)$, calcula el valor $k \in \mathbb{R}$ para que $\overrightarrow{v}$ y los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 sean linealmente dependientes.

Solución:

a) $r_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}} = (3, 1, 1) \\ P_{r_1}(0, -2, 0) \end{cases} \Longrightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x = 3t \\ y = -2 + t \\ z = t \end{cases}$

$r_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_2}} = (6, -2, 1) \\ P_{r_2}(-1, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$

$\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}} = (0, -2, 0) - (-1, 0, 0) = (1, -2, 0)$ y estudiamos la posición relativa de r_1 y r_2:

$\left[\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow r_1$ y r_2 se cruzan y, por tanto, no existe un plano que contenga a las dos. (Para que ese plano existiese tendrían que cortarse o ser paralelas)

Parece ser un error de diseño del problema. Si que se podría calcular la ecuación de un plano π paralelo a estas rectas que contenga al punto $P(-1, 2, 1)$

$u_\pi = \overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3(1, 1, -4) \Longrightarrow \pi : x + y - 4z + \lambda = 0$, como $P \in \pi \Longrightarrow$
$-1 + 2 - 4 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 3 \Longrightarrow \pi : x + y - 4z + 3 = 0$

b) $[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}] = \begin{vmatrix} 2 & k & 2k \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 21k = 0 \Longrightarrow k = \dfrac{2}{7}$

Problema 2.3.2 Sea pide:

a) Dados los vectores $\overrightarrow{v_1} = a\overrightarrow{u_1} - 2\overrightarrow{u_2} + 3\overrightarrow{u_3}$, $v_2 = -\overrightarrow{u_1} + a\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}$, determina el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_1}$ sean ortogonales, sabiendo que los vectores $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ son ortogonales y de módulo igual a 1.

b) Calcula el volumen del tetraedro formado por los vectores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$ siendo

$$\overrightarrow{v_1} = (1, 0, -2), \quad \overrightarrow{v_2} = (3, 1, 0)$$

Solución:

a) Tenemos $\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u_3}\overrightarrow{u_3} = 1$ ya que tienen módulo 1.
$\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_3} = 0$ ya que son ortogonales.
$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = (a\overrightarrow{u_1} - 2\overrightarrow{u_2} + 3\overrightarrow{u_3}) \cdot (-\overrightarrow{u_1} + a\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}) =$
$-a\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_1} + a^2\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2} + a\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_3} + 2\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_1} - 2a\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_2} - 2a\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_3} - 3\overrightarrow{u_3}\overrightarrow{u_1} +$
$3a\overrightarrow{u_3}\overrightarrow{u_2} + 3\overrightarrow{u_3}\overrightarrow{u_3} = -a - 2a + 3 = 0 \Longrightarrow a = 1$

b) $V = \dfrac{1}{6}\,|[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}]| = \dfrac{1}{6}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{v_2} \\ \overrightarrow{v_3} \end{vmatrix}| = \dfrac{1}{6}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{v_2} \\ \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} \end{vmatrix}| = \dfrac{1}{6} \cdot 0 = 0$ la tercera fila del determinante es combinación lineal de la primera y la segunda y, por tanto, el determinante vale cero.

2.3.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.3.3 El volumen de un tetraedro es de 10 unidades cúbicas. Si tres de sus vértices se encuentran en los puntos $A(1,1,1)$, $B(-2,1,0)$ y $C(0,1,3)$, halla las coordenadas del cuarto vértice D sabiendo que se encuentra en el eje Y. Escribe todas las soluciones posibles.
Solución: $D \in OY \Longrightarrow D(0,a,0)$

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-3,0,-1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,0,2) \\ \overrightarrow{AD} = (-1,a-1,-1) \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right]\right| = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & a-1 & -1 \end{vmatrix}| = \frac{1}{6}|7(a-1)| = 10 \Longrightarrow$$

- ☛ $\dfrac{7}{6}(a-1) = 10 \Longrightarrow a = \dfrac{67}{7} \Longrightarrow D_1\left(0, \dfrac{67}{7}, 0\right)$
- ☛ $\dfrac{7}{6}(a-1) = -10 \Longrightarrow a = -\dfrac{53}{7} \Longrightarrow D_2\left(0, -\dfrac{53}{7}, 0\right)$

2.4. Asturias

2.4.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.4.1 Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1,0,1)$ y $B(2,1,2)$ y s la recta s : $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{1}$

a) Indica la posición relativa de r y s.

b) Calcula un plano paralelo a r y que contiene a s.

c) Calcula la distancia entre las rectas r y s.

Solución:
$r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (1,1,1) \\ P_r = A(1,0,1) \end{array}\right.$ y $s: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,-1,1) \\ P_s(2,2,0) \end{array}\right.$

a) $\overrightarrow{P_rP_s} = (1,2,-1)$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

b) $\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,-1,1) \\ P_s(2,2,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$

$$\pi : x - z - 2 = 0$$

c) $d(r,s) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \dfrac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ u$

$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = | \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} | = |(2,0,-2)| = 2\sqrt{2}$

Problema 2.4.2 Dados dos planos $\pi : x + y + z = 3$, $\pi' : x + y = 3$ y el punto $A(2,1,6)$

a) Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π'.

b) Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π.

c) Calcula el punto A' simétrico de A respecto del plano π.

Solución:

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ x + y = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,-1,0) \\ P_r(0,3,0) \end{array} \right.$

b) Calculamos la recta $t \perp \pi$ que pase por A:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,1,1) \\ P_t = A(2,1,6) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 6 + \lambda \end{array} \right.$$

Calculamos el punto P de corte de t con π:

$$(2 + \lambda) + (1 + \lambda) + (6 + \lambda) = 3 \Longrightarrow 3\lambda = -6 \Longrightarrow \lambda = -2$$

Sustituyendo en $t \Longrightarrow P(0,-1,4)$

c) P es el punto medio entre A y A'

$$\frac{A + A'}{2} = P \Longrightarrow A' = 2P - A = (0,-2,8) - (2,1,6) = (-2,-3,2)$$

2.4.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.4.3 Dadas las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \alpha \\ y = 1 \\ z = -\alpha \end{array} \right.$, s perpendicular a r y el vector $\overrightarrow{v} = (1,1,1)$.

a) Calcula $\overrightarrow{v_r}$ un vector director de r.

b) Calcula un vector $\overrightarrow{u}$ director de s tal que $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v_r}$ es proporcional a $\overrightarrow{v}$.

c) Calcula la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s', siendo $s' \equiv x - 1 = \dfrac{y-1}{-2} = z$

Solución:

a) $\overrightarrow{v_r} = (1, 0, -1)$

b) $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, 1)$

c) $r : \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1, 0, -1) \\ P_r(1, 1, 0) \end{cases}, \; s' : \begin{cases} \overrightarrow{v_{s'}} = (1, -2, 1) \\ P_{s'}(1, 1, 0) \end{cases}$

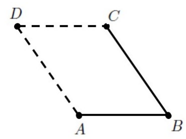
Como $P_r(1, 1, 0) = P_{s'}(1, 1, 0)$ las dos rectas tienen un punto en común y como Rango$\begin{pmatrix} \overrightarrow{v_r} = (1, 0, -1) \\ \overrightarrow{v_{s'}} = (1, -2, 1) \end{pmatrix} =$ $2 \Longrightarrow r$ y s' se cortan.
Calculamos el plano π que las contiene:

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1, 0, -1) \\ \overrightarrow{v_{s'}} = (1, -2, 1) \\ P_r(1, 1, 0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : -2x - 2y - 2z + 4 = 0 \Longrightarrow \pi : x + y + z - 2 = 0$$

Problema 2.4.4 Dados los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (1, 6, 1)$, $C = (-2, -1, 5)$ y $E = (-1, 1, 1)$

a) Calcula ecuación del plano que contiene a los puntos A, B y C.



b) Calcula las coordenadas del punto D para que el polígono $ABCD$ sea un paralelogramo y el área de $ABCD$.

c) Halla ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por E.

Solución:

a)

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0, 6, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (-3, -1, 4) \\ A(1, 0, 1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : 6(4x + 3z - 7) = 0 \Longrightarrow \pi : 4x + 3z - 7 = 0$$

b) $D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC} = (1, 0, 1) + (-3, 7, 4) = (-2, 7, 5)$

$$S = \left| \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \right| = \left| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \right| = |6(4, 0, 3)| = 6\sqrt{25} = 30 \; u^2$$

c) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (4, 0, 3) \\ P_r = E(-1, 1, 1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 1 \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$

2.5. Cantabria

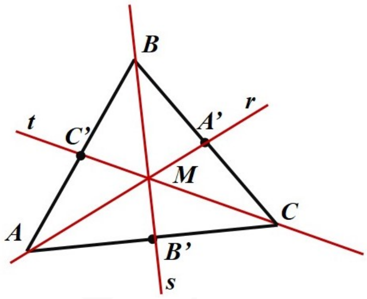
2.5.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.5.1 Se llama mediana de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice. Considere el triángulo de vértices $A = (-1, 2, 3)$, $B = (3, -4, 1)$, $C = (1, -4, 5)$.

a) Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo ABC.

b) Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

Solución:



a) $A' = \dfrac{B+C}{2} = (2, -4, 3)$, $B' = \dfrac{A+C}{2} = (0, -1, 4)$, $C' = \dfrac{A+B}{2} = (1, -1, 2)$.

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AA'} = (2, -4, 3) - (-1, 2, 3) = 3(1, -2, 0) \\ P_r = A(-1, 2, 3) \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 3 \end{array} \right.$$

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{BB'} = (0, -1, 4) - (3, -4, 1) = 3(-1, 1, 1) \\ P_s = B(3, -4, 1) \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - \mu \\ y = -4 + \mu \\ z = 1 + \mu \end{array} \right.$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{CC'} = (1, -1, 2) - (1, -4, 5) = 3(0, 1, -1) \\ P_t = C(1, -4, 5) \end{array} \right. \quad t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -4 + \beta \\ z = 5 - \beta \end{array} \right.$$

b) Corte de r con s:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -1 + \lambda = 3 - \mu \\ y = 2 - 2\lambda = -4 + \mu \\ z = 3 = 1 + \mu \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \mu = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow M(1, -2, 3)$$

Corte de r con t:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -1 + \lambda = 1 \\ y = 2 - 2\lambda = -4 + \beta \\ z = 3 = 5 - \beta \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \beta = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow M(1, -2, 3)$$

Corte de s con t:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 - \mu = 1 \\ y = -4 + \mu = -4 + \beta \\ z = 1 + \mu = 5 - \beta \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \beta = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow M(1, -2, 3)$$

Las tres rectas se cortan en el punto $M(1, -2, 3)$.

Problema 2.5.2 Los puntos $A = (2, 0, 0)$, $B = (-1, 12, 4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice se encuentra en la recta $r : \begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases}$

a) Calcule las coordenadas del tercer vértice C, sabiendo que la recta r es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A y C.

b) Determine el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

c) Calcule el área del triángulo ABC.

Solución:

$$r : \begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 11 - \dfrac{4}{3}\lambda \end{cases} \Longrightarrow$$

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \left(1, 0, -\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{1}{3}(3, 0, -4) \\ P_r(0, 0, 11) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 0 \\ z = 11 - 4\lambda \end{cases}$$

a) Calculamos el plano $\pi \perp r$ tal que $A \in r$:
$\pi : 3x - 4z + \lambda = 0 \overset{A\in\pi}{\Longrightarrow} 6 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -6 \Longrightarrow \pi : 3x - 4z - 6 = 0$
El punto C es el punto de corte de π con r:
$\pi : 9\lambda - 4(11 - 4\lambda) - 6 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2 \Longrightarrow C(6, 0, 3)$

b) $\overrightarrow{AB} = (-1, 12, 4) - (2, 0, 0) = (-3, 12, 4)$ y
$\overrightarrow{AC} = (6, 0, 3) - (2, 0, 0) = (4, 0, 3)$
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{-12 + 0 + 12}{\sqrt{169}\sqrt{25}} = \frac{0}{65} = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

c) $S = \dfrac{1}{2}| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -3 & 12 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} | = \dfrac{1}{2}|(36, 25, -48)| = \dfrac{65}{2}\ u^2$

2.5.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.5.3 Los puntos $A = (0, -1, 1)$, $B = (1, 1, 1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice esta contenido en la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x - y + z = 1$.

a) Calcule la ecuación de la recta r.

b) Calcule las coordenadas del vértice C sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

Solución:

a) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (2, -1, 1) \\ P_r = B = (1, 1, 1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

b) $C \in r \Longrightarrow C(1+2\lambda, 1-\lambda, 1+\lambda)$
$\overrightarrow{AB} = (1,2,0)$ y $\overrightarrow{AC} = (1+2\lambda, 2-\lambda, \lambda)$
$S_t = \dfrac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1+2\lambda & 2-\lambda & \lambda \end{vmatrix}| = \dfrac{1}{2}|(2\lambda, -\lambda, -5\lambda)| = \dfrac{1}{2}|\lambda(2,-1,-5)| = \dfrac{1}{2}|\lambda|\sqrt{30} = 3\sqrt{30} \Longrightarrow$
$|\lambda| = 6 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 6 \Longrightarrow C_1(13,-5,7) \\ \lambda = -6 \Longrightarrow C_1(-11,7,-5) \end{cases}$

Problema 2.5.4 Considera la recta $r : \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z}{1}$ y el plano $\pi : x - 2y - z = -1$.

a) Estudie la posición relativa de recta y plano.

b) Si r corta a π calcule el punto de corte y el ángulo que forman. Si la recta no corta al plano, calcule la distancia entre ambos.

Solución:
$r : \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z}{1} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = -1-\lambda \\ y = -3+2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1,2,1) \\ P_r(-1,-3,0) \end{cases}$

a) Sustituimos r en π:
$$(-1-\lambda) - 2(-3+2\lambda) - \lambda = -1 \Longrightarrow \lambda = 1$$
La recta r y el plano π se cortan en un punto.

b) El punto de corte de r con π es $H(-2,-1,1)$. Y el ángulo
$$\sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi}|}{|\overrightarrow{u_r}| \cdot |\overrightarrow{u_\pi}|} = \frac{|(-1,2,1)\cdot(1,-2,-1)|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{6}{6} = 1 \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

2.6. Castilla La Mancha

2.6.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.6.1 Sean las rectas:
$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = a \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = \mu \\ z = -5\mu \end{cases},$$
donde λ y μ son los parámetros y $a \in \mathbb{R}$.

a) Estudia su posición relativa en función de los valores que toma a.

b) Encuentra razonadamente un plano que contenga a s y que sea paralelo a r.

Solución:
$r : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = a \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,-1,0) \\ P_r(0,0,a) \end{cases}$
$s : \begin{cases} x = -1 \\ y = \mu \\ z = -5\mu \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (0,1,-5) \\ P_s(-1,0,0) \end{cases}$

a) $\overrightarrow{P_sP_r} = (1,0,a)$ $\left[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} \Longrightarrow$

$|A| = 2a + 5 = 0 \Longrightarrow a = -\dfrac{5}{2}$

- Si $a \neq -\dfrac{5}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r$ y s se cruzan.
- Si $a = -\dfrac{5}{2}$:
  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5/2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0$ (las dos rectas están en el mismo plano) y $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \Longrightarrow$ la matriz formada por los dos vectores $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$ tiene rango 2 y, por tanto, las rectas r y s se cortan.

b) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,-1,0) \\ \overrightarrow{u_s} = (0,1,-5) \\ P_s(-1,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$

$\pi : 5x + 10y + 2z + 5 = 0$

Problema 2.6.2 Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$ y $\overrightarrow{v} = (1,0,1)$. Calcula el plano que pasa por el punto $A = (0,0,1)$ y con vector normal el producto vectorial de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

Solución:

$$\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,0,-1)$$

$\pi : x - z + \lambda = 0 \overset{A\in\pi}{\Longrightarrow} 0 - 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$ luego el plano buscado es $\pi : x - z + 1 = 0$.

Problema 2.6.3 Expresa razonadamente en forma de ecuaciones paramétricas la recta intersección de los planos $\pi_1 \equiv x = y + 1$ y $\pi_2 \equiv y + 2z = 5$.

Solución:

$r : \begin{cases} x - y = 1 \\ y + 2z = 5 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 6 - 2\lambda \\ y = 5 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Problema 2.6.4 Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + my = 1$, $\pi_2 \equiv 2x + y = m$ y $\pi_3 \equiv 4x + y + mz = 2$. Estudia su posición relativa según los valores de m. Puedes utilizar los resultados obtenidos en el apartado anterior.

Solución:

Para estudiar la posición relativa de los tres planos estudiamos el sistema:

$$\begin{cases} 2x + my = 1 \\ 2x + y = m \\ 4x + y + mz = 2 \end{cases} \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{array}\right)$$

$|A| = |M_1| = 2m(1-m) = 0 \Longrightarrow m = 0,\ \ m = 1$

☛ Si $m \neq 0$ y $m \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ = nº de incógnitas. Se trata de un sistema compatible determinado. Como la solución es única los tres planos se cortan en un punto.

☛ Si $m = 0$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] =$$

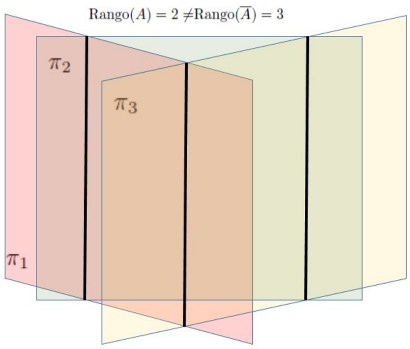
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Los tres planos no tienen puntos comunes, los estudiamos dos a dos:

π_1 con π_2: $\dfrac{2}{2} \neq \dfrac{0}{1} \Longrightarrow \pi_1$ y π_2 se cortan.

π_1 con π_3: $\dfrac{2}{4} \neq \dfrac{0}{1} \Longrightarrow \pi_1$ y π_3 se cortan.

π_2 con π_3: $\dfrac{2}{2} \neq \dfrac{1}{1} \Longrightarrow \pi_2$ y π_3 se cortan.



☛ Si $m = 1$

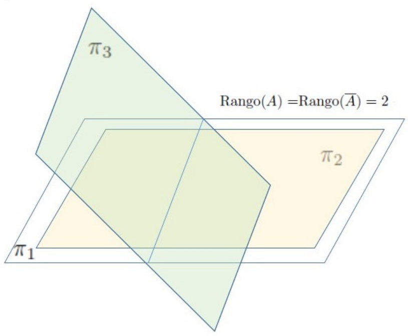
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left[\; F_1 = F_2 \;\right] \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Los tres planos tienen infinitos puntos comunes, los estudiamos dos a dos:

π_1 con π_2: $\dfrac{2}{2} = \dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{1} \Longrightarrow \pi_1$ y π_2 coinciden.

π_1 con π_3: $\dfrac{2}{4} \neq \dfrac{1}{1} \Longrightarrow \pi_1$ y π_3 se cortan.

π_2 con π_3: $\dfrac{2}{4} \neq \dfrac{1}{1} \Longrightarrow \pi_2$ y π_3 se cortan.



2.6.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.6.5 Sea el punto $A = (1, 0, 1)$ y el plano $\pi \equiv x + y + z = 8$.

a) Calcula la recta perpendicular a π y que pasa por A. ¿En que punto se cortan la recta y el plano?

b) Obtén el punto de la recta anterior distinto de A que dista de π igual que A, es decir, el punto simétrico de A con respecto a π.

Solución:

a) sea $r \perp \pi$ tal que $A \in r$:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, 1, 1) \\ P_r = A(1, 0, 1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

b) Para calcular A' punto de corte de r con π sustituimos r en π:

$$(1 + \lambda) + \lambda + (1 + \lambda) = 8 \Longrightarrow \lambda = 2 \Longrightarrow A'(3, 2, 3)$$

El punto A' es el punto medio entre A y el A'' que buscamos:

$$\frac{A + A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A' - A = (6, 4, 6) - (1, 0, 1) = (5, 4, 5)$$

Problema 2.6.6 Sea el plano $\pi \equiv x - 3y + z = 0$ y los puntos $A = (0, 0, -1)$ y $B = (1, 1, 1)$. Obtén el plano perpendicular a π y que contiene a A y B.

Solución:

$$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = (1, -3, 1) \\ \overrightarrow{AB} = (1, 1, 2) \\ A = (0, 0, -1) \end{cases} \Longrightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x & y & z + 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi' : -7x - y + 4z + 4 = 0 \Longrightarrow \pi' : 7x + y - 4z = 4$$

Problema 2.6.7 Sea el tetraedro cuyos vértices son los puntos $A = (a, 0, 1)$, $B = (1, 3, 0)$, $C = (0, 1, 0)$ y $D = (1, 1, 1)$, con $a \in \mathbb{R}$ Halla los valores de a para que el volumen de dicho tetraedro sea 1.

Solución:

Sean $\overrightarrow{AB} = (1 - a, 3, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-a, 1, -1)$ y $\overrightarrow{AD} = (1 - a, 1, 0)$

$$V_T = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right| = \frac{1}{6}\left| \begin{vmatrix} 1 - a & 3 & -1 \\ -a & 1 & -1 \\ 1 - a & 1 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6}|2a - 1| = 1 \Longrightarrow$$

$$|2a - 1| = 6 \Longrightarrow \begin{cases} 2a - 1 = 6 \Longrightarrow a = \dfrac{7}{2} \\ \\ 2a - 1 = -6 \Longrightarrow a = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

2.7. Castilla León

2.7.1. Modelo

Problema 2.7.1 Dada la recta $r : x + 2 = y = z - 2$ y el plano $\pi : x - z + 2 = 0$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y π.

b) Calcular el punto simétrico respecto de π del punto de r $(-2, 0, 2)$ y hallar la recta que es simétrica de r respecto del plano π.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P_r(-2,0,2) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{array} \right.$$

a) Sustituyendo r en $\pi \Longrightarrow (-2+\lambda) + 0(\lambda) - (2+\lambda) + 2 = 0 \Longrightarrow -2 = 0$ lo que es imposible y, por tanto, la recta r y el plano π no tienen ningún punto en común y son paralelos. $(r \parallel \pi)$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi / P(-2, 0, 2) \in t$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,0,-1) \\ P_t = P(-2,0,2) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 2 - \lambda \end{array} \right.$$

- Calculamos el punto P' de corte de t y π

$$-2 + \lambda - (2 - \lambda) + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow P'(-1, 0, 1)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el simétrico P'' buscado

$$\frac{P + P''}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P = (-2, 0, 2) - (-2, 0, 2) = (0, 0, 0)$$

Como la recta $r \parallel \pi$ la recta simétrica h de r respecto de π tiene que ser paralela a $r \Longrightarrow \overrightarrow{u_h} = \overrightarrow{u_r}$ y tenemos

$$h : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_h} = \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P_h = P''(0,0,0)) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 2.7.2 Dada la recta $r : x - 1 = \dfrac{y+1}{2} = z - 1$ y el plano $\pi : x - y + z = 0$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y π.

b) Calcular la distancia del plano π al punto de la recta r, $(1, -1, 1)$ y hallar el plano paralelo a π situado a la misma distancia de r que π.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,1) \\ P_r(1,-1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right. \text{ y } \overrightarrow{u_\pi} = (1,-1,1)$$

a) Sustituyendo r en $\pi \Longrightarrow (1+\lambda) - (-1+2\lambda) + (1+\lambda) = 0 \Longrightarrow 3 = 0$ lo que es imposible y, por tanto, la recta r y el plano π no tienen ningún punto en común y son paralelos. $(r \parallel \pi)$

b)

$$d(P,\pi)=\frac{|1+1+1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\ u$$

Sea $\pi':x-y+z+m=0$ el plano que buscamos. Tenemos $d(r,\pi')=d(\pi,\pi')=\sqrt{3}$

$$d(r,\pi')=d(P,\pi')=\frac{|1+1+1+m|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{|3+m|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\Longrightarrow |3+m|=3$$

$$|3+m|=3\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}3+m=3\Longrightarrow m=0\Longrightarrow \pi_1':x-y+z=0\equiv\pi \text{ no vale}\\ 3+m=-3\Longrightarrow m=-6\Longrightarrow \pi':x-y+z-6=0\end{array}\right.$$

2.7.2. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.7.3 Se pide:

a) Dada la recta $r\equiv\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{4}$ y el plano $\pi\equiv 2x+y+mz=0$ calcule m para que la recta y el plano sean perpendiculares.

b) Calcule el plano perpendicular a los planos $\pi\equiv x+y+z=1$ y $\pi_1\equiv x-y+z=2$, que pasa por el punto (1,2,3).

Solución:

a) $\overrightarrow{u_r}=k\overrightarrow{u_\pi}\Longrightarrow (2,1,4)=k(2,1,m)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}k=1\\ m=4\end{array}\right.$

b) Los dos planos se cortan en una recta ya que $\dfrac{1}{1}\neq\dfrac{1}{-1}$.
El vector normal al plano $\pi'\perp\pi$ y $\pi_1\Longrightarrow$
$\overrightarrow{u_{\pi'}}=\overrightarrow{u_\pi}\times\overrightarrow{u_{\pi_1}}=\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ 1&1&1\\ 1&-1&1\end{array}\right|=2(1,0,-1)\Longrightarrow$
$\pi':x-z+\lambda=0\overset{(1,2,3)\in\pi'}{\Longrightarrow}1+0-3+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=2\Longrightarrow$

$$\pi':x-z+2=0$$

Problema 2.7.4 Considere el punto $P=(2,2,1)$ y el plano $\pi\equiv 2x+3y-3z+6=0$.

a) Halle la recta que pasa por P y es perpendicular a π.

b) Calcule la distancia del punto $Q=(2,2,-2)$ al plano π.

Solución:

a) $r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{u_\pi}=(2,3,-3)\\ P_r=P=(2,2,1)\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=2+2\lambda\\ y=2+3\lambda\\ z=1-3\lambda\end{array}\right.$

b) $d(Q,\pi)=\dfrac{|4+6+6+6|}{\sqrt{4+9+9}}=\dfrac{22}{\sqrt{22}}=\sqrt{22}\ u$

2.7.3. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.7.5 Se pide:

a) Calcule el plano que pasa por el punto $(1, 0, 1)$ y es paralelo a los vectores $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{v} = (1, 2, 3)$.

b) Calcule el plano paralelo a $3x + 2y + 2z + 1 = 0$ que pasa por el punto $(1, 2, 3)$.

Solución:

a) $$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (1,1,1) \\ \overrightarrow{v} = (1,2,3) \\ P(1,0,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right| = x - 2y + z - 2 = 0$$

b) $$\pi' : 3x + 2y + 2z + \lambda = 0 \overset{(1,2,3)\in\pi'}{\Longrightarrow} 3 + 4 + 6 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -13 \Longrightarrow$$

$$\pi' : 3x + 2y + 2z - 13 = 0$$

Problema 2.7.6 Se pide:

a) Encuéntrense las ecuaciones de la recta que está contenida en el plano $\alpha \equiv x - y = 0$, es paralela al plano $\beta \equiv 2x - 3y + z = 4$ y pasa por el punto $P = (1, 1, 3)$.

b) Hállese la ecuación del plano que es paralelo a $r \equiv x - 1 = y + 2 = \dfrac{z-1}{2}$ y pasa por los puntos $A = (0, 3, 1)$ y $B = (-2, 1, -1)$.

Solución:

a) $\overrightarrow{u_s} \perp \overrightarrow{u_\alpha}$ y $\overrightarrow{u_s} \perp \overrightarrow{u_\beta} \Longrightarrow \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\alpha} \times \overrightarrow{u_\beta}$

$$\overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{array} \right| = -(1, 1, 1)$$

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,1,1) \\ P_s = P = (1,1,3) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{array} \right.$$

b) $$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,2) \\ \overrightarrow{AB} = (-2,-2,-2) = -2(1,1,1) \\ A = (0,3,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x & y-3 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = -x + y - 3 = 0$$

$$\pi : x - y + 3 = 0$$

2.8. Cataluña

2.8.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.8.1 Sea la recta r definida por la siguiente expresión:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{array} \right.$$

a) Determine la posición relativa de la recta r respecto al plano $\pi : x - 2y + 4z - 4 = 0$. Si es paralela, calcula la distancia de r a π, y si es secante, calcula el punto de corte.

b) Calcule la ecuación de la recta s perpendicular al plano π y que corta la recta r en un punto P, cuya primera coordenada es 5 veces mayor que la segunda.

Solución:

a) Sustituyendo r en $\pi \Longrightarrow (2+\lambda) - 2(-1+3\lambda) + 4(3+\lambda) - 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = 12 \Longrightarrow r$ y π son secantes. Para calcular el punto de corte A sustituimos λ en $r \Longrightarrow A(14, 35, 15)$.

b) $s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, -2, 4) \\ P_s(2+\lambda, -1+3\lambda, 3+\lambda) \end{array} \right.$ y $2 + \lambda = 5(-1+3\lambda) \Longrightarrow \lambda = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow P_s\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$ luego la recta s es

$$s : \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{5}{2} + t \\ \\ y = \dfrac{1}{2} - 2t \\ \\ z = \dfrac{7}{2} + 4t \end{array} \right.$$

2.8.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.8.2 El mástil que sostiene la lona de la carpa de un circo se sitúa perpendicularmente sobre el plano de un suelo cuya ecuación es $\pi : x - z = 6$. Se sabe que la cúpula de la carpa (el punto más elevado por el que pasa el mástil) está en el punto de coordenadas $P = (30, 1, 0)$.

a) Calcule la ecuación paramétrica de la recta que contiene el mástil.

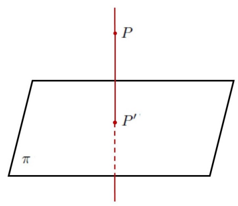
b) Calcule las coordenadas del punto de contacto del mástil con el suelo, y la longitud del mástil.

Solución:

a) Tenemos:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, 0, -1) \\ P_r = P(30, 1, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 30 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{array} \right.$$



b) Calculamos P', punto de corte de r con π, Sustituyendo r en $\pi \Longrightarrow (30+\lambda)+0(1)-(-\lambda)-6 = 0 \Longrightarrow \lambda = -12 \Longrightarrow r$ y π son secantes. Para calcular el punto de corte A sustituimos λ en $r \Longrightarrow P'(18, 1, 12)$.

La altura del mástil: $d(P, \pi) = \dfrac{|30 + 0 - 0 - 6|}{\sqrt{1 + 0 + 1}} = \dfrac{24}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{2}\ u$

2.9. Comunidad Valenciana

2.9.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.9.1 Dadas las rectas $r: \left\{\begin{array}{l} x=z-1 \\ y=2-3z \end{array}\right.$, $s: \left\{\begin{array}{l} x=4-5z \\ y=4z-3 \end{array}\right.$.

a) Indicar justificadamente la posición relativa de r y s.

b) Hallar la ecuación de la recta l que pasa por el origen y corta a r y s.

Solución:

a) $r: \left\{\begin{array}{l} x=z-1 \\ y=2-3z \end{array}\right. \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,-3,1) \\ P_r(-1,2,0) \end{array}\right.$

$s: \left\{\begin{array}{l} x=4-5z \\ y=4z-3 \end{array}\right. \Longrightarrow s: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(-5,4,1) \\ P_s(4,-3,0) \end{array}\right.$ y

$\overrightarrow{P_rP_s}=(5,-5,0)=5(1,-1,0)$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\left|\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & -4 & 1 \end{array}\right|=-3\neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

b) La recta l la encontramos como corte de dos planos:

$$\pi_1: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,-3,1) \\ \overrightarrow{OP_r}=(-1,2,0) \\ O(0,0,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi_1: \left|\begin{array}{ccc} x & y & z \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right|=2x+y+z=0$$

$$\pi_2: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(-5,4,1) \\ \overrightarrow{OP_s}=(4,-3,0) \\ O(0,0,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi_2: \left|\begin{array}{ccc} x & y & z \\ -5 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{array}\right|=3x+4y-z=0$$

$$l: \left\{\begin{array}{l} 2x+y+z=0 \\ 3x+4y-z=0 \end{array}\right.$$

Problema 2.9.2 Dados los planos $\pi_1: 2x-y-z+4=0$ y $\pi_2: \left\{\begin{array}{l} x=-1+\alpha \\ y=1+\alpha+\beta \\ z=\alpha-\beta \end{array}\right.$, y la recta $r: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

a) Calcular la posición relativa de π_1 y π_2.

b) Calcular el punto P' que es simétrico al punto $P=(1,0,0)$ respecto del plano π_1.

c) Calcular, si existe, el punto de intersección de π_1 y r.

Solución:

$$\pi_2: \left\{\begin{array}{l} x=-1+\alpha \\ y=1+\alpha+\beta \\ z=\alpha-\beta \end{array}\right. \Longrightarrow \pi_2: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u}=(1,1,1) \\ \overrightarrow{v}=(0,1,-1) \\ P_{\pi_2}(-1,1,0) \end{array}\right.$$

$$\pi_2: \left|\begin{array}{ccc} x+1 & y-1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right|=-2x+y+z-3=0$$

a) Tenemos $\pi_1 : 2x - y - z + 4 = 0$ y $\pi_2 : -2x + y + z - 3 = 0 \Longrightarrow$
$\dfrac{2}{-2} = \dfrac{-1}{1} = \dfrac{-1}{1} \neq \dfrac{4}{-3} \Longrightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$ (son paralelos)

b) Seguimos el siguiente método:

☛ Calculamos una recta $t \perp \pi_1$ tal que $P \in t$:

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} = (2, -1, -1) \\ P_t = P = (1, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

☛ Calculamos el punto de corte A de t con π_1:

$$2(1 + 2\lambda) - (-\lambda) - (-\lambda) + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow A(-1, 1, 1)$$

☛ El punto A es el punto medio entre P y el que buscamos P':

$$\frac{P + P'}{2} = A \Longrightarrow P' = 2A - P = (-2, 2, 2) - (1, 0, 0) = (-3, 2, 2)$$

c) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, -1) \\ P_r(1, 0, 2) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$

Sustituyendo en π_1:

$$2(1 + \lambda) - (2\lambda) - (2 - \lambda) + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = -4$$

El punto intersección H de r con π_1 se calcula sustituyendo el valor de λ en r:

$$H(-3, -8, 6)$$

2.9.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.9.3 Dados los puntos $A = (2, 0, 0)$ y $B = (0, 1, 0)$, y la recta $s : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = z$

a) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B.

b) Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r.

c) Calcular la distancia del punto A a la recta s.

Solución:

a) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (-2, 1, 0) \\ P_r = B(0, 1, 0)) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 0 \end{cases}$

b) Tenemos $s : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = z \Longrightarrow s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2, 3, 1) \\ P_s(1, 1, 0) \end{cases}$

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-2, 1, 0) \\ \overrightarrow{u_s} = (2, 3, 1) \\ P_s(1, 1, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = x + 2y - 8z - 3 = 0$$

c) $\overrightarrow{AP_s} = (1,1,0) - (2,0,0) = (-1,1,0)$, $|\overrightarrow{u_s}| = \sqrt{14}$ y

$$\left|\overrightarrow{AP_s} \times \overrightarrow{u_s}\right| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}| = |(1,1,-5)| = \sqrt{27}$$

$$d(A,s) = \frac{\left|\overrightarrow{AP_s} \times \overrightarrow{u_s}\right|}{|\overrightarrow{u_s}|} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{42}}{14} \simeq 1,3887\ u$$

Problema 2.9.4 Dados los puntos $A = (2,1,-2)$ y $B = (3,2,3)$, y el plano π definido por $2x + 2y + z = 3$, obtener:

a) El punto de corte C entre el plano π y la recta perpendicular aπ que pasa por B.

b) El área del triángulo cuyos vértices son A, B y C.

Solución:

a) calculamos $r \perp \pi$ con $B \in r \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (2,2,1)$:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,2,1) \\ P_r = (3,2,3) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{array} \right.$$

Sustituyendo en π:

$$2(3 + 2\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + (3 + \lambda) = 3 \Longrightarrow \lambda = -\frac{10}{9} \Longrightarrow C\left(\frac{7}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{17}{9}\right)$$

b) $\overrightarrow{AB} = (3,2,3) - (2,1,-2) = (1,1,5)$ y $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{7}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{17}{9}\right) - (2,1,-2) = \left(-\frac{11}{9}, -\frac{11}{9}, \frac{35}{9}\right)$

$$S_t = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 5 \\ -11/9 & -11/9 & 35/9 \end{vmatrix}| =$$

$$\frac{1}{2}|(10,-10,0)| = 5|(1,-1,0)| = 5\sqrt{2}\ u$$

2.10. Extremadura

2.10.1. Modelo

Problema 2.10.1 Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{v} = (-3,-2,a)$ y $\overrightarrow{w} = (a+1,1,-1)$.

a) ¿Qué valores puede tomar a para que los tres vectores sean linealmente independientes?

b) Calcule los vectores paralelos al vector $\overrightarrow{u}$ de módulo 7.

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & a \\ a+1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = a^2 - 1 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$

Los tres vectores son linealmente independientes $\forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

b) $\overrightarrow{t} = \dfrac{7\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} = \left(\dfrac{7}{\sqrt{2}}, \dfrac{7}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\dfrac{7\sqrt{2}}{2}, \dfrac{7\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ también sería válido el vector $\left(-\dfrac{7\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{7\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

Problema 2.10.2 Dadas las rectas: $r: \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ y $s: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{-1}$,

a) Calcule el plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

b) Calcule el ángulo que forman las dos rectas.

Solución:

$$r: \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (0, 1, 1) \\ P_r(2, 3, 0) \end{cases}$$

$$s: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-1} \Longrightarrow s: \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2, 3, -1) \\ P_s(-1, 0, 2) \end{cases}$$

a) $\pi: \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2, 3, -1) \\ \overrightarrow{u_r} = (0, 1, 1) \\ P_r(2, 3, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(2x - y + z - 1) = 0$

$$\pi: 2x - y + z - 1 = 0$$

b) $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r}|\,|\overrightarrow{u_s}|} = \dfrac{|0 + 3 - 1|}{\sqrt{14}\sqrt{2}} = \dfrac{2}{2\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{7} \Longrightarrow \alpha = 67^\circ 47' 33''$

2.10.2. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.10.3 Dados el plano π de ecuación $x + 2y - z = 0$ y la recta de ecuaciones $r: \begin{cases} y - 2x = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$.

a) Hallar el punto de intersección del plano π y la recta r.

b) Calcular la distancia del origen a la recta r.

Solución:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ P_r(0, 1, 0) \end{cases}$$

a) Sustituimos r en $\pi \Longrightarrow \lambda + 2(1 + 2\lambda) - \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -\dfrac{1}{2}$ y sustituyendo este valor en r obtenemos el punto de corte M de r con π: $M\left(-\dfrac{1}{2}, 0, -\dfrac{1}{2}\right)$

b) $\overrightarrow{OP_r} = (0, 1, 0)$

$\left|\overrightarrow{OP_r} \times \overrightarrow{u_r}\right| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}| = |(1, 0, -1)| = \sqrt{2}$

$$d(O,r)=\frac{\left|\overrightarrow{OP_r}\times\overrightarrow{u_r}\right|}{|\overrightarrow{u_r}|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ u$$

Problema 2.10.4 Dada la recta r definida por

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{1}$$

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r.

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}x=1+2\lambda\\ y=-1+3\lambda\\ z=2+\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,3,1)\\ P_r(1,-1,2)\end{array}\right.$$

a) $\pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{OP_r}=(1,-1,2)\\ \overrightarrow{u_r}=(2,3,1)\\ P_r(1,-1,2)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi_1:\left|\begin{array}{ccc}x-1 & y+1 & z-2\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{array}\right|=0\Longrightarrow$

$$\pi_1:-7x+3y+5z=0$$

b) $\pi_2\perp r\Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi_2}}=\overrightarrow{u_r}=(2,3,1)\Longrightarrow \pi_2:2x+3y+z+\lambda=0\overset{O\in\pi_2}{\Longrightarrow}0+0+0+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=0\Longrightarrow \pi_2:2x+3y+z=0$

2.10.3. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.10.5 Dados los puntos $A=(0,0,2)$ y $B=(1,1,0)$ y la recta $r:\left\{\begin{array}{l}x=1\\ y=z\end{array}\right.$. Calcular un punto $P\in r$ para que el triángulo ABP tenga un ángulo recto en el punto A.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}x=1\\ y=\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow P(1,\lambda,\lambda)$$

$\overrightarrow{AP}=(1,\lambda,\lambda)-(0,0,2)=(1,\lambda,\lambda-2)$

$\overrightarrow{AB}=(1,1,0)-(0,0,2)=(1,1,-2)$

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AP}\Longrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=0\Longrightarrow(1,1,-2)\cdot(1,\lambda,\lambda-2)=1+\lambda-2(\lambda-2)=0\Longrightarrow\lambda=5$

Luego $P(1,5,5)$

Problema 2.10.6 Sean las rectas: $r:\left\{\begin{array}{l}x=2-2y\\ z=1-x\end{array}\right.$ y $s:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$

a) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s.

b) Calcular la distancia entre las dos rectas.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}x=2-2\lambda\\ y=\lambda\\ z=-1+2\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-2,1,2)\\ P_r(2,0,-1)\end{array}\right.$$

$$s:\left\{\begin{array}{l}x=1+2\lambda\\ y=3+\lambda\\ z=-1-2\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(2,1,-2)\\ P_s(1,3,-1)\end{array}\right.$$

$\overrightarrow{P_rP_s}=(1,3,-1)-(2,0,-1)=(-1,3,0)$

a) $\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow r$ y s se cruzan.

b) $\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right]\right| = 4$

$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = | \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} | = | - 4(1,0,1)| = 4\sqrt{2}$

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ u$$

2.11. Galicia

2.11.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.11.1 Se pide:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $P(1,-1,0)$ y es perpendicular a la recta $r : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$.

b) Calcule los dos puntos de la recta $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$, cuya distancia al plano $\pi : x - 1 = 0$ es igual a 2.

Solución:

a) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,0,0) \\ P_r(1,-1,0) \end{cases}$ como $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \pi : x + \lambda = 0 \overset{P\in\pi}{\Longrightarrow} 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow \pi : x - 1 = 0$

b) Sea $Q(\lambda,\lambda,\lambda) \in r$:

$$d(Q,\pi) = \frac{|\lambda - 1|}{\sqrt{1}} = 2 \Longrightarrow |\lambda - 1| = 2$$

- ☛ $\lambda - 1 = 2 \Longrightarrow \lambda = 3 \Longrightarrow Q_1(3,3,3)$
- ☛ $\lambda - 1 = -2 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow Q_2(-1,-1,-1)$

Problema 2.11.2 Se pide:

a) Halle los valores de k y de m que hacen que los puntos $A(k,3,m)$, $B(2,0,2)$ y $C(k,2,0)$ estén alineados.

b) Estudie la posición relativa de las rectas $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{2}$ y $s : \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z+1}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC} \Longrightarrow (2-k, -3, 2-m) = \lambda(0, -1, -m) \Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} 2-k=0 \\ -3=-\lambda \\ 2-m=-\lambda m \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} k=2 \\ m=-1 \\ \lambda=3 \end{array}\right.$$

b) $r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,3,2) \\ P_r(1,-1,2) \end{array}\right.$, $s: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(3,2,3) \\ P_s(-2,-3,-1) \end{array}\right.$ y $\overrightarrow{P_sP_r}=(3,2,3)$

$$\left[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \left|\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{array}\right| = 0$$

Rango$\left(\begin{array}{c} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{array}\right)$ =Rango$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{array}\right) = 2 \Longrightarrow r$ y s se cortan.

$$\left\{\begin{array}{l} x=1+2\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=2+2\lambda \end{array}\right. , \quad s: \left\{\begin{array}{l} x=-2+3\mu \\ y=-3+2\mu \\ z=-1+3\mu \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=1+2\lambda=-2+3\mu \\ y=-1+3\lambda=-3+2\mu \\ z=2+2\lambda=-1+3\mu \end{array}\right. , \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda=0 \\ \mu=1 \end{array}\right. \Longrightarrow P(1,-1,2)$$

2.11.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.11.3 Se pide:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π queque contiene a la recta $r: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+3}{1}$ y pasa por el punto $P(0,1,0)$.

b) Calcule el punto simétrico de $P(11,-14,13)$ con respecto al plano $\pi: 3x-8y+7z+8=0$.

Solución:

a) $r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(3,2,1) \\ P_r(-1,-2,-3) \end{array}\right.$ y $\pi: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(3,2,1) \\ \overrightarrow{P_rP}=(0,1,0)-(-1,-2,-3)=(1,3,3) \\ P(0,1,0) \end{array}\right. \Longrightarrow$

$$\pi: \left|\begin{array}{ccc} x & y-1 & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow \pi: 3x-8y+7z+8=0$$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

☛ Calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $P \in t$:
$t: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_\pi}=(3,-8,7) \\ P_t=P(11,-14,13) \end{array}\right. \Longrightarrow t: \left\{\begin{array}{l} x=11+3\lambda \\ y=-14-8\lambda \\ z=13+7\lambda \end{array}\right.$

☛ Calculamos el punto P' de corte de t con π:
$3(11+3\lambda)-8(-14-8\lambda)+7(13+7\lambda)+8=0 \Longrightarrow \lambda=-2 \Longrightarrow P'(5,2,-1)$

☛ El punto P' es el punto medio entre P y el P'' buscado:
$\dfrac{P+P''}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P = (10, 4, -2) - (11, -14, 13) \Longrightarrow$

$$P''(-1, 18, -15)$$

Problema 2.11.4 Estudie la posición relativa de la recta $r: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{k} = \dfrac{z}{3}$ y el plano $\pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función de los parámetros k y a. Luego, si es posible, diga cuándo r es perpendicular a π.

Solución:

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, k, 3) \\ P_r(-1, 1, 0) \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 + k\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}.$$

Sustituyendo en π:
$a(-1+\lambda) + 4(1+k\lambda) + 3a(3\lambda) + 2 = 0 \Longrightarrow 2(5a + 2k)\lambda = a - 6$

- ☛ Si $5a + 2k = 0$ y $a = 6 \Longrightarrow \ll 0 = 0 \gg \Longrightarrow r \subset \pi$ (la recta está contenida en el plano)
- ☛ Si $5a + 2k = 0$ y $a \neq 6 \Longrightarrow \ll 0 = a - 6 \gg \Longrightarrow r \parallel \pi$ (la recta es paralela al plano)
- ☛ Si $5a + 2k \neq 0 \Longrightarrow r$ y π se cortan en un punto

$r \perp \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} = m\overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow (1, k, 3) = m(a, 4, 3a) \Longrightarrow ma = 1,\ k = 4m,\ 3 = 3ma \Longrightarrow m = \dfrac{1}{a} = \dfrac{k}{4} \Longrightarrow ka = 4.$

2.12. Islas Baleares

2.12.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.12.1 Del paralelogramo (cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos) $ABCD$, se conocen los vértices consecutivos $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$ y $C(4, 3, -2)$.

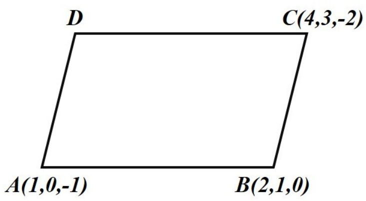
a) Calcule el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

b) Encuentre las coordenadas del punto medio, M, del segmento AC.

c) Encuentre las coordenadas del vértice D.

d) Calcule el área del paralelogramo $ABCD$.

Solución:



a) $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ y $\overrightarrow{AC} = (3,3,-1)$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{3+3-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{19}} = \frac{5}{\sqrt{57}} = \frac{5\sqrt{57}}{57}$$

b) $M = \dfrac{A+C}{2} = \dfrac{(5,3,-3)}{2} = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$

c) $D = A + \overrightarrow{BC} = (1,0,-1) + (2,2,-2) = (3,2,-3)$

d) $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ y $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = (2,2,-2)$

$$S = \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}| = |4(-1,1,0)| = 4\sqrt{2} \simeq 5,65685\ u^2$$

Problema 2.12.2 Dadas las rectas

$$r : \left\{\begin{array}{l} x+y=3 \\ 2x-z=1 \end{array}\right. \quad , \quad s : \left\{\begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -4-\lambda \end{array}\right. \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

a) Encuentre una ecuación vectorial para la recta r,

b) Encuentre la posición relativa de las rectas r y s.

c) Encuentre la ecuación general del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto $P(2,0,-1)$

d) Encuentre la ecuación general del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s.

Solución:

a) $r : \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3-\lambda \\ z = -1+2\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,-1,2) \\ P_r(0,3,-1) \end{array}\right. \Longrightarrow$

$$r : (x,y,z) = (0,3,-1) + \lambda(1,-1,2)$$

b) $s : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,-1,-1) \\ P_s(1,0,-4) \end{array}\right.$ y $\overrightarrow{P_rP_s} = (1,-3,-3)$

$\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Longrightarrow r$ y s se cruzan.

c) $\pi \perp r \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} = (1,-1,2) \Longrightarrow \pi : x-y+2z+\lambda = 0 \stackrel{P\in\pi}{\Longrightarrow} 2+0-2+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \pi : x-y+2z = 0$

d) $\pi' : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,-1,2) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,-1,-1) \\ P_s(1,0,-4) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x-1 & y & z+4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3(x+y-1) = 0 \Longrightarrow \pi' : x+y-1 = 0$

2.12.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.12.3 Sea a un parámetro real. Considere el plano $\pi \equiv 3x - 2y - z = 4$,el punto $P(1,1,0)$ y la recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ x - az = 1 \end{array} \right.$$

En cada caso, si existe, obtenga el valor del parámetro a para el cual:

a) el punto P pertenece a la recta r.

b) la recta r y el plano π se cortan en un único punto.

c) la recta r está contenida en el plano π.

d) la recta r es perpendicular al plano π.

Solución:

a) $P \in r \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 - 1 = 0 \\ 1 - a \cdot 0 = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow P \in r \ \ \forall a \in \mathbb{R}$. Es decir, P está en la recta r para cualquier valor real de a.

b) $r : \left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ x - az = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + a\lambda \\ y = 1 + a\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$

Sustituyendo en π: $3(1 + a\lambda) - 2(1 + a\lambda) - (\lambda) = 4 \Longrightarrow (a - 1)\lambda = 3$

Para que se corten en un punto $a \neq 1$.

c) Para que $r \subset \pi$ tiene que ser $\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\pi}$ y $P_r \in \pi$:

$\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = 0 \Longrightarrow (a, a, 1) \cdot (3, -2, -1) = 3a - 2a - 1 = 0 \Longrightarrow a = 1$, pero para este valor la recta no tiene puntos de corte con π, luego r no estará contenida en el plano π para cualquier valor de a. En este caso $r \parallel \pi$.

d) $\overrightarrow{u_r} = m\overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow (a, a, 1) = m(3, -2, -1) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 3m \\ a = -2m \\ 1 = -m \end{array} \right. \Longrightarrow$ no hay solución posible.

La recta r y el plano π no pueden ser verticales para cualquier valor de a.

Problema 2.12.4 Dados los puntos $A(1,1,1)$, $B(0,0,-2)$, $C(2,-1,0)$, $D(-1,2,-1)$ y $E(0,0,0)$.

a) Compruebe que los puntos A, B y C determinan un único plano, π.

b) Averigüe si el triángulo de vértices A, B y C es rectángulo en el vértice A.

c) Halle el ángulo que forma la recta que pasa por los puntos A y D con el plano π.

d) Calcule el volumen del tetraedro definido por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -3)$ y $\overrightarrow{AC} = (1, -2, -1)$ no son proporcionales, el rango de los dos vectores es 2. Son linealmente independientes y, por tanto, determinan un único plano:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1, -1, -3) \\ \overrightarrow{AC} = (1, -2, -1) \\ A(1, 1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : -5x - 4y + 3z + 6 = 0$$

b) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
$(-1,-1,-3)\cdot(1,-2,-1) = -1+2+3 = 4 \neq 0 \Longrightarrow$ los vectores no son perpendiculares y no se trata de un triángulo rectángulo con vértice recto en A.

c) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AD} = (-2,1,-2) \\ A(1,1,1) \end{cases}$ y $\overrightarrow{u_\pi} = (-5,-4,3)$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_\pi}|}{|\overrightarrow{u_r}|\cdot|\overrightarrow{u_\pi}|} = \frac{|(-2,1,-2)(-5,-4,3)|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{50}} =$$

$$\frac{|10-4-6|}{15\sqrt{2}} = 0 \Longrightarrow \alpha = 0^\circ$$

d) $V_T = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right| = \dfrac{1}{6}|\begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}| = 0$
Los tres vectores no definen un tetraedro, definen un único plano. Los cuatro puntos son coplanarios.
Este resultado era esperable por el apartado anterior.

2.13. Islas Canarias

2.13.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.13.1 En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r : \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 4y - 3z = -1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + 4y + 12 = 0 \\ 6y + z + 13 = 0 \end{cases}$$

.

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s

b) Calcula la ecuación del plano π paralelo a la recta s que contiene a la recta r.
Halla el punto de corte de dicho plano π con la recta:
$t : \dfrac{x+4}{-1} = \dfrac{y-8}{3} = z - 2$

Solución:

$$r : \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 4y - 3z = -1 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 3(2,3,4) \\ P_r(-1,-1,-1) \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x + 4y = -12 \\ 6y + z = -13 \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (4,-1,6) \\ P_s(-4,-2,-1) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{P_sP_r} = (-1,-1,-1) - (-4,-2,-1) = (3,1,0)$
$\left[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right] = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 70 \Longrightarrow r$ y s se cruzan.

b) $\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (4, -1, 6) \\ \overrightarrow{u_r} = (2, 3, 4) \\ P_r(-1, -1, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x+1 & y+1 & z+1 \\ 4 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{array} \right| =$

$$-2(11x + 2y - 7z + 6) = 0 \Longrightarrow \pi : 11x + 2y - 7z + 6 = 0$$

Sea $t : \left\{ \begin{array}{l} x = -4 - \lambda \\ y = 8 + 3\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{array} \right.$ sustituimos en $\pi \Longrightarrow$

$11(-4-\lambda)+2(8+3\lambda)-7(2+\lambda)+6 = 0 \Longrightarrow \lambda = -3$ y sustituyendo en $t \Longrightarrow A(-1, -1, -1)$

Problema 2.13.2 En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones siguientes:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t + 4s \\ y = 1 + s \\ z = 3 - 2t - 5s \end{array} \right. ; \quad r_1 : \frac{x+4}{5} = \frac{y+5}{6} = \frac{z-1}{0}; \quad r_2 : \left\{ \begin{array}{l} 4x + 3y = 7 \\ y + 4z = 5 \end{array} \right.$$

a) Calcula la ecuación de la recta s, perpendicular al plano π y que contiene el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2.

b) ¿Es cierto que el ángulo entre las rectas r_1 y r_2 es menor de 45°? Justifícalo

Solución:

$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (1, 0, -2) \\ \overrightarrow{v} = (4, 1, -5) \\ P(1, 1, 3) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x-1 & y-1 & z-3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \end{array} \right| = 2x - 13y + z + 8 = 0$

$r_1 : \left\{ \begin{array}{l} x = -4 + 5\lambda \\ y = -5 + 6\lambda \\ z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow r_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_1}} = (5, 6, 0) \\ P_{r_1}(-4, -5, 1) \end{array} \right.$

$r_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = -2 + 3\mu \\ y = 5 - 4\mu \\ z = \mu \end{array} \right. \Longrightarrow r_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_2}} = (3, -4, 1) \\ P_{r_2}(-2, 5, 0) \end{array} \right.$

a) Intersección P_t de r_1 y r_2

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -4 + 5\lambda = -2 + 3\mu \\ y = -5 + 6\lambda = 5 - 4\mu \\ z = 1 = \mu \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \mu = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow P_t(1, 1, 1)$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = u_\pi(2, -13, 1) \\ P_t(1, 1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - 13\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right.$$

b) $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{u_{r_1}} \cdot \overrightarrow{u_{r_2}}|}{|\overrightarrow{u_{r_1}}|\,|\overrightarrow{u_{r_2}}|} = \dfrac{|(5, 6, 0) \cdot (3, -4, 1)|}{\sqrt{61}\sqrt{26}} = \dfrac{9}{\sqrt{1586}} \Longrightarrow \alpha = 76^\circ 56' 20''$, claramente superior a 45°.

2.13.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.13.3 Resuelve los siguientes problemas del espacio tridimensional:

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z - 2 = 0 \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{array} \right.$, estudia la posición relativa entre r y s

b) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano $\pi : 2x - y + z - 5 = 0$

Solución:

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z - 2 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (4, -1, -3) \\ P_r(-5, 0, 4) \end{array} \right.$$

$$s : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2, 1, -3) \\ P_s(-1, 1, -1) \end{array} \right.$$

$$P_rP_s = (-1, 1, -1) - (-5, 0, 4) = (4, 1, -5)$$

$\left[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow r$ y s no se cruzan, están en el mismo plano. O se cortan o son paralelas:

$\text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow r$ y s se cortan.

b) $$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (2, -1, 1) \\ \overrightarrow{u_r} = (4, -1, -3) \\ P_r(-5, 0, 4) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x + 5 & y & z - 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$2(2x + 5y + z + 6) = 0 \Longrightarrow \pi : 2x + 5y + z + 6 = 0$$

Problema 2.13.4 En el espacio tridimensional se conocen las ecuaciones de la recta y el plano siguientes: $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} -3x + 2y = 5 \\ -4y + 3z + 7 = 0 \end{array} \right.$ y $\pi \equiv 5x - 6y + 7z + 58 = 0$

a) Sabiendo que la recta r y el plano π se cortan en un punto A, dar la ecuación de la recta s, perpendicular al plano π que pasa por dicho punto A.

b) Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} -3x + 2y = 5 \\ -4y + 3z + 7 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 3(2, 3, 4) \\ P_r(-1, 1, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{array} \right. \text{ y } \overrightarrow{u_\pi} = (5, -6, 7)$$

a) Intersección A de r con π:

$$5(-1 + 2\lambda) - 6(1 + 3\lambda) + 7(-1 + 4\lambda) + 58 = 0 \Longrightarrow \lambda = -2 \Longrightarrow A(-5, -5, -9)$$

$s \perp \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} = (5, 6, 7)$ y $A \in s$:

$$s : \left\{ \begin{array}{l} x = -5 + 5\lambda \\ y = -5 - 6\lambda \\ z = -9 + 7\lambda \end{array} \right.$$

b) $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_\pi}|}{|\overrightarrow{u_r}|\cdot|\overrightarrow{u_\pi}|}=\dfrac{|(2,3,4)\cdot(5,-6,7)|}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{110}}=\dfrac{20}{\sqrt{3190}}\Longrightarrow\alpha=20^\circ 44'20''.$

2.14. La Rioja

2.14.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.14.1 Halla la ecuación de una recta paralela al plano $\pi\equiv x+y+z=0$ y que contenga al punto $P(1,0,1)$. ¿Es única dicha recta? Razona la respuesta.
Solución:
Una recta paralela al plano π sería cualquier recta contenida en un plano $\pi'\parallel\pi$. Si imponemos que $P\in\pi'$ este plano es único, pero habrá infinitas rectas contenidas en este plano π' que se corten en el punto P. Luego la recta buscada no es única.
Obtenemos $\pi':x+y+z+\lambda=0\stackrel{P\in\pi'}{\Longrightarrow}1+0+1+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=-2\Longrightarrow\pi':x+y+z-2=0$
Elegimos un punto cualquiera de este plano $Q(1,1,0)$
La ecuación de una recta $r\subset\pi'$ tal que P y $Q\in r$ será:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{PQ}=(0,1,-1)\\ P_r=P(1,0,1)\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1\\ y=\lambda\\ z=1-\lambda\end{array}\right.\Longrightarrow r\parallel\pi$$

Problema 2.14.2 Determina los valores de los parámetros a, y b para que el plano π contenga a la recta r, donde:

$$\pi\equiv ax+y+z=b,\ \ r\equiv\left\{\begin{array}{l}x+y+z=1\\ -x-2y+z=0\end{array}\right.$$

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}x+y+z=1\\ -x-2y+z=0\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=2-3\lambda\\ y=-1+2\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-3,2,1)\\ P_r(2,-1,0)\end{array}\right.$$

$\pi:ax+y+z=b\Longrightarrow\overrightarrow{u_\pi}=(a,1,1)\perp\overrightarrow{u_r}\Longrightarrow\overrightarrow{u_\pi}\cdot\overrightarrow{u_r}=0\Longrightarrow$
$(a,1,1)\cdot(-3,2,1)=-3a+2+1=0\Longrightarrow a=1\Longrightarrow\pi:x+y+z=b$
Además $P_r(2,-1,0)\in\pi\Longrightarrow 2-1+0=b\Longrightarrow b=1$
Luego $a=1$ y $b=1$ y el plano $\pi:x+y+z=1$.

2.14.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.14.3 Determina según los valores del parámetro real a la posición relativa de la recta

$$\left\{\begin{array}{l}ax+3y-2z=4\\ 2x-y+z=2\end{array}\right.$$

y el plano de ecuación $6x+5y-3z=2$
Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}ax+3y-2z=4\\ 2x-y+z=2\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ a&3&-2\\ 2&-1&1\end{vmatrix}=-(-1,a+4,a+6)\\ P_r(0,8,10)\end{array}\right.$$

$$r:\left\{\begin{array}{l}x=-\lambda\\ y=8+(a+4)\lambda\\ z=10+(a+6)\lambda\end{array}\right.$$

$$6(-\lambda)+5(8+(a+4)\lambda)-3(10+(a+6)\lambda)=2\Longrightarrow(a-2)\lambda=-4$$

Si $a=2\Longrightarrow\ll 0=-4\gg\Longrightarrow$ la recta y el plano no tienen puntos comunes y son paralelos.
Si $a\neq 2\Longrightarrow\lambda=\dfrac{-4}{a-2}\Longrightarrow$ la recta y el plano se cortan en un punto.

Problema 2.14.4 Estudia según los valores del parámetro real a la posición relativa de las rectas siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l}ax+3y-2z=12\\2x+5y-z=6\end{array}\right.\quad\text{y}\quad\left\{\begin{array}{l}x=5+3\lambda\\y=1-\lambda\\z=6+4\lambda\end{array}\right.$$

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}ax+3y-2z=12\\2x+5y-z=6\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\a&3&-2\\2&5&-1\end{vmatrix}=(7,a-4,5a-6)\\P_r(0,0,-6)\end{array}\right.$$

$$s:\left\{\begin{array}{l}x=5+3\lambda\\y=1-\lambda\\z=6+4\lambda\end{array}\right.\Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(3,-1,4)\\P_s(5,1,6)\end{array}\right.\qquad\overrightarrow{P_rP_s}=(5,1,12)$$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\begin{vmatrix}5&1&12\\7&a-4&5a-6\\3&-1&4\end{vmatrix}=24(a-4)=0\Longrightarrow a=4$$

Si $a\neq 4\Longrightarrow r$ y s se cruzan
Si $a=4\Longrightarrow\text{Rango}\begin{pmatrix}\overrightarrow{u_r}\\\overrightarrow{u_s}\end{pmatrix}=\text{Rango}\begin{pmatrix}7&0&14\\3&-1&4\end{pmatrix}=2\Longrightarrow r$ y s se cortan.

2.15. Madrid

2.15.1. Modelo

Problema 2.15.1 Una sonda planetaria se lanza desde el punto $P(1,0,2)$ y sigue una trayectoria rectilínea que pasa por el punto $Q(3,1,0)$ antes de impactar en una zona plana de la superficie del planeta, que tiene por ecuación $\pi\equiv 2x-y+2z+5=0$. Se pide:

a) Calcular las coordenadas del punto de impacto y el coseno del ángulo entre la trayectoria de la sonda y el vector normal al plano π.

b) Sabiendo que la alarma de proximidad se dispara antes de llegar a la superficie cuando la distancia al planeta es 1, determinar en qué punto estará la sonda al sonar la alarma.

Solución:

a) Tenemos:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{PQ}=(2,1,-2)\\P_r=P(1,0,2)\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+2\lambda\\y=\lambda\\z=2-2\lambda\end{array}\right.$$

El punto de impacto es el punto de corte de r con π:
$2(1+2\lambda)-\lambda+2(2-2\lambda)+5=0\Longrightarrow\lambda=11$

Sustituyendo en r tenemos el punto $H(23, 11, -20)$
Si α es el ángulo que forma $\overrightarrow{u_\pi} = (2, -1, 2)$ con $\overrightarrow{u_r} = (2, 1, -2)$
$\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{u_\pi} \cdot \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_\pi}||\overrightarrow{u_r}|} = \dfrac{|4-1-4|}{\sqrt{9}\sqrt{9}} = \dfrac{1}{9}$

b) Un punto genérico de la trayectoria sería $A(1+2\lambda, \lambda, 2-2\lambda)$ y sería $d(A, \pi) = 1$:
$d(A, \pi) = \dfrac{|2(1+2\lambda) - \lambda + 2(2-2\lambda) + 5|}{\sqrt{9}} = \dfrac{|11-\lambda|}{3} = 1 \Longrightarrow |11-\lambda| = 3$
$\begin{cases} 11 - \lambda = 3 \Longrightarrow \lambda = 8 \Longrightarrow A_1(17, 8, -14) \\ 11 - \lambda = -3 \Longrightarrow \lambda = 14 \Longrightarrow A_2(29, 14, -26) \end{cases}$ Lo lógico es que los puntos calculados estén separados por el plano π y pertenecen a la recta. Observamos la segunda coordenada en la que $y = \lambda$ y tenemos $P(1, 0, 2)$, continúa con $Q(3, 1, 0)$, continúa con $A_1(17, 8, -14)$ e impacta en $H(23, 11, -20)$. Luego el punto $A_2(29, 14, -26)$ vendría después del impacto y no sería válido.

Problema 2.15.2 Dados los planos $\pi_1 \equiv x - 2y + 3z = 6$ y $\pi_2 \equiv 3x - z = 2$ y el punto $A(1, 7, 1)$, se pide:

a) Comprobar que π_1 y π_2 son perpendiculares.

b) Calcular el volumen de un cubo que tenga una cara en el plano π_1, otra cara en el plano π_2, y un vértice en el punto A.

c) Calcular el punto simétrico de A respecto de π_1.

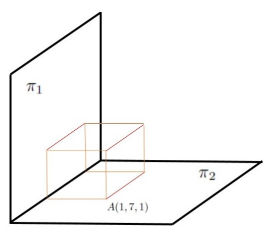
Solución:

a) Los vectores normales a los planos tienen que ser perpendiculares $\overrightarrow{u_{\pi_1}} \perp \overrightarrow{u_{\pi_2}} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}} = (1, -2, 3)(3, 0, -1) = 3 + 0 - 3 = 0$

b) Analizamos:
Observamos que el punto $A \in \pi_2$ luego el lado del cubo es la distancia de A a π_1:

$$d(A, \pi_1) = \frac{|1 - 14 + 3 - 6|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{16}{\sqrt{14}}$$

El volumen del cubo es $\left(\dfrac{16}{\sqrt{14}}\right)^3 = \dfrac{1024\sqrt{14}}{49} \simeq 78,193\ u^3$

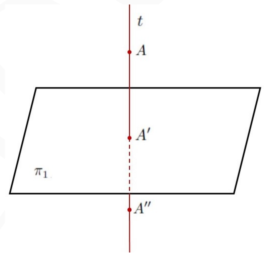


c) Seguimos el siguiente procedimiento:

☛ Calculamos una recta $t \perp \pi_1$ tal que $A \in t$:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} = (1, -2, 3) \\ P_t = A(1, 7, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 7 - 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{array} \right.$$

☛ Calculamos el punto de corte A' de t con π_1:



$$(1 + \lambda) - 2(7 - 2\lambda) + 3(1 + 3\lambda) = 6 \Longrightarrow \lambda = \frac{8}{7}$$

Sustituyendo en t: $A'\left(\frac{15}{7}, \frac{33}{7}, \frac{31}{7}\right)$

☛ A' es el punto medio entre A y el punto que buscamos A'':

$$\frac{A + A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A' - A = \left(\frac{30}{7}, \frac{66}{7}, \frac{62}{7}\right) - (1, 7, 1) = \left(\frac{23}{7}, \frac{17}{7}, \frac{55}{7}\right)$$

2.15.2. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.15.3 Con un dispositivo láser situado en el punto $P(1, 1, 1)$ se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta de ecuaciones $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{array} \right.$

a) Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano $z = 0$.

b) Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.

c) Determine el ángulo entre el plano de ecuación $x + y = 2$ y la recta r.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -10 + 2\lambda \\ z = 90 + \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ P_r(0, -10, 90) \end{array} \right.$$

a) $\overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1)$
Si $z = 0 \Longrightarrow 90 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -90 \Longrightarrow H(-90, -190, 0)$

b) Calculamos un plano π que contenga a P y sea perpendicular r, el punto buscado será la intersección de π con r.
$\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \Longrightarrow \pi : x + 2y + z + \alpha = 0$, como $P \in \pi \Longrightarrow 1 + 2 + 1 + \alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = -4 \Longrightarrow \pi : x + 2y + z - 4 = 0$
Sustituyendo la recta en el plano tenemos:

$$\lambda + 2(-10 + 2\lambda) + (90 + \lambda) - 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = -11$$

Sustituyendo en la recta: $\left\{ \begin{array}{l} x = -11 \\ y = -32 \\ z = 79 \end{array} \right. \Longrightarrow R(-11, -32, 79)$

c) Sustituimos r en el plano $\pi' : x + y = 2$:

$$\lambda + (-10 + 2\lambda) + 0(90 + \lambda) = 2 \Longrightarrow \lambda = 4$$

Luego el plano π' y la recta r se cortan.
Tenemos $\overrightarrow{u_r} = (1,2,1)$ y $\overrightarrow{u'_\pi} = (1,1,0)$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u'_\pi}|}{|\overrightarrow{u_r}|\cdot|\overrightarrow{u'_\pi}|} = \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \alpha = 60^\circ$$

Problema 2.15.4 Sean el plano $\pi \equiv x+y+z=1$, la recta $r_1 \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = -1 \end{array}\right.$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y el punto $P(0,1,0)$.

a) Verifique que la recta r_1 está contenida en el plano π y que el punto P pertenece al mismo plano.

b) Halle una ecuación de la recta contenida en el plano π que pase por P y sea perpendicular a r_1.

c) Calcule una ecuación de la recta, r_2, que pase por P y sea paralela a r_1. Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las rectas r_1 y r_2.

Solución:

$$r_1 : \left\{\begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow r_1 : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1,-1,0) \\ P_{r_1}(1,1,-1) \end{array}\right. \quad \text{y } \overrightarrow{u_\pi} = (1,1,1)$$

a) Sustituyendo r_1 en el plano π:
$(1+\lambda)+(1-\lambda)-1 = 1 \Longrightarrow 1 = 1 \Longrightarrow r_1$ y el plano π tienen infinitos puntos comunes, por lo que $r_1 \subset \pi$.
Ahora sustituimos P en π:
$0+1+0 = 0 \Longrightarrow P \in \pi$.

b) Calculamos un plano $\pi' \perp r_1$ tal que $P \in \pi'$:
$\pi' : x - y + A = 0$ sustituyendo $P \Longrightarrow 0-1+A = 0 \Longrightarrow A = 1 \Longrightarrow \pi' : x-y+1 = 0$.
La recta que buscamos es la intersección de π y π':

$$r : \left\{\begin{array}{l} x+y+z = 1 \\ x-y+1 = 0 \end{array}\right.$$

c) $r_2 : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_2}} = \overrightarrow{u_{r_1}} = (1,-1,0) \\ P_{r_2} = P(0,1,0) \end{array}\right. \Longrightarrow r_2 : \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 0 \end{array}\right.$

Calculamos la distancia entre r_1 y r_2:

$$d(r_1,r_2) = d(P_{r_2},r_1) = d(P,r_1) = \frac{|\overrightarrow{PP_{r_1}}\times\overrightarrow{u_{r_1}}|}{|\overrightarrow{u_{r_1}}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\ u$$

$\overrightarrow{PP_{r_1}} = (1,1,-1)-(0,1,0) = (1,0,-1)$

$$|\overrightarrow{PP_{r_1}}\times\overrightarrow{u_{r_1}}| = |\left|\begin{array}{rrr} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right|| = |-(1,1,1)| = \sqrt{3}$$

Luego el área del cuadrado será:

$$S = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3}{2} = 1,5\ u^2$$

2.15.3. Convocatoria Ordinaria(coincidente)

Problema 2.15.5 Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y el punto $P(1,1,0)$.

a) Halle los puntos pertenecientes a la recta r que distan de P una unidad.

b) Halle unas ecuaciones de las rectas que pasan por P, son perpendiculares a r y forman un ángulo $\dfrac{\pi}{3}$ radianes con la normal al plano $x = 0$.

Solución:

$$r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,1,0) \\ P_r = O(0,0,0) \end{cases}$$

a) Un punto de r es $Q(\lambda, \lambda, 0)$ y tenemos:

$$d(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = |(\lambda - 1, \lambda - 1, 0)| = |\lambda - 1|\sqrt{2} = 1 \Longrightarrow$$

$$|\lambda - 1| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda - 1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \lambda = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \simeq 1,7071 \Longrightarrow Q_1(1,7071; 1,7071; 0) \\ \lambda - 1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \lambda = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \simeq 0,2929 \Longrightarrow Q_2(0,2929; 0,2929; 0) \end{cases}$$

b) Sea $\overrightarrow{u_t} = (a,b,c) \perp r \Longrightarrow \overrightarrow{u_t} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0 \Longrightarrow a + b = 0 \Longrightarrow b = -a$
Si $\pi : x = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = (1,0,0)$ y tenemos:
$\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2} = \dfrac{|\overrightarrow{u_\pi} \cdot \overrightarrow{u_t}|}{|\overrightarrow{u_\pi}|\,|\overrightarrow{u_t}|} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \Longrightarrow$
$\dfrac{1}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + (-a)^2 + c^2}} \Longrightarrow \sqrt{2a^2 + c^2} = 2a \Longrightarrow 2a^2 + c^2 = 4a^2 \Longrightarrow c^2 = 2a^2 \Longrightarrow c = \pm a\sqrt{2}$
Luego $\overrightarrow{u_t} = (a, -a, \pm a\sqrt{2}) = a(1, -1, \pm\sqrt{2}) \Longrightarrow$

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (1, -1, \sqrt{2}) \\ P_t(1,1,0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \sqrt{2}\lambda \end{cases}$$

O bien

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (1, -1, -\sqrt{2}) \\ P_t(1,1,0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -\sqrt{2}\lambda \end{cases}$$

Problema 2.15.6

a) Calcule el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{u} = (0,0,1)$ y $\overrightarrow{v} = (0,1,\sqrt{3})$.

b) Sea O el origen de coordenadas, y los puntos $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$ y $C(0,2,2\sqrt{3})$. Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por las tres aristas concurrentes $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$.

c) Calcule una ecuación de la recta perpendicular común a las rectas r y s, siendo r la recta que pasa por O y por C y s la recta de ecuaciones $y-3=0$, $z=0$.

Solución:

a) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|} = \dfrac{0+0+\sqrt{3}}{1\cdot 2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{6} = 30^\circ$

b) $\overrightarrow{OA}=(2,0,0)$, $\overrightarrow{OB}=(0,3,0)$ y $\overrightarrow{OC}=(0,2,2\sqrt{3})$

$$V = \left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right| = |\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 2\sqrt{3}\end{vmatrix}| = 12\sqrt{3}\ u^3$$

c) $r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{OC}=2(0,1,\sqrt{3})\\ P_r=O(0,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=\lambda\\ z=\sqrt{3}\lambda\end{array}\right.$

$s:\left\{\begin{array}{l} y-3=0\\ z=0\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} x=\lambda\\ y=3\\ z=0\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(1,0,0)\\ P_s(0,3,0)\end{array}\right.$

Obtenemos la recta $t\perp r,s$ como intersección de dos planos. Primero obtenemos

$$\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 0 & 1 & \sqrt{3}\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=(0,\sqrt{3},-1)$$

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(0,\sqrt{3},-1)\\ \overrightarrow{u_r}=2(0,1,\sqrt{3})\\ P_r(0,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi_1:\begin{vmatrix} x & y & z\\ 0 & \sqrt{3} & -1\\ 0 & 1 & \sqrt{3}\end{vmatrix}=4x=0\Longrightarrow$$

$$\pi_1: x=0$$

$$\pi_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(0,\sqrt{3},-1)\\ \overrightarrow{u_s}=(1,0,0)\\ P_s(0,3,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi_2:\begin{vmatrix} x & y-3 & z\\ 0 & \sqrt{3} & -1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-y-\sqrt{3}+3=0\Longrightarrow$$

$$\pi_1: y+\sqrt{3}z-3=0$$

$$t:\left\{\begin{array}{l} x=0\\ y+\sqrt{3}z-3=0\end{array}\right. \Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=3-\sqrt{3}\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

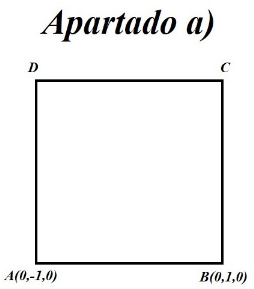
2.15.4. Convocatoria Extraordinaria

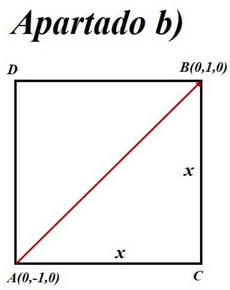
Problema 2.15.7 Sean el plano $\pi\equiv z=x$ y los puntos $A(0,-1,0)$ y $B(0,1,0)$ pertenecientes al plano π.

a) Si los puntos A y B son vértices contiguos del cuadrado con vértices $\{A,B,C,D\}$ que se encuentra en el plano π, encuentre los posibles puntos C y D.

b) Si los puntos A y B son vértices opuestos de un cuadrado con vértices $\{A,B,C,D\}$ que se encuentra en el plano π, encuentre los puntos C y D.

Solución:





a) Tenemos $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 0)$ y $|\overrightarrow{AB}| = 2$
Si $C \in \pi \Longrightarrow C(a, b, a)$
$\overrightarrow{BC} = (a, b, a) - (0, 1, 0) = (a, b - 1, a)$
$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Longrightarrow$
$(0, 2, 0) \cdot (a, b - 1, a) = 2(b - 1) = 0 \Longrightarrow b = 1$
Luego $C(a, 1, a)$ y $\overrightarrow{BC} = (a, 0, a)$
$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2a^2} = 2 \Longrightarrow a = \pm\sqrt{2}$

- Si $a = \sqrt{2} \Longrightarrow C(\sqrt{2}, 1, \sqrt{2})$ y $\overrightarrow{BC} = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$
  $D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC} =$
  $(0, -1, 0) + (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}) = (\sqrt{2}, -1, \sqrt{2})$
- Si $a = -\sqrt{2} \Longrightarrow C(-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2})$ y $\overrightarrow{BC} = (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$
  $D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC} =$
  $(0, -1, 0) + (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) = (-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2})$

b) $|\overrightarrow{AB}| = 2 \Longrightarrow 4 = 2x^2 \Longrightarrow x = \sqrt{2} = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}|$
Si $C \in \pi \Longrightarrow C(a, b, a) \Longrightarrow \overrightarrow{BC} = (a, b - 1, a)$ y $\overrightarrow{AC} = (a, b + 1, a)$
$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2a^2 + (b - 1)^2} = \sqrt{2} \Longrightarrow 2a^2 + (b - 1)^2 = 2$
$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2a^2 + (b + 1)^2} = \sqrt{2} \Longrightarrow 2a^2 + (b + 1)^2 = 2$
Luego $(b - 1)^2 - (b + 1)^2 = 0 \Longrightarrow -4b = 0 \Longrightarrow b = 0 \Longrightarrow C(a, 0, a)$

Tenemos $\overrightarrow{BC} = (a, -1, a) \perp \overrightarrow{AC} = (a, 1, a) \Longrightarrow$
$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = (a, -1, a) \cdot (a, 1, a) = 2a^2 - 1 = 0 \Longrightarrow a = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- Si $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow C\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
  $\overrightarrow{CA} = (0, -1, 0) - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
  $D = B + \overrightarrow{BD} = B + \overrightarrow{CA} = (0, 1, 0) + \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- Si $a = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow C\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
  $\overrightarrow{CA} = (0, -1, 0) - \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$D = B + \overrightarrow{BD} = B + \overrightarrow{CA} = (0,1,0) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Problema 2.15.8 Sean las rectas

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x+y+2=0 \\ y-2z+1=0 \end{array} \right. \quad , \quad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2-2t \\ y = 5+2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{array} \right.$$

.

a) Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcule la distancia entre ellas.

b) Determine una ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s.

c) Sean P y Q los puntos de las rectas r y s, respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación $z = 0$. Calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

Solución:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x+y+2=0 \\ y-2z+1=0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = -1-2\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-2,2,1) \\ P_r(-1,-1,0) \end{array} \right.$$

$$s : \left\{ \begin{array}{l} x = 2-2t \\ y = 5+2t \\ z = t \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-2,2,1) \\ P_s(2,5,0) \end{array} \right.$$

y $\overrightarrow{P_rP_s} = (3,6,0)$

a) $\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, Rango$\begin{pmatrix} \overrightarrow{P_rP_s} = (3,6,0) \\ \overrightarrow{u_r} = (-2,2,1) \end{pmatrix} = 2$ y Rango$\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} = (-2,2,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-2,2,1) \end{pmatrix} = 1 \Longrightarrow r$ y s son paralelas.

$$\left|\overrightarrow{P_rP_s} \times \overrightarrow{u_s}\right| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right| = |3(2,-1,6)| = 3\sqrt{41}$$

$$d(r,s) = d(P_r, s) = \frac{\left|\overrightarrow{P_rP_s} \times \overrightarrow{u_s}\right|}{|\overrightarrow{u_s}|} = \frac{3\sqrt{41}}{3} = \sqrt{41}\ u$$

b) $$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_rP_s} = (3,6,0) \\ \overrightarrow{u_r} = (-2,2,1) \\ P_r(-1,-1,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 3 & 6 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : 6x - 3y + 18z + 3 = 0 \Longrightarrow \pi : 2x - y + 6z + 1 = 0$$

c) Sea P corte de r con $z = 0 \Longrightarrow P(-1,-1,0)$
Sea Q corte de s con $z = 0 \Longrightarrow Q(2,5,0)$

$$h : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_h} = \overrightarrow{PQ} = 3(1,2,0) \\ P_h = P(-1,-1,0) \end{array} \right. \Longrightarrow h : \left\{ \begin{array}{l} x = -1+\lambda \\ y = -1+2\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{array} \right.$$

2.15.5. Convocatoria Extraordinaria (coincidente)

Problema 2.15.9 Un tetraedro tiene por vértices los puntos $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$.

a) Calcule el área de la cara dada por el triángulo de vértices A, B y C.

b) Calcule el volumen del tetraedro.

c) Calcule una ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C. Determine el punto simétrico respecto de π del punto O.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB}=(-1,2,0)$ y $\overrightarrow{AC}=(-1,0,3)$
El área del triángulo es:

$$S_t=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}|=\frac{1}{2}|(6,3,2)|=\frac{7}{2}=3,5\ u^2$$

b) $\overrightarrow{OA}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{OB}=(0,2,0)$ y $\overrightarrow{OC}=(0,0,3)$
El volumen del tetraedro es:

$$V_T=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right|=\frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}|=\frac{1}{6}|6|=1\ u^3$$

c) $$\pi:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(-1,2,0) \\ \overrightarrow{AC}=(-1,0,3) \\ A(1,0,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=0\Longrightarrow$$

$$\pi: 6x+3y+2z-6=0$$

Buscamos el punto simétrico:

- ☛ Calculamos una recta $r\perp\pi$ tal que $O\in r$

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(6,3,2) \\ P_r=O(0,0,0) \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=6t \\ y=3t \\ z=2t \end{array}\right.$$

- ☛ Calculamos el punto O' corte de r con π:
  $\pi: 6(6t)+3(3t)+2(2t)-6=0\Longrightarrow t=\dfrac{6}{49}$
  Luego $O'\left(\dfrac{36}{49},\dfrac{18}{49},\dfrac{12}{49}\right)$

- ☛ Calculamos O'' sabiendo que O' es el punto medio entre O y O'':

$$O'=\frac{O+O''}{2}\Longrightarrow O''=2O'-O=\left(\frac{72}{49},\frac{36}{49},\frac{24}{49}\right)$$

Problema 2.15.10 Se consideran la recta r y los planos π_1, π_2, de ecuaciones

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{c} x = 2 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{array} \right. , \ \lambda \in \mathbb{R}, \quad \pi_1 \equiv y + z = -1, \quad \pi_2 \equiv 2x - y + z = -3$$

Sea s la recta determinada por la intersección de los planos π_1 y π_2.

a) Halle el ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

b) Determine la posición relativa de las rectas r y s.

c) Encuentre una ecuación del plano perpendicular a s que corta a la recta r en el punto con segunda coordenada nula.

Solución:

$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1, 2, 1) \\ P_r(2, 0, 2) \end{array} \right.$

$s : \left\{ \begin{array}{l} y + z = -1 \\ 2x - y + z = -3 \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = -2 - t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1, -1, 1) \\ P_s(-2, -1, 0) \end{array} \right.$

y $\overrightarrow{P_sP_r} = (4, 1, 2)$

También tenemos $\overrightarrow{u_{\pi_1}} = (0, 1, 1)$ y $\overrightarrow{u_{\pi_2}} = (2, -1, 1)$

a) $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}}|}{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}|\,|\overrightarrow{u_{\pi_2}}|} = \dfrac{|0 - 1 + 1|}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = 0 \Longrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2}$

b) $\left[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \left| \begin{array}{rrr} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \right| = 18 \neq 0 \Longrightarrow r$ y s se cruzan.

c) La ecuación de un plano π perpedicular a s tiene por vector normal $\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_s} = (-1, -1, 1) \Longrightarrow$ $\pi : -x - y + z + a = 0$
El corte de este plano con la recta r tiene segunda coordenada nula $2\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow$ $P = P_r(2, 0, 2)$ sustituyendo en el plano π

$$-2 - 0 + 2 + a = 0 \Longrightarrow a = 0 \Longrightarrow \pi : -x - y + z = 0$$

$$\pi : x + y - z = 0$$

2.16. Murcia

2.16.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.16.1 Considere las siguientes rectas:

$$r : \frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z}{0} \quad s : \left\{ \begin{array}{l} x - z = 0 \\ y = 1 \end{array} \right.$$

a) Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) En caso de que las rectas se corten, calcule la ecuación del plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

Solución:

a) $r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-1,1,0)\\ P_r(-2,3,0)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=-2-\lambda\\ y=3+\lambda\\ z=0\end{array}\right.$

$s:\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=1\\ z=\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(1,0,1)\\ P_s(0,1,0)\end{array}\right.$

$\overrightarrow{P_sP_r}=(-2,2,0)=2(-1,1,0)$

$$\left[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\left|\begin{array}{rrr}-1&1&0\\-1&1&0\\1&0&1\end{array}\right|=0\Longrightarrow$$

Las dos rectas o se cortan o son paralelas.
Como Rango$\left(\begin{array}{c}\overrightarrow{u_r}\\ \overrightarrow{u_s}\end{array}\right)$=Rango$\left(\begin{array}{rrr}-1&1&0\\1&0&1\end{array}\right)=2\Longrightarrow r$ y s se cortan.

b) $\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-1,1,0)\\ \overrightarrow{u_s}=(1,0,1)\\ P_s(0,1,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}x&y-1&z\\-1&1&0\\1&0&1\end{array}\right|=x+y-z-1=0$

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r}|\cdot|\overrightarrow{u_s}|}=\frac{|-1+0+0|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\Longrightarrow\alpha=\frac{\pi}{3}=60^\circ$$

Problema 2.16.2 Considere los puntos $A=(1,-1,2)$ y $B=(3,5,2)$.

a) Determine la ecuación del plano π perpendicular al segmento AB y que pasa por el punto medio de dicho segmento.

b) Calcule la distancia del punto A al plano π.

Solución:

a) El punto medio del segmento AB es $C=\dfrac{A+B}{2}=(2,2,2)$
$\overrightarrow{AB}=(2,6,0)=2(1,3,0)\perp\overrightarrow{u_\pi}\Longrightarrow\pi:x+3y+\lambda=0\overset{C\in\pi}{\Longrightarrow}\lambda=-8\Longrightarrow\pi:x+3y-8=0$

b) $d(A,\pi)=\dfrac{|1-3+0-8|}{\sqrt{1+9}}=\dfrac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}\ u$

2.16.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.16.3 Considere el plano π de ecuación $\pi:x+y+z=1$ y la recta r dada por

$$r:\left\{\begin{array}{l}x-y=0\\ ax-z=a-1\end{array}\right.$$

a) Estudie la posición relativa del plano π y de la recta r en función del parámetro a.

b) Si $a = -1$ la recta r corta al plano π. Calcule en ese caso el punto de corte y el ángulo que forma la recta r con el plano π.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ ax - z = a - 1 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - a + a\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, a) \\ P_r(0, 0, 1 - a) \end{array} \right.$$

a) Sustituimos r en $\pi \Longrightarrow \lambda + \lambda + 1 - a + a\lambda = 1 \Longrightarrow (2 + a)\lambda = a$
Si $a = -2 \Longrightarrow 0 = -2$ lo que significa que la recta y el plano no tienen puntos comunes, es decir, $r \parallel \pi$
Si $a \neq -2 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{a}{2 + a}$ y la recta corta al plano π.

b) Si $a = -1$ la recta r corta al plano π por el apartado anterior.
$\lambda = -1 \Longrightarrow P(-1, -1, 3)$
$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi}|}{|\overrightarrow{u_r}| \cdot |\overrightarrow{u_\pi}|} = \dfrac{|(1, 1, -1) \cdot (1, 1, 1)|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow$

$$\alpha = 19^\circ 28' 17''$$

Problema 2.16.4 Considere las rectas r y s dadas por

$$r : \frac{x - 1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}, \quad s : \left\{ \begin{array}{l} x + 2z = 1 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

a) Compruebe que las rectas son coplanarias (es decir, están contenidas en un mismo plano) y calcule la ecuación del plano que las contiene.

b) Calcule la distancia de la recta r al plano $\pi : x - y + 2z = 3$.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

$$s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-2, 0, 1) \\ P_s(1, 0, 0) \end{array} \right.$$

a) $P_r = P_s = (1, 0, 0)$ las dos rectas tienen un punto en común y
$\text{Rango}\left(\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-2, 0, 1) \end{array} \right) = 2 \Longrightarrow r$ y s se cortan en un punto y están en el mismo plano, son coplanarias.
El plano π' que definen estas dos rectas es
$$\pi' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-2, 0, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi' : \left| \begin{array}{ccc} x - 1 & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right| = x - y + 2z - 1 = 0$$

b) $\pi \parallel \pi'$ y $r \subset \pi' \Longrightarrow d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \dfrac{|1 - 0 + 0 - 3|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}\ u$

2.17. Navarra

2.17.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.17.1 Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $T \equiv (1,-5,3)$ y corta a las siguientes rectas:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} -x-y-z+3=0 \\ 3x+z-10=0 \end{array} \right. \quad \text{y } s \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$$

y equidista de ambas.
Solución:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} -x-y-z+3=0 \\ 3x+z-10=0 \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x=\lambda \\ y=-7+2\lambda \\ z=10-3\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,2,-3) \\ P_r(0,-7,10) \end{array} \right.$$

$$s: \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1} \Longrightarrow s: \left\{ \begin{array}{l} x=-2\lambda \\ y=-1-\lambda \\ z=2+\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(-2,-1,1) \\ P_s(0,-1,2) \end{array} \right.$$

Para analizar la posición relativa de las rectas calculamos el vector $\overrightarrow{P_rP_s} = (0,-1,2)-(0,-7,10) = (0,6,-8) = 2(0,3,4)$ y tenemos $\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \left| \begin{array}{ccc} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{array} \right| = 27 \neq 0 \Longrightarrow r$ y s se cruzan.

Obtenemos la recta t que buscamos como intersección de dos planos:

$$\pi_1: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,2,-3) \\ \overrightarrow{P_rT}=(1,-5,3)-(0,-7,10)=(1,2,-7) \\ T(1,-5,3) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\pi_1: \left| \begin{array}{ccc} x-1 & y+5 & z-3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -7 \end{array} \right| = -4(2x-y-7)=0$$

$$\pi_2: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(-2,-1,1) \\ \overrightarrow{P_sT}=(1,-5,3)-(0,-1,2)=(1,-4,1) \\ T(1,-5,3) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\pi_2: \left| \begin{array}{ccc} x-1 & y+5 & z-3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{array} \right| = 3(x+y+3z-5)=0$$

$$t: \left\{ \begin{array}{l} 2x-y-7=0 \\ x+y+3z-5=0 \end{array} \right. \Longrightarrow t: \left\{ \begin{array}{l} x=4-\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow t: \frac{x-4}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$$

Problema 2.17.2 Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P \equiv (1,2,-1)$, es paralela al plano $\pi \equiv 2x-y+z=0$ y corta a la recta:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} x-y+2z+2=0 \\ 3x-y-z-3=0 \end{array} \right.$$

Solución:
Seguimos el siguiente procedimiento:

☛ Calculamos un plano $\pi' \parallel \pi$ tal que $P \in \pi'$:

$$\pi' : 2x - y + z + \lambda = 0 \overset{P\in\pi'}{\Longrightarrow} 2 - 2 - 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow \pi' : 2x - y + z + 1 = 0$$

☛ Calculamos el punto de corte P' de r con π':

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z + 2 = 0 \\ 3x - y - z - 3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{array} \right| = (3, 7, 2) \\ P_r(1, 1, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 + 7\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{array} \right.$$

Sustituyendo en π':

$$2(1 + 3\lambda) - (1 + 7\lambda) + (-1 + 2\lambda) + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$$

Sustituyendo λ en r obtenemos el punto $P'(-2, -6, -3)$

☛ La recta s buscada pasará por P y P':

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{P'P} = (1, 2, -1) - (-2, -6, -3) = (3, 8, 2) \\ P_s = P(1, 2, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$s : \frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{8} = \frac{z + 1}{2}$$

2.17.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.17.3 Calcula la ecuación general del plano π perpendicular al plano $\alpha \equiv 2x - y - z - 1 = 0$, sabiendo que contiene al punto $P(-1, 2, 1)$ y que la intersección de ambos planos es paralela a la siguiente recta:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{array} \right.$$

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x + y - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 1) \\ P_r(0, 3, 0) \end{array} \right.$$

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\alpha} = (2, -1, -1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 1) \\ P(-1, 2, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x + 1 & y - 2 & z - 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = -3y + 3z - 3 = 0$$

$$\pi : y - z - 1 = 0$$

Problema 2.17.4 Encuentra los puntos de la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 3x - y + z - 6 = 0 \\ x - y + 3z - 8 = 0 \end{array} \right.$ que son centro de una esfera de radio 3, tangente al plano $\pi \equiv 2x + 2y - z - 7 = 0$.
Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} 3x - y + z - 6 = 0 \\ x - y + 3z - 8 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = -9 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 4, 1) \\ P_r(-1, -9, 0) \end{array} \right.$$

$P \in r \Longrightarrow P(-1+\lambda, -9+4\lambda, \lambda)$

$$d(P,\pi) = \frac{|2(-1+\lambda)+2(-9+4\lambda)-\lambda-7|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|9\lambda-27|}{3} = |3\lambda-9| = 3 \Longrightarrow$$

$$|\lambda-3| = 1 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda-3=1 \Longrightarrow \lambda=4 \Longrightarrow P_1(3,7,4) \\ \lambda-3=-1 \Longrightarrow \lambda=2 \Longrightarrow P_1(1,-1,2) \end{array} \right.$$

2.18. País Vasco

2.18.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 2.18.1 Se consideran la recta r cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\left\{ \begin{array}{l} x=t \\ y=2t \\ z=0 \end{array} \right.$$

y el plano $\pi \equiv x+y+z-2=0$. Calcula las coordenadas de un punto P perteneciente a la recta r tal que la distancia de P al plano π sea igual que la distancia de P al origen de coordenadas. ¿Es único dicho punto? Contesta razonadamente.

Solución:

$P \in r \Longrightarrow P(t, 2t, 0)$

$$d(P,\pi) = d(P,O) \Longrightarrow \frac{|t+2t+0-2|}{\sqrt{3}} = \left|\overrightarrow{OP}\right| = |(t,2t,0)| = \sqrt{t^2+4t^2+0} \Longrightarrow$$

$$\frac{|3t-2|}{\sqrt{3}} = \pm t\sqrt{5} \Longrightarrow |3t-2| = t\sqrt{15}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3t-2=t\sqrt{15} \Longrightarrow (3-\sqrt{15})t=2 \Longrightarrow t=\dfrac{2}{3-\sqrt{15}} = \dfrac{-3-\sqrt{15}}{3} \Longrightarrow P_1 \\ 3t-2=-t\sqrt{15} \Longrightarrow (3+\sqrt{15})t=2 \Longrightarrow t=\dfrac{2}{3+\sqrt{15}} = \dfrac{-3+\sqrt{15}}{3} \Longrightarrow P_2 \end{array} \right.$$

Luego $P_1\left(\dfrac{-3-\sqrt{15}}{3}, \dfrac{-6-2\sqrt{15}}{3}, 0\right)$ y $P_2\left(\dfrac{-3+\sqrt{15}}{3}, \dfrac{-6+2\sqrt{15}}{3}, 0\right)$

Problema 2.18.2 Sean el punto $P=(1,2,a)$, donde $a \neq 0$, y el plano $\pi \equiv x+y+2z=3$. Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto al plano π.

Solución:

Seguimos los siguientes pasos:

- Calculamos una recta $r \perp \pi$ tal que $P \in r$

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,1,2) \\ P_r = P = (1,2,a) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=a+2\lambda \end{array} \right.$$

- Calculamos el punto de corte P' de r con π:

$$(1+\lambda)+(2+\lambda)+2(a+2\lambda)=3 \Longrightarrow \lambda = -\frac{a}{3}$$

$$P'\left(1-\frac{a}{3}, 2-\frac{a}{3}, a-\frac{2a}{3}\right) \Longrightarrow P'\left(\frac{3-a}{3}, \frac{6-a}{3}, \frac{a}{3}\right)$$

☛ El punto P' es el punto medio entre P y P'' el simétrico de P respecto de π:

$$\frac{P+P''}{2}=P'\Longrightarrow P''=2P'-P=2\left(\frac{3-a}{3},\frac{6-a}{3},\frac{a}{3}\right)-(1,2,a)\Longrightarrow$$

$$\left(\frac{3-2a}{3},\frac{6-2a}{3},-\frac{a}{3}\right)$$

2.18.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 2.18.3 Sea la recta de ecuación:

$$r\equiv\left\{\begin{array}{l}3x+\alpha y+z=1\\ 2x+6y-2z=6\end{array}\right.$$

¿Existe algún valor de α para el cual el plano $\pi\equiv x+y+z=1$ contenga a la recta dada? Razona la respuesta.
Solución:

$$\left\{\begin{array}{l}3x+\alpha y+z=1\\ 2x+6y-2z=6\\ x+y+z=1\end{array}\right.$$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}3&\alpha&1&1\\ 2&6&-2&6\\ 1&1&1&1\end{array}\right);\quad |A|=4(5-\alpha)=0\Longrightarrow \alpha=5$$

☛ Si $\alpha\in\mathbb{R}-\{5\}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$ Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única) La recta y el plano se cortan en un punto

☛ Si $\alpha=5$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}3&5&1&1\\ 2&6&-2&6\\ 1&1&1&1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c}F_1\\ 3F_2-2F_1\\ 3F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c}3&5&1&1\\ 0&8&-8&16\\ 0&-2&-2&-2\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c}F_1\\ F_2\\ 4F_3+F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c}3&5&1&1\\ 0&8&-8&16\\ 0&0&0&8\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema incompatible

La recta y el plano no tienen puntos comunes y son paralelos. $(r\parallel\pi)$

☛ No se puede encontrar α de forma que r esté contenida en π.

Problema 2.18.4 Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$r\equiv\left\{\begin{array}{l}3x+y+z=0\\ x-y+2z=0\end{array}\right.$$

¿Existe algún valor de s tal que el punto $(-3,s,s)$ pertenezca a la recta? Razona la respuesta.
Solución:

☛ $r:\left\{\begin{array}{l}3x+y+z=0\\ x-y+2z=0\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=-\dfrac{3}{4}\lambda\\ \\ y=\dfrac{5}{4}\lambda\\ \\ z=\lambda\end{array}\right.$

☛ $\left\{\begin{array}{l}-3=-\dfrac{3}{4}\lambda\\ \\ s=\dfrac{5}{4}\lambda\\ \\ s=\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow$ este sistema no tiene solución, no es posible que el punto $(-3,s,s)$ pertenezca a la recta r.

Capítulo 3

Análisis

3.1. Resúmenes teóricos

Tabla de Derivadas

función	derivada	función	derivada
$y = k$	$y' = 0$	$y = x$	$y' = 1$
$y = ax^n$	$y' = nax^{n-1}$	$y = au^n$	$y' = nau^{n-1}u'$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	$y = uv$	$y' = u'v + uv'$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y = \dfrac{u}{v}$	$y = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$	$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
$y = u^v$	$y' = u^v(v' \ln u) + vu^{v-1}u'$	$y = a^u$	$y' = u'a^u \ln a$
$y = e^u$	$y' = u'e^u$	$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$	$y = \tan u$	$y' = u' \sec^2 u$
$y = \cot u$	$y' = -u' \csc^2 u$	$y = \csc u$	$y' = -u' \csc u \cot u$
$y = \sec u$	$y' = u' \sec u \tan u$	$y = \arcsin u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \arccos u$	$y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \arctan u$	$y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
	Regla de la Cadena	$y = f(g(x))$	$y' = g'(x)f'(g(x))$

Representación gráfica de funciones

Hay que seguir los siguientes pasos:

1 Dominio	Buscar Puntos Singulares	2 Signo	$f(x) > 0$ *o* $f(x) < 0$
3 Ptos. Corte	Corte con OX : $f(x) = 0$ Corte con OY : $x = 0$	4 Simetría :	Par : $f(-x) = f(x)$ con OY Impar : $f(-x) = -f(x)$ con O
5 Asíntotas :	Verticales : $x = p$ $\lim\limits_{x \longrightarrow p} f(x) = \pm\infty$ Horizontales : $y = p$ $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = p$ Si $\exists\, y = p \Longrightarrow$ No Oblicuas Oblicuas : $y = mx + n$ $m = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $n = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx)$	6 Monotonía :	Creciente : $f'(x) > 0$ $\nearrow$ Decreciente : $f'(x) < 0$ $\searrow$ Si $f'(p) = 0$ Punto Crítico : Máximo si $f''(p) < 0$ Mínimo si $f''(p) > 0$ Pto. Inflexión si $f''(p) = 0$ y $f'''(p) \neq 0$
7 Máximos y Mínimos	Máximo : $\nearrow\searrow$ de creciente a decreciente Mínimo : $\searrow\nearrow$ de decreciente a creciente	8 Curvatura :	Cóncava : $f''(x) > 0$ $\cup$ Convexa : $f''(x) < 0$ $\cap$ Si $f''(p) = 0$ Punto Crítico : Pto. Inflexión si de Cóncava a Convexa de Convexa a Cóncava
9 Periodo :	$f(x + T) = f(x)$		

Tabla de Integrales Inmediatas

Tipo	Simple	Compuesta
Potencial $a \neq -1$	$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int f^a \cdot f'\,dx = \frac{f^{a+1}}{a+1}$
Logarítmica	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert$	$\int \frac{f'}{f}\,dx = \ln\lvert f\rvert$
Exponencial	$\int e^x\,dx = e^x$	$\int e^f \cdot f'\,dx = e^f$
Exponencial	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int a^f \cdot f'\,dx = \frac{a^f}{\ln a}$
Seno	$\int \cos x\,dx = \sin x$	$\int f' \cdot \cos f\,dx = \sin f$
Coseno	$\int \sin x\,dx = -\cos x$	$\int f' \cdot \sin f\,dx = -\cos f$
Tangente	$\int \sec^2\,dx = \tan x$	$\int f' \cdot \sec^2 f\,dx = \tan f$
	$\int (1+\tan^2 x)\,dx = \tan x$	$\int f' \cdot (1+\tan^2 f)\,dx = \tan f$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x$	$\int \frac{f'}{\cos^2 f}\,dx = \tan f$
Cotangente	$\int \csc^2\,dx = -\cot x$	$\int f' \cdot \csc^2 f\,dx = -\cot f$
	$\int (1+\cot^2 x)\,dx = -\cot x$	$\int f' \cdot (1+\cot^2 f)\,dx = -\cot f$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x$	$\int \frac{f'}{\sin^2 f}\,dx = -\cot f$
Arco seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}\,dx = \arcsin f$
	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{\sqrt{a^2-f^2}}\,dx = \arcsin \frac{f}{a}$
Arco coseno	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \mathrm{arc}\cos x$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}\,dx = \mathrm{arc}\cos f$
	$\int \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \mathrm{arc}\cos \frac{x}{a}$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{a^2-f^2}}\,dx = \mathrm{arc}\cos \frac{f}{a}$
Arco tangente	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$	$\int \frac{f'}{1+f^2}\,dx = \arctan f$
	$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \arctan \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{a^2+f^2}\,dx = \arctan \frac{f}{a}$
Neperiano − Arcotangente	$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx = \ln \pm \arctan x$	Si $M \neq 0$ ax^2+bx+c irreducible

Definición de Derivada

$$f'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad f'(a) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Continuidad: Una función f es continua en un punto a si

$$\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

- Si $\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) \Longrightarrow$ Discontinua no evitable. (La función pega un salto en ese punto)
- Si $\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) \neq f(a) \Longrightarrow$ Discontinua evitable. (La función tiene un agujero en ese punto)

Derivabilidad
Una función f es derivable en un punto a si $f'(a^-) = f'(a^+)$.

$$f'(a^-) = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'(a^+) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si f es una función derivable en un punto a, entonces f tiene que ser continua en a.
Teorema de Weierstrass
Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces f alcanza un máximo y un mínimo en este intervalo.
Teorema de Darboux
Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces f toma en dicho intervalo todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo.
Teorema de Bolzano
Si f es una función continua en el intervalo cerrado y no nulo $[a, b]$ $(a < b)$ y la función toma valores de distinto signo en los extremos de este intervalo (Si signo de $f(a)$ es positivo entonces signo de $f(b)$ es negativo o viceversa). Entonces la función pasa necesariamente por un punto que corta al eje de abscisas, es decir, $\exists c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.
Teorema de Rolle
Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). Si además cumple que $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
Teorema del Valor Medio de Lagrange
Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Primer Teorema Fundamental del Cálculo
Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Definimos en este intervalo la función

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, dt \;\text{ donde }\; c \in [a, b]$$

En estas condiciones, si f es continua en c se cumple que F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.
Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (Regla de Barrow)
Dada una función f continua en el intervalo $[a, b]$ y sea F cualquier función primitiva de f, es decir $F'(x) = f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema de integración por partes
Sean f y g dos funciones reales derivables en el intervalo $[a, b]$. En estas condiciones se cumple

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

$\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (sentado un día vi un valiente soldado vestido de uniforme)

Teorema del cambio de variable
Sea g una función con derivada g' continua en $[a, b]$, y sea f una función real y continua en el mismo intervalo. SI hacemos el cambio de variable $t = g(x)$ se cumple que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

Límites cuando $x \longrightarrow \pm\infty$
Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que Grado$(P(x)) = n$ y Grado$(Q(x)) = m$. Sea A el coeficiente del monomio de mayor grado de $P(x)$ y sea B el coeficiente del monomio de mayor grado de $Q(x)$

$$L = \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} P(x) = \pm\infty$ el signo depende del signo del coeficiente de mayor grado de este polinomio.
- Si $n > m \Longrightarrow L =$Signo$\left(\dfrac{A}{B}\right)\cdot\infty$
- Si $n < m \Longrightarrow L = 0$
- Si $n = m \Longrightarrow L = \dfrac{A}{B}$

Si $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} P(x)^{Q(x)} = [1^\infty] = e^\lambda$, donde

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} Q(x)(P(x) - 1)$$

Regla de L'Hôpital Sean f y g dos funciones reales y derivables, entonces si

$$\lim_{x\longrightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \; o \; \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right] \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\longrightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aproximaciones cuando $x \longrightarrow 0$

$\sin x \approx x$	$\tan x \approx x$	$e^x \approx 1 + x$	$\log(1 + x) \approx x$
$a^x \approx 1 + x\ln a$	$\arcsin x \approx x$	$\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$	$\arccos \approx \dfrac{\pi}{2} - x$

3.2. Andalucia

3.2.1. Modelo

Problema 3.2.1 Se sabe que la gráfica de la función f definida por $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+2}{x-1}$ para $x \neq 1$ tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $(1,1)$ y tiene pendiente 2. Calcula a y b.

Solución:
Asíntotas oblicua $y = mx + n$ pasa por $(1,1) \Longrightarrow 1 = m + n$, como $m = 2 \Longrightarrow n = -1$.
La asíntota es $y = 2x - 1$
$m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^2+bx+2}{x^2-x} = a = 2$
$n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x)-x) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{ax^2+bx+2}{x-1} - 2x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+bx+2-2x^2+2x}{x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(b+2)x+2}{x-1} =$
$b + 2 = -1 \Longrightarrow b = -3$
Luego $a = 2$ y $b = -3$.

Problema 3.2.2 Considera la función continua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (3x-6)e^x & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{36(\sin x - ax)}{x^3} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Calcula a.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} ((3x-6)e^x) = -6 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{36(\sin x - ax)}{x^3} = -6 \\ f(0) = -6 \end{cases} \Longrightarrow a = 1$$

Se observa que en un momento de la resolución del límite hay que imponer $a = 1$ para seguir aplicando la regla de L'Hôpital.
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{36(\sin x - ax)}{x^3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{36(\cos x - a)}{3x^2} \stackrel{a=1}{=} \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-36\sin x}{6x} =$
$\left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-36\cos x}{6} = -6$

b) En $x = -1$ es $f(x) = (3x-6)e^x$ y tenemos $f(-1) = -\dfrac{9}{e}$,
$f'(x) = e^x(3x-3) \Longrightarrow f'(-1) = -\dfrac{6}{e}$ y la ecuación de la recta tangente es:

$$y + \frac{9}{e} = -\frac{6}{e}(x+1) \Longrightarrow y = -\frac{6}{e}x - \frac{15}{e}$$

Problema 3.2.3 Considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x^3 - x^4$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

b) Esboza la gráfica de f y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas.

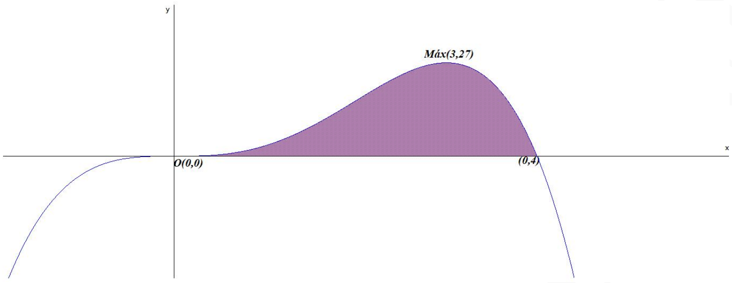
Solución:

a) $f'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 4x^2(3-x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 3$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$ y decreciente en el $(3, \infty)$. La función tiene un máximo relativo en el punto $(3, 27)$.

b) $f(x) = 4x^3 - x^4 = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 4$



$$S = \int_0^4 (4x^3 - x^4)dx = x^4 - \frac{x^5}{5}\Big]_0^4 = 4^4 - \frac{4^5}{5} - 0 = \frac{256}{5} \simeq 51,2\ u^2$$

Problema 3.2.4 Considera la función $F : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t})\, dt$$

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

$F(x) = \displaystyle\int_0^x (2t + \sqrt{t})\, dt = \int_0^x (2t + t^{1/2})\, dt = t^2 + \frac{t^{3/2}}{3/2}\Big]_0^x = x^2 + \frac{2x\sqrt{x}}{3}$

$F(x) = x^2 + \dfrac{2x\sqrt{x}}{3}$ y tenemos $F(1) = \dfrac{5}{3}$, $F'(x) = 2x + \sqrt{x} \Longrightarrow m = F'(1) = 3$. Luego la tangente buscada es

$$y - \frac{5}{3} = 3(x-1) \Longrightarrow y = 3x - \frac{4}{3}$$

3.2.2. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.2.5 Considera la función continua f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x < -1 \\ ax + b & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

a) Calcula a y b.

b) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.

Solución:

a) Continuidad en $x = -1$:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{1}{x} = -1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (ax+b) = -a+b \\ f(-1) = -a+b \end{array}\right. \Longrightarrow -a+b = -1$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (ax+b) = a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{1}{2} \\ f(1) = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow a+b = \frac{1}{2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} -a+b = -1 \\ a+b = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{3}{4} \\ b = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

b)
- ☛ En la rama $x < -1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{1}{x}$ no hay asíntotas verticales ya que el denominador no se anula nunca. Si hay horizontales en $y = 0$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ y no hay oblicuas al haber horizontales.
- ☛ En la rama $-1 \le x < 1 \Longrightarrow f(x) = ax+b$ es una recta y no tiene asíntotas.
- ☛ En la rama $x \ge 1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ no hay asíntotas verticales ya que el denominador no se anula nunca. No hay horizontales ya que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = \infty$ y si hay oblicuas $y = mx+n$

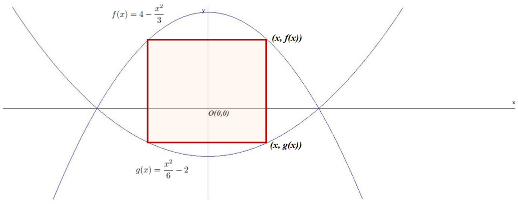
$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x^2+x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$

$$y = x - 1$$

Problema 3.2.6 De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada por las gráficas de las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 4 - \dfrac{x^2}{3}$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{6} - 2$

Solución:



Las dos funciones son PARES, simétricas respecto al eje de ordenadas, podemos imponer que la base del rectángulo es $2x$ y la altura será $f(x) - g(x)$ ya que $g(x) < 0$. Luego:

$$S(x) = 2x\left(4 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{6} + 2\right) = x(12 - x^2) = 12x - x^3$$

$$S'(x) = 12 - 3x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$$

$$S''(x) = -6x \Longrightarrow \begin{cases} S''(2) = -12 < 0 \Longrightarrow x = 2 \text{ Máximo} \\ S''(-2) = 12 > 0 \Longrightarrow x = -2 \text{ Mínimo} \end{cases}$$

Luego la base mide $2x = 2 \cdot 2 = 4$ u y la altura $4 - \frac{2^2}{3} - \frac{2^2}{6} + 2 = 4$ u con un área de $S(2) = 24 - 8 = 16$ u^2

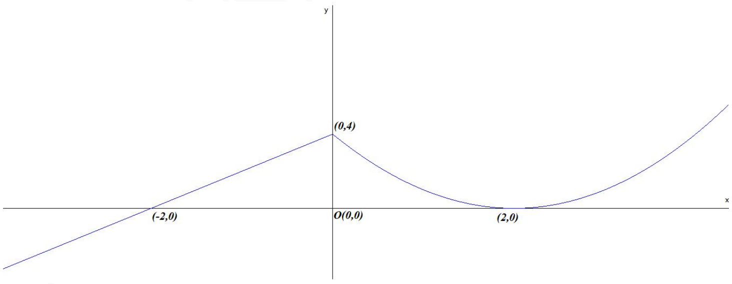
Problema 3.2.7 Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si} \quad x < 0 \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza la gráfica de la función.

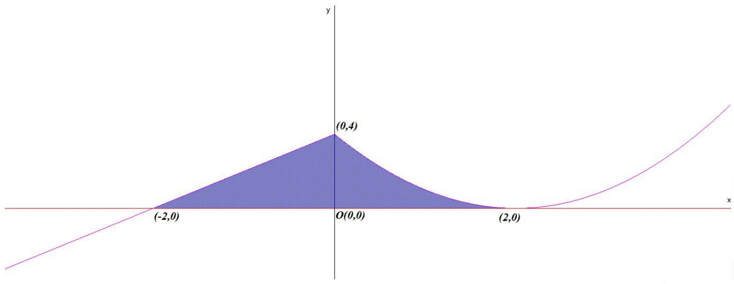
b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y por el eje de abscisas.

Solución:

a) En la rama $x < 0 \Longrightarrow f(x) = 2x + 4 = 0 \Longrightarrow x = -2 \Longrightarrow (-2, 0)$
En la rama $x \geq 0 \Longrightarrow f(x) = (x-2)^2 = 0 \Longrightarrow x = 2 \Longrightarrow (2, 0)$
Por tabla de valores:



b) $S = \int_{-2}^{0} (2x+4)\,dx + \int_{0}^{2} (x^2 - 4x + 4)\,dx = \left. x^2 + 4x\right]_{-2}^{0} + \left. \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_{0}^{2} = 4 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3} \simeq 6,6667$ u^2



Problema 3.2.8 Considera la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$ para $x \neq 1$. Halla una primitiva de f que pase por el punto $(2,6)$.

Solución:

$$F(x) = \int \frac{x^3}{x^2-2x+1}\,dx = \left[\begin{array}{l} \left(\quad x^3\right) : \left(x^2-2x+1\right) = x+2+\dfrac{3x-2}{x^2-2x+1} \\ \underline{-x^3+2x^2\ \ -x} \\ \qquad 2x^2\ \ -x \\ \qquad \underline{-2x^2+4x-2} \\ \qquad\qquad 3x-2 \end{array}\right] =$$

$$\int \left(x+2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}+2x+\int\frac{3x-2}{(x-1)^2}\,dx =$$

$$\left[\begin{array}{c} \dfrac{3x-2}{(x-1)^2} = \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2} = \dfrac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} \\ 3x-2 = A(x-1)+B \\ x=1 \Longrightarrow 1 = B \\ x=0 \Longrightarrow -2=-A+B \Longrightarrow A=3 \\ \dfrac{3x-2}{(x-1)^2} = \dfrac{3}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2} \end{array}\right] =$$

$$\frac{x^2}{2}+2x+\int\left(\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$$

$F(2) = 5+C = 6 \Longrightarrow C = 1$ luego

$$F(x) = \frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+1$$

3.2.3. Convocatoria Extraordinaria

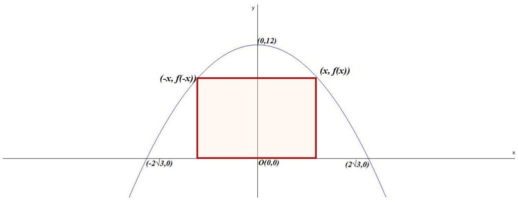
Problema 3.2.9 Calcula a sabiendo que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{(\ln x)^3+2x} = 1$ (donde ln denota la función logaritmo neperiano)

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{(\ln x)^3+2x} \overset{a\neq 0}{=} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{a}{3(\ln x)^2\frac{1}{x}+2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{3(\ln x)^2+2x} =$$

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{6\left(\ln x\right)\frac{1}{x}+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{6\ln x+2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{6\frac{1}{x}+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{6+2x} =$$
$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{2} = 1 \Longrightarrow a = 2$$

Problema 3.2.10 Calcula los vértices y el área del rectángulo de área máxima inscrito en el recinto limitado por la gráfica de la función $f\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 12$ y el eje de abscisas, y que tiene su base sobre dicho eje.
Solución:



La función es PAR, simétrica respecto al eje de ordenadas, podemos imponer que la base del rectángulo es $2x$ y la altura será $f(x)$. Luego:

$$S(x) = 2x\left(-x^2+12\right) = x(12-x^2) = 24x - 2x^3$$

$$S'(x) = 24 - 6x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$$

$$S''(x) = -12x \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} S''(2) = -24 < 0 \Longrightarrow x = 2 \text{ Máximo} \\ S''(-2) = 24 > 0 \Longrightarrow x = -2 \text{ Mínimo} \end{array} \right.$$

Luego la base mide $2x = 2\cdot 2 = 4$ u y la altura $-2^2+12 = 8$ u con un área de $S(2) = 48-16 = 32$ u^2.
Los vértices serían:

$$(-2,0), \ (2,0), \ (2,8) \ \text{y} \ (-2,8)$$

Problema 3.2.11 Calcula $\displaystyle\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}\,dx$ (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = \sqrt{1+x}-1$).

Solución:

$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = \sqrt{1+x}-1 \\ dt = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}dx \\ dx = 2\sqrt{1+x}dt \\ dx = 2(t+1)dt \end{array} \right] =$$
$$\int \frac{1}{t}2(t+1)dt = 2\int \frac{t+1}{t}dt = 2\int \left(1+\frac{1}{t}\right)\,dt = 2(t+\ln|t|)+C =$$
$$2\left(\sqrt{1+x}-1+\ln|\sqrt{1+x}-1|\right)+C$$

$$\int_3^8 \frac{2}{\sqrt{1+x}-1}\,dx = F(8)-F(0) = 2\ln 2 + 6 - 4 = 2 + 2\ln 2 \simeq 3,3863$$

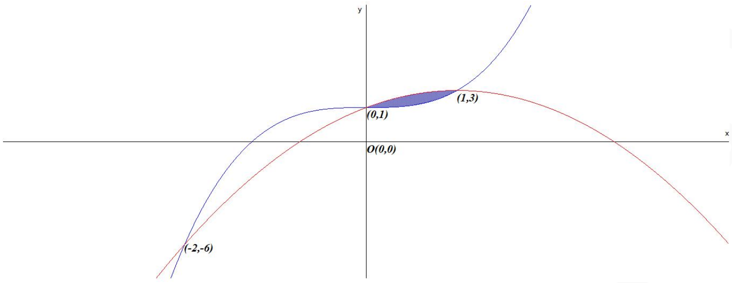
Problema 3.2.12 Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 2$.

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza sus gráficas.

b) Determina el área del recinto limitado por las gráficas de f y g en el primer cuadrante.

Solución:

a) $f(x) = g(x) \Longrightarrow x^3 + 2 = -x^2 + 2x + 2 \Longrightarrow x(x^2 + x - 2) = 0 \Longrightarrow x = -2$, $x = 0$ y $x = 1$.
Los puntos de corte son: $(-2, -6)$, $(0, 2)$ y $(1, 3)$.



b) $S = \left| \int_0^1 \left(x^3 + 2 - (-x^2 + 2x + 2)\right)\, dx \right| = \left| \int_0^1 \left(x^3 + x^2 - 2x\right)\, dx \right| =$
$\left| \left.\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^1 \right| = \left| \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} - 1 - 0 \right) \right| = \left| -\dfrac{5}{12} \right| = \dfrac{5}{12} \simeq 0,4167\ u^2$

3.3. Aragón

3.3.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.3.1 Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} + e^3 & \text{si} \quad x \le 0 \\ (1 - x)^{a/x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a) Determina los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la funcion $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.

b) Calcula, para $a = 1$ la recta tangente a la función en $x = -4$.

Solución:

a) f es continua en la rama $x < 0$ y también lo es en la rama $x > 0$. Para que sea continua en $\mathbb{R}$ hay que estudiar la continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (\sqrt{-x} + e^3) = e^3$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (1 - x)^{a/x} = [1^\infty] = e^\lambda = e^{-a}$$

$$\lambda = \lim_{x \to 0^+} \frac{a}{x}(1 - x - 1) = \lim_{x \to 0^+} \frac{-ax}{x} = -a$$

$$f(0) = e^3$$

$3 = -a \Longrightarrow a = -3$.

b) $x = -4 < 0 \Longrightarrow f(x) = \sqrt{-x} + e^3 \Longrightarrow f(-4) = e^3 + 2$

$f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}} \Longrightarrow m = f'(-4) = -\dfrac{1}{4}$

$y - f(-4) = m(x+4) \Longrightarrow y - e^3 - 2 = -\dfrac{1}{4}(x+4) \Longrightarrow y = -\dfrac{x}{4} + 1 + e^3$

Problema 3.3.2 Calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2-2} - \left(\sqrt{3}x + 5\right)$$

Solución:

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2-2} - \left(\sqrt{3}x+5\right) = [\infty - \infty]$

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{3x^2-2} - \left(\sqrt{3}x+5\right)\right)\left(\sqrt{3x^2-2} + \left(\sqrt{3}x+5\right)\right)}{\sqrt{3x^2-2} + \sqrt{3}x + 5} =$

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{3x^2-2}\right)^2 - \left(\sqrt{3}x+5\right)^2}{\sqrt{3x^2-2} + \sqrt{3}x + 5} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2 - 2 - 3x^2 - 25 - 10\sqrt{3}x}{\sqrt{3x^2-2} + \left(\sqrt{3}x+5\right)} =$

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-27 - 10\sqrt{3}x}{\sqrt{3x^2-2} + \sqrt{3}x + 5} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{-10\sqrt{3}x}{\left(\sqrt{3x^2} + \left(\sqrt{3}x\right)\right)} =$

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-10\sqrt{3}x}{2x\sqrt{3}} = \dfrac{-10\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -5$

Problema 3.3.3 Calcula: $\displaystyle\int e^{-x}(x^2-1)\,dx$

Solución:

$\displaystyle\int e^{-x}(x^2-1)\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x^2 - 1 \Longrightarrow du = 2xdx \\ dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right] =$

$\displaystyle -(x^2-1)e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right] =$

$\displaystyle -(x^2-1)e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx\right) = -(x^2-1)e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} - e^{-x}\right) + C = -(x^2-1)e^{-x} -$
$2xe^{-x} - 2e^{-x} + C = -e^{-x}(x^2 + 2x + 1) + C$

Problema 3.3.4 Para la siguiente función $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2}$

a) Obtén el dominio de definición y estudia su crecimiento y decrecimiento.

b) Analiza la curvatura (concavidad $=\frown$ y convexidad $=\smile$) y existencia de puntos de inflexión en su dominio de definición. Obtén los puntos de inflexión, caso de existir.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ $(x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0)$

$f'(x) = \dfrac{2(x-1)}{x^3} = 0 \Longrightarrow x = 1$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

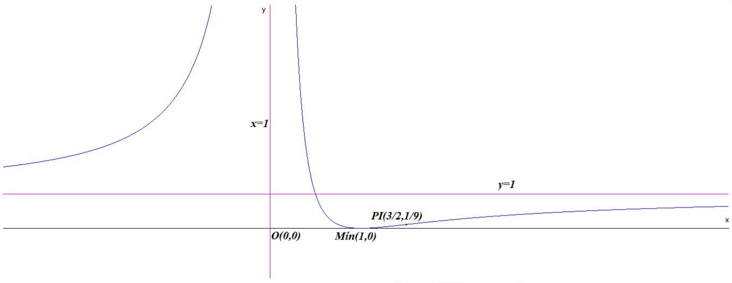
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ y decreciente en el $(0, 1)$.
Presenta un mínimo relativo en el punto $(1, 0)$

b) $f''(x) = -\dfrac{2(2x-3)}{x^4} = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

	$(-\infty, 0)$	$\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$	$\left(\dfrac{3}{2}, \infty\right)$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava $\frown$	cóncava $\frown$	convexa $\smile$

Según el enunciado la función es cóncava en el intervalo $(-\infty, 0) \cup \left(0, \dfrac{3}{2}\right)$ y convexa en el $\left(\dfrac{3}{2}, \infty\right)$. Presenta un punto de inflexión en el punto $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{9}\right)$

Nota: Personalmente utilizo el criterio de cóncava $\smile$ y convexa $\frown$, al reves del enunciado.



3.3.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.3.5 Dada la siguiente función $f(x) = xe^{-ax^2}$, $a \in \mathbb{R}$

a) Determina los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la funcion $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$ y tenga asíntota horizontal $y = 0$.

b) Calcula, para el valor $a = \dfrac{1}{2}$, el área que encierra la gráfica de la curva $f(x)$ entre el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

a) f es composición de funciones continuas, sin denominadores, ni raices ni logaritmos y, por tanto, continua $\forall a \in \mathbb{R}$.
Para que tenga una asíntota horizontal en $y = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (xe^{-ax^2}) \overset{a\geq 0}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{ax^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2axe^{ax^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Luego tiene que ser $\mathbf{a > 0}$.
Si $a \leq 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} (xe^{-ax^2}) = \infty$

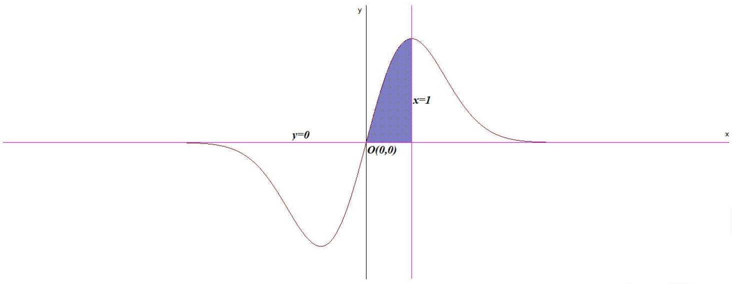
b) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \Longrightarrow x = 0$ luego la función no corta al eje OX en el intervalo $(0, 1)$ y tenemos un único recinto S_1.

$$F(x) = \int xe^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \begin{bmatrix} t = -\dfrac{x^2}{2} \\ dt = -xdx \\ dx = -\dfrac{dt}{x} \end{bmatrix} = -\int xe^t \, \frac{dt}{x} =$$

$$-\int e^t\,dt = -e^t = -e^{-\frac{x^2}{2}} + C$$

$$S_1 = \int_0^1 xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = F(1) - F(0) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0,3935$$

$$S = |S_1| = 0,3935\ u^2$$



Problema 3.3.6 Para la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2x^3 + ax^2 + bx + 3}{-x^3 + 4x^2 - 5x + 2},\ \ a \in \mathbb{R}$$

Calcula los valores de $a, b \in \mathbb{R}$,para que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = L \in \mathbb{R}$, y determina el valor de dicho límite.

Solución:

$L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3 + ax^2 + bx + 3}{-x^3 + 4x^2 - 5x + 2} = \left[\dfrac{a+b+5}{0}\right] \overset{a+b=-5}{=} \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{6x^2 + 2ax + b}{-3x^2 + 8x - 5} = \left[\dfrac{2a+b+6}{0}\right] \overset{2a+b=-6}{=} \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{12x + 2a}{-6x + 8} = \dfrac{12 + 2a}{2}$

Tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} a + b = -5 \\ 2a + b = -6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ b = -4 \end{array}\right. \quad \text{y} \ \ L = \frac{12 + 2a}{2} = 5$$

Problema 3.3.7 Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones:

$$f(x) = 3x + 2x^2$$

$$g(x) = x^2 + 4x + 2$$

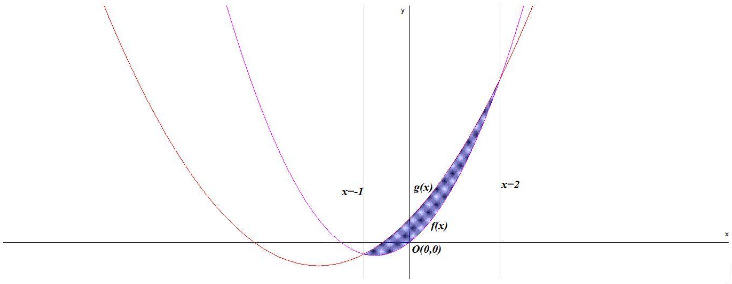
Solución:

$f(x) = g(x) \Longrightarrow 3x + 2x^2 = x^2 + 4x + 2 \Longrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 2$. Luego sólo hay un recinto S_1.

$F(x) = \displaystyle\int (f(x) - g(x))\,dx = \int (x^2 - x - 2)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$

$S_1 = \displaystyle\int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))\,dx = F(2) - F(-1) = -\frac{10}{3} - \frac{7}{6} = -\frac{9}{2}$

$$S = |S_1| = \left|-\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2}\ u^2$$



Problema 3.3.8 Para la siguiente función $f(x) = \dfrac{x^2+x}{3-x^2}$

a) Estudia la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas, así como de ramas parabólicas. Determina las asíntotas cuando existan.

b) Calcula la recta tangente a la función en el punto $x = 1$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{3}\}$ $(3 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{3})$

☛ Asíntotas verticales:

- En $x = \sqrt{3}$:

$$\lim_{x\to(\sqrt{3})^-} \frac{x^2+x}{3-x^2} = \left[\frac{3+\sqrt{3}}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to(\sqrt{3})^+} \frac{x^2+x}{3-x^2} = \left[\frac{3+\sqrt{3}}{0^-}\right] = -\infty$$

- En $x = -\sqrt{3}$:

$$\lim_{x\to(-\sqrt{3})^-} \frac{x^2+x}{3-x^2} = \left[\frac{3-\sqrt{3}}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to(-\sqrt{3})^+} \frac{x^2+x}{3-x^2} = \left[\frac{3-\sqrt{3}}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ Asíntotas horizontales: $y = -1$

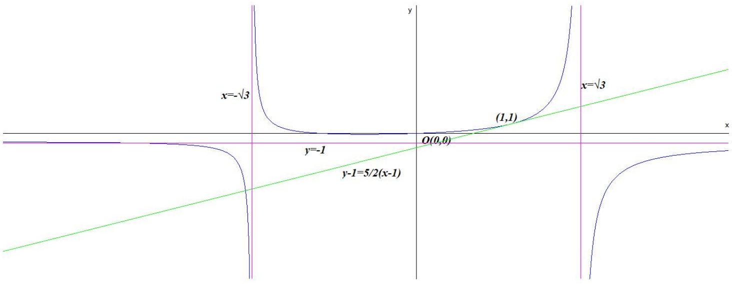
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x}{3-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{3-x^2} = -1$$

☛ Asíntotas oblicuas: No hay por haber horizontales.

☛ Ramas parabólicas: No tiene, el polinomio del numerador y del denominador tienen el mismo grado y hay una asíntota horizontal.

b) $f(1) = 1$, $f'(x) = \dfrac{x^2+6x+3}{(x^2-3)^2} \Longrightarrow m = f'(1) = \dfrac{5}{2}$. La recta tangente es

$$y - 1 = \frac{5}{2}(x-1) \Longrightarrow y = \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$$



3.4. Asturias

3.4.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.4.1 Se considera la función:

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$$

a) Calcula el dominio de f y las asíntotas, en caso de que tenga.

b) Estudia la existencia de máximos y mínimos, así como los intervalos de concavidad y convexidad.

c) A partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
Asíntotas:

- ☛ Verticales: $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+3}{x-1} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+3}{x-1} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

- ☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+3}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+3}{x-1} = +\infty$$

- ☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{x^2-x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+3}{x-1} - x\right) =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{x-1} = 1 \Longrightarrow y = x+1$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 3$.

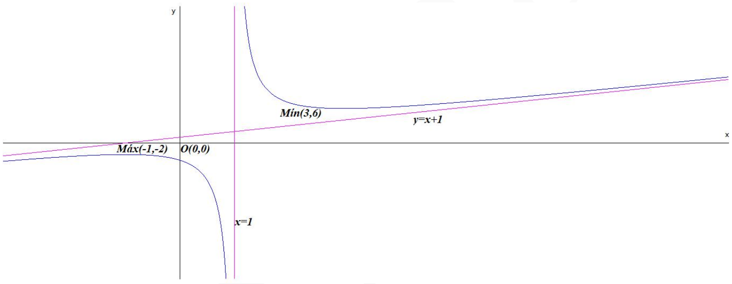
	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ y decreciente en el $(-1, 1) \cup (1, 3)$. La función tiene un máximo relativo en el punto $(-1, -2)$ y un mínimo relativo en $(3, 6)$.
$f''(x) = \dfrac{8}{(x-1)^3} \neq 0 \Longrightarrow$ No tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa $\frown$ en el intervalo $(-\infty, 1)$ y cóncava $\smile$ en el $(1, \infty)$

c) Representación gráfica:



Problema 3.4.2 Se considera la función $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$

a) Calcula una primitiva de $f(x)$, que pase por el punto $(-1, 0)$. (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 1 - x^2$)

b) Calcula $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\, dx = \begin{bmatrix} t = 1 - x^2 \\ dt = -2xdx \\ dx = -\dfrac{dt}{2x} \end{bmatrix} = -\int x\sqrt{t}\,\frac{dt}{2x} = -\frac{1}{2}\int t^{1/2}\, dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{3/2}}{3/2} +$
$C = -\dfrac{(1-x^2)^{3/2}}{3} + C$

Como $F(-1) = 0 \Longrightarrow -\dfrac{(1-1)^{3/2}}{3} + C = 0 \Longrightarrow C = 0$ y
$F(x) = -\dfrac{(1-x^2)^{3/2}}{3}$

b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = F(1) - F(0) = 0 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

3.4.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.4.3 Se considera la función:

$$f(x) = \frac{2x^2}{1-x}$$

a) Calcula el dominio de f y sus asíntotas.

b) Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
Asíntotas:

☛ Verticales: $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2}{1-x} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2}{1-x} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2}{1-x} = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2}{1-x} = -\infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x - x^2} = -2$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2}{1-x} + 2x\right) =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x - 2x^2}{1-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1-x} = -2 \Longrightarrow y = -2x - 2$$

b) $f'(x) = -\dfrac{2x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

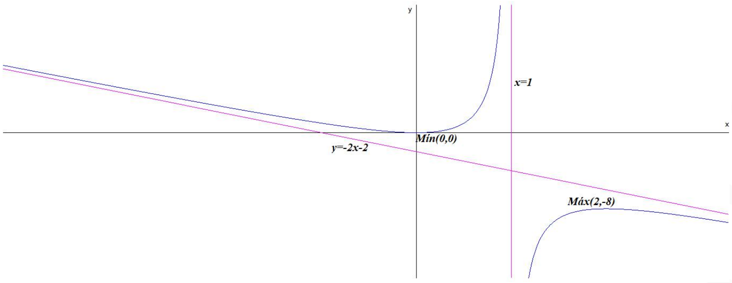
La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ y creciente en el $(0, 1) \cup (1, 2)$. La función tiene un máximo relativo en el punto $(2, -8)$ y un mínimo relativo en $(0, 0)$.

$f''(x) = \dfrac{4}{(1-x)^3} \neq 0 \Longrightarrow$ No tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	cóncava $\smile$	convexa $\frown$

La función es convexa $\frown$ en el intervalo $(1, \infty)$ y cóncava $\smile$ en el $(-\infty, 1)$

c) Representación gráfica:



Problema 3.4.4 Dada la función $f(x) = -\sin(2x) + 1$

a) Calcula una primitiva que pase por el origen de coordenadas.

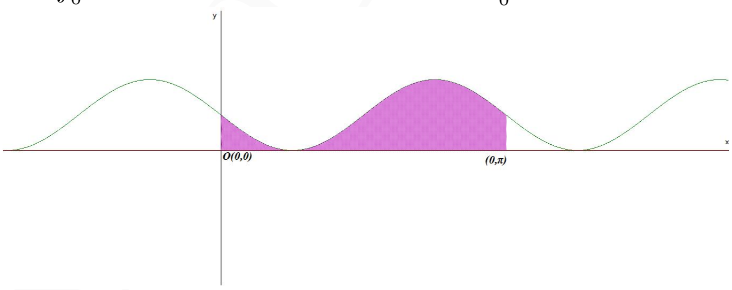
b) Calcula el área limitada por f, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int (-\sin(2x) + 1)\, dx = -\int \sin 2x\, dx + \int dx = \frac{\cos(2x)}{2} + x + C$

$$F(0) = \frac{1}{2} + C = 0 \Longrightarrow C = -\frac{1}{2} \Longrightarrow F(x) = \frac{\cos(2x)}{2} + x - \frac{1}{2}$$

b) $f(x) = -\sin(2x) + 1 \geq 0 \Longrightarrow$ sólo hay un recinto, S en $[0, \pi]$.
$S = \displaystyle\int_0^{\pi} (-\sin(2x) + 1)\, dx = \left.\frac{\cos(2x)}{2} + x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} + \pi - \frac{1}{2} = \pi\ u^2$



3.5. Cantabria

3.5.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.5.1 Una imprenta debe diseñar un cartel con 90 cm^2 de área para texto y además, con margen superior 3 cm, inferior 2 cm y márgenes laterales 4 cm cada uno.

a) Realice un dibujo planteando el problema.

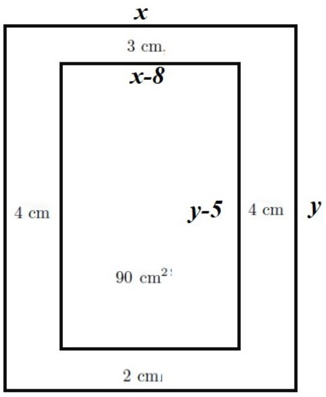
b) Calcule las dimensiones (anchura y altura) que debe tener el cartel de manera que se utilice la menor cantidad de papel posible.

Solución:

a) Función que relaciona las dos variables:

$(x-8)(y-5) = 90 \Longrightarrow y - 5 = \dfrac{90}{x-8} \Longrightarrow$

$y = \dfrac{90}{x-8} + 5 = \dfrac{5(x+10)}{x-8}$



b) Función a optimizar: $s(x, y) = xy$

$$s(x) = x\left(\frac{5(x+10)}{x-8}\right) = \frac{5x(x+10)}{x-8} \Longrightarrow$$

$$s'(x) = \frac{5(x^2 - 16x - 80)}{(x-8)^2} = 0 \Longrightarrow$$

$$x = 20, \ \ x = -4 \text{ no relevante}$$

	$(0, 20)$	$(20, \infty)$
$s'(x)$	$-$	$+$
$s(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

Luego la función tiene un mínimo en $x = 20$ cm $\Longrightarrow$ $y = \dfrac{25}{2}$ cm. El área total sería de $s(20) = 250$ cm^2.

Las dimensiones mínimas de papel son de 20 cm por 12,5 cm.

Problema 3.5.2 Considere la función $f(x) = x^2e^{-x}$

a) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) Calcule la derivada primera de $f(x)$.

c) Determine los extremos relativos de $f(x)$.

d) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2e^{-x}) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x} = \dfrac{2}{\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2e^{-x}) = \infty \cdot \infty = \infty$

b) $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(2-x)$

c) $f'(x) = 0 \Longrightarrow xe^{-x}(2-x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$

$f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$

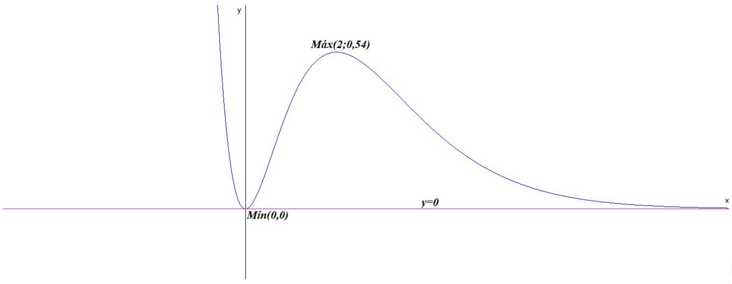
En $x = 0 \Longrightarrow f''(0) = 2 > 0 \Longrightarrow x = 0$ es un mínimo relativo.

En $x = 2 \Longrightarrow f''(0) = -2e^{-2} < 0 \Longrightarrow x = 2$ es un máximo relativo.

d)

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ y decreciente en el $(0, 2)$



3.5.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.5.3 Considere la función $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

a) Calcule la derivada primera de $f(x)$.

b) Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

c) Calcule las asíntotas verticales de $f(x)$.

d) Calcule las asíntotas horizontales de $f(x)$.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

b) $b = f(2) = \dfrac{e^2}{2}$, la pendiente $m = f'(2) = \dfrac{e^2}{4}$ y la recta tangente:

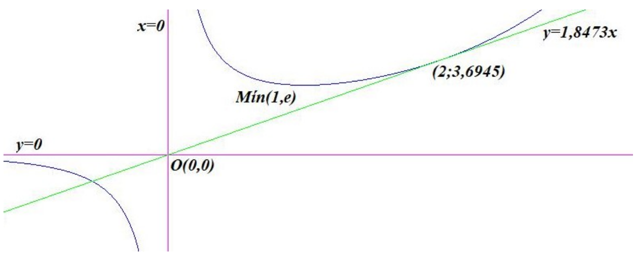
$$y - b = m(x-2) \Longrightarrow y - \frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{4}(x-2) \Longrightarrow y = \frac{e^2}{4}x$$

c) La única es $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{e^{-1}}{0^-}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{e^{-1}}{0^+}\right] = +\infty$$

d) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{e^{-\infty}}{-\infty}\right] = \left[\frac{1}{-e^{\infty}\infty}\right] = 0 \Longrightarrow y = 0$

$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1} = \infty$



Problema 3.5.4 Considere la función $f(x) = \dfrac{3}{x}$

a) Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) Halle una primitiva de $f(x)$.

c) Calcule el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, las rectas $x = 1$, $x = e$ y el eje OX de abscisas.

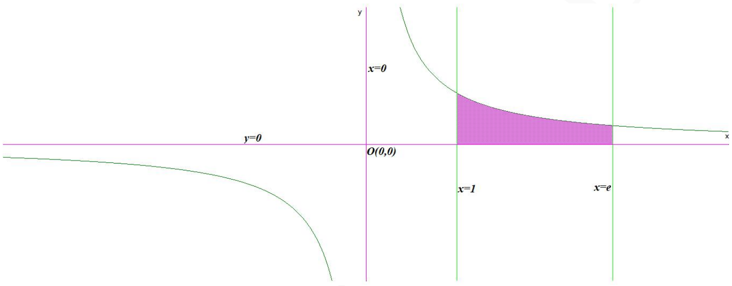
Solución:

a)
- $\text{Dom}(f) = R - \{0\}$.
- Asíntotas:
  - Verticales: $x = 0$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{3}{x} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{x} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$
  - Horizontales: $y = 0$
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3}{x} = 0$$
  - Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) $F(x) = \displaystyle\int \frac{3}{x}\, dx = 3\ln|x| + C$

c) $f(x) = \dfrac{3}{x} \neq 0 \Longrightarrow f$ no corta al eje de abscisas. Tenemos un único recinto de integración:

$$S = \left|\int_1^e \frac{3}{x}\, dx\right| = |F(e) - F(1)| = |3 - 0| = 3\ u^2$$



3.6. Castilla La Mancha

3.6.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.6.1 Calcula razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$$

Solución:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x}\left(\frac{x+1}{x} - 1\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

Luego:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = e^1 = e$$

Problema 3.6.2 Se pide:

a) Sea la curva $f(x) = a - x^2$

a.1 ¿Qué valores puede tomar $a \in \mathbb{R}$ para que la curva $f(x) = a - x^2$ corte al eje de abscisas (eje OX) en dos puntos y, por tanto, delimite con dicho eje un recinto cerrado?

a.2 Encuentra razonadamente $a \in \mathbb{R}$ para que el área de dicho recinto valga 36.

b) Resuelve la siguiente integral:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}}\,dx$$

El cambio de variable $t = 1 + 3x^2$ te puede ayudar.

Solución:

a) $f(x) = a - x^2$

a.1 $f(x) = a - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{a}$ luego $a > 0$. Si $a = 0$ sólo habría un punto de corte.

a.2 $\displaystyle\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2)\,dx = \left. ax - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = \frac{2a^{3/2}}{3} + \frac{2a^{3/2}}{3} = \frac{4a^{3/2}}{3} = 36 \Longrightarrow a^{3/2} = 27 \Longrightarrow$ $a = 9$

b) $$\int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}}\,dx = \begin{bmatrix} t = 1 + 3x^2 \\ dt = 6xdx \\ dx = \dfrac{dt}{6x} \end{bmatrix} = \int \frac{2x}{\sqrt{t}}\cdot\frac{dt}{6x} = \frac{1}{3}\int t^{-1/2}\,dt =$$
$$\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2t^{1/2}}{3} + C = \frac{2\sqrt{1+3x^2}}{3} + C$$

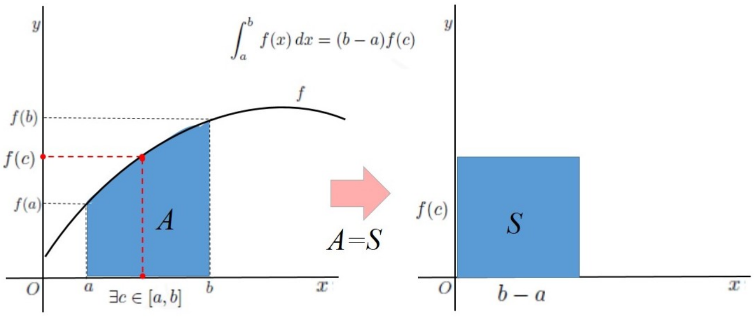
Problema 3.6.3 Enuncia el teorema del valor medio del cálculo integral. Encuentra razonadamente el punto al que hace alusión dicho teorema para la función $f(x) = 3/x^2$ en el intervalo $[1, 3]$. Interpreta geométricamente lo hallado.

Solución:

Teorema del valor medio para integrales

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[a, b] \Longrightarrow \exists c \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a)f(c)$$



$$\int_1^3 3x^{-2}\,dx = \left.\frac{3x^{-1}}{-1}\right]_1^3 = -1-(-3) = 2$$

$\exists c \in [a,b]$ tal que $\displaystyle\int_1^3 3x^{-2}\,dx = (3-1)\cdot\frac{3}{c^2} = 2 \Longrightarrow c = \pm\sqrt{3}$. De las dos soluciones sólo es válida la positiva, la negativa no está en el intervalo. Luego $c = \sqrt{3}$.

3.6.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.6.4 Se pide:

a) Encuentra razonadamente el valor de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \frac{ax+1}{2x+b}$$

tenga una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$ y tienda a 2 cuando $x \to +\infty$

b) Resuelve la siguiente integral:

$$\int x\cos 2x\,dx$$

Solución:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{ax+1}{2x+b} \overset{a\neq -1,\ b=-2}{=} \left[\frac{a+1}{0^-}\right] = -\infty$
$\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+1}{2x+b} \overset{a\neq -1,\ b=-2}{=} \left[\frac{a+1}{0^+}\right] = +\infty$
$\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{ax+1}{2x+b} \overset{a\neq 0}{=} \frac{a}{2} = 2 \Longrightarrow a = 4$
Luego $a = 4$ y $b = -2$

b) $$\int x\cos 2x\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = \cos 2x\,dx \Longrightarrow v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array}\right] =$$
$$\frac{x\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = \frac{x\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C$$

Problema 3.6.5 Estudia la continuidad en $\mathbb{R}$ de la función

$$f(x) = \frac{2e^{x^2-4} - 8x + 14}{x^2 - 2x}$$

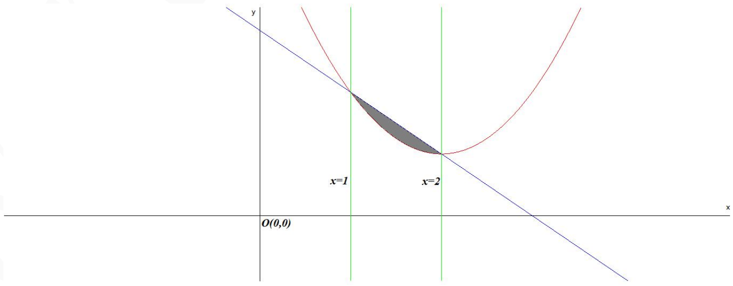
Solución:
La función $f(x)$ es un cociente de funciones continuas y, por tanto, continua en $\mathbb{R}$ salvo en los valores en los que se anule el denominador.
$x^2-2x=0 \Longrightarrow x=0$ y $x=2$. Luego la función f es continua en $\mathbb{R}-\{0,2\}$. Analizamos la función en estos puntos:

- ☛ En $x=0$:
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2e^{x^2-4}-8x+14}{x^2-2x}=\left[\frac{2e^{-4}+14}{0^+}\right]=+\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2e^{x^2-4}-8x+14}{x^2-2x}=\left[\frac{2e^{-4}+14}{0^-}\right]=-\infty$$
La discontinuidad es no evitable con un salto infinito.

- ☛ En $x=2$:
$$\lim_{x\to 2}\frac{2e^{x^2-4}-8x+14}{x^2-2x}=\left[\frac{0}{0}\right]\stackrel{L'H}{=}\lim_{x\to 2}\frac{4xe^{x^2-4}-8}{2x-2}=\left[\frac{0}{2}\right]=0$$
La discontinuidad es evitable con un agujero en el punto $(2,0)$

Problema 3.6.6 Calcula el área de la región delimitada por las funciones $f(x)=x^2-4x+5$ y $g(x)=3-x$.

Solución:
$f(x)=g(x)\Longrightarrow x^2-4x+5=3-x\Longrightarrow x^2-3x+2=0\Longrightarrow x=1$ y $x=2$. Hay un recinto entre $[1,2]$.
$S=\left|\int_1^2(f(x)-g(x))\,dx\right|=\left|\int_1^2(x^2-3x+2)\,dx\right|=\left|\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_1^2\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right|=\left|-\frac{1}{6}\right|=$
$\frac{1}{6}\simeq 0,1667\ u^2$



Problema 3.6.7 Enuncia el teorema de Bolzano. Utiliza este teorema para razonar que la función
$$f(x)=\frac{2e^x-8x-3}{x^2+2}$$
corta al eje de abscisas al menos una vez.

Solución:
Teorema de Bolzano:
Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ tal que $f(a)$ y $f(b)$ toman valores de signo contrario, entonces existe al menos un valor $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

La función f es continua como cociente de funciones continuas y el denominador no se anula, por tanto es continua en $\mathbb{R}$. Vamos a ver su signo cuando tienda x a $+\infty$ y a $-\infty$:
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^x-8x-3}{x^2+2}=\left[\dfrac{-\infty}{\infty}\right]\stackrel{L'H}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^x-8}{2x}=0$ y la función está por debajo de la asíntota horizontal $y=0\Longrightarrow f(-\infty)<0$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x-8x-3}{x^2+2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\stackrel{L'H}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x-8}{2x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\stackrel{L'H}{=}$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x}{2}=+\infty\Longrightarrow f(+\infty)>0$
Por el teorema de Bolzano $\exists c\in(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ tal que $f(c)=0$

3.7. Castilla León

3.7.1. Modelo

Problema 3.7.1 Dada la función $f(x)=3x^4+x^3-1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos y el número total de puntos en los que $f(x)$ se anula. (Téngase en cuenta la monotonía de la función y los valores que toma en los extremos relativos previamente calculados)

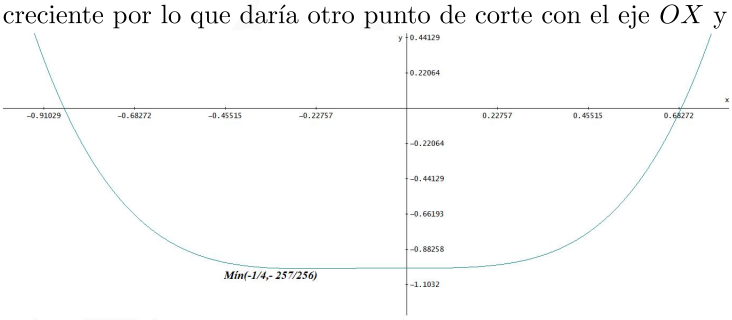
Solución:

- $f'(x)=12x^3+3x^2=0\Longrightarrow x=-\dfrac{1}{4}$ y $x=0$.

	$(-\infty,-1/4)$	$(-1/4,0)$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$

La función decrece en el intervalo $(-\infty,-1/4)$ y crece en $(-1/4,+\infty)$. Tiene un mínimo relativo en $(-1/4,-257/256)$.

- La función no tiene asíntotas horizontales y decrece hasta el mínimo en $(-1/4,-257/256)$ lo que daría un punto de corte con el eje OX. A partir de ese mínimo la función es siempre creciente por lo que daría otro punto de corte con el eje OX y no habría más.



Problema 3.7.2 Dada la función $f(x)=xe^{-x}$, determínense su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese también su gráfica.

Solución:

- ☛ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- ☛ Asíntotas:
  - Verticales: No hay, el denominador no se anula nunca.
  - Horizontales:
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \Longrightarrow y = 0$$
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty \cdot e^{\infty} = -\infty$$
  - Oblicuas: Cuando $x \longrightarrow +\infty$ hay asíntota horizontal y, por tanto, no hay oblicua. Cuando $x \longrightarrow -\infty$:
$$m = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} e^{-x} = e^{\infty} = \infty$$
    Luego no hay oblicuas.
- ☛ $f'(x) = e^{-x}(1-x) = 0 \Longrightarrow x = 1$.

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

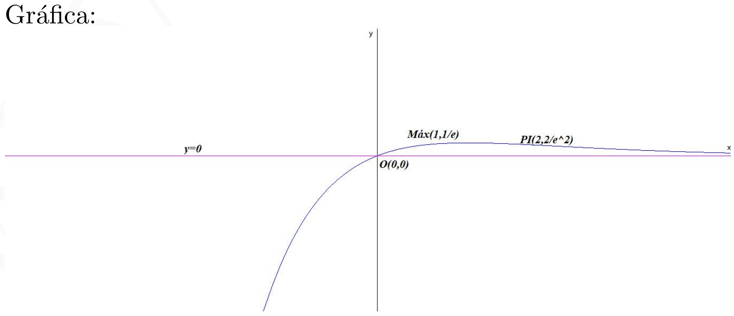
La función crece en el intervalo $(-\infty, 1)$ y decrece en $(1, +\infty)$. Tiene un máximo relativo en $(1, 1/e)$.

- ☛ $f''(x) = e^{-x}(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 2$.

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa ($\frown$) en el intervalo $(-\infty, 2)$ y cóncava ($\smile$) en el intervalo $(2, +\infty)$. Tiene un punto de inflexión en $(2, 2/e^2)$

- ☛ Gráfica:



Problema 3.7.3 Dada la función $f(x) = x \cos x$

a) Demuestre que $f(x)$ es no negativa en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

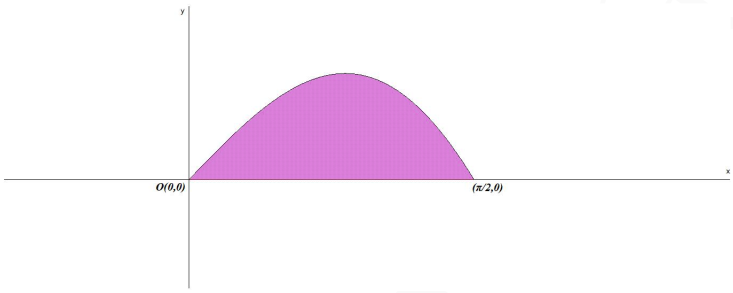
b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje de las x, cuando x pertenece al intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solución:

a) $f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$ luego la curva no corta con el eje de abscisas en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y, por tanto, el signo de la función en este intervalo es el mismo para todos sus puntos. Si probamos con uno de ellos, por ejemplo $x = \frac{\pi}{3} \Longrightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} > 0$. Luego f en este intervalo es positiva.

b) $F(x) = \int x\cos x\, dx = \left[\begin{array}{l} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \Longrightarrow v = \sin x \end{array}\right] = x\sin x - \int \sin x\, dx = x\sin x + \cos x + C$

$$S = \int_0^{\pi/2} x\cos x\, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{\pi}{2} - 1 = 0,5708\ u^2$$



Problema 3.7.4 Se pide:

a) Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\ln(x+1)}$

b) Calcular $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\ln(x+1)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{1/(x+1)} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}[(x+1)(e^x + \sin x)] = 1$

b) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx = \left[\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}dx \\ dx = xdt \end{array}\right] = \int \frac{t^2}{x} xdt = \int t^2\, dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(\ln x)^3}{3} + C$

3.7.2. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.7.5 Dada la función $f(x) = xe^x$, determínense su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese también su gráfica.
Solución:

☛ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

☛ Asíntotas:

- Verticales: No hay ya que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- Horizontales: $y = 0$ cuando $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} xe^x \overset{x=-t}{=} \lim_{t\to +\infty} \frac{-t}{e^t} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{t\to +\infty} \frac{-1}{e^t} = 0$$

  Cuando $x \to \infty \Longrightarrow \lim_{x\to -\infty} xe^x = \infty$ no hay

- Oblicuas: No hay cuando $x \to -\infty$ por tener horizontal y tampoco cuando $x \to \infty$, $m = \lim_{x\to\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$

☛ $f'(x) = (x+1)e^x = 0 \Longrightarrow x = -1$.

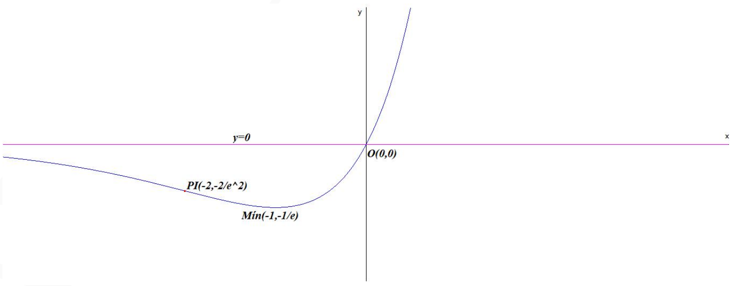
	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función decrece en el intervalo $(-\infty, -1)$ y crece en $(-1, +\infty)$. Tiene un mínimo relativo en $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$.

☛ $f''(x) = (x+2)e^x = 0 \Longrightarrow x = -2$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa ($\frown$) en el intervalo $(-\infty, -2)$ y cóncava ($\smile$) en el intervalo $(-2, \infty)$. Tiene un punto de inflexión en el punto $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$



Problema 3.7.6 Calcule:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$

b) $\int_0^1 xe^x \, dx$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\stackrel{L'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\stackrel{L'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2}=\dfrac{1}{2}$

b) $F(x)=\displaystyle\int xe^x\,dx=\left[\begin{array}{c} u=x\Longrightarrow du=dx\\ dv=e^xdx\Longrightarrow v=e^x\end{array}\right]=xe^x-\int e^x\,dx=$
$xe^x-e^x=(x-1)e^x+C$
$\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx=F(1)-F(0)=0-(-1)=1$

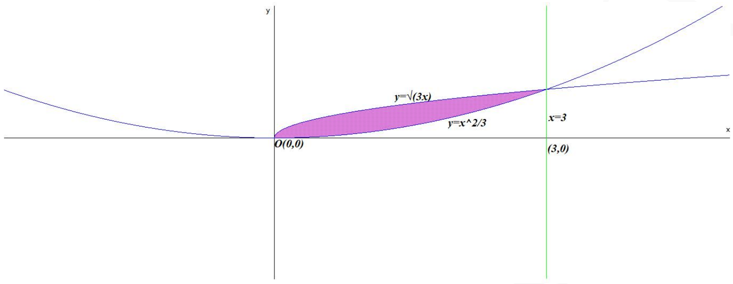
Problema 3.7.7 Dadas las curvas de ecuaciones $y=\sqrt{3x}$, $y=\dfrac{1}{3}x^2$

a) Dibuje las curvas y señale el recinto plano comprendido entre ambas.

b) Calcule el área de dicho recinto.

Solución:

a) $\sqrt{3x}=\dfrac{1}{3}x^2\Longrightarrow x^4-27x=0\Longrightarrow x=0$ y $x=3$.



b)

$$F(x)=\int\left(\sqrt{3x}-\frac{1}{3}x^2\right)dx=\int\sqrt{3x}\,dx-\int\frac{1}{3}x^2\,dx=\left[\begin{array}{c} t=3x\\ dt=3dx\\ dx=\dfrac{dt}{3}\end{array}\right]=$$

$$\int t^{1/2}\frac{dt}{3}-\frac{x^3}{9}=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{3/2}}{3/2}-\frac{x^3}{9}=\frac{2(3x)^{3/2}}{9}-\frac{x^3}{9}$$

$$S=\int_0^3\left(\sqrt{3x}-\frac{1}{3}x^2\right)dx=F(3)-F(0)=3-0=3\ u^2$$

Problema 3.7.8 Se pide:

a) Halle el área del recinto del plano limitado por la gráfica de $f(x)=x^3-4x$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=2$.

b) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{2-2\cos x}$

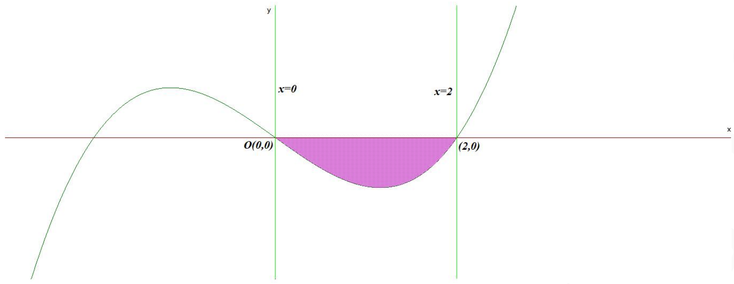
Solución:

a) $x^3-4x=0\Longrightarrow x=0$ y $x=\pm 2\Longrightarrow$ la función f no corta el eje OX en el intervalo $(0,2)$ y sólo hay que calcular un área S_1.

$$S_1=\int_0^2(x^3-4x)\,dx=\left.\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_0^2=-4-0=-4$$

El resultado es negativo por estar la función por debajo del eje OX en el intervalo $[0, 2]$.

$$S = |S_1| = | - 4| = 4\ u^2$$



b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{2-2\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{2\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=}$
$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \cos x - x\sin x}{2\cos x} = \frac{2}{2} = 1$

3.7.3. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.7.9 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2-x}$, se pide:

a) Encuentre su dominio y calcule sus asíntotas, si las tiene.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si los tiene.

Solución:

a) ☛ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

☛ Asíntotas:

- Verticales: En $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{2-x} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = \infty; \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{2-x} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{2-x} = \infty; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{2-x} = -\infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x - x^2} = -1$$

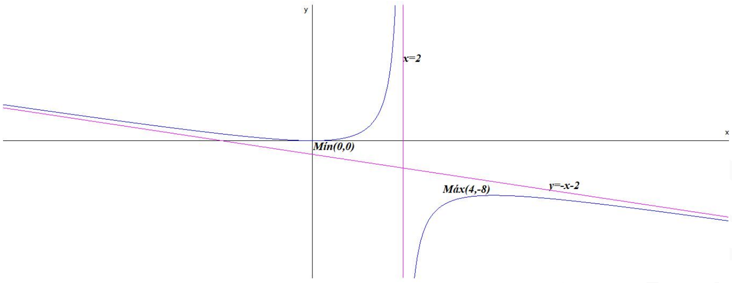
$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{2-x} + x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2-x} = -2$$

$$y = -x - 2$$

b) $f'(x) = -\dfrac{x(x-4)}{(2-x)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 4$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función decrece en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ y crece en $(0, 2) \cup (2, 4)$. Tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$ y un máximo relativo en $(4, -8)$.



Problema 3.7.10 Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$

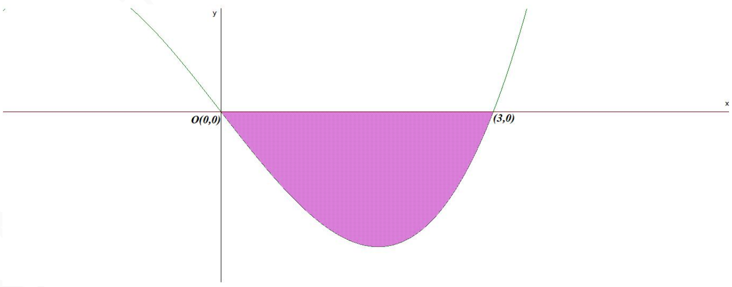
b) Estudiando previamente el signo de la función en el intervalo $[0, 3]$, hállese el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 9x$ y el eje de abscisas, cuando x varía en el intervalo $[0, 3]$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{e^x - 1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{1+x}}{e^x} = 1$

b) $x^3 - 9x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pm 3$. Ninguno de estos puntos están en el interior del intervalo y tenemos un único recinto. El signo de la función en el intervalo es negativo (basta sustituir $x = 1$ en la función), por lo que el valor de la integral será también negativo.

$$S = \left| \int_0^3 (x^3 - 9x)\, dx \right| = \left| \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} \right]_0^3 \Bigg| = \left| -\frac{81}{4} \right| = \frac{81}{4} \simeq 20,25\ u^2$$



Problema 3.7.11 Se pide:

a) Enuncie el teorema de Bolzano.

b) Averigüe si la función $f(x) = x + \sin x - 2$ se anula en algún punto del intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Solución:

a) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ con signo$(f(a)) \neq$signo$(f(b))$. Entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

b) f es una función continua en $\mathbb{R}$ y, por tanto, en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ $f(0) = -2 < 0$ y $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} - 1 > 0$, luego f cumple las condiciones del teorema de Bolzano en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Luego

$$\exists c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ tal que } f(c) = 0$$

Problema 3.7.12 Se pide:

a) Estudie el signo de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ en el intervalo $[0, 2]$.

b) Calcule el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 2]$.

Solución:

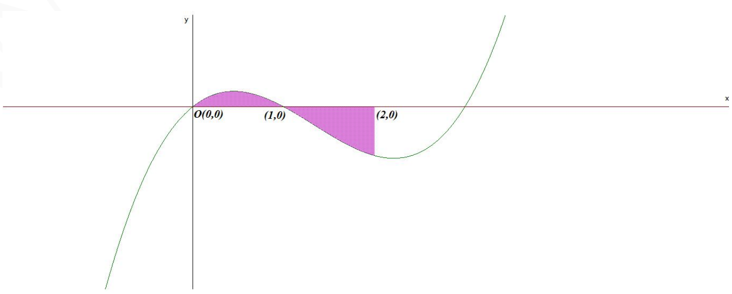
a) $x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Longrightarrow x = 0$, $x = 1$ y $x = 3 \Longrightarrow$ la función f corta el eje OX en el intervalo $(0, 2)$ en $x = 1$ y hay que calcular dos áreas S_1 en $(0, 1)$ y S_2 en $(1, 2)$.
El signo de la función en el intervalo $(0, 1)$ es positiva (basta sustituir $x = 1/2$ en la función) y el signo de la función en el intervalo $(1, 2)$ es negativa (basta sustituir $x = 3/2$ en la función) El valor de S_1 será positivo y el de S_2 negativo. El área total será $S = |S_1| + |S_2|$.

$$F(x) = \int (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + C$$

$$S_1 = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx = F(1) - F(0) = \frac{5}{12}$$

$$S_2 = \int_1^2 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx = F(2) - F(1) = -\frac{13}{12}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \left|\frac{5}{12}\right| + \left|-\frac{13}{12}\right| = \frac{3}{2} = 1,5\ u^2$$



3.8. Cataluña

3.8.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.8.1 Sea $f'(x) = 3x^2 - 12x$ la derivada de una función $f(x)$.

a) Si sabemos que $f(x)$ corta el eje de las abscisas en $x = 1$, calcula la expresión de la función $f(x)$.

b) Calcule la abscisa del punto de inflexión de $f(x)$ y estudie la concavidad de la función.

c) Sabemos que el área del recinto limitado por la curva $y = f''(x)$, el eje de las abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = a$, con $a > 2$, es 15 u^2. Calcule el valor de a.

Solución:

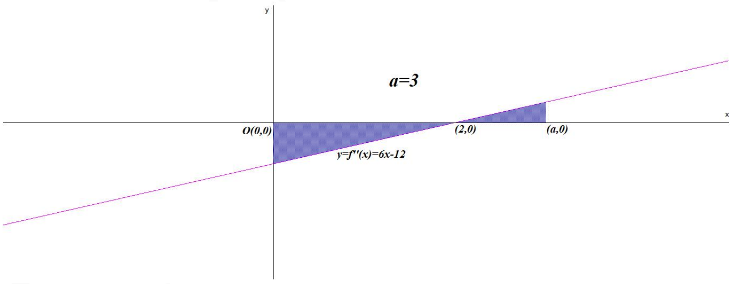
a) $f(x) = \int (3x^2 - 12x)\, dx = x^3 - 6x^2 + C$ y $f(1) = 0 \Longrightarrow 1 - 6 + C = 0 \Longrightarrow C = 5 \Longrightarrow$
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

b) $f''(x) = 6x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 2$

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es cóncava $\smile$ en el intervalo $(2, \infty)$ y convexa en el $(-\infty, 2)$. Presenta un punto de inflexión en $x = 2$.

c) la función $f''(x) = 6x - 12$ es una recta que corta al eje de abscisas en $x = 2$, por lo que tenemos dos recintos $S_1 : [0, 2]$ y $S_2 : [2, a]$.
$F(x) = \int (6x - 12)\, dx = 3x^2 - 12x$
$S_1 = \int_0^2 (6x - 12)\, dx = F(2) - F(0) = -12 - 0 = -12$
$S_2 = \int_2^a (6x - 12)\, dx = F(a) - F(2) = 3a^2 - 12a + 12$
$S = |S_1| + |S_2| = 12 + 3a^2 - 12a + 12 = 3a^2 - 12a + 24 = 15 \Longrightarrow 3(a^2 - 4a + 3) = 0 \Longrightarrow a = 3$ y $a = 1$, esta última no es válida, ya que $a > 2$ según dice el enunciado. Luego $a = 3$



Problema 3.8.2 Se pide:

a) Encuentre una función polinómica $y = g(x)$ de grado 3 tal que corte el eje de las ordenadas en el punto $(0, 5)$, que la recta tangente a $y = g(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal y que $g"(x) = 2x + 1$.

b) Compruebe que la función $f(x) = -x^3+6x^2-16$ tiene una raíz en $x = 2$ y que es estrictamente creciente en el intervalo $(0, 4)$. Utilice esta información para calcular el área determinada por la función $f(x)$, el eje de las abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

Solución:

a) $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Longrightarrow g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Longrightarrow g''(x) = 6ax + 2b = 2x + 1$

$$\begin{cases} 6a = 2 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{3} \\ \\ 2b = 1 \Longrightarrow b = \dfrac{1}{2} \\ \\ g(0) = 5 \Longrightarrow d = 5 \\ g'(1) = 0 \Longrightarrow 3a + 2b + c = 0 \Longrightarrow 1 + 1 + c = 0 \Longrightarrow c = -2 \end{cases} \Longrightarrow$$

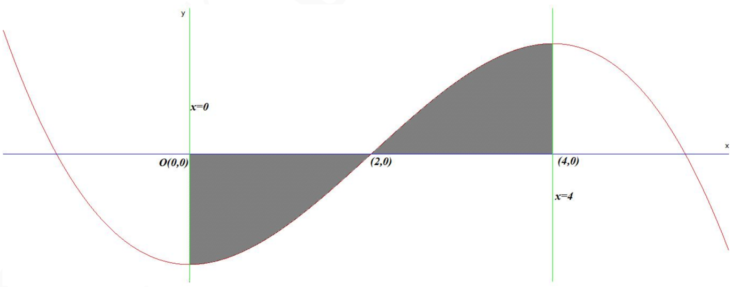
$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$$

b) $f(2) = -8 + 24 - 16 = 0 \Longrightarrow x = 2$ es una raiz de $f(x)$.
$f'(x) = -3x^2 + 12x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 4$. Tenemos $\forall x \in (0, 4) \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ es estrictamente creciente en todo el intervalo.
La función corta al eje de abscisas en $x = 2 \Longrightarrow$ hay dos recintos S_1 y S_2

$$S_1 = \int_0^2 (-x^3 + 6x^2 - 16)\, dx = -\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 16x\Big]_0^2 = -20$$

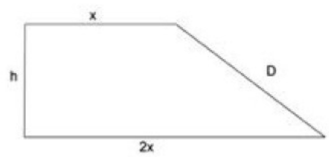
$$S_2 = \int_2^4 (-x^3 + 6x^2 - 16)\, dx = -\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 16x\Big]_2^4 = 20$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 20 + 20 = 40\ u^2$$



Problema 3.8.3

En el patio de una escuela se quiere crear un área de juego de 30 m^2 para los más pequeños en forma de trapecio rectangular, de modo que la base más grande mida el doble que la base más pequeña, tal y como muestra la figura, y que el lado oblicuo respecto a las bases (D) sea lo más corto posible.



a) Justifique que se satisfacen las siguientes relaciones: $h = \dfrac{20}{x}$ y $D(x) = \sqrt{\dfrac{400}{x^2} + x^2}$

b) Encuentre las dimensiones del trapecio para las que la longitud del lado D es mínima.

Solución:

a) El área de un trapecio es $S = \dfrac{x+2x}{2} \cdot h \Longrightarrow 30 = \dfrac{3x}{2} h \Longrightarrow h = \dfrac{20}{x}$

$D^2(x) = (2x-x)^2 + h^2 = x^2 + \dfrac{400}{x^2} \Longrightarrow D(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{400}{x^2}}$

b) Tenemos $D(x) = \sqrt{\dfrac{x^4+400}{x^2}} \Longrightarrow D'(x) = \dfrac{2(x^4-400)/x^3}{2\sqrt{\frac{x^4+400}{x^2}}} = \dfrac{x^4-400}{x^3\sqrt{\frac{x^4+400}{x}}} = 0 \Longrightarrow x^4 - 400 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt[4]{400} = 2\sqrt{5} \simeq 4{,}472135954$ m^2.

	$\left(0, 2\sqrt{5}\right)$	$\left(2\sqrt{5}, \infty\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(0, 2\sqrt{5})$ y creciente en el $(2\sqrt{5}, \infty)$ con un mínimo relativo en $(2\sqrt{5}, 2\sqrt{10})$

Tendríamos $x = 2\sqrt{5}$ m^2, $D(2\sqrt{5}) = 2\sqrt{10}$ m^2 y $h = 2\sqrt{5}$ m^2.

3.8.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.8.4 Considere la función $f(x) = \dfrac{9}{x^2+x-2}$.

a) Determine el dominio, las posibles asíntotas, los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) Calcula la ecuación general de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$. Represente en un mismo gráfico la función $f(x)$ y la recta tangente

Solución:

a)
- ☛ $x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = -2 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$
- ☛ Asíntotas:
  - • Verticales:
    - ∘ En $x = -2$:

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{9}{x^2+x-2} = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty;$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{9}{x^2+x-2} = \left[\frac{9}{0^-}\right] = -\infty$$

    - ∘ En $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{9}{x^2+x-2} = \left[\frac{9}{0^-}\right] = -\infty;$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{9}{x^2+x-2} = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty$$

  - • Horizontales: $y = 0$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{9}{x^2+x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{9}{x^2+x-2} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

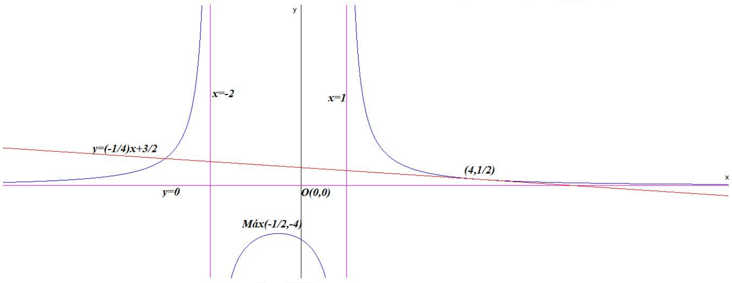
☛ Monotonía: $f'(x) = -\dfrac{9(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup \left(-2, -\dfrac{1}{2}\right)$ y decreciente $\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right) \cup (1, \infty)$. Tiene un máximo relativo en el punto $\left(-\dfrac{1}{2}, -4\right)$

b) $m = f'(4) = -\dfrac{1}{4}$, $b = f(4) = \dfrac{1}{2}$ e $y - b = m(x - a) \Longrightarrow$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-4) \Longrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$



Problema 3.8.5 Se pide:

a) Considere la función $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si} \quad x \in (0, e) \\ ax + b & \text{si} \quad x \in [e, 4) \end{cases}$, donde a y b son números reales. Encuentre el valor de a y de b para que la función sea continua y derivable en el intervalo $(0, 4)$.

b) Calcule la función $g(x)$ que satisface $g'(x) = \dfrac{x^3}{9x^4 + 1}$ y que pasa por el punto $(0, -1)$.

Solución:

a) la función es continua y derivable en las ramas definidas, hay que imponerlo en $x = e$:

☛ Continuidad en $x = e$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to e^-} f(x) = \lim\limits_{x \to e^-} \ln x = 1 \\ \lim\limits_{x \to e^+} f(x) = \lim\limits_{x \to e^+} \ln(ax + b) = ae + b \\ f(e) = ae + b \end{array}\right. \Longrightarrow ae + b = 1$$

☛ Derivabilidad en $x = e$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \in (0, e) \\ a & \text{si} \quad x \in [e, 4) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(e^-) = \dfrac{1}{e} \\ f'(e^+) = a \end{cases} \Longrightarrow a = \frac{1}{e}$$

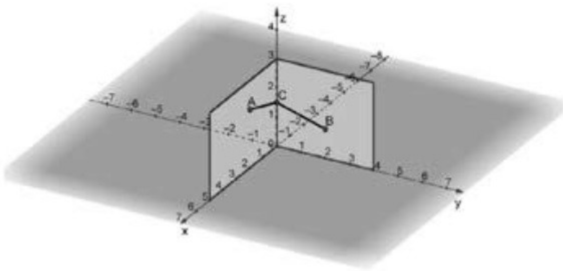
$$☛ \begin{cases} ae + b = 1 \\ a = \dfrac{1}{e} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{e} \\ b = 0 \end{cases}$$

b) $F(x) = \displaystyle\int \frac{x^3}{9x^4+1}\,dx = \frac{1}{36}\int \frac{36x^3}{9x^4+1}\,dx = \frac{1}{36}\ln|9x^4+1| + C$

$F(0) = 0 + C = -1 \Longrightarrow F(x) = \dfrac{1}{36}\ln|9x^4+1| - 1$

Problema 3.8.6

La siguiente imagen muestra dos paredes perpendiculares de una sala representadas en unos ejes de coordenadas, de modo que una pared está en el plano $y = 0$ y la otra está en el plano $x = 0$.



En el punto $A = (2, 0, 2)$ se quiere fijar un altavoz que debe estar conectado a un equipo de sonido, el cual está situado en la otra pared, en el punto $B = (0, 2, 1)$. La conexión entre A y B la realizaremos mediante un cable que pase por el punto $C = (0, 0, h)$, situado en la recta vertical de intersección de las dos paredes. Dado que la calidad del sonido depende, entre otros factores, de la longitud del cable que une a los dos aparatos, se quiere realizar una instalación con el mínimo de cable posible.

a) Compruebe que la longitud total del cable necesario, en función de la altura h por donde debe pasar el cable en el eje vertical OZ, viene dada por la expresión $L(h) = \sqrt{h^2 - 4h + 8} + \sqrt{h^2 - 2h + 5}$

b) Calcula las coordenadas del punto C por donde debe pasar el cable para que la longitud del cable sea mínima. Calcule esta longitud mínima del cable.

Solución:

a) $A(2, 0, 2)$, $B(0, 2, 1)$ y $C(0, 0, h)$

$\overline{AC} = |\overrightarrow{AC}| = |(-2, 0, h-2)| = \sqrt{4 + (h-2)^2} = \sqrt{h^2 - 4h + 8}$

$\overline{BC} = |\overrightarrow{BC}| = |(0, -2, h-1)| = \sqrt{4 + (h-1)^2} = \sqrt{h^2 - 2h + 5}$

$L(h) = \sqrt{h^2 - 4h + 8} + \sqrt{h^2 - 2h + 5}$

b) $L'(h) = \dfrac{2h-4}{2\sqrt{h^2-4h+8}} + \dfrac{2h-2}{2\sqrt{h^2-2h+5}} = 0 \Longrightarrow$

$L'(x) = \dfrac{(h-1)\sqrt{h^2-4h+8} + (h-2)\sqrt{h^2-2h+5}}{\sqrt{h^2-2h+5}\sqrt{h^2-4h+8}} = 0 \Longrightarrow$

$(h-1)\sqrt{h^2-4h+8} + (h-2)\sqrt{h^2-2h+5} = 0 \Longrightarrow$

$(h-1)\sqrt{h^2-4h+8} = -(h-2)\sqrt{h^2-2h+5} \Longrightarrow$

$(h-1)^2(h^2-4h+8)=(h-2)^2(h^2-2h+5)\Longrightarrow$
$(h-1)^2(h^2-4h+8)-(h-2)^2(h^2-2h+5)=0\Longrightarrow$
$8h-12=0\Longrightarrow h=\dfrac{3}{2}$

	$\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$	$\left(\dfrac{3}{2},\infty\right)$
$L'(h)$	$-$	$+$
$L(h)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ y creciente $\left(\dfrac{3}{2},\infty\right)$. Tiene un mínimo relativo en el punto $\left(\dfrac{3}{2},\sqrt{17}\right)$

El punto $C\left(0,0,\dfrac{3}{2}\right)$ y la longitud mínima es de $L\left(\dfrac{3}{2}\right)=\sqrt{17}\simeq 4,1231\ u$

3.9. Comunidad Valenciana

3.9.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.9.1 Consideramos la función $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-4}$. Obtener:

a) El dominio y los puntos de corte con los ejes.

b) Las asíntotas de la función.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos.

d) La primitiva de la función $f(x)$.

Solución:

$$f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-4}$$

a) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$, puntos en los que se anula el denominador.
Puntos de corte:

- ☛ Con el eje OX: $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-4}=0\Longrightarrow x^2+3=0$ no tiene solución y la función no corta el eje de abscisas.
- ☛ Con el eje OY: hacemos $x=0\Longrightarrow\left(0,-\dfrac{3}{4}\right)$

b) Asíntotas:

- ☛ **Verticales:**
  - $x=2$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\left[\frac{7}{0^-}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\left[\frac{7}{0^+}\right]=+\infty$$

- $x = -2$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \left[\frac{7}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \left[\frac{7}{0^-}\right] = -\infty$$

☛ **Horizontales:** $y = 1$

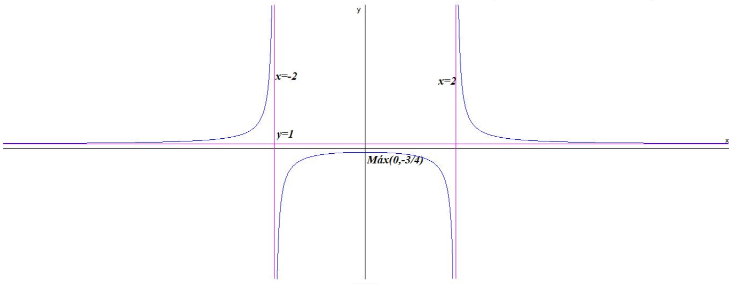
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+3}{x^2-4} = 1$$

☛ **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

c) $f'(x) = -\dfrac{14x}{(x^2-4)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decreciente en el intervalo $(0, 2) \cup (2, \infty)$. La función presenta un máximo relativo en el punto $\left(0, -\dfrac{3}{4}\right)$



d) $$\int x^2 + 3x^2 - 4\, dx = \left[\begin{array}{l} \begin{array}{r} (\quad x^2+3) : (x^2-4) = 1 + \dfrac{7}{x^2-4} \\ \underline{-\,x^2+4} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ 7 \qquad\qquad\qquad\qquad \end{array} \end{array}\right] =$$

$$\int \left(1 + \frac{7}{x^2-4}\right) dx = x + \int \frac{7}{x^2-4}\, dx =$$

$$\left[\begin{array}{c} \dfrac{7}{x^2-4} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+2} = \dfrac{A(x+2)+B(x-2)}{x^2-4} \\ 7 = A(x+2) + B(x-2) \\ x = 2 \Longrightarrow 7 = 4A \Longrightarrow A = \dfrac{7}{4} \\ x = -2 \Longrightarrow 7 = -4B \Longrightarrow B = -\dfrac{7}{4} \\ \dfrac{7}{x^2-4} = \dfrac{7/4}{x-2} + \dfrac{-7/4}{x+2} \end{array}\right] =$$

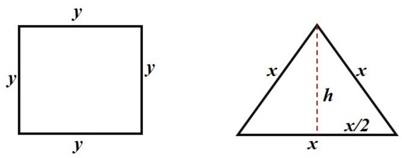
$$x + \int \left(\frac{7/4}{x-2} + \frac{-7/4}{x+2}\right) dx = x + \frac{7}{4}\ln|x-2| - \frac{7}{4}\ln|x+2| + C$$

Problema 3.9.2 Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes un cable de acero de 240 m. de longitud.

a) Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor x que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo.

b) Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima.

Solución:



a) Tenemos $4y + 3x = 240 \Longrightarrow y = \dfrac{240-3x}{4}$

El área del cuadrado es $S_c = y^2 = \dfrac{(240-3x)^2}{16}$

La altura h del triángulo es $h = \sqrt{x^2 - \dfrac{x^2}{4}}$ y el área del triángulo será $S_t = \dfrac{xh}{2} = \dfrac{x\sqrt{x^2-\frac{x^2}{4}}}{2} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$

El área total es $S(x) = \dfrac{(240-3x)^2}{16} + \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{(240-3x)^2 + 4x^2\sqrt{3}}{16} \Longrightarrow$

$S(x) = \dfrac{(4\sqrt{3}+9)x^2 - 1440x + 57600}{16}$

b) $S'(x) = \dfrac{2(4\sqrt{3}+9)x - 1440}{16} = \dfrac{(4\sqrt{3}+9)x - 720}{8} = 0 \Longrightarrow$

$(4\sqrt{3}+9)x - 720 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{720}{4\sqrt{3}+9} \simeq 45,20$ m.

$S''(x) = \dfrac{4\sqrt{3}+9}{8} \Longrightarrow S''(45,20) = \dfrac{4\sqrt{3}+9}{8} > 0 \Longrightarrow x = 45,20$ m es un mínimo relativo.

Luego para construir el triángulo necesitaremos $3x = \dfrac{2160}{4\sqrt{3}+9} \simeq 135,61$ m.

El área mínima será: $S(45,20) = 1565,87$ m^2.

3.9.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.9.3 Se pide:

a) Calcular, indicando todos los pasos, la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx$$

b) Determinar, en función de t, el valor $\displaystyle\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx$

c) Determinar el valor de t mayor que 8 para que $\displaystyle\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx$ sea igual a $\ln\dfrac{25}{4}$.

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx =$

$$\left[\begin{array}{c} x^2-5x-14=0 \Longrightarrow x=-2,\ x=7 \\ x^2-5x-14=(x+2)(x-7) \\ \dfrac{18}{x^2-5x-14} = \dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x-7} = \dfrac{A(x-7)+B(x+2)}{x^2-5x-14} \\ 18 = A(x-7)+B(x+2) \\ x=-2 \Longrightarrow 18=-9A \Longrightarrow A=-2 \\ x=7 \Longrightarrow 18=9B \Longrightarrow B=2 \\ \dfrac{18}{x^2-5x-14} = \dfrac{-2}{x+2}+\dfrac{2}{x-7} \end{array}\right] =$$

$\displaystyle\int\left(\frac{-2}{x+2}+\frac{2}{x-7}\right)dx = -2\int\frac{1}{x+2}\,dx + 2\int\frac{1}{x-7}\,dx =$
$-2\ln|x+2| + 2\ln|x-7| + C$

b) $\displaystyle\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx = F(t)-F(8) = -2\ln|t+2|+2\ln|t-7|+2\ln 10$

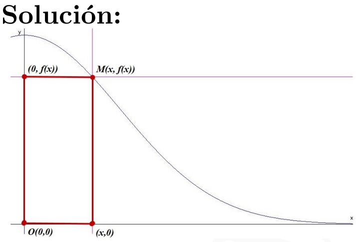
c) $-2\ln|t+2|+2\ln|t-7|+2\ln 10 = \ln\dfrac{25}{4} \overset{t>8}{\Longrightarrow} 2\ln\dfrac{10(t-7)}{t+2} = 2\ln\dfrac{5}{2} \Longrightarrow 20(t-7)=5(t+2) \Longrightarrow$
$15t = 150 \Longrightarrow t = 10$

Problema 3.9.4 Considerar la función $f(x) = e^{-x^2}$ para los valores positivos de x. Por cada punto $M = (x, f(x))$ de la gráfica de f se trazan dos rectas paralelas a los ejes de coordenadas, OX y OY. Estas dos rectas, junto con los ejes de coordenadas, definen un rectángulo.

a) Determinar el área del rectángulo en función de x.

b) Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área.

Solución:



a) $S(x, f(x)) = x\cdot f(x) \Longrightarrow S(x) = xe^{-x^2}$

b) $S'(x) = (1-2x^2)e^{-x^2} = 0 \Longrightarrow 1-2x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. La solución negativa es irrelevante.
$S''(x) = 2x(2x^2-3)e^{-x^2} \Longrightarrow S''\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2\sqrt{2}e^{-1/2} < 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ es un máximo.
$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2e}} = \dfrac{\sqrt{2e}}{2e}$
Luego $M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2e}}{2e}\right)$, el área es $\dfrac{\sqrt{2e}}{2e} \simeq 0,4289\ u^2$

3.10. Extremadura

3.10.1. Modelo

Problema 3.10.1 Dada la función $f(x) = (x+2)e^{-x}$,

a) Calcule la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $x = 0$.

b) Estudie su monotonía y sus extremos relativos.

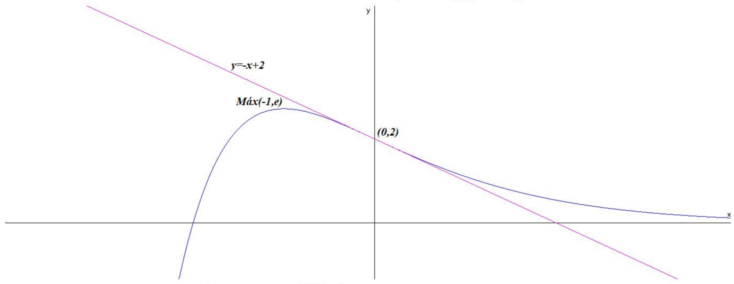
Solución:

a) $a = 0$, $b = f(a) = f(0) = 2$, $f'(x) = -(x+1)e^{-x}$ y $m = f'(a) = f'(0) = -1$. La tangente tiene por ecuación $y - b = m(x - a) \Longrightarrow y - 2 = -1(x - 0) \Longrightarrow y = -x + 2$

b) $f'(x) = -(x+1)e^{-x} = 0 \Longrightarrow x = -1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función crece en el intervalo $(-\infty, -1)$ y decrece en $(-1, \infty)$. Tiene un máximo relativo en $(-1, e)$ y no hay mínimos relativos



Problema 3.10.2 Calcule a, b y c para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + a & \text{si} \quad -2 \le x \le 0 \\ bx^2 + cx - 1 & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \end{cases}$$

cumpla las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-2, 1]$. Calcule el valor al cual se refiere el teorema.
Solución:

- La función es continua y derivable en ambas ramas en el intervalo $[-2, 1]$, hay que analizar la continuidad y derivabilidad en $x = 0$
- Continuidad en $x = 0$:
  $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^3 + a) = a$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (bx^2 + cx - 1) = -1$, $f(0) = a$
  Para que sea continua: $a = -1$.
- Derivabilidad:
  $$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si} \quad -2 \le x \le 0 \\ 2bx + c & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \end{cases}$$
  Para que sea derivable en $x = 0$ es $f'(0^-) = f'(0^+) \Longrightarrow 0 = c$

- ☛ Para que se cumplan las condiciones del teorema de Rolle falta que $f(-2) = f(1) \Longrightarrow -8 + a = b + c - 1 \Longrightarrow -9 = b - 1 \Longrightarrow b = -8$

- ☛ $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si} \quad -2 \le x \le 0 \\ -8x^2 - 1 & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \end{cases}$ cumple las condiciones del teorema de Rolle.

- ☛ Tenemos: $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si} \quad -2 \le x \le 0 \\ -16x & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \end{cases}$ El teorema nos asegura que $\exists\, c \in (-2, 1)$ tal que $f'(c) = 0$ lo cual se cumple para $c = 0$.

Problema 3.10.3 Calcule el valor de la integral $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \cos 2x \, dx$.

Solución:

$$F(x) = \int x^2 \cos 2x \, dx = \left[\begin{array}{c} u = x^2 \Longrightarrow du = 2xdx \\ dv = \cos 2x \, dx \Longrightarrow v = \dfrac{1}{2} \sin 2x \\ \displaystyle\int udv = uv - \int vdu \end{array} \right] =$$

$$\frac{x^2 \sin 2x}{2} - \int x \sin 2x \, dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = \sin 2x \, dx \Longrightarrow v = -\dfrac{1}{2} \cos 2x \\ \displaystyle\int udv = uv - \int vdu \end{array} \right] =$$

$$\frac{x^2 \sin 2x}{2} - \left[-\frac{x \cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \right] =$$

$$\frac{x^2 \sin 2x}{2} + \frac{x \cos 2x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C = \frac{(2x^2 - 1) \sin 2x + 2x \cos 2x}{4} + C$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos 2x \, dx = F(\pi) - F(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Problema 3.10.4 Calcule el área de la región plana encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 2x - 1$ y $g(x) = 2x - 1$.

Solución:

$f(x) = g(x) \Longrightarrow x^3 - 2x - 1 = 2x - 1 \Longrightarrow x^3 - 4x = 0 \Longrightarrow x = -2,\ x = 0$ y $x = 2$

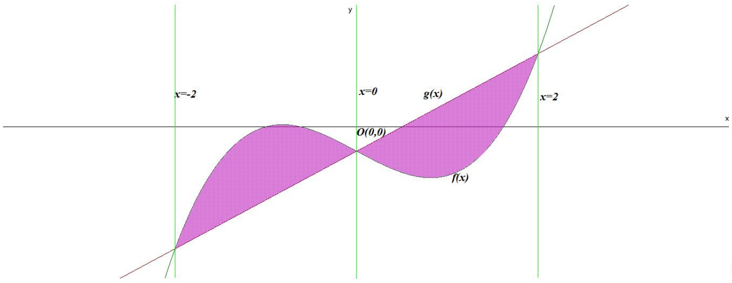
Tenemos dos recintos: S_1 en $[-2, 0]$ y S_2 en $[0, 2]$

$$F(x) = \int (f(x) - g(x)) \, dx = \int (x^3 - 4x) \, dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

$$S_1 = \int_{-2}^{0} (f(x) - g(x)) \, dx = F(0) - F(-2) = 4$$

$$S_2 = \int_{0}^{2} (f(x) - g(x)) \, dx = F(2) - F(0) = -4$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 4 + 4 = 8 \ u^2$$



3.10.2. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.10.5 Calcular el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x - \sin x}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Sea continua en $x = 0$.
Solución:
La función $f(x)$ es continua en $x = 0$ si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$:
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^x - \sin x}{x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + xe^x - \cos x}{2x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=}$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^x + xe^x + \sin x}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 = f(0) = a$
Luego $a = 1$

Problema 3.10.6 Dada la función $f(x) = |x+1| + |x-2|$

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función.

b) Calcular el intervalo donde la función permanece constante.

Solución:

$$|x+1| = \begin{cases} -x-1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x+1 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases} \qquad |x-2| = \begin{cases} -x+2 & \text{si} \quad x < 2 \\ x-2 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases} \Longrightarrow$$

	$(-\infty, -1]$	$(-1, 2)$	$[2, \infty)$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$
$f(x)$	$-2x+1$	3	$2x-1$

$\Longrightarrow$

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 3 & \text{si} \quad -1 < x < 2 \\ 2x-1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

a) Las ramas son continuas y derivables. Hay que estudiarla en $x = -1$ y $x = 2$.

☛ Continuidad:

- En $x = -1$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (-2x+1) = 3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} 3 = 3 \\ f(-1) = 3 \end{cases} \Longrightarrow f$ es continua en $x = -1$

- En $x = 2$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} 3 = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (2x-1) = 3 \\ f(2) = 3 \end{cases} \Longrightarrow f$ es continua en $x = 2$
- La función es continua en $\mathbb{R}$

☛ Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} & x \le -1 \\ 0 & \text{si} & -1 < x < 2 \\ 2 & \text{si} & x \ge 2 \end{cases}$$

- En $x = -1$
  $f'(-1^-) = -2 \neq f'(-1^+) = 0 \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = -1$
- En $x = 2$
  $f'(2^-) = 0 \neq f'(2^+) = 2 \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 2$
- La función es derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$

b) La función es constante en el intervalo $(-1, 2)$

Problema 3.10.7 Determinar la función $f(x)$ tal que su gráfica pase por el origen de coordenadas y su derivada sea $f'(x) = (2x+1)e^{-x}$

Solución:

$f(x) = \displaystyle\int (2x+1)e^{-x}\, dx = \left[\begin{array}{c} u = 2x+1 \Longrightarrow du = 2dx \\ dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right] =$

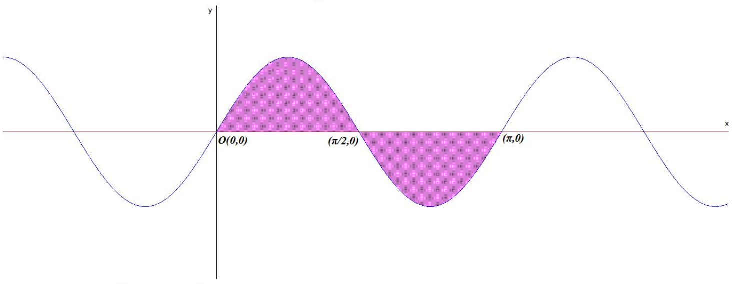
$-(2x+1)e^{-x} + 2\displaystyle\int e^{-x} = -(2x+1)e^{-x} - 2e^{-x} + C = -e^{-x}(2x+3) + C$

$f(0) = -3 + C = 0 \Longrightarrow C = 3 \Longrightarrow f(x) = -e^{-x}(2x+3) + 3$

Problema 3.10.8 Calcular el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = \sin(2x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

Solución:

$f(x) = \sin(2x) = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ luego tenemos dos recintos: $S_1 : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ y $S_2 : \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$.



$$S_1 = \int_0^{\pi/2} \sin 2x\, dx = -\frac{\cos 2x}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$S_1 = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin 2x\, dx = -\frac{\cos 2x}{2}\Big]_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 1 + 1 = 2\ u^2$$

3.10.3. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.10.9 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$$

a) Estudiar asíntotas, monotonía y puntos extremos de $f(x)$.

b) Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de $f(x)$.

Solución:

a) **Asíntotas:**

☛ Verticales:

- En $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

- En $x = -1$:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = \left[\frac{-1}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$$

☛ Horizontales: No hay.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = -\infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x-x^3} = -1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} + x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0$$

$$y = -x$$

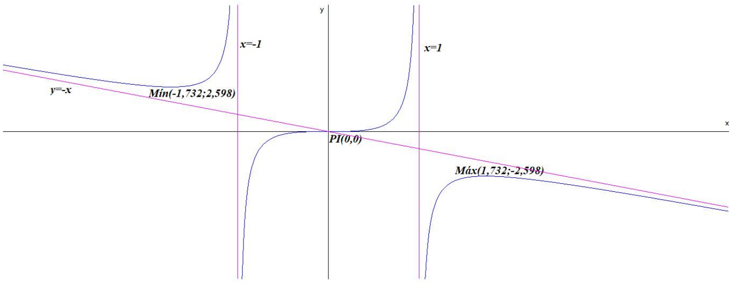
Monotonía

$$f'(x) = -\frac{x^2(x^2-3)}{(1-x^2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = \pm\sqrt{3}$$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $(-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3})$ y decreciente en el $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$. Tiene un mínimo relativo en el punto $\left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \simeq (-1,732; 2,598)$ y un máximo relativo en el $\left(\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \simeq (1,732; -2,598)$

b) Representación gráfica:



Problema 3.10.10 Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de la función $f(x) = x - \ln(x^2+1)$
Solución:

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} \Longrightarrow f''(x) = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

$$f'''(x) = -\frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'''(1) = 1 \neq 0 \Longrightarrow x = 1, \text{ punto de inflexión} \\ f'''(-1) = -1 \neq 0 \Longrightarrow x = -1, \text{ punto de inflexión} \end{array} \right.$$

Problema 3.10.11 Calcular la integral $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 - x}\, dx$

Solución:

$$\int \frac{1}{x^3-x}\, dx =$$

$$\left[\begin{array}{c} x^3 - x = 0 \Longrightarrow x = 0 \; x = 1, \; x = 1 \\ x^3 - x = x(x+1)(x-1) \\ \dfrac{1}{x^3-x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-1} = \dfrac{A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)}{x^3-x} \\ 1 = A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1) \\ x = 0 \Longrightarrow 1 = -A \Longrightarrow A = -1 \\ x = -1 \Longrightarrow 1 = 2B \Longrightarrow B = 1/2 \\ x = 1 \Longrightarrow 1 = 2C \Longrightarrow A = 1/2 \\ \dfrac{1}{x^3-x} = \dfrac{-1}{x} + \dfrac{1/2}{x+1} + \dfrac{1/2}{x-1} \end{array} \right] =$$

$$\int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1/2}{x+1} + \frac{1/2}{x-1} \right) dx = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C$$

Problema 3.10.12 Hallar el parámetro positivo $a \in \mathbb{R}$ tal que el área de la región plana encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = ax$ sea $4/3$.

Solución:
$f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 = ax \Longrightarrow x^2 - ax = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = a$ luego tenemos un recintos: $S_1 : [0, a]$

$$S_1 = \int_0^a (x^2 - ax)\, dx = \left. \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right]_0^a = -\frac{a^3}{6} - 0 = -\frac{a^3}{6}$$

$$S = |S_1| = \frac{a^3}{6} = \frac{4}{3} \Longrightarrow a^3 = 8 \Longrightarrow a = 2$$

3.11. Galicia

3.11.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.11.1 Se pide:

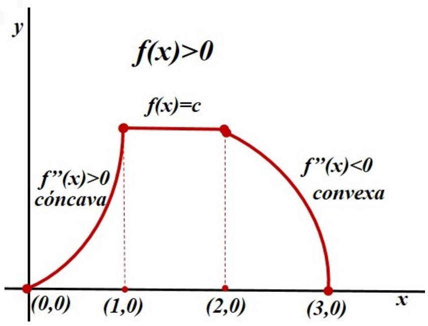
a) Calcule los límites $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\cos x}{\sin x}$ y $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$, donde $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x.

b) Dibuje la gráfica de una función f continua y no negativa en el intervalo $[0,3]$ tal que: $f(0)=0$, $f(3)=0$, $f''>0$ en el intervalo $(0,1)$, $f''<0$ en el intervalo $(2,3)$ y f es constante en el intervalo $(1,2)$.

Solución:

a)
- ☛ $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\cos x}{\sin x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\stackrel{L'H}{=} lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x - x\sin x}{\cos x}=\dfrac{1}{1}=1$
- ☛ $\lim_{x\to 0^+} x\ln x=[0\cdot(-\infty)]=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left[\dfrac{-\infty}{\infty}\right]\stackrel{L'H}{=}\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$

b)
- ☛ $f(x)\geq 0$ La función es positiva en el intervalo $[0,3]$ quiere decir que está por encima del eje OX.
- ☛ Hay dos puntos de corte en $(0,0)$ y $(3,0)$
- ☛ $f''(x)>0 \Longrightarrow$ es cóncava $\smile$ en el intervalo $(0,1)$
- ☛ $f(x)=c \Longrightarrow$ es una función constante en el intervalo $(1,2)$
- ☛ $f''(x)<0 \Longrightarrow$ es convexa $\frown$ en el intervalo $(2,3)$
- ☛ Gráfica:



Problema 3.11.2 Obtenga la función f, sabiendo que $f''(x)=2x-e^{-x}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$ es $y=3x-1$.

Solución:

$$f'(x)=\int(2x-e^{-x})\,dx=x^2+e^{-x}+K$$

$$m=f'(0)=0+1+C=3\Longrightarrow K=2\Longrightarrow f'(x)=x^2+e^{-x}+2$$

$$f(x)=\int(x^2+e^{-x}+2)\,dx=\frac{x^3}{3}+2x-e^{-x}+C$$

$$x = 0 \Longrightarrow y = 0 - 1 = -1 \Longrightarrow f(0) = -1 \Longrightarrow f(0) = 0 + 0 - 1 + C = -1 \Longrightarrow$$

$$C = 0 \Longrightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x - e^{-x}$$

3.11.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.11.3 Se pide:

a) Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ y que, además, tiene un cateto de longitud 2 situado sobre el eje X. Dibuje la gráfica de f, la recta tangente y el triángulo.

b) Halle los valores de a y b que hacen que la función
$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ ax^2 + bx & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$, sea derivable.

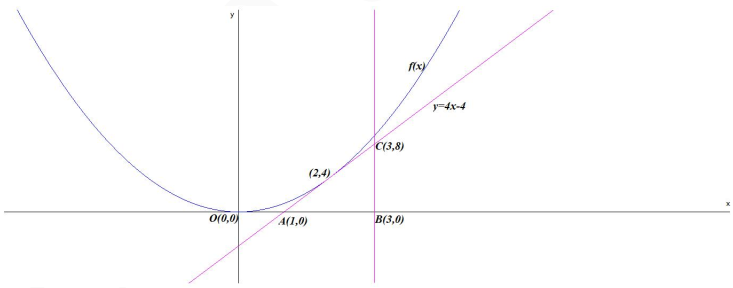
Solución:

a) Calculamos la tangente en $x = 2$:

$$b = f(2) = 4, \ \ f'(x) = 2x \Longrightarrow m = f'(2) = 4 \Longrightarrow y - 4 = 4(x - 2) \Longrightarrow$$

$$y = 4x - 4$$

La recta tangente corta al eje de abscisas en el punto $4x - 4 = 0 \Longrightarrow A(1, 0)$ como la longitud del cateto tiene que ser 2 el otro vértice del eje de abscisas es en $x = 3 \Longrightarrow B(3, 0)$ y el tercer vértice es un punto de la tangente, sustituimos en ella $x = 3 \Longrightarrow C(3, 8)$



b) Para que sea derivable tiene que ser continua.
Las ramas de la función son continuas y derivables por ser polinomios. El estudio se hace en $x = 1$.

- Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (ax^2 + bx) = a + b \\ f(1) = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow a + b = 1$$

- Derivable en $x = 1$:
$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 1 \\ 2ax + b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 0 \\ f'(1^+) = 2a + b \end{cases} \Longrightarrow$

$$2a + b = 0$$

☛ $\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$

Problema 3.11.4 Calcule las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int (\sin x)\sin(\cos x)\,dx$

c) $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$

Solución:

a) $$\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \left[\begin{array}{c} t=x^2+1 \\ dt=2xdx \\ dx=\dfrac{dt}{2x} \end{array}\right] = \int 2xt^{1/2}\,\frac{dt}{2x} = \int t^{1/2}\,dt =$$
$$\frac{t^{3/2}}{3/2}+C = \frac{2(x^2+1)^{3/2}}{3}+C = \frac{2\sqrt{(x^2+1)^3}}{3}+C$$

b) $$\int (\sin x)\sin(\cos x)\,dx = \left[\begin{array}{c} t=\cos x \\ dt=-\sin x dx \\ dx=-\dfrac{dt}{\sin x} \end{array}\right] = -\int (\sin x)\sin(t)\,\frac{dt}{\sin x} = -\int \sin t\,dt =$$
$$\cos t+C=\cos(\cos x)+C$$

c) $$\int x^2\sin x\,dx = \left[\begin{array}{c} u=x^2 \Longrightarrow du=2xdx \\ dv=\sin x\,dx \Longrightarrow v=-\cos x \end{array}\right] =$$
$$-x^2\cos x+2\int x\cos x\,dx = \left[\begin{array}{c} u=x \Longrightarrow du=dx \\ dv=\cos x\,dx \Longrightarrow v=\sin x \end{array}\right] =$$
$$-x^2\cos x+2\left[x\sin x-\int \sin x\,dx\right] = -x^2\cos x+2\,(x\sin x+\cos x)+C = -x^2\cos x+$$
$$2x\sin x+2\cos x+C = 2x\sin x+(2-x^2)\cos x+C$$

d) $$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx =$$
$$\left[\begin{array}{c} (x-1)(x-2)=0 \Longrightarrow x=1,\ x=2 \\ \dfrac{1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2} = \dfrac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} \\ 1=A(x-2)+B(x-1) \\ x=2 \Longrightarrow 1=B \Longrightarrow B=1 \\ x=1 \Longrightarrow 1=-A \Longrightarrow A=-1 \\ \dfrac{1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{-1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2} \end{array}\right] =$$
$$\int \left(\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right)dx = -\ln|x-1|+\ln|x-2|+C$$

3.12. Islas Baleares

3.12.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.12.1 Considere la función $f(x) = e^{3x-2}$

a) Determine las coordenadas del punto en el cual la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene pendiente igual a $3/e$. Halle la ecuación de esta recta tangente.

b) Calcule el $\lim\limits_{x\to 2/3} \dfrac{1-f(x)}{6x-4}$

c) Esboce la gráfica de la función $y = f(x)$.

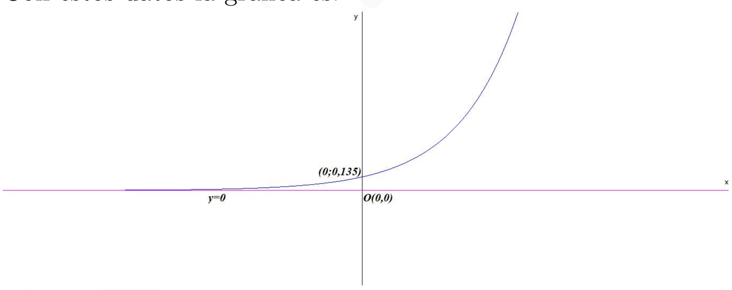
d) Calcule el área de la superficie acotada por la gráfica de la función $y = f(x)$ y las rectas $x = 0$ e $y = 1$.

Solución:

a) Sea el punto de tangencia $(a, f(a))$.
$f'(x) = 3e^{3x-2} \Longrightarrow m = f'(a) = 3e^{3a-2} = 3e^{-1} \Longrightarrow 3a - 2 = -1 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{3}$
$f(a) = f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 3e^{-1}$, luego el punto de tangencia es $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{e}\right)$ y la recta tangente es $y - \dfrac{1}{e} = \dfrac{3}{e}\left(x - \dfrac{1}{3}\right) \Longrightarrow y = \dfrac{3}{e}x$

b) $\lim\limits_{x\to 2/3} \dfrac{1-e^{3x-2}}{6x-4} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 2/3} \dfrac{-3e^{3x-2}}{6} = \dfrac{-3}{6} = -\dfrac{1}{2}$

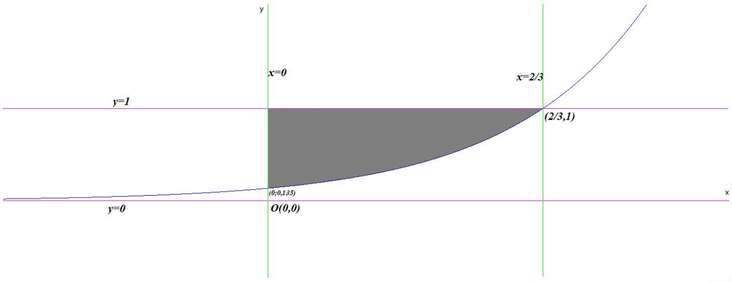
c) Tenemos $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ es positiva en todo el dominio, no tiene simetrías y un punto de corte en $(0, e^{-2})$. No tiene asíntotas verticales pero sí una asíntota horizontal en $y = 0$ cuando x se hace infinitamente pequeña $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{3x-2} = 0$.
$f'(x) = 3e^{3x-2} > 0\ x \in \mathbb{R} \Longrightarrow f$ es creciente en todo el dominio y no tiene extremos relativos.
$f''(x) = 9e^{3x-2} > 0\ x \in \mathbb{R} \Longrightarrow f$ es cóncava $\smile$ en todo el dominio.
Con estos datos la gráfica es:



d) $f(x) = 1 \Longrightarrow e^{3x-2} = 1 \Longrightarrow 3x - 2 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{2}{3}$
El recinto delimitado será S_1 en el intervalo $\left[0, \dfrac{2}{3}\right]$

$$S_1 = \int_0^{2/3} (1 - e^{3x-2})\, dx = x - \frac{e^{3x-2}}{3}\bigg]_0^{2/3} = \frac{1+e^{-2}}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{1+e^{-2}}{3} \simeq 0,37845\ u^2$$



Problema 3.12.2 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+a}{2x-4} & \text{si} \quad x \le 0 \\ 10x^2 + x + b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Halle la condición que han de cumplir los parámetros a y b para que la función $y = f(x)$ sea continua.

b) Calcule $f'(x)$.

c) Halle la condición que han de cumplir los parámetros a y b para que la función $y = f(x)$ sea derivable.

Solución:

a) Las dos ramas son continuas en su definición, hay que analizar en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+a}{2x-4} = -\dfrac{a}{4} \\ \lim\limits_{x\to 0^-} (10x^2 + x + b) = b \\ f(0) = -\dfrac{a}{4} \end{cases} \Longrightarrow -\frac{a}{4} = b \Longrightarrow a + 4b = 0$$

b) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x-a}{2(x-2)^2} & \text{si} \quad x \le 0 \\ 20x + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

c) $f'(0^-) = \dfrac{-a}{8}$ y $f'(0^+) = 1 \Longrightarrow \dfrac{-a}{8} = 1 \Longrightarrow a = -8$
Para que la función sea continua y derivable $a = -8$ y $b = 2$.

3.12.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.12.3 Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x$ y $g(x) = 4 - 4x$

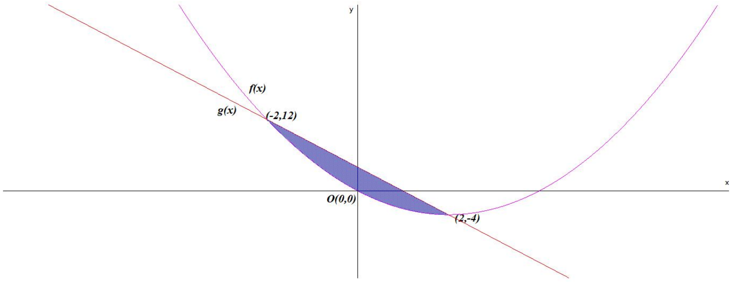
a) Represéntelas gráficamente en un mismo sistema de coordenadas.

b) Calcule los puntos de corte de ambas gráficas.

c) Calcule el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones.

Solución:

a) Mediante una tabla de valores representamos:



b) $f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 - 4x = 4 - 4x \Longrightarrow x = \pm 2$
Los puntos de corte son $(-2, 12)$ y $(2, -4)$

c) $S = \left| \int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\, dx \right| = \left| \int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\, dx \right| = \left| \left. \dfrac{x^3}{3} - 4x \right]_{-2}^{2} \right| =$
$\left| \dfrac{8}{3} - 8 + \dfrac{8}{3} - 8 \right| = \left| -\dfrac{32}{3} \right| = \dfrac{32}{3} \simeq 10,6667\ u^2$

Problema 3.12.4 Sea la función $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$.

a) Halle el dominio y los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes.

b) Calcule la derivada de la función y obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Comprueba que $f(-1) = f(1)$ y que $f'(x)$ no es nunca cero en el intervalo $[-1, 1]$. ¿Contradice este hecho el teorema de Rolle?

d) Esboce la gráfica de la función $y = f(x)$.

Solución:

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
El punto de corte con el eje OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 1)$
Con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow 1 - \sqrt[3]{x^2} = 0 \Longrightarrow (1, 0)$ y $(-1, 0)$

b) $f'(x) = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} \neq 0 \Longrightarrow$ la función no tiene extremos relativos.

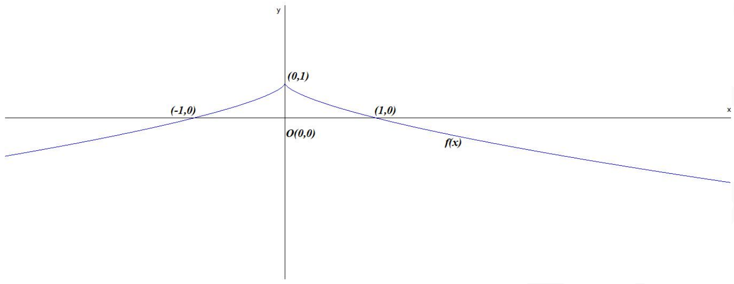
	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

Si que habría un máximo absoluto en $x = 0$

c) $f(-1) = f(1) = 0$ como se vió en el apartado primero. Para que se cumplan las condiciones del teorema de Rolle la función tiene que ser continua y derivable. Es evidente su continuidad en $\mathbb{R}$, estudiamos su derivabilidad en $x = 0$:
$f(0) = 1$ y $f(0 + h) = 1 - \sqrt[3]{h^2}$
$f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1 - \sqrt[3]{h^2} - 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-\sqrt[3]{h^2}}{h} =$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{\sqrt[3]{h}} = -\infty \Longrightarrow \nexists f'(0)$
La función no es derivable en $x = 0$ y, por tanto, no cumple las condiciones del teorema de Rolle.

d) La gráfica de la función sería:



3.13. Islas Canarias

3.13.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.13.1 Dada la función $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + bx & \text{si} \quad x < 1 \\ a + \ln x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

a) Estudia los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $\mathbb{R}$. Escribe la función resultante $f(x)$

b) Tomando los valores $a = -2$ y $b = 1$, calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = e$.

Solución:

a) ☛ Las dos ramas son continuas y derivable, hay que analizar en $x = 1$,

☛ **Continuidad en** $x = 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} ((x-1)^2 + bx) = b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (a + \ln x) = a \\ f(1) = a \end{cases} \Longrightarrow a = b$$

☛ **Derivabilidad en** $x = 1$

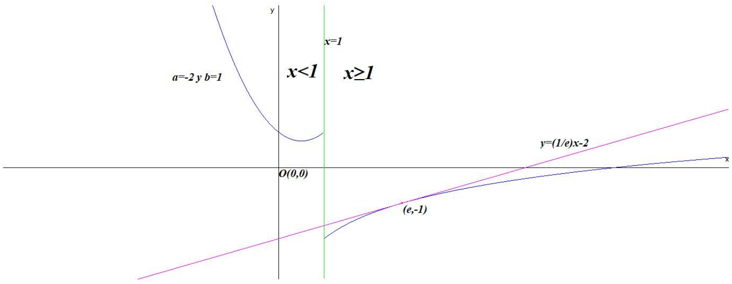
$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1) + b & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = b \\ f'(1^+) = 1 \end{cases} \Longrightarrow b = 1$$

☛ $\begin{cases} a = b \\ b = 1 \end{cases} \Longrightarrow a = b = 1$

☛ $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + x & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 + \ln x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

b) Si $a = -2$ y $b = 1 \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + x & \text{si} \quad x < 1 \\ -2 + \ln x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$
En el punto $x = e > 1 \Longrightarrow f(x) = -2 + \ln x \Longrightarrow b = f(e) = -1 \Longrightarrow$ el punto de tangencia es $(e, -1)$. $f'(x) = \dfrac{1}{x} \Longrightarrow m = \dfrac{1}{e}$ La recta tangente es:

$$y + 1 = \frac{1}{e}(x - e) \Longrightarrow y = \frac{1}{e}x - 2$$



Problema 3.13.2 Realiza el cálculo de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+4}\,dx$

b) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$

Solución:

a) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+4}\,dx = \int \frac{x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{4}{x^2+4}\,dx =$
$\displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + 4\int \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\,dx =$

$$\frac{1}{2}\ln|x^2+4| + \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = \dfrac{x}{2} \\ dt = \dfrac{dx}{2} \\ dx = 2dt \end{array}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\ln|x^2+4| + 2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + 2\arctan t + C =$$
$$\frac{1}{2}\ln|x^2+4| + 2\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

b) $$F(x) = \int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \dfrac{dx}{x} \\ dx = xdt \end{array}\right] = \int \frac{t^3}{x}\,xdt = \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{(\ln x)^4}{4} + C$$

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx = F(e) - F(1) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

3.13.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.13.3 Resuelve los siguientes apartados:

a) Considera la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Calcular los coeficientes a, b, c, d, sabiendo que f tiene un extremo relativo en el punto $P(0,1)$ y su gráfica tiene un punto de inflexión $Q(1,-1)$
Dar la expresión de la función $f(x)$

b) Resuelve el siguiente límite: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$

Solución:

a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ y $f''(x) = 6ax + 2b$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 1 \Longrightarrow d = 1 \\ f'(0) = 0 \Longrightarrow c = 0 \\ f(1) = -1 \Longrightarrow a + b + c + d = -1 \\ f''(1) = 0 \Longrightarrow 6a + 2b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{array}\right.$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$

Problema 3.13.4 Considera las siguientes funciones: $y = 3x - x^2$; $y = x - 3$

a) Representa el recinto que encierra las dos funciones.

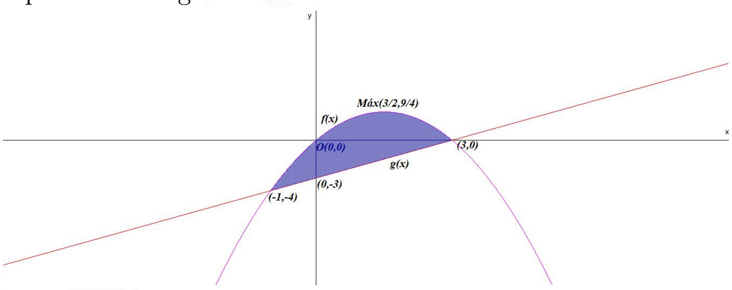
b) Calcula el área del recinto limitado por las funciones anteriores

Solución:
$f(x) = 3x - x^2$ y $g(x) = x - 3$

a) Encontramos los puntos de corte entre las dos funciones:

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow 3x - x^2 = x - 3 \Longrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -1, \;\; x = 3$$

Corresponde a los puntos $(-1, -4)$ y $(3, 0)$
$f(x) = 3x - x^2 = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ y $(3, 0)$
$f'(x) = 3 - 2x = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{3}{2}$ y como $f''(x) = -2$ es $f''(3/2) = -2 < 0$ y $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$ es un máximo relativo.
La función $g(x) = x - 3$ es un recta que pasa por los puntos $(3, 0)$ y $(0, -3)$ Se obtiene la representación gráfica:



b) $S = \left|\displaystyle\int_{-1}^{3} (f(x) - g(x))\, dx\right| = \left|\displaystyle\int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)\, dx\right| = \left|-\dfrac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3}\Bigg| = \left|9 + \dfrac{5}{3}\right| = \dfrac{32}{3} \simeq 10,6667\; u^2$

3.14. La Rioja

3.14.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.14.1 Dada la curva $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + 4x + 4$

I. Halla los puntos de la curva en los que la recta tangente a ésta pase por el punto $(0,0)$.

II. Da las ecuaciones de las rectas tangentes.

Solución:

I. Sea (a,b) el punto de la curva en el que la tangente a ella pasa por $(0,0)$, donde $b=f(a)$.
Tenemos $b=f(a)=\dfrac{1}{4}a^2+4a+4$ $f'(x)=\dfrac{1}{2}x+4 \Longrightarrow m=f'(a)=\dfrac{1}{2}a+4$
La ecuación de la recta tangente a f en (a,b) es

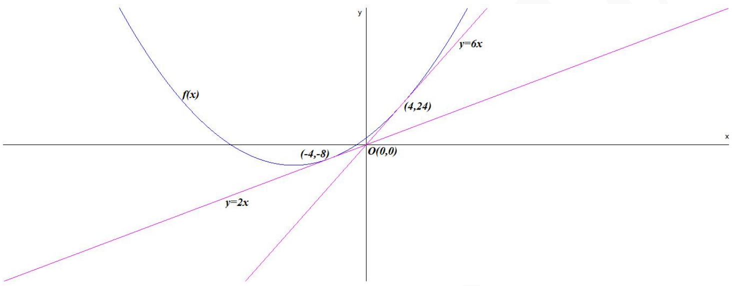
$$y-\left(\frac{1}{4}a^2+4a+4\right)=\left(\frac{1}{2}a+4\right)(x-a)$$

Como esta recta tiene que pasar por el punto $(0,0)$:

$$-\left(\frac{1}{4}a^2+4a+4\right)=-a\left(\frac{1}{2}a+4\right) \Longrightarrow a^2-16=0 \Longrightarrow a=\pm 4$$

Si $a=4 \Longrightarrow (4,24)$
Si $a=-4 \Longrightarrow (-4,-8)$

II. Si $a=4 \Longrightarrow m=6 \Longrightarrow y-24=6(x-4) \Longrightarrow y=6x$
Si $a=-4 \Longrightarrow m=2 \Longrightarrow y-8=2(x-4) \Longrightarrow y=2x$



Problema 3.14.2 Halla el área de la región que delimita la gráfica de la función $g(x)=x\sin x$ y el eje de abscisas en el intervalo que va de $x=0$ al menor valor $b>0$ tal que $g(b)=0$.

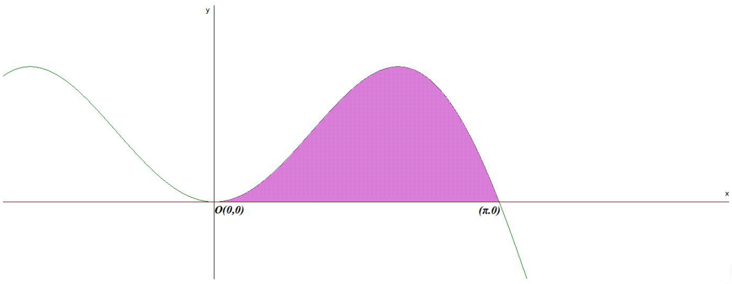
Solución:
$g(x)=0 \Longrightarrow x\sin x=0 \Longrightarrow x=0+k\pi,\ \forall k\in\mathbb{Z}$ luego $b=\pi$ y los límites de integración son de 0 a π.

$$F(x)=\int x\sin x\,dx=\left[\begin{array}{c} u=x \Longrightarrow du=dx \\ dv=\sin x\,dx \Longrightarrow v=-\cos x \end{array}\right]=$$

$$-x\cos x+\int \cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+C$$

$$S_1=\int_0^{\pi} x\sin x\,dx=F(\pi)-F(0)=\pi$$

$$S=|S_1|=\pi\ u^2$$



Problema 3.14.3 Determina, si existe, el valor de a de tal manera que:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax+1}-(3x-1)\right)=2$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+a}{3x-1}\right)^x=e$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax+1}-(3x-1)\right)=[\infty-\infty]=$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{9x^2+ax+1}-(3x-1)\right)\left(\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)\right)}{\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)}=$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{9x^2+ax+1}\right)^2-(3x-1)^2}{\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x^2+ax+1-(9x^2-6x+1)}{\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)}=$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a+6)x}{\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a+6)x}{\sqrt{9x^2}+3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a+6)x}{6x}=\dfrac{a+6}{6}=$
$2\Longrightarrow a=6$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+a}{3x-1}\right)^x=[1^\infty]=e^\lambda=e\Longrightarrow\lambda=1$
$\lambda=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{3x+a}{3x-1}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{3x+a-3x+1}{3x-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{a+1}{3x-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(a+1)x}{3x-1}=$
$\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(a+1)x}{3x}=\dfrac{a+1}{3}=1\Longrightarrow a=2$

3.14.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.14.4 Dada la curva $f(x)=\dfrac{x^3}{(1+x)^2}$

I. Halla el dominio, asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de la función f, en caso de que existan.

II. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión si los hubiera.

Solución:

I. $\text{Dom}(f)=R-\{-1\}$
Asíntotas:

- ☛ Verticales: $x = -1$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{(1+x)^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{(1+x)^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty,$$

- ☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{(1+x)^2} = -\infty; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{(1+x)^2} = +\infty$$

- ☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3 + 2x^2 + x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+2x+1} - x\right) =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - 2x^2 - x}{x^2 + 2x + 1} = -2 \Longrightarrow y = x - 2$$

II. $f'(x) = \dfrac{x^2(x+3)}{(1+x)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -3$

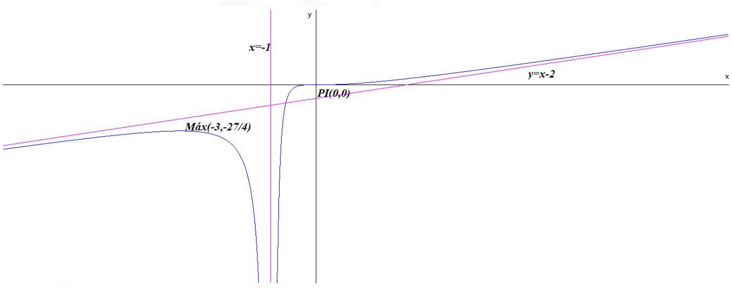
	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$ con un máximo relativo en el punto $\left(-3, -\dfrac{27}{4}\right) \simeq (-3; -6, 75)$

$f''(x) = \dfrac{6x}{(1+x)^4} = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa $\frown$en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ y cóncava $\smile$ en el $(0, \infty)$, con un punto de inflexión en el punto $(0, 0)$



Problema 3.14.5 Halla el valor de a y b para que la curva $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ tenga en el punto $(x_0, -1)$ un punto de inflexión y la pendiente de la recta tangente valga 1.

Solución:

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Longrightarrow f''(x) = 6x + 2a$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x_0) = -1 \Longrightarrow x_0^3 + ax_0^2 + bx_0 + 1 = -1 \\ f''(x_0) = 0 \Longrightarrow 6x_0 + 2a = 0 \\ m = f'(x_0) = 1 \Longrightarrow 3x_0^2 + 2ax_0 + b = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ a = 3 \\ b = 4 \end{array}\right.$$

Problema 3.14.6 Determina, si existe, el valor de a de tal manera que:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^3 - 6x^2}{4x^3 - 1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

Solución:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} =$

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x - \cos^3 x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos x}{-2\sin x \cos x + 3\cos^2 x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x}{-2\cos x + 3\cos^2 x} = \frac{2}{-2+3} = 2$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^3 - 6x^2}{4x^3 - 1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = [1^\infty] = e^\lambda$

$\displaystyle\lambda = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x}\left(\frac{4x^3 - 6x^2}{4x^3 - 1} - 1\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x}\left(\frac{4x^3 - 6x^2 - 4x^3 + 1}{4x^3 - 1}\right) =$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x}\left(\frac{-6x^2+1}{4x^3 - 1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x}\left(\frac{(-6x^2+1)(x^2+1)}{4x^4 - x}\right) = -\frac{3}{2}$

Luego

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^3 - 6x^2}{4x^3 - 1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = e^{-3/2}$$

3.15. Madrid

3.15.1. Modelo

Problema 3.15.1 Sea la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} 1 - \dfrac{\sin x}{x} & \text{si} & x < 0 \\ & & \\ xe^{4-x^2} & \text{si} & x \geq 0 \end{array}\right.$$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en $(0, \infty)$.

c) Calcule $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$

Solución:

a) ☛ Continuidad en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim_{x\longrightarrow 0^-} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 1 - \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} 1 - \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{\cos x}{1} = 0 \\ \lim_{x\longrightarrow 0^+} xe^{4-x^2} = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Longrightarrow f$ es continua en $x = 0$.

☛ Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ (1-2x^2)e^{4-x^2} & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{2x} =$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x\sin x}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x + x\cos x}{2} = 0$$

$f'(0^+) = e^4 \Longrightarrow f'(0^-) \ne f'(0^+) \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$

b) En la rama $(0,\infty) \Longrightarrow f(x) = xe^{4-x^2} \Longrightarrow f'(x) = (1-2x^2)e^{4-x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

	$\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, y decreciente en el intervalo $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$.

Tiene un máximo relativo en los puntos de abscisa $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $F(x) = \int f(x)\,dx = \int xe^{4-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} t = 4 - x^2 \\ dt = -2xdx \\ dx = \frac{dt}{-2x} \end{bmatrix} = \int xe^t \frac{dt}{-2x} = -\frac{1}{2}\int e^t\,dt =$

$-\frac{e^t}{2} + C = -\frac{e^{4-x^2}}{2} + C$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0) = -\frac{1}{2} + \frac{e^4}{2} = \frac{e^4 - 1}{2} \simeq 26,8$$

Problema 3.15.2 Sea $f(x) = x + x^2$, se pide:

a) Hallar el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f y la recta $y = 2x$.

b) Una partícula en movimiento parte del origen y sigue la trayectoria determinada por la gráfica de f. En el punto $(1, f(1))$ la partícula sale despedida en la dirección de la recta tangente. Determinar en qué punto choca con la recta vertical $x = 2$.

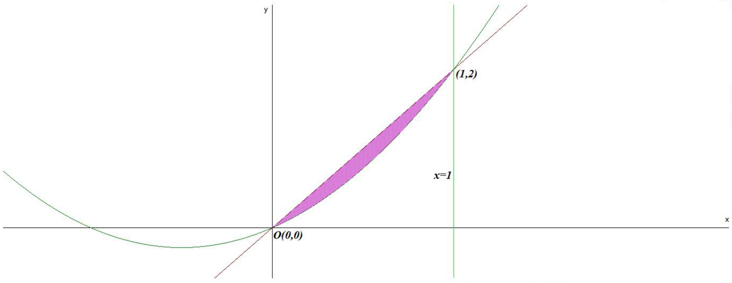
Solución:

a) Buscamos los puntos de corte entre las dos gráficas: $f(x) = g(x) \Longrightarrow x + x^2 = 2x \Longrightarrow x^2 - x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 1$

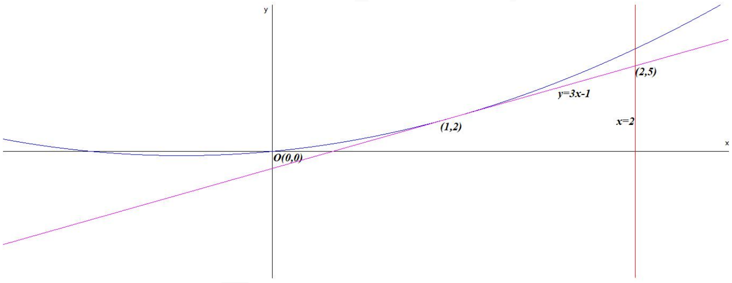
Tenemos $S = \left| \int_0^1 (f(x) - g(x))\, dx \right|$

$$S_1 = \int_0^1 (f(x) - g(x))\, dx = \int_0^1 (x + x^2 - 2x)\, dx = \int_0^1 (x^2 - x)\, dx = \left. \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{6}$$

$$S = |S_1| = \frac{1}{6} = 0,1667\ u^2$$



b) $a = 1 \Longrightarrow b = f(a) = f(1) = 2$
$f'(x) = 1 + 2x \Longrightarrow m = f'(a) = f'(1) = 3$
La recta tangente $y - b = m(x - a) \Longrightarrow y - 2 = 3(x - 1) \Longrightarrow y = 3x - 1$
El punto de corte con $x = 2 \Longrightarrow y = 5 \Longrightarrow (2, 5)$



3.15.2. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.15.3 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 e^{-1/x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) Estudie si $f(x)$ presenta algún tipo de simetría par o impar.

c) Calcule la siguiente integral: $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6}\, dx$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} (x^3 e^{-1/x^2}) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} (x^3 e^{-1/x^2}) = f(0) = 0$$

f es continua en $x = 0$
Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}(3x^2 + 2) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

$f'(0^-) = f'(0^+) = 0 \Longrightarrow f$ es derivable en $x = 0$.

b) $f(-x) = (-x)^3 e^{-1/(-x)^2} = -x^3 e^{-1/x^2} = -f(x) \Longrightarrow f$ es IMPAR, simétrica respecto al origen.

c) $F(x) = \displaystyle\int \frac{f(x)}{x^6}\, dx = \int \frac{x^3 e^{-1/x^2}}{x^6}\, dx = \int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}\, dx = \begin{bmatrix} t = -\dfrac{1}{x^2} \\ dt = \dfrac{2}{x^3} dx \\ dx = \dfrac{x^3}{2} dt \end{bmatrix} = \int \frac{e^t}{x^3}\, \frac{x^3}{2} dt =$

$\dfrac{1}{2} \displaystyle\int e^t\, dt = \frac{e^t}{2} = \frac{e^{-1/x^2}}{2} + C$

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6}\, dx = F(2) - F(1) = \frac{e^{-1/4}}{2} - \frac{e^{-1}}{2} \simeq 0{,}2054606709$$

Problema 3.15.4 Sea

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

a) Compruebe si $f(x)$ verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo $[-1, 1]$.

b) Calcule y clasifique los extremos relativos de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

c) Determine el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[-1, 1]$.

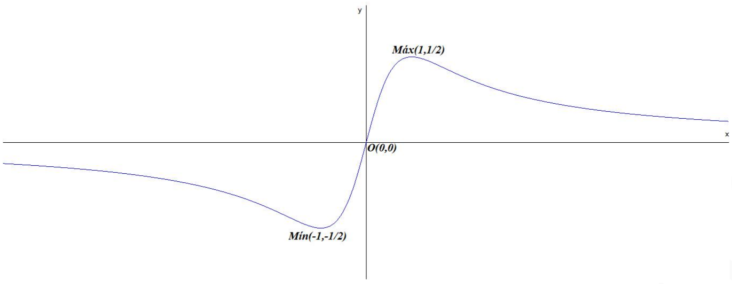
Solución:

a) La función es continua en el intervalo $[-1, 1]$, de hecho lo es en todo $\mathbb{R}$, el denominador no se anula nunca.
$f(-1) = -\dfrac{1}{2} < 0$ y $f(1) = \dfrac{1}{2} > 0$, luego cumple las condiciones del teorema de Bolzano que afirma que $\exists c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

b) $f'(x) = -\dfrac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

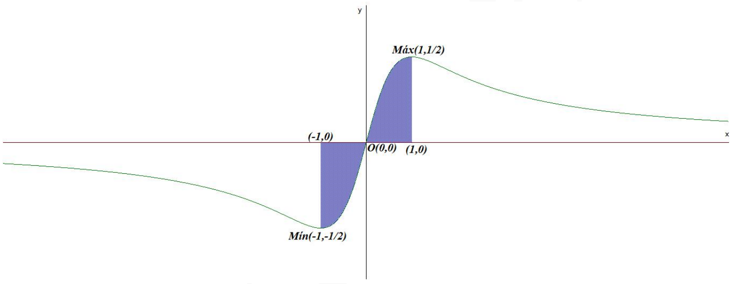
La función decrece en el $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y crece en el intervalo $(-1, 1)$.
La función tiene un mínimo relativo en $\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$ y un máximo relativo en $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$



c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} = 0 \Longrightarrow x = 0 \in [-1,1]$, luego hay dos áreas, una negativa y otra positiva, como además la función es impar el valor absoluto de ambas son iguales. Luego:

$$S = 2\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$

$$\ln|x^2+1|]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2\ u^2$$



3.15.3. Convocatoria Ordinaria(coincidente)

Problema 3.15.5 Sea la función $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.

a) Determine el dominio y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$.

b) Dada la función $g(x) = \dfrac{5-x}{2}$, halle el área de la región acotada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

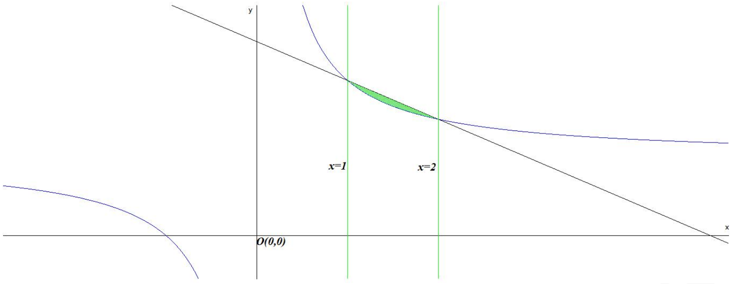
Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \neq 0 \Longrightarrow$ la función no tiene extremos relativos, además $f'(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \Longrightarrow f$ es decreciente en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) $f(x) = g(x) \Longrightarrow 1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5-x}{2} \Longrightarrow \dfrac{x^2-3x+2}{2x} = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = 2$.
$F(x) = \displaystyle\int (f(x) - g(x))\,dx = \int \left(\frac{x^2-3x+2}{2x}\right)dx =$
$\displaystyle\int \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + \ln|x| + C$

$$S_1 = \int_1^2 \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{2x} \right) dx = F(2) - F(1) = 1 - 3 + \ln 2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right) =$$

$$\ln 2 - \frac{3}{4} \simeq -0,0569 \Longrightarrow S = |S_1| = \frac{3}{4} - \ln 2 \simeq 0,0569 \ u^2$$



Problema 3.15.6 Sea $f(x)$ una función continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ tal que $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f'(1) = 1$ y $f'(2) = 2$. Se consideran, además, las funciones $g(x) = (f(x))^2$ y $h(x) = (f \circ f)(x)$. Se pide:

a) Calcular $g(2)$ y $g'(2)$.

b) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $h(x)$ en el punto $x = 1$.

c) Probar, utilizando el Teorema del Valor Medio, que existe un punto en el intervalo $(1, 2)$ en el que el valor de la derivada de $f(x)$ es -1.

Solución:

a) $g(2) = (f(2))^2 = 1^2 = 1$
$g'(x) = 2(f(x))f'(x) \Longrightarrow g'(2) = 2f(2)f'(2) = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$

b) $h(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) \Longrightarrow h'(x) = f'(x)f'(f(x))$
$a = 1$, $b = h(1) = f(f(1)) = f(2) = 1$ y $m = h'(1) = f'(1)f'(f(1)) = 1 \cdot f'(2) = 2$

$$y - b = m(x - a) \Longrightarrow y - 1 = 2(x - 1) \Longrightarrow y = 2x - 1$$

c) $f(x)$ función continua y derivable en todo $\mathbb{R} \Longrightarrow f(x)$ función continua y derivable en $[1, 2]$. Con estas condiciones el teorema del valor medio nos asegura que existe un $c \in (1, 2)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \dfrac{1 - 2}{2 - 1} = -1$

3.15.4. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.15.7 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x + 1}{x} & \text{si } \ x < 0 \\ \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } \ x \geq 0 \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

b) ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 0$? Justifique la respuesta.

c) Calcule, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.

d) Determine para $x \in (0, \infty)$ el punto de la gráfica de $f(x)$ en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto. En el punto obtenido, ¿alcanza $f(x)$ algún extremo relativo? En caso afirmativo, clasifíquelo.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{2x+1}{x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} (x^2 - 4x + 3) = 3$$

f no es continua en $x = 0$ donde la función presenta un salto. La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

b) La función no es continua en $x = 0$ y, por tanto, no es derivable en ese punto.

c) Como se ha visto en $x = 0$ hay una asíntota vertical.
En $y = 2$ hay una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$:

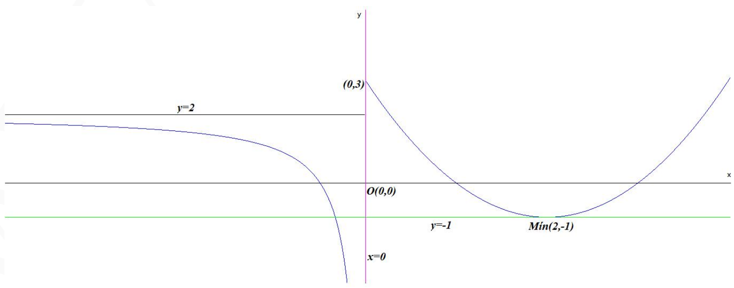
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$$

No hay oblicuas por haber horizontales.
En la otra rama no hay asíntotas por tratarse de un polinomio.

d) $x \in (0, \infty) \Longrightarrow f(x) = x^2 - 4x + 3 \Longrightarrow f'(x) = 2x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$ Si $a = 2 \Longrightarrow b = f(2) = -1$ y la pendiente $m = f'(2) = 0 \Longrightarrow y + 1 = 0(x - 2) \Longrightarrow y = -1$ recta tangente a f en $x = 2$.

	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función decrece en el $(0, 2)$ y crece en el intervalo $(2, \infty) \Longrightarrow f$ tiene un extremo relativo en $x = 2$.
La función tiene un mínimo relativo en $(2, -1)$



Problema 3.15.8 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \le 0 \\ x \ln x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) Estudie los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$, así como los máximos y mínimos relativos.

c) Calcule $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$

Solución:

a) **Continuidad en** $x = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

f es continua en $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\dfrac{-\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$
$\lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0$

Derivabilidad en $x = 0$

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x \le 0 \\ \ln x + 1 & \text{si} & x > 0 \end{array}\right.$$

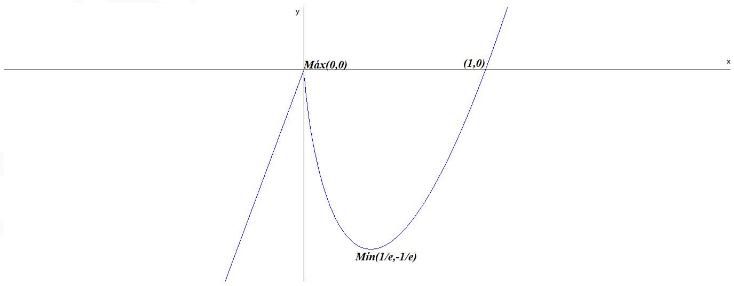
$f'(0^-) = 1 \ne f'(0^+) = -\infty \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.

b) En la rama $x \le 0$ la función es una recta siempre creciente. ($f'(x) = 1 > 0$)
En la rama $x > 0 \Longrightarrow f(x) = x\ln x \Longrightarrow f'(x) = \ln x + 1 = 0 \Longrightarrow \ln x = -1 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{e}$
En la rama $x \le 0$

	$(-\infty, 0)$	$\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$	$\left(\dfrac{1}{e}, \infty\right)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función decrece en el $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$ y crece en el intervalo $(-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{1}{e}, \infty\right) \Longrightarrow f$ tiene un extremo relativo en $x = \dfrac{1}{e}$ y en $x = 0$.

La función tiene un mínimo relativo en $\left(\dfrac{1}{e}, -\dfrac{1}{e}\right)$ y un máximo relativo en $(0, 0)$



c) $F(x) = \int x \ln x \, dx = \left[\begin{array}{c} u = \ln x \Longrightarrow du = \dfrac{1}{x} dx \\ dv = xdx \Longrightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right] =$

$\dfrac{x^2 \ln x}{2} - \dfrac{1}{2} \int x \, dx = \dfrac{x^2 \ln x}{2} - \dfrac{x^2}{4} + C = \dfrac{2x^2 \ln x - x^2}{2} + C \Longrightarrow$

$F(x) = \dfrac{x^2(2 \ln x - 1)}{2} + C$

$\displaystyle\int_1^2 f(x) \, dx = F(2) - F(1) = 2 \ln 2 - 1 - \left(-\frac{1}{4} \right) = 2 \ln 2 - \frac{3}{4} \simeq 0,6363$

3.15.5. Convocatoria Extraordinaria (coincidente)

Problema 3.15.9 Sea la función $f(x) = x^3 + \cos(\pi x)$. Se pide:

a) Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$ y probar, utilizando el Teorema de Bolzano, que dicha recta tangente corta a la gráfica de $f(x)$ en algún punto entre $x = -3$ y $x = -2$.

b) Calcular $\displaystyle\int x f(x) \, dx$.

Solución:

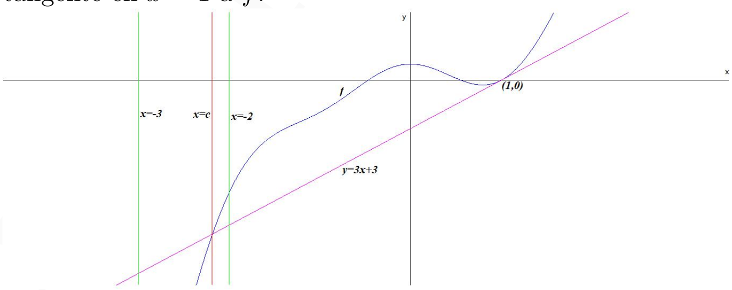
a) $f(1) = 1 - 1 = 0$, $f'(x) = 3x^2 - \pi \sin(\pi x) \Longrightarrow m = f'(1) = 3 - 0 = 3 \Longrightarrow y = 3(x - 1) \Longrightarrow y = 3x - 3$

Hay que demostrar que hay un punto de corte entre las funciones $f(x)$ y $g(x) = 3x - 3$. Llamamos $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 3x + 3 + \cos(\pi x)$ continua por ser composición de funciones continuas.

En $x = -3$ tenemos $h(-3) = -27 + 9 + 3 - 1 = -16 < 0$

En $x = -2$ tenemos $h(-2) = -8 + 6 + 3 + 1 = 2 > 0$

Se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano y $\exists c \in (-3, -2)$ tal que $h(c) = 0 \Longrightarrow f(c) - g(c) = 0 \Longrightarrow f(c) = g(c) \Longrightarrow c$ es un punto de corte entre f y g, siendo g la recta tangente en $x = 1$ a f.



b) $\displaystyle\int x(x^3 + \cos(\pi x)) \, dx = \int (x^4 + x \cos(\pi x)) \, dx = \frac{x^5}{5} + \int x \cos(\pi x) \, dx =$

$\left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = \cos(\pi x) \, dx \Longrightarrow v = \dfrac{1}{\pi} \sin(\pi x) \end{array} \right] =$

$\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x \sin(\pi x)}{\pi} - \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int \sin(\pi x) \, dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x \sin(\pi x)}{\pi} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi^2} + C$

Problema 3.15.10 Sea $f(x) = xe^x - e^x$.

a) Estudie su continuidad y derivabilidad en $\mathbb{R}$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$ y clasifique sus extremos relativos.

c) Sea $g(x) = -e^x$. Calcule el área del recinto acotado que está limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, 1]$.

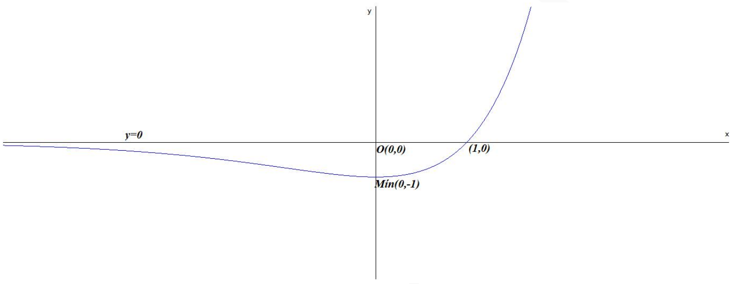
Solución:

a) La función no tiene denominadores con $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y es composición de funciones continuas y derivables. Luego f es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

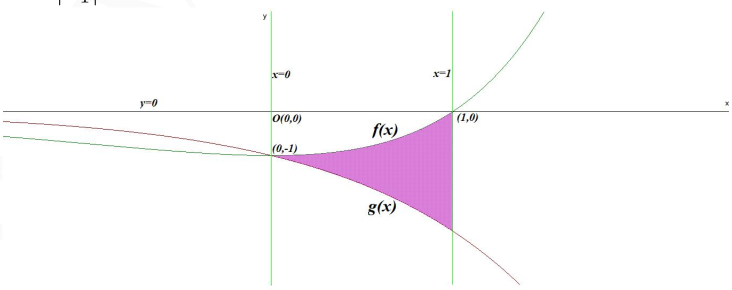
b) $f'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x = 0 \Longrightarrow x = 0$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función decrece en el $(-\infty, 0)$ y crece en el intervalo $(0, \infty) \Longrightarrow f$ tiene un extremo relativo en $x = 0$.
La función tiene un mínimo relativo en $(0, -1)$



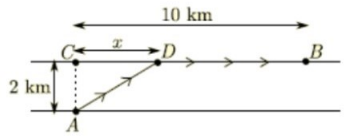
c) $f(x) = g(x) \Longrightarrow xe^x = 0 \Longrightarrow x = 0$ luego sólo hay un recinto S_1 en $[0, 1]$.
$F(x) = \displaystyle\int (f(x) - g(x))\, dx = \int xe^x\, dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^x\, dx \Longrightarrow v = e^x \end{array} \right] = xe^x - \int e^x\, dx =$
$xe^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C$
$S_1 = \displaystyle\int_0^1 xe^x\, dx = F(1) - F(0) = 0 - (-1) = 1$
$S = |S_1| = 1\ u^2$



3.16. Murcia

3.16.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.16.1 En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado a) para realizar el apartado b), aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado a).
Un triatleta participa en una competición de SwimRun en la que debe ir desde el punto A, situado en la orilla de un canal de agua en reposo de 2 kilómetros de ancho, hasta el punto B, situado en la otra orilla del canal y a una distancia de 10 kilómetros del punto C (punto opuesto de A), tal y como se indica en la figura. Para ello, debe ir nadando desde A hasta cualquier punto D de la otra orilla del canal y continuar corriendo desde D hasta B. El triatleta tiene plena libertad para elegir D.



a) Sabiendo que el triatleta es capaz de nadar a una velocidad de 4 km/h y de correr a una velocidad de 12 km/h, demuestre que el tiempo total empleado por el triatleta en ir desde A hasta B (pasando por D) viene dado por la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{4} + \dfrac{10-x}{12}$, donde x denota la distancia de C a D.

b) Calcule cuál debe ser el punto D para que el tiempo empleado por el triatleta en ir desde A hasta B sea mínimo. ¿Cuánto tardará en dicho caso?

Solución:

a) Tenemos $v = \dfrac{e}{t} \Longrightarrow t = \dfrac{e}{v}$

$$t_1(x) = \frac{\overline{AD}}{4} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{4}, \quad t_2(x) = \frac{\overline{DB}}{12} = \frac{10-x}{4}$$

Luego

$$f(x) = t_1(x) + t_2(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{4} + \frac{10-x}{12}$$

b) $f'(x) = \dfrac{x}{4\sqrt{x^2+4}} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{3x-\sqrt{x^2+4}}{12\sqrt{x^2+4}} = 0 \Longrightarrow 3x - \sqrt{x^2+4} = 0 \Longrightarrow 3x = \sqrt{x^2+4} \Longrightarrow$ $9x^2 = x^2 + 4 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ la solución negativa no es válida.

	$\left(0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

Luego la función tiene un mínimo relativo en $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,7071067811$ Km. y tardará $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \simeq 1,304737854$ horas $\simeq 1$ hora y 18 minutos.

Problema 3.16.2 Considere la función $f(x) = x\ln(x)$, definida para $x > 0$.

a) Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus intervalos de crecimiento y/o decrecimiento.

b) Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

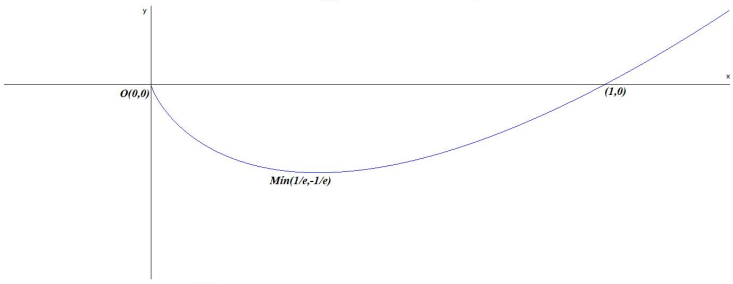
c) Determine la primitiva de la función $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(1, 0)$.

Solución:

a) $f'(x) = \ln(x) + 1 = 0 \Longrightarrow \ln(x) = -1 \Longrightarrow x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

	$\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$	$\left(\dfrac{1}{e}, \infty\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$ y creciente en el $\left(\dfrac{1}{e}, \infty\right)$. Tiene un mínimo relativo en $\left(\dfrac{1}{e}, -\dfrac{1}{e}\right)$



b) $F(x) = \displaystyle\int x\ln x\,dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \Longrightarrow du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = xdx \Longrightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right] = \dfrac{x^2\ln x}{2} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int x\,dx =$

$\dfrac{x^2\ln x}{2} - \dfrac{x^2}{4} + C = \dfrac{2x^2\ln x - x^2}{4} + C = \dfrac{x^2(2\ln x - 1)}{4} + C$

c) $F(1) = -\dfrac{1}{4} + C = 0 \Longrightarrow C = \dfrac{1}{4} \Longrightarrow$

$F(x) = \dfrac{x^2(2\ln x - 1)}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{x^2(2\ln x - 1) + 1}{4}$

3.16.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.16.3 Considere la función $f(x)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si} \quad x > 0 \ \ x \neq 1 \\ a & \text{si} \qquad x = 1 \end{cases}$$

a) Calcule el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$.

b) Determine el valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 1$.

c) Estudie si, para dicho valor de a, la función $f(x)$ es derivable en $x = 1$. En caso afirmativo, calcule el valor de la derivada de f en $x = 1$.

Solución:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

b) Continua en $x = 1$

$\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \\ f(1) = a \end{array}\right. \Longrightarrow a = 1$$

c) $f(x) = \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si} & x > 0 \;\; x \neq 1 \\ 1 & \text{si} & x = 1 \end{array}\right.$

Por la definición de derivada

$\displaystyle f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\ln(1+h)}{h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - h}{h^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{2h} =$
$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{-h}{2h(1+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{2(1+h)} = -\frac{1}{2}$

$$f'(1) = -\frac{1}{2}$$

Problema 3.16.4 Considere la función $f(x) = x^2e^{-x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus intervalos de crecimiento y/o decrecimiento.

b) Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

c) Determine la primitiva de la función $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(0, 1)$.

Solución:

a) $f'(x) = xe^{-x}(2 - x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ y creciente en el $(0, 2)$. Tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$ y un máximo relativo en $(2, 4e^{-2}) = (2; 0,5413)$

b) $F(x) = \int x^2e^{-x}\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x^2 \Longrightarrow du = 2xdx \\ dv = e^{-x}\,dx \Longrightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right] =$
$-x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}\,dx \Longrightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right] =$
$-x^2e^{-x} + 2\left[-xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx\right] = -x^2e^{-x} + 2\left[-xe^{-x} - e^{-x}\right] + C = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} -$
$2e^{-x} + C = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$

c) $F(0) = -2 + C = 1 \Longrightarrow C = 3 \Longrightarrow F(x) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + 3$

3.17. Navarra

3.17.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 3.17.1 Calcule las siguientes integrales indefinidas:

☛ $\displaystyle\int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}}$

☛ $\displaystyle\int (3-2x)e^{-2x}\,dx$

Solución:

☛ $\displaystyle\int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}} = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x-1} \\ x = t^2+1 \\ dx = 2tdt \end{array}\right] = \int \frac{2tdt}{2(t^2+1)t} = \int \frac{dt}{t^2+1} =$
$\arctan t + C = \arctan\sqrt{x-1} + C$

☛ $\displaystyle\int (3-2x)e^{-2x}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = 3-2x \Longrightarrow du = -2dx \\ dv = e^{-2x}dx \Longrightarrow v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array}\right] =$
$\displaystyle -\frac{(3-2x)e^{-2x}}{2} - \int e^{-2x}\,dx = -\frac{(3-2x)e^{-2x}}{2} + \frac{e^{-2x}}{2} + C =$
$\displaystyle \frac{2e^{-2x}(x-1)}{2} + C = (x-1)e^{-2x} + C$

Problema 3.17.2 Se considera la función $f(x) = e^{\frac{1}{\sin x + \cos x}}$

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0, \pi]$

b) Halla su extremo relativo en ese mismo intervalo.

Solución:

a) La función no será continua cuando $\sin x + \cos x = 0 \Longrightarrow \sin x = \cos x \Longrightarrow \tan x = -1 \Longrightarrow$ $x = \dfrac{3\pi}{4} = 135^\circ$ en el intervalo $[0, \pi]$.

$$\lim_{x\to\left(\frac{3\pi}{4}\right)^-} e^{\frac{1}{\sin x + \cos x}} = \left[\begin{array}{l} |\sin x| > |\cos x| \\ \sin x > 0 \\ \cos x < 0 \\ \sin x + \cos x \to 0^+ \end{array}\right] = \left[e^{\frac{1}{0^+}}\right] = e^{\infty} = \infty$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{3\pi}{4}\right)^+} e^{\frac{1}{\sin x+\cos x}} = \left[\begin{array}{l} |\sin x| < |\cos x| \\ \sin x > 0 \\ \cos x < 0 \\ \sin x + \cos x \to 0^- \end{array}\right] = \left[e^{\frac{1}{0^-}}\right] = e^{-\infty} = 0$$

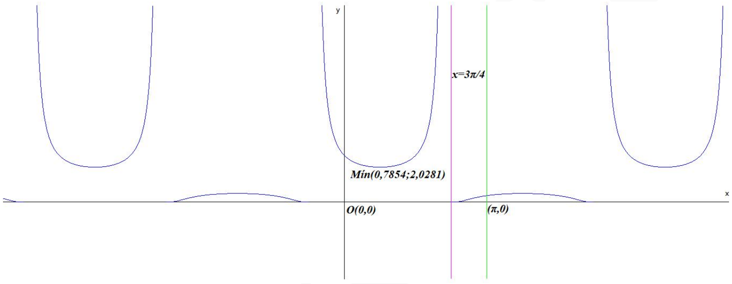
La función sería continua en el intervalo $\left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right)$

b) $f'(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^2} e^{\frac{1}{\sin x+\cos x}} = 0 \Longrightarrow \sin x - \cos x = 0 \Longrightarrow \tan x = 1 \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} = 45^\circ$

	$\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ y creciente en el intervalo $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right)$.

Presenta un mínimo relativo en el punto $\left(\dfrac{\pi}{4}, e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) \simeq (0,7854; 2,0281)$



Problema 3.17.3 Se considera la función $f(x) = \dfrac{e^{x^2-2}}{x}$

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-2, -1]$.

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (-2, -1)$ tal que $f'(\alpha) = e$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

Solución:

a) El numerador de la función es una función continua, el único punto en el que la función es discontinua es $x = 0$, pero este punto no pertenece al intervalo $[-2, -1] (0 \notin [-2, -1])$ Luego la función es continua en todo punto de este intervalo.

b) Además de continua en $[-2, -1]$ también es derivable en el intervalo $(-2, -1)$.

$$f'(x) = \frac{(2x^2 - 1)e^{x^2-2}}{x^2}$$

. La función derivada sigue siendo continua en $[-2, -1]$ y por el teorema de los valores intermedios $\exists \alpha \in (-2, -1)$ tal que $f'(-1) = \dfrac{1}{e} < f'(\alpha) < f'(-2) = \dfrac{7e^2}{4}$. $f'(\alpha)$ recorre todos los valores comprendidos entre $\dfrac{1}{e}$ y $\dfrac{7e^2}{4}$ y uno de ellos tiene que ser $f'(\alpha) = e$.

Problema 3.17.4 Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = 2 - |x| \;\text{ y }\; g(x) = x^2 - 10$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

Solución:

$f(x) = \begin{cases} 2 + x & \text{si } \; x < 0 \\ 2 - x & \text{si } \; x \geq 0 \end{cases}$

$f(x) = g(x) \Longrightarrow \begin{cases} 2 + x = x^2 - 10 & \text{si } \; x < 0 \\ 2 - x = x^2 - 10 & \text{si } \; x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow$

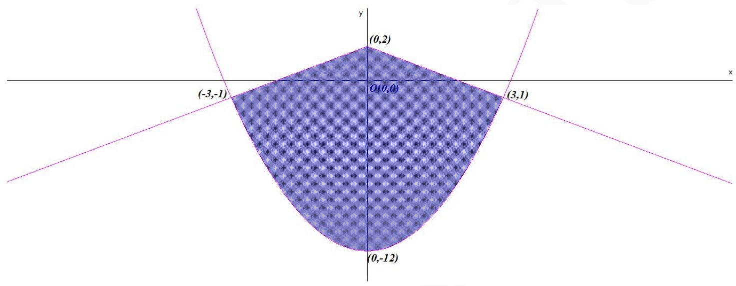
$\begin{cases} x^2 - x - 12 = 0 & \text{si } \; x < 0 \\ x^2 + x - 12 = 0 & \text{si } \; x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3 & \text{si } \; x < 0 \\ x = 3 & \text{si } \; x \geq 0 \end{cases}$ las otras soluciones no son válidas.

Tenemos dos recintos:

$$S_1 = \int_{-3}^{0} (x^2 - x - 12)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 12x\right]_{-3}^{0} = -\frac{45}{2}$$

$$S_2 = \int_{0}^{3} (x^2 + x - 12)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 12x\right]_{0}^{3} = -\frac{45}{2}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{45}{2} + \frac{45}{2} = 45\ u^2$$



3.17.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.17.5 Sea la función $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} \ln \frac{1}{x}\right)$

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$

b) Demuestra que existe $\alpha \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{e\sqrt{2}}{1 - e^2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

Solución:

a) la función es composición de funciones continuas y $\frac{1}{x} > 0$ en el intervalo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$. Luego es continua en este intervalo.

b) $f'(x) = -\dfrac{\pi}{4x}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\ln\dfrac{1}{x}\right)$ y es derivable en el intervalo $\left(\dfrac{1}{e}, e\right)$

La función cumple las condiciones del teorema del valor medio por lo que $\exists \alpha \in \left(\dfrac{1}{e}, e\right)$ tal que

$$f'(\alpha) = \frac{f(e) - f\left(\frac{1}{e}\right)}{e - \frac{1}{e}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{e^2-1}{e}} = \frac{-e\sqrt{2}}{e^2 - 1} = \frac{e\sqrt{2}}{1 - e^2}$$

Problema 3.17.6 Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x-1}\right)^{2x-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{\ln(x+1)-x}$$

Solución:

☛

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x-1}\right)^{2x-1} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}(2x-1)\left(\frac{x^2}{x^2+x-1} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty}(2x-1)\left(\frac{-x+1}{x^2+x-1}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+3x-1}{x^2+x-1} = -2$$

Luego: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2+x-1}\right)^{2x-1} = e^{-2}$

☛

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{\ln(x+1)-x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2e^x(e^x-1)}{\frac{1}{x+1}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{(2e^{2x}-2e^x)(x+1)}{-x} =$$

$$\left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(4e^{2x}-2e^x)(x+1)+2e^{2x}-2e^x}{-1} = -2$$

Problema 3.17.7 Se considera la función $f(x) = \ln\left(\sin\dfrac{\pi x}{6} - \cos\dfrac{\pi x}{6}\right)$

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[2, 4]$.

b) Demuestra que existe un valor $\alpha \in (2, 4)$ tal que $f(\alpha) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

Solución:

a) Se trata de composición de funciones continuas, habrá que ver si $\sin\dfrac{\pi x}{6} - \cos\dfrac{\pi x}{6} > 0$ en el intervalo $[2, 4]$.

Si $x = 2 \Longrightarrow \sin\dfrac{\pi}{3} - \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} > 0$

Si $x = 3 \Longrightarrow \sin\dfrac{\pi}{2} - \cos\dfrac{\pi}{2} = 1 - 0 > 0$

Si $x = 4 \Longrightarrow \sin\dfrac{2\pi}{3} - \cos\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} > 0$

$\forall x \in [2, 4] \Longrightarrow \sin\dfrac{\pi x}{6} - \cos\dfrac{\pi x}{6} > 0 \Longrightarrow$ la función f es continua en el intervalo.

b) $f(4) = 0,3119053581 > 0$ y $f(2) = -1,005052538 < 0$. La función cumple las condiciones del teorema de Bolzano que afirma que $\exists\alpha \in (2,4)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

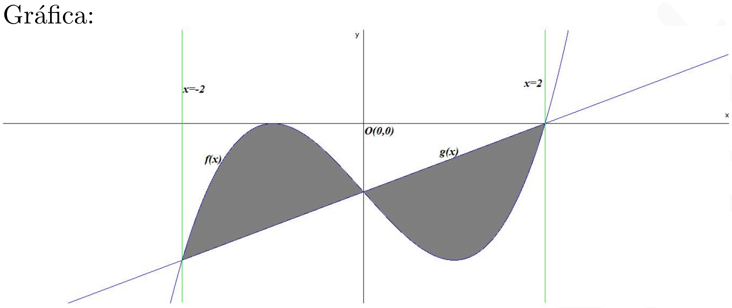
Problema 3.17.8 Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2, \quad g(x) = x - 2$$

Solución:

- $f(x) = g(x) \Longrightarrow x^3 - 3x - 2 = x - 2 \Longrightarrow x^3 - 4x = 0 \Longrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Longrightarrow x = 0,\ \ x = \pm 2$. Luego hay dos recintos S_1 en $[-2,0]$ y S_2 en $[0,2]$.

- Gráfica:



- $F(x) = \displaystyle\int (x^3 - 4x)\,dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + C$

- $S_1 = \displaystyle\int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,dx = F(0) - F(-2) = 4$

  $S_2 = \displaystyle\int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\,dx = F(2) - F(0) = -4$

- $S = |S_1| + |S_2| = 4 + 4 = 8\ u^2$

3.18. País Vasco

3.18.1. Convocatoria Ordinaria

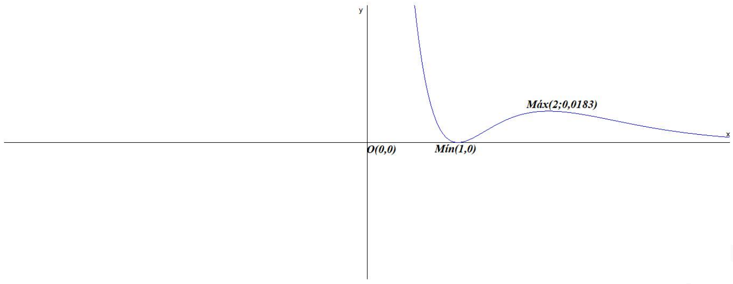
Problema 3.18.1 Dada la función $f(x) = (x-1)^2 e^{-2x}$, estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcula sus máximos y mínimos.

Solución:

$$f'(x) = 2e^{-2x}(-x^2 + 3x - 2) = 0 \Longrightarrow x = 1,\ \ x = 2$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ y creciente en el intervalo $(1, 2)$. La función presenta un mínimo relativo en $(1, 0)$ y un máximo relativo en $\left(2, e^{-4}\right) \simeq (2; 0,0183)$



Problema 3.18.2 Sea $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Encuentra los valores de los parámetros A, B y C para que f se anule en el punto de abscisa $x = 1$ y las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 3$ sean paralelas a la recta $y = 2x + 1$.

Solución:

$f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$

$$\left\{\begin{array}{l} f(1) = 0 \Longrightarrow 1 + A + B + C = 0 \\ f'(-1) = 2 \Longrightarrow 3 - 2A + B = 2 \\ f'(3) = 2 \Longrightarrow 27 + 6A + B = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = -3 \\ B = -7 \\ C = 9 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 7x + 9$$

Problema 3.18.3 Calcula $\displaystyle\int \frac{7x + 13}{(x+1)(x^2 - x - 2)}\,dx$

Solución:

$$\int \frac{7x + 13}{(x+1)(x^2 - x - 2)}\,dx = \int \frac{7x + 13}{(x+1)^2(x-2)}\,dx =$$

$$\left[\begin{array}{c} \dfrac{7x+13}{(x+1)^2(x-2)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{(x+1)^2} = \\ \dfrac{A(x+1)^2 + B(x-2)(x+1) + C(x-2)}{(x+1)^2(x-2)} \\ 7x + 13 = A(x+1)^2 + B(x-2)(x+1) + C(x-2) \\ x = -1 \Longrightarrow 6 = -3C \Longrightarrow C = -2 \\ x = 2 \Longrightarrow 27 = 9A \Longrightarrow A = 3 \\ x = 0 \Longrightarrow 13 = A - 2B - 2C \Longrightarrow B = -3 \\ \dfrac{7x+13}{(x+1)^2(x-2)} = \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{-3}{x+1} + \dfrac{-2}{(x+1)^2} \end{array}\right] =$$

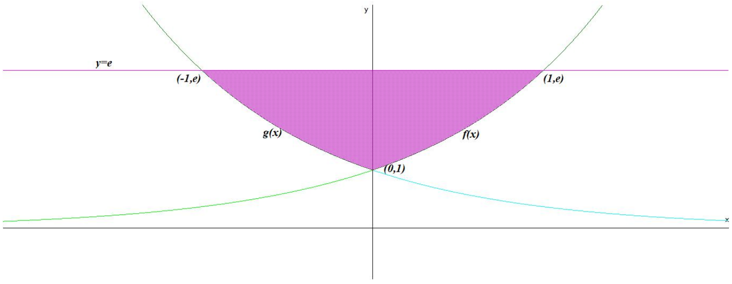
$$\int \left(\frac{3}{x-2} + \frac{-3}{x+1} + \frac{-2}{(x+1)^2}\right) dx = 3\ln|x-2| - 3\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + C$$

Problema 3.18.4 Dibuja el recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$ y la recta horizontal $y = e$, y calcula el área de ese recinto.

Solución:

a) Haciendo una tabla de valores y puntos de intersección de las funciones:
$f(x) = g(x) \Longrightarrow e^x = e^{-x} \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow (0, 1)$
$f(x) = e^x = e \Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow (1, e)$

$g(x) = e^{-x} = e \Longrightarrow x = -1 \Longrightarrow (-1, e)$



b) $S_1 = \int_{-1}^{0} \left(e - e^{-x}\right)\, dx = ex + e^{-x}\Big]_{-1}^{0} = 1$

$S_2 = \int_{0}^{1} \left(e - e^{x}\right)\, dx = ex - e^{x}\Big]_{0}^{1} = 1$

$S = |S_1| + |S_2| = 1 + 1 = 2\ u^2$

3.18.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 3.18.5 Calcula las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$ que son paralelas a la recta $y = 3x - 2$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Solución:

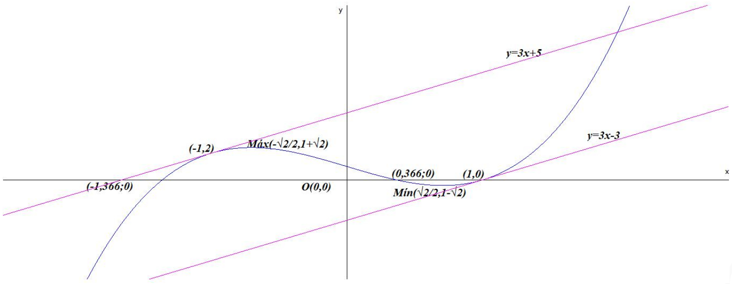
☛ $f(x) = 2x^3 - 3x + 1 \Longrightarrow f'(x) = 6x^2 - 3 \Longrightarrow m = f'(a) = 6a^2 - 3 = 3 \Longrightarrow a = \pm 1$

- Si $a = 1 \Longrightarrow b = f(a) = f(1) = 0 \Longrightarrow y - 0 = 3(x - 1) \Longrightarrow y = 3x - 3$
- Si $a = -1 \Longrightarrow b = f(a) = f(-1) = 2 \Longrightarrow y - 2 = 3(x + 1) \Longrightarrow$ $y = 3x + 5$

☛ $f'(x) = 6x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y creciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$. La función presenta un mínimo relativo en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2}\right)$ y un máximo relativo en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2}\right)$



Problema 3.18.6 Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 + Ax & \text{si} \quad x \le 1 \\ Bx - A & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

a) Encuentra los valores de A y B para que f sea derivable en toda la recta real.

b) Haz la representación gráfica de la función f con los valores de A y B obtenidos en el apartado (a).

Solución:

a) Las dos ramas son continuas y derivables en ambas ramas, hay que imponer que lo sean en $x = 1$:

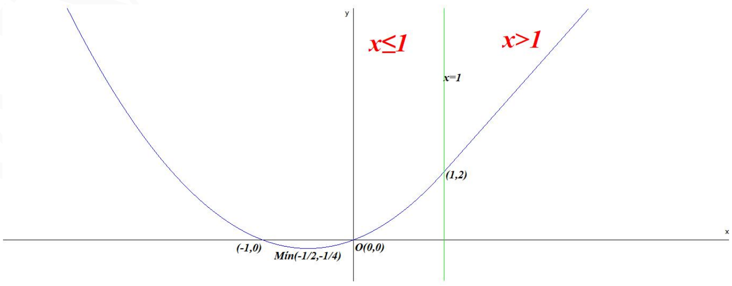
- ☛ Continua en $x = 1$:
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2 + Ax) = 1 + A \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (Bx - A) = B - A \\ f(1) = 1 + A \end{array} \right. \Longrightarrow 1 + A = B - A \Longrightarrow$$
$2A - B = -1$

- ☛ Derivable en $x = 1$: $f(x) = \begin{cases} 2x + A & \text{si} \quad x \le 1 \\ B & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 2 + A \\ f'(1^+) = B \end{cases} \Longrightarrow$
$2 + A = B \Longrightarrow A - B = -2$

- ☛ $\begin{cases} 2A - B = -1 \\ A - B = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 3 \end{cases}$

b) La representación gráfica se hace con tabla de valores.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si} \quad x \le 1 \\ 3x - 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$



Problema 3.18.7 Calcula $\displaystyle\int \ln(x^2 - 1)\, dx$

Solución:

$$\int \ln(x^2-1)\,dx = \left[\begin{array}{c} u=\ln(x^2-1) \Longrightarrow du=\dfrac{2x}{x^2-1} \\ dv=dx \Longrightarrow u=x \end{array}\right] =$$

$$x\ln(x^2-1) - 2\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \left[\begin{array}{l} \begin{array}{l} (\quad x^2) : (x^2-1) = 1+\dfrac{1}{x^2-1} \\ \underline{-\,x^2+1} \\ \qquad\quad 1 \end{array} \end{array}\right] =$$

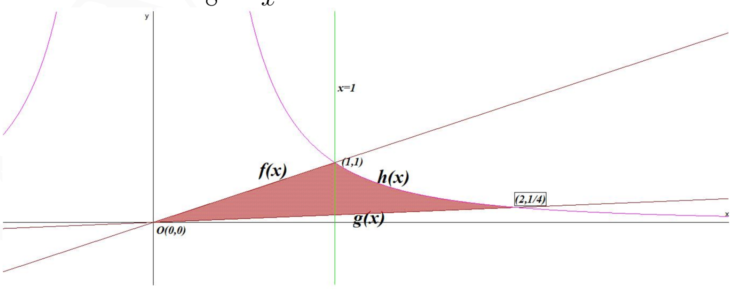
$$x\ln(x^2-1) - 2\int\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)dx = x\ln(x^2-1)-2x-2\int\frac{1}{x^2-1}\,dx =$$

$$\left[\begin{array}{c} \dfrac{1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1} = \dfrac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ 1 = A(x+1)+B(x-1) \\ x=-1 \Longrightarrow 1=-2B \Longrightarrow B=-1/2 \\ x=1 \Longrightarrow 1=2A \Longrightarrow A=1/2 \\ \dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1/2}{x-1}+\dfrac{-1/2}{x+1} \end{array}\right] =$$

$$x\ln(x^2-1)-2x-2\int\left(\frac{1/2}{x-1}+\frac{-1/2}{x+1}\right)dx = x\ln(x^2-1)-2x-\ln|x-1|+\ln|x+1|+C$$

Problema 3.18.8 Dibuja el recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=x$, $g(x)=x/8$ y $h(x)=\dfrac{1}{x^2}$, y calcula el área de ese recinto.
Solución:

☛ Haciendo una tabla de valores y puntos de intersección de las funciones:
$f(x)=g(x) \Longrightarrow x=\dfrac{x}{8} \Longrightarrow x=0 \Longrightarrow (0,0)$
$f(x)=h(x) \Longrightarrow x=\dfrac{1}{x^2} \Longrightarrow x^3=1 \Longrightarrow x=1 \Longrightarrow (1,1)$
$g(x)=h(x) \Longrightarrow \dfrac{x}{8}=\dfrac{1}{x^2} \Longrightarrow x^3=8 \Longrightarrow x=2 \Longrightarrow (2,1/4)$



☛ $S_1 = \int_0^1 \left(x - \frac{x}{8}\right)\, dx = \left.\frac{7x^2}{16}\right]_0^1 = \frac{7}{16}$

$S_2 = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{x}{8}\right)\, dx = \left.-\frac{1}{x} - \frac{1}{8}\right]_1^2 = \frac{5}{16}$

$S = |S_1| + |S_2| = \frac{7}{16} + \frac{5}{16} = \frac{3}{4} = 0,75\ u^2$

Capítulo 4

Probabilidad

4.1. Resúmenes teóricos

Frecuencia absoluta de un suceso A es el número de veces que se repite dicho suceso $\Longrightarrow f(A)$

Frecuencia relativa de un suceso A es la proporción de veces que ha sucedido A de N experiencias $\Longrightarrow f_r(A) = \dfrac{f(A)}{N}$

Ley de los grandes números: $\lim\limits_{N \longrightarrow \infty} f_r(A) = P(A)$

Ley de Laplace: $P(A) = \dfrac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$

$\Omega \equiv$ **Espacio muestral** es el de todos los sucesos, sería el suceso seguro: $P(\Omega) = 1$.

$\emptyset \equiv$ **Espacio vacio** es el de ningún suceso, sería el suceso imposible: $P(\emptyset) = 0$.

Diagramas de Venn: (esquemas usados en la teoría de conjuntos)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

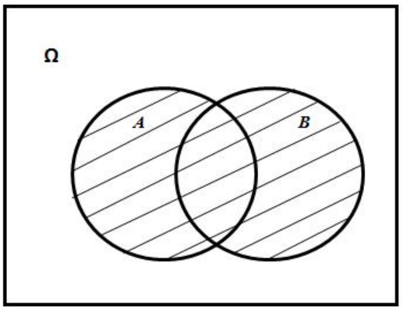
En el caso de que los dos sucesos sean incompatibles la fórmula quedaría:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Sucesos independientes: Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

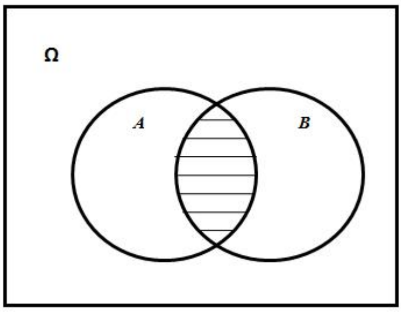
Leyes de Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

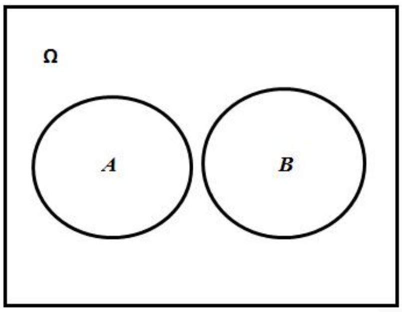
Probabilidad condicionada: es la probabilidad de que ocurra un suceso A sabiendo que ha ocurrido el suceso B: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$



Unión de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos del conjunto A con todos los de B: $A \cup B$

Intersección de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos comunes entre los conjuntos A y B: $A \cap B$



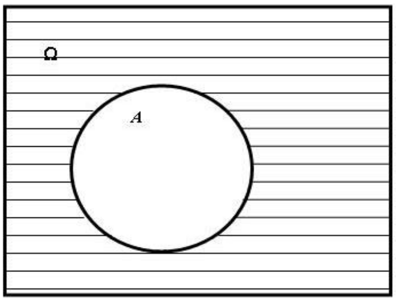


Sucesos Incompatibles: Dos sucesos son incompatibles si su intersección es vacía. $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cap B) = 0$

Teorema de Bayes: $P(A|B) = \dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

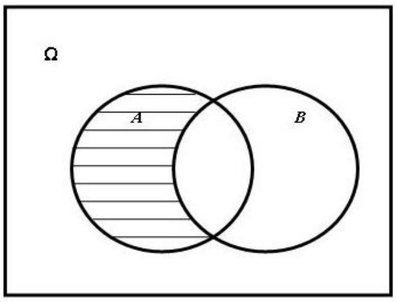
Teorema de la probabilidad total: Si $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \Omega$ y los sucesos A_i con $i = 1, ..., 5$ son incompatibles dos a dos (intersección vacía), entonces:

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) + P(A_4)P(A|A_4) + P(A_5)P(A|A_5)$$



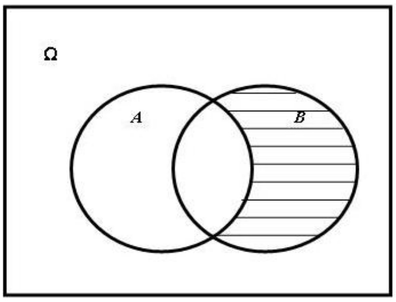
$\overline{A}$ es el suceso contrario o complementario de A:

$$\overline{A} = \Omega - A \Longrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$



$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

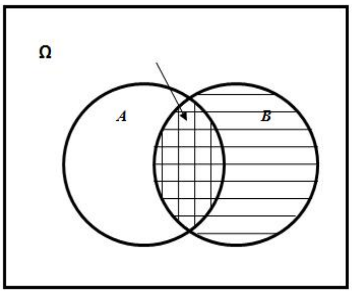


Organización por árboles:

Organización por tablas de contingencia:

	Renault	Seat	Mercedes	Totales
Blanco	15	20	10	45
Negro	300	455	200	955
	315	475	210	1000

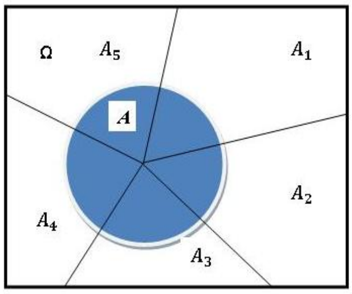
$$P(B|S) = \frac{20}{475},\ \ P(N|M) = \frac{200}{210},\ \ P(B) = \frac{45}{1000},\ \ P(M) = \frac{210}{1000}$$



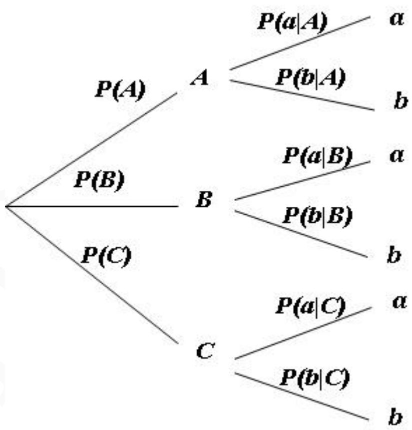
Probabilidad condicionada:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

probabilidad total



$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1)+P(A_2)P(A|A_2)+P(A_3)P(A|A_3)+P(A_4)P(A|A_4)+P(A_5)P(A|A_5)$$



4.2. Andalucia

4.2.1. Convocatoria Ordinaria

Sin problemas en esta materia

4.2.2. Convocatoria Extraordinaria

Sin problemas en esta materia

4.3. Aragón

4.3.1. Convocatoria Ordinaria

Sin problemas en esta materia

4.3.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 4.3.1 En una academia de artes escénicas se imparten clases de danza y teatro. De danza, hay modalidad de danza clásica y cabaret. En la academia, un 17 % de individuos practica danza clásica, un 45 % cabaret y un 5 % ambas modalidades de danza. Si elegimos un individuo que asiste a dicha academia:

a) Calcula la probabilidad de que practique algún tipo de danza (o los dos).

b) Calcula la probabilidad de que practique solamente teatro.

Solución: Sean Cl danza clásica, Ca cabaret y T teatro.
$P(Cl) = 0,17$, $P(Ca) = 0,45$ y $P(Cl \cap Ca) = 0,05$

a) $P(Cl \cup Ca) = P(Cl) + P(Ca) - P(Cl \cap Ca) = 0,17 + 0,45 - 0,05 = 0,57$

b) El enunciado no expecifica sobre una posible intersección entre danza y teatro y supongo que no la hay:
$$P(T) = 1 - 0,57 = 0,43$$

4.4. Asturias

4.4.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 4.4.1 Se tienen tres sobres, A, B y C. En el sobre A hay dos cartas de copas y tres de bastos. En el sobre B tres cartas de copas y dos de bastos y en el sobre C cuatro de copas y una de bastos. Se tira un dado y se saca una carta del sobre A si el resultado es impar, del sobre B si el resultado es 4 o 6 y del sobre C si el resultado es un 2.

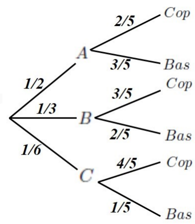
a) Calcula la probabilidad de que se obtenga una carta de bastos.

b) Se extrae una carta y resulta ser copas ¿cuál es la probabilidad de que se haya extraído del sobre B?

Solución:
Sean Bas bastos y Cop copas. Tenemos:
$P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{1}{3}$ y $P(C) = \dfrac{1}{6}$

a)

$$P(Bas) =$$
$$P(Bas|A)P(A) + P(Bas|B)P(B) + P(Bas|C)P(C) =$$
$$\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{15} = 0,4667$$



b) $P(B|Cop) = \dfrac{P(Cop|B)P(B)}{P(Cop)} = \dfrac{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{7}{15}} = \dfrac{3}{8} = 0,375$

4.4.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 4.4.2 En una oficina del ayuntamiento se asigna un número a cada persona que entra. Se observa que el 70 % de las personas que entran son mujeres. El 40 % de los hombres y el 30 % de las mujeres que entran son menores de 30 años.

a) Calcule la probabilidad de que un número sea asignado a una persona menor de 30 años.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un número sea asignado a un hombre que no tiene menos de 30 años?

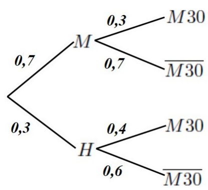
c) Si la persona a la que se le ha asignado un número no tiene menos de 30 años ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?.

Solución:
Sean los sucesos M mujer y H hombre y $M30$ menor de 30 años y $\overline{M30}$ mayor de 30 años.

a) $P(M30) = P(M30|M)P(M) + P(M30|H)P(H) =$
$0,3\cdot 0,7 + 0,4\cdot 0,3 = 0,33$

b) $P(H\cap\overline{M30}) = P(\overline{M30}|H)P(H) =$
$0,6\cdot 0,3 = 0,18$

c) $P(H|\overline{M30}) = \dfrac{P(M30|H)P(H)}{P(\overline{M30})} =$
$\dfrac{0,6\cdot 0,3}{1-0,33} = 0,2687$



4.5. Cantabria

4.5.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 4.5.1 En una urna hay 4 bolas, una de ellas es blanca y las otras tres negras. Sacamos una bola al azar y sin devolverla a la urna sacamos una segunda bola también al azar.

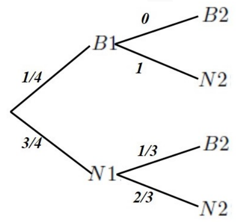
a) Calcule la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color.

b) Calcule la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.

c) Calcule la probabilidad de sacar una bola negra en la segunda extracción, si sabemos que la primera bola fue negra.

Solución:
Sean $B1$ blanca en la 1ª extracción, $N1$ negra en la 1ª extracción, $B2$ blanca en la 2ª extracción y $N2$ negra en la 2ª extracción

a) $P(\text{distinto color}) = P(B1 \cap N2) + P(N1 \cap B2) =$
$P(N2|B1)P(B1) + P(B2|N1)P(N1) =$
$1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$



b) $P(\text{mismo color}) = 1 - P(\text{distinto color}) =$
$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

c) $P(N2|N1) = \frac{2}{3} = 0,667$

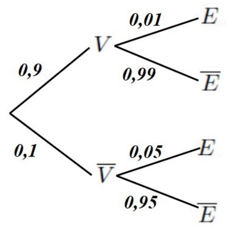
4.5.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 4.5.2 El 90 % de las personas de una población están vacunadas contra la enfermedad E. El 5 % de las personas no vacunadas tienen la enfermedad E, y el 1 % de las personas vacunadas también han contraído la enfermedad.
Se selecciona una persona al azar de dicha población:

a) Calcule la probabilidad de la persona esté enferma.

b) Calcule la probabilidad de que esté vacunada sabiendo que está enferma.

Solución:
Sean V vacunada, $\overline{V}$ no vacunada, E tiene la enfermedad y $\overline{E}$ no tiene la enfermedad



a) $P(E) = P(E|V)P(V) + P(E|\overline{V})P(\overline{V}) =$
$0,01 \cdot 0,9 + 0,05 \cdot 0,1 = 0,014$

b) $P(V|E) = \frac{P(E|V)P(V)}{P(E)} = \frac{0,01 \cdot 0,9}{0,014} = 0,6429$

4.6. Castilla La Mancha

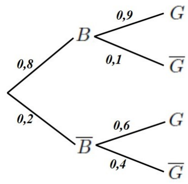
4.6.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 4.6.1 El EVAU club de fútbol tiene una probabilidad del 90 % de ganar un partido cuando juega Benceno (su delantero estrella) y del 60 % cuando no lo hace. Se sabe que la probabilidad de que Benceno juegue un partido es del 80 %.

b.1 ¿Cuál es la probabilidad de que el EVAU C.F. gane un partido cualquiera?

b.2 Si el EVAU C.F. acaba de ganar un partido, ¿cuál es la probabilidad de que Benceno haya jugado?

Solución:
Sean B juega Benceno, $\overline{B}$ no juega Benceno, G ganan el partido y $\overline{G}$ no ganan el partido.



b.1 $P(G) = P(G|B)P(B) + P(G|\overline{B})P(\overline{B}) =$
$0,8 \cdot 0,9 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,84$

b.2 $P(B|G) = \dfrac{P(G|B)P(B)}{P(G)} = \dfrac{0,8 \cdot 0,9}{0,84} = 0,85714$

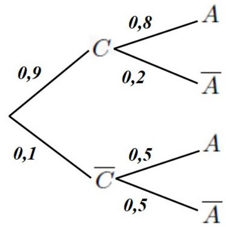
4.6.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 4.6.2 En un determinado I.E.S. la probabilidad de que un alumno apruebe si va a clase es del 80 % mientras que si no va a clase es del 50 %. El 90 % de los alumnos va a clase.

a.1 ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno apruebe?

a.2 Si un alumno ha suspendido, ¿cuál es la probabilidad de que no haya ido a clase?

Solución:
Sean C acude a clase, $\overline{C}$ no acude a clase, A aprueba y $\overline{A}$ no aprueba.



a.1 $P(A) = P(A|C)P(C) + P(A|\overline{C})P(\overline{C}) =$
$0,8 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,1 = 0,77$

a.2 $P(\overline{C}|\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A}|\overline{C})P(\overline{C})}{P(\overline{A})} =$
$\dfrac{0,5 \cdot 0,1}{1 - 0,77} = 0,2174$

4.7. Castilla León

4.7.1. Modelo

Problema 4.7.1 Una corporación informática utiliza 3 bufetes de abogados para resolver casos legales en los tribunales. El bufete A recibe el 30 % de los casos legales y gana en los tribunales el 60 % de los casos presentados, el bufete B recibe el 50 % de los casos legales y gana el 80 % de los casos presentados, mientras que el bufete C recibe el 20 % de los casos legales y gana el 70 %de los casos presentados.

a) Se consideran los sucesos $A =$ "caso adjudicado al bufete A", $B =$ "caso adjudicado al bufete B", $C =$ "caso adjudicado al bufete C", $G =$ "caso ganado". Deduzca del enunciado los valores de $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(G|A)$, $P(G|B)$, $P(G|C)$.

b) Se elige al azar uno de los casos presentados en los tribunales. Determine la probabilidad de que la empresa gane el caso.

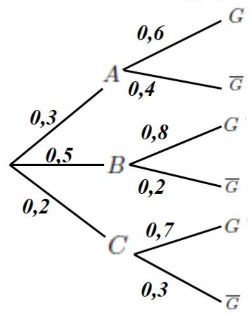
c) Si se ha ganado el caso elegido, calcule la probabilidad de que haya sido encargado al bufete A.

Solución:

a) $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,5$, $P(C) = 0,2$, $P(G|A) = 0,6$, $P(G|B) = 0,8$, $P(G|C) = 0,7$.

b) $P(G) = P(G|A)P(A) + P(G|B)P(B) + P(G|C)P(C) =$
$0,6 \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,5 + 0,7 \cdot 0,2 = 0,72$

c) $P(A|G) = \dfrac{P(G|A)P(A)}{P(G)} = \dfrac{0,6 \cdot 0,3}{0,72} = 0,25$



4.7.2. Convocatoria Ordinaria

Problema 4.7.2 Una corporación fabrica herramientas de 3 tipos de calidades. Un 10 % de calidad Alta, un 70 % de calidad Estándar y un 20 % de calidad Baja. Se sabe que son defectuosas el 1 %, el 10 % y el 30 % del total de las herramientas respectivamente.

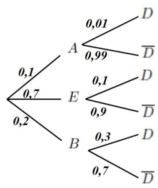
a) Se elige una herramienta al azar. Definiendo correctamente los sucesos que intervienen, calcúlese la probabilidad de que sea defectuosa.

b) Se elige una herramienta que resulta ser defectuosa. Definiendo correctamente los sucesos que intervienen, calcúlese la probabilidad de que la elegida sea de calidad estándar.

Solución:
Sean A calidad Alta, E calidad Estándar, B calidad Baja, D son defectuosas y $\overline{D}$ no son defectuosas.

a) $P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|E)P(E) + P(D|B)P(B) =$
$0,01 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,2 = 0,131$

b) $P(E|D) = \dfrac{P(D|E)P(E)}{P(D)} = \dfrac{0,1 \cdot 0,7}{0,131} = 0,5344$



4.7.3. Convocatoria Extraordinaria

Problema 4.7.3 Entre los participantes de un torneo internacional de ajedrez:

- El 28 % de ellos son rusos, de los cuales las tres cuartas partes son grandes maestros.
- El 24 % son estadounidenses y entre ellos la mitad son grandes maestros.
- El 48 % son del resto del mundo, de los cuales un tercio son grandes maestros.

Considerando los sucesos: R = "ser ruso", E = "ser estadounidense", M = "no ser ruso ni estadounidense" y GM = "ser gran maestro"

a) Indique cuáles son los valores de $P(GM|R)$, $P(GM|E)$ y $P(GM|M)$

b) Calcule la probabilidad de que al elegir al azar a uno de los participantes en el torneo, sea un gran maestro.

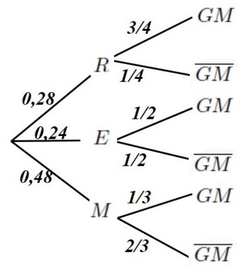
c) Si se elige al azar a uno de los grandes maestros del torneo, ¿cuál es la probabilidad de que sea ruso?

Solución:

a) $P(GM|R) = \dfrac{3}{4}$, $P(GM|E) = \dfrac{1}{2}$ y $P(GM|M) = \dfrac{1}{3}$

b) $P(GM) =$
$P(GM|R)P(R) + P(GM|E)P(E) + P(GM|M)P(M) =$
$\dfrac{3}{4} \cdot 0,28 + \dfrac{1}{2} \cdot 0,24 + \dfrac{1}{3} \cdot 0,48 = 0,49$

c) $P(R|GM) = \dfrac{P(GM|R)P(R)}{P(GM)} = \dfrac{\frac{3}{4} \cdot 0,28}{0,49} = 0,4286$



4.8. Cataluña

4.8.1. Convocatoria Ordinaria

Sin problemas en esta materia

4.8.2. Convocatoria Extraordinaria

Sin problemas en esta materia

4.9. Comunidad Valenciana

4.9.1. Convocatoria Ordinaria

Sin problemas en esta materia

4.9.2. Convocatoria Extraordinaria

Sin problemas en esta materia

4.10. Extremadura

4.10.1. Modelo

Problema 4.10.1 Se ha observado que en la fabricación de un cierto modelo de ordenador se presentan problemas de software con probabilidad 0,1 y problemas de hardware con probabilidad 0,05. Sabiendo que ambos tipos de problemas son independientes, se pide:

a) Probabilidad de que un ordenador presente alguno de estos problemas.

b) Sabiendo que un ordenador no presenta problemas de hardware, calcular la probabilidad de que no tenga problemas de software.

Solución:
Sean S problemas de software y H problemas de hardware.
Tenemos $P(S) = 0,1$, $P(H) = 0,05$ y por ser S y H independientes $P(S \cap H) = 0,1 \cdot 0,05 = 0,005$

a) $P(S \cup H) = P(S) + P(H) - P(S \cap H) = 0,1 + 0,05 - 0,005 = 0,145$

b) $P(\overline{S}|\overline{H}) = \dfrac{P(\overline{S} \cap \overline{H})}{P(\overline{H})} = \dfrac{P(\overline{S \cup H})}{1 - P(H)} = \dfrac{1 - P(S \cup H)}{1 - P(H)} = \dfrac{1 - 0,145}{1 - 0,05} = 0,9$

4.10.2. Convocatoria Ordinaria

Problema 4.10.2 En un centro educativo han preguntado a sus alumnos acerca de alergias alimentarias, resultando que un 10 % es celiaco y un 15 % es alérgico a la lactosa. Además, el 20 % tiene alguna de las dos alergias. Si se elige un alumno al azar, calcular las siguientes probabilidades:

a) tenga solo una de las dos alergias,

b) sea celiaco si sabemos que no es alérgico a la lactosa.

Solución:
Sean C celiaco y L alérgico a la lactosa.
$P(C) = 0,1$, $P(L) = 0,15$ y $P(C \cup L) = 0,2$

a) $P(C \cup L) = P(C) + P(L) - P(C \cap L) \Longrightarrow$
$P(C \cap L) = P(C) + P(L) - P(C \cup L) = 0,1 + 0,15 - 0,2 = 0,05$
$P(\text{solo una}) = P(C\cap\overline{L}) + P(\overline{C}\cap L) = P(C) - P(C\cap L) + P(L) - P(C\cap L) = 0,1 + 0,15 - 0,1 = 0,15$

b) $P(C|\overline{L}) = \dfrac{P(C \cap \overline{L})}{P(\overline{L})} = \dfrac{P(C) - P(C \cap L)}{1 - P(L)} = \dfrac{0,1 - 0,05}{1 - 0,15} = 0,0588$

4.10.3. Convocatoria Extraordinaria

Problema 4.10.3 El 50 %de los alumnos de la UEX practica "running" y el 30 % monta en bicicleta. Además, se sabe que el 70 % de los alumnos de la UEX practica uno de los dos deportes. Si seleccionamos un alumno al azar, se pide:

a) La probabilidad de que no practique ninguno de los dos deportes.

b) Si practica el deporte de montar en bicicleta, ¿cuál es la probabilidad de que practique running?

c) ¿Son independientes los sucesos "Practicar running" y "Practicar montar en bicicleta"?

Solución:
Sean R "running" y B monta en bicicleta.
$P(R) = 0,5$, $P(B) = 0,3$ y $P(R \cup B) = 0,7$

a) $P(\overline{R} \cap \overline{B}) = P(\overline{R \cup B}) = 1 - P(R \cup B) = 1 - 0,7 = 0,3$

b) $P(R \cup B) = P(R) + P(B) - P(R \cap B) \Longrightarrow 0,7 = 0,5 + 0,3 - P(R \cap B) \Longrightarrow P(R \cap B) = 0,1$
$P(R|B) = \dfrac{P(R \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,1}{0,3} = \dfrac{1}{3} = 0,3333$

c) $P(R) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15 \neq P(R \cap B) = 0,1 \Longrightarrow R$ y B no son independientes.

4.11. Galicia

4.11.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 4.11.1 Se pide:

a) Si $P(A\cup B)=\dfrac{1}{3}$ y $P(B)=\dfrac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabiendo que A y B son sucesos incompatibles. ¿Cuanto valdría $P(A)$ si supusiéramos que A y B son, en lugar de incompatibles, independientes?

b) En una cierta ciudad, el 21 % de las personas leen ciencia ficción, el 63 % leen novela negra, y el 17 % leen tanto ciencia ficción como novela negra. Si se elige al azar una persona de esa ciudad, calcule:

- La probabilidad de que lea novela negra sabiendo que lee ciencia ficción.
- La probabilidad de que no lea ni ciencia ficción ni novela negra.

Solución:

a) A y B incompatibles $\Longrightarrow P(A\cap B)=0$
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Longrightarrow \dfrac{1}{3}=P(A)+\dfrac{1}{4}-0\Longrightarrow$
$P(A)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$
Si en vez de incompatibles fuesen independientes $\Longrightarrow$
$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\dfrac{P(A)}{4}$
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Longrightarrow \dfrac{1}{3}=P(A)+\dfrac{1}{4}-\dfrac{P(A)}{4}\Longrightarrow \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3P(A)}{4}\Longrightarrow$
$P(A)=\dfrac{1}{9}$

b) Sean C lee ciencia ficción y N lee novela negra.
Tenemos $P(C)=0,21$, $P(N)=0,63$ y $P(C\cap N)=0,17$

- $P(N|C)=\dfrac{P(C\cap N)}{P(C)}=\dfrac{0,17}{0,21}=0,8095238$
- $P(\overline{C}\cap\overline{N})=P(\overline{C\cup N})=1-P(C\cup N)=$
$1-(P(C)+P(N)-P(C\cap N))=1-(0,21+0,63-0,17)=0,33$

4.11.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 4.11.2 Se pide:

a) En una famosa biblioteca, el 70 % de los libros son novelas, el 40 % son clásicos anteriores al siglo XIX y el 60 % de los clásicos son novelas. Si se elige en esa biblioteca un libro al azar, calcule la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico, y la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una novela.

b) En un cierto país, el 80 % de los delitos contra la propiedad quedan sin resolver. Si en una localidad de ese país se cometieron 3 de esos delitos, calcule la probabilidad de que se resuelva por lo menos 1.

Solución:

a) Sean N es novela y C es clásico.
$P(N)=0,7$, $P(C)=0,4$ y $P(N|C)=0,6$.
$P(C|N)=\dfrac{P(N|C)P(C)}{P(N)}=\dfrac{0,6\cdot 0,4}{0,7}=0,3429$

b) $P(\text{resolver al menos 1}) = 1 - P(\text{no se resuelve ninguno}) = 1 - 0,8^3 = 0,488$

4.12. Islas Baleares

4.12.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 4.12.1 Dados dos sucesos A y B, se conocen las siguientes probabilidades: $P(A) = 0,7$, $P(\overline{B}) = 0,4$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,58$ donde $\overline{A}$ y $\overline{B}$ indicanlos sucesos contrarios (o complementarios) de A y de B, respectivamente. Calcule las siguientes probabilidades.

a) $P(\overline{A})$, $P(B)$ y $P(A \cap B)$. ¿Son A y B sucesos independientes?

b) $P(A \cup B)$

c) $P(B \cap \overline{A})$

d) $P(A|B)$ y $P(\overline{A}|B)$

Solución:

a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,7 = 0,3$
$P(\overline{B}) = 1 - P(B) \Longrightarrow P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0,4 = 0,6$
$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \Longrightarrow$
$P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - 0,58 = 0,42$
$P(A)P(B) = 0,7 \cdot 0,6 = 0,42 = P(A \cap B) \Longrightarrow$ A y B son independientes.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,7 + 0,6 - 0,42 = 0,88$

c) $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0,6 - 0,42 = 0,18$

d) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,42}{0,6} = 0,7$
$P(\overline{A}|B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,18}{0,6} = 0,3$

4.12.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 4.12.2 Una prueba diagnóstica de una enfermedad da resultado negativo el 5 % de las veces que se aplica a un individuo que la padece y da positivo el 10 % de las veces que se aplica a un individuo que no la padece. Las estadísticas muestran que dicha enfermedad afecta a 50 de cada 10000 personas. Si una persona elegida al azar se somete a la prueba diagnóstica, calcule las siguientes probabilidades.

a) Que un individuo no padezca la enfermedad.

b) Que la prueba dé resultado positivo.

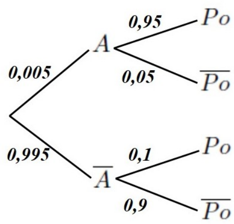
c) Que la persona no padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba es negativo.

d) Que el resultado de la prueba sea erróneo.

Solución:
Sean A afectado, $\overline{A}$ no afectado, Po da positivo y $\overline{Po}$ da negativo.
$P(A) = \dfrac{50}{10000} = 0,005$

a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,005 = 0,995$

b) $P(Po) = P(Po|A)P(A) + P(Po|\overline{A})P(\overline{A}) =$
$0,95 \cdot 0,005 + 0,1 \cdot 0,995 = 0,10425$



c) $P(\overline{A}|\overline{Po}) = \dfrac{P(\overline{Po}|\overline{A})P(\overline{A})}{P(\overline{Po})} = \dfrac{0,9 \cdot 0,995}{1 - 0,10425} = 0,9997$

d) $P(E) = P(Po|\overline{A})P(\overline{A}) + P(\overline{Po}|A)P(A) =$
$0,1 \cdot 0,995 + 0,05 \cdot 0,005 = 0,09975$

Problema 4.12.3 Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 bolas negras. La urna B contiene 3 bolas rojas y 3 bolas negras. La urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento.

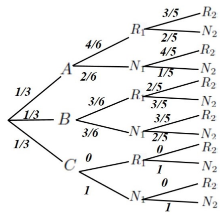
a) Calcule la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.

b) Calcule la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra.

c) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcule la probabilidad de que la segunda sea negra.

Solución:

Sean R_1 la primera es roja, R_2 la segunda es roja, N_1 la primera es negra, N_2 la segunda es negra, A elige A, B elige B y C elige C.



a) $P(R_1) = P(R_1|A)P(A) + P(R_1|B)P(B) + P(R_1|C)P(C) =$
$\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{4}{6} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{6} + \dfrac{1}{3} \cdot 0 = \dfrac{7}{18} \simeq 0,3889$

b) $P(R_1 \cap N_2) = P(R_1 \cap N_2|A)P(A) + P(R_1 \cap N_2|B)P(B) + P(R_1 \cap N_2|C)P(C) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{2}{5} +$
$\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{6} \cdot \dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{3} \cdot 0 \cdot 1 = \dfrac{17}{90} \simeq 0,1889$

c) $P(N_2|R_1) = \dfrac{P(R_1 \cap N_2)}{P(R_1)} = \dfrac{17/90}{7/18} = \dfrac{17}{35} \simeq 0,4857$

4.13. Islas Canarias

4.13.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 4.13.1 Tenemos una caja con bolas de madera y de plástico de distintos colores, pero con el mismo tamaño y aspecto. Contamos con la siguiente información de su contenido:

- El 38 % son bolas azules y, de este color, la mitad son de madera

- El 29 % son bolas rojas y, de este color, las tres cuartas partes son de madera
- El 33 % son bolas verdes y, de este color, dos tercios son de madera

Extraemos una bola de la caja. Responde a las siguientes preguntas:

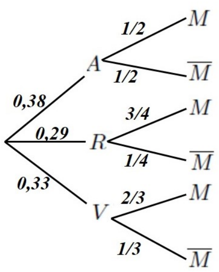
a) Construye el árbol de probabilidades

b) Calcula la probabilidad de que, al sacar una bola al azar de la caja, esta sea de madera

c) Si la bola extraída de la caja es de plástico, ¿qué probabilidad hay de que sea de color rojo?

Solución:
Sean A bola azul, R bola roja, V bola verde, M bola de madera y $\overline{M}$ la bola no es de madera.

a) Árbol de probabilidades:



b) $P(M) = P(M|A)P(A) + P(M|R)P(R) + P(M|V)P(V) =$
$\dfrac{1}{2} \cdot 0,38 + \dfrac{3}{4} \cdot 0,29 + \dfrac{2}{3} \cdot 0,33 = 0,6275$

c) $P(R|\overline{M}) = \dfrac{P(\overline{M}|R)}{P(\overline{M})} = \dfrac{\frac{1}{4} \cdot 0,29}{1 - 0,6275} = 0,1946$

4.13.2. Convocatoria Extraordinaria

Sin problemas en esta materia

4.14. La Rioja

4.14.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 4.14.1 En un distrito universitario, los estudiantes se distribuyen entre las tres carreras que pueden cursarse del siguiente modo: el 20 % estudian Matemáticas, el 35 % Medicina y el 45 % Arquitectura. El porcentaje de alumnos que finalizan sus estudios en cada caso es del 5 %, 12 % y del 18 %. Se elige un alumno al azar. Halla la probabilidad de que:

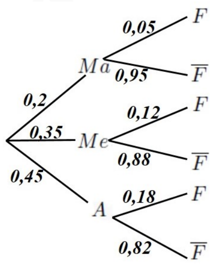
a) finalice sus estudios.

b) estudie Medicina si no finaliza sus estudios.

Solución:
Sean Ma estudia matemáticas, Me estudia medicina, A estudia arquitectura, F finaliza la carrera

y $\overline{F}$ no finaliza la carrera.

a) $P(F) =$
$P(F|Ma)P(Ma) + P(F|Me)P(Me) + P(F|A)P(A) =$
$0,05 \cdot 0,2 + 0,12 \cdot 0,35 + 0,18 \cdot 0,45 = 0,133 \Longrightarrow 13,3\,\%$



b) $P(Me|\overline{F}) = \dfrac{P(\overline{F}|Me)P(Me)}{P(\overline{F})} =$
$\dfrac{0,88 \cdot 0,35}{1 - 0,133} = 0,3552 \Longrightarrow 35,52\,\%$

4.14.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 4.14.2 Estudia la posible dependencia de los sucesos A y B, en los siguientes casos:

a) A y B son incompatibles y ambos sucesos de probabilidad no nula.

b) B está incluido en A, y B es un suceso de probabilidad no nula.

Solución:

a) A y B son incompatibles si $A \cap B = \varnothing \Longrightarrow P(A \cap B) = 0$
Para que sean independientes $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0 \Longrightarrow P(A)$ o $P(B)$ tiene que ser cero en contra de la hipótesis de ambos sucesos de probabilidad no nula. Luego los sucesos no pueden ser independientes.

b) Si $B \subset A \Longrightarrow P(A \cap B) = P(B)$, como $P(A) \geq P(B) \Longrightarrow P(A \cap B) = P(B) \neq P(A)P(B) \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

4.15. Madrid

4.15.1. Modelo

Problema 4.15.1 Una urna contiene 7 bolas blancas y 12 bolas negras. Se extrae al azar una bola de la urna y se sustituye por dos del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola de la urna. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea blanca.

b) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea de distinto color que la primera.

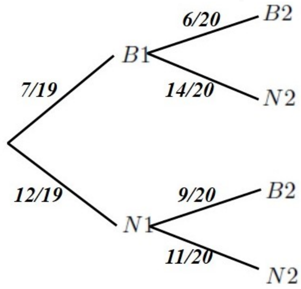
c) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido negra, sabiendo que la segunda bola fue blanca.

Solución:
Sean $B1$ sale blanca en la primera extracción, $B2$ sale blanca en la segunda extracción, $N1$ sale negra en la primera extracción y $N2$ sale negra en la segunda extracción.

a) $P(B2) = P(B2|B1)P(B1) + P(B2|N1)P(N1) =$
$\dfrac{6}{20} \cdot \dfrac{7}{19} + \dfrac{9}{20} \cdot \dfrac{12}{19} = \dfrac{15}{38} \simeq 0,3947$

b) $P(\text{distinto color primera y segunda}) =$
$P(N2|B1)P(B1) + P(B2|N1)P(N1) =$
$\dfrac{14}{20} \cdot \dfrac{7}{19} + \dfrac{9}{20} \cdot \dfrac{12}{19} = \dfrac{103}{190} \simeq 0,5421$

c) $P(N1|B2) = \dfrac{P(B2|N1)P(N1)}{P(B2)} = \dfrac{\frac{9}{20} \cdot \frac{12}{19}}{\frac{15}{38}} = \dfrac{18}{25} \simeq 0,72$



Problema 4.15.2 Dos características genéticas A y B aparecen en una especie animal con probabilidades respectivas de 0,2 y 0,3. Sabiendo que la aparición de una de ellas es independiente de la aparición de la otra, se pide calcular:

a) La probabilidad de que un individuo elegido al azar presente ambas características.

b) La probabilidad de que no presente ninguna de ellas.

c) La probabilidad de que presente solamente una de ellas.

d) La probabilidad de que, si elegimos al azar 10 individuos, exactamente 3 de ellos presenten la característica A.

Solución:
Tenemos $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,3$ y los sucesos A y B son independientes, es decir, $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$

a) $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) =$
$= 1 - (0,2 + 0,3 - 0,06) = 0,56$

c) $P((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$
$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0,2 + 0,3 - 0,12 = 0,38$

d) $n = 10$, $p = 0,2$ y $q = 1 - p = 0,8 \Longrightarrow B(10; 0,2)$

$$P(X = a) = \binom{n}{a} p^a \cdot q^{n-a}$$

$P(X = 3) = \dbinom{10}{3} 0,2^3 \cdot 0,8^7 = 0,201326592$

4.15.2. Convocatoria Ordinaria

Problema 4.15.3 De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar, un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.

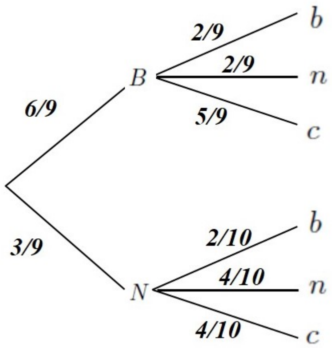
b) Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.

c) Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.

Solución:

B: sombrero blanco, N: sombrero negro, b: pañuelo blanco, n: pañuelo negro y c: pañuelo con cuadrados blancos y negros.

a) $P(\text{algún color que no sea el del sombrero}) = 1 - P(\text{el color es el del sombrero}) = 1 - [P(B\cap b) + P(N\cap n)] = 1 - \left[\frac{6}{9}\cdot\frac{2}{9} + \frac{3}{9}\cdot\frac{4}{10}\right] = 1 - \frac{38}{135} = \frac{97}{135} \simeq 0,7185185185$



b) $P(\text{aparece el color negro}) = 1 - P(\text{no aparece el color negro}) = 1 - P(B\cap b) = 1 - \frac{6}{9}\cdot\frac{2}{9} = \frac{23}{27} \simeq 0,8518518518$

c) $P(N|c) = \dfrac{P(N\cap c)}{P(c)} = \dfrac{\frac{3}{9}\cdot\frac{4}{10}}{\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{9} + \frac{3}{9}\cdot\frac{4}{10}} = \dfrac{9}{34} \simeq 0,2647058823$

4.15.3. Convocatoria Ordinaria(coincidente)

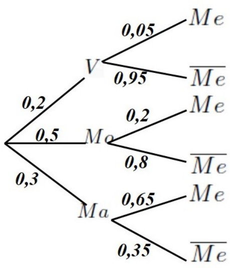
Problema 4.15.4 Una *influencer* famosa publica en su Instagram un 20 % de fotografías dedicadas a viajes, un 50 % referentes a temas de moda y el resto sobre maternidad. El 5 % de las publicaciones de viajes reciben menos de 20 000 *Me gusta* y lo mismo ocurre con el 20 % de las de moda y con el 35 % de las que tratan asuntos de maternidad. Elegida una fotografía al azar, se pide:

a) Determinar la probabilidad de que tenga más de 20 000 *Me gusta*.

b) Si tiene menos de 20 000 *Me gusta*, calcular la probabilidad de que el tema tratado en ella haya sido sobre viajes.

Solución:

Sean V fotografías de viajes, Mo fotografías de moda, Ma fotografías de maternidad, Me menos de 20000 *Me gusta* y $\overline{Me}$ menos de 20000 *Me gusta*.



a) $P(\overline{Me}) = P(\overline{Me}|V)P(V) + P(\overline{Me}|Mo)P(Mo) + P(\overline{Me}|Ma)P(Ma) = 0,95\cdot 0,2 + 0,8\cdot 0,5 + 0,65\cdot 0,2 = 0,785$

b)

$$P(V|Me) = \frac{P(Me|V)P(V)}{P(Me)} = \frac{0,05\cdot 0,2}{1-0,785} = 0,0465$$

4.15.4. Convocatoria Extraordinaria

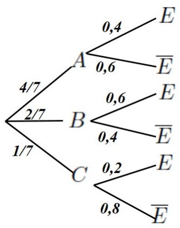
Problema 4.15.5 Una empresa comercializa tres tipos de productos A, B y C. Cuatro de cada siete productos son de tipo A, dos de cada siete productos son de tipo B y el resto lo son de tipo C. A la exportación se destina un 40 % de los productos tipo A, un 60 % de los productos tipo B y un 20 % de los productos tipo C. Elegido un producto al azar, se pide:

a) Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.

b) Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación.

Solución:

A producto A, B producto B, C producto C, E exportación y $\overline{E}$ no exportación.



a) $P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|C)P(C) =$
$= 0{,}4 \cdot \dfrac{4}{7} + 0{,}6 \cdot \dfrac{2}{7} + 0{,}2 \cdot \dfrac{1}{7} = 0{,}4286$

b) $P(C|E) = \dfrac{P(E|C)P(C)}{P(E)} = \dfrac{0{,}2 \cdot \frac{1}{7}}{0{,}4286} = 0,0667$

4.15.5. Convocatoria Extraordinaria (coincidente)

Problema 4.15.6 Sabiendo que $P(A|B) = \dfrac{1}{3}$, $P(B|A) = \dfrac{1}{14}$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \dfrac{7}{15}$, se pide:

a) Probar razonadamente que $P(A \cap B) = \dfrac{1}{30}$

b) Calcular $P(A)$ y $P(B)$.

Solución:

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \dfrac{7}{15} \Longrightarrow P(A \cup B) = \dfrac{8}{15}$
$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A|B)}$
$P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \Longrightarrow P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B|A)}$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$
$\dfrac{P(A \cap B)}{P(B|A)} + \dfrac{P(A \cap B)}{P(A|B)} - P(A \cap B) = P(A \cap B)\left(\dfrac{1}{P(A|B)} + \dfrac{1}{P(B|A)} - 1\right) \Longrightarrow \dfrac{8}{15} = P(A \cap B)\left(\dfrac{1}{1/3} + \dfrac{1}{1/14} - 1\right) \Longrightarrow \dfrac{8}{15} = 16P(A \cap B) \Longrightarrow$
$P(A \cap B) = \dfrac{8}{15 \cdot 16} = \dfrac{1}{30}$

b) $P(A) = \dfrac{1/30}{1/14} = \dfrac{7}{15}$
$P(B) = \dfrac{1/30}{1/3} = \dfrac{1}{10}$

4.16. Murcia

4.16.1. Convocatoria Ordinaria

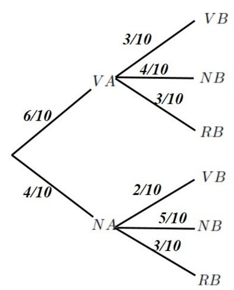
Problema 4.16.1 Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 6 bolas verdes y 4 bolas negras, y la urna B contiene 2 bolas verdes, 4 bolas negras y 3 bolas rojas. Se saca al azar una bola de la urna A y se mete en la urna B. A continuación, se saca al azar una bola de la urna B. Calcule:

a) La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea roja.

b) La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea verde, sabiendo que la bola que se sacó de la urna A era verde.

c) La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra.

Solución:
Sean VA sacar verde de la urna A, NA sacar negro de la urna A, VB sacar verde de la urna B, NB sacar negro de la urna B y RB sacar rojo de la urna B.



a) $P(RB) = P(RB|VA)P(VA) + P(RB|NA)P(NA) =$
$\dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{6}{10} + \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{4}{10} = 0,3$

b) $P(VB|VA) = \dfrac{3}{10} = 0,3$

c) $P(NB) = P(NB|VA)P(VA) + P(NB|NA)P(NA) =$
$\dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{6}{10} + \dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{4}{10} = 0,44$

4.16.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 4.16.2 Un estudio publicado en *Environmental, Science and Technology* ha revelado que la probabilidad de contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes es 0,45. Además, según los datos de las Naciones Unidas, en el mundo hay actualmente un 50,5 % de hombres y un 49,5 % de mujeres.

a) Suponiendo que los sucesos "contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes" y "ser mujer" sean independientes, calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar sea mujer y contraiga el Covid-19 en el interior de restaurantes.

b) En el mismo supuesto que en el apartado a), calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar no sea mujer o no contraiga el Covid-19 en el interior de restaurantes.

c) Si se eligen 8 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 4 de ellas contraigan el Covid-19 en el interior de restaurantes?

Solución:
Sean C contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes, H hombre y M mujer.
$P(C) = 0,45$, $P(H) = 0,505$ y $P(M) = 0,495$

a) Si C y M son independientes es $P(C \cap M) = P(C)P(M) = 0,45 \cdot 0,495 = 0,22275$

b) $P(\overline{C} \cup \overline{M}) = P(\overline{C \cap M}) = 1 - P(C \cap M) = 1 - 0,22275 = 0,77725$

c) $B(8; 0,45)$

$$P(X \geq 4) = 1 - (P(X < 4)) =$$

$$1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)) =$$

$$1 - \left(\binom{8}{0} 0,45^0 \cdot 0,55^8 + \binom{8}{1} 0,45^1 \cdot 0,55^7 + \right.$$

$$\left. \binom{8}{2} 0,45^2 \cdot 0,55^6 + \binom{8}{3} 0,45^3 \cdot 0,55^5 \right) = 0,5230436888$$

4.17. Navarra

4.17.1. Convocatoria Ordinaria

Sin problemas en esta materia

4.17.2. Convocatoria Extraordinaria

Sin problemas en esta materia

4.18. País Vasco

4.18.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 4.18.1 Tenemos dos urnas con el siguiente número de bolas blancas y negras:
T: 4 bolas negras y 6 blancas,
R: 7 bolas negras y 3 blancas.
Se selecciona al azar una urna, se extrae una bola y se coloca en la otra urna. A continuación, se extrae una bola de esta última urna. Calcula la probabilidad de que las dos bolas extraídas:

a) sean negras,

b) sean blancas,

c) sean de distinto color.

Solución:

a) $P(NN) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{8}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{11} = \frac{67}{220}$

b) $P(BB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{11} = \frac{9}{44}$

c) $P(\text{distinto color}) = 1 - P(\text{mismo color}) = 1 - (P(NN) + P(BB)) = 1 - \left(\frac{67}{220} + \frac{9}{44} \right) = \frac{27}{55}$

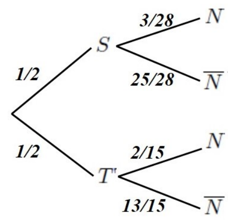
4.18.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 4.18.2 Una urna S contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Otra urna T, 6 blancas y 4 negras.
Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean negras?

b) Si las dos bolas extraídas son negras, ¿cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya sido la T?

Solución:
Sea N las dos son negras y $\overline{N}$ las dos no son negras.
$P(N|S) = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{2}{7} = \dfrac{3}{28}$ y $P(N|T) = \dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{3}{9} = \dfrac{2}{15}$



a) $P(N) = P(N|S)P(S) + P(N|T)P(T) =$
$\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{28} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{15} = \dfrac{101}{840} = 0,1202$

b) $P(T|N) = \dfrac{P(N|T)P(T)}{P(N)} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{15}}{\frac{101}{840}} = \dfrac{56}{101} \simeq 0,5545$

Capítulo 5

Estadística

5.1. Resúmenes teóricos

Gráficos:

- Varable discreta: con diagrama de barras.

$$x_i, \ \ p(x_i) = p_i, \ \ \sum p_i = 1$$

$$\text{Media} = \mu = \sum x_i p_i, \quad \text{Varianza} = \sigma^2 = \sum p_i (x_i - \mu)^2 = \sum p_i x_i - \mu^2$$

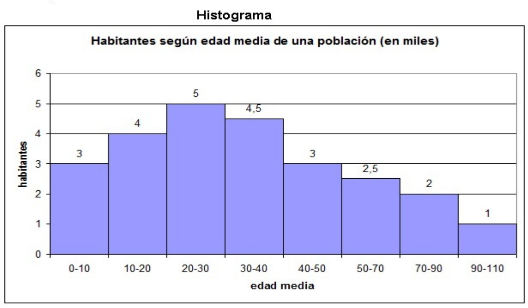
$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$

- Variable continua: histogramas (intervalos)

$$x_i, \ \ f_i,$$

$$\text{Media} = \overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum x_i}, \quad \text{Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \overline{X})^2}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \overline{X}^2$$

$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$



Distribución Binomial $\mathrm{B}(n,p)$:

$$P(X = a) = \binom{n}{a} p^a q^{n-a}$$

p es la probabilidad de éxito y $q = 1 - p$ la probabilidad de fracaso. Por ejemplo, si $\mathrm{B}(7, 0, 4) \Longrightarrow n = 7$, $p = 0, 4$ y $q = 0, 6$:

$$P(X = 2) = \left(\begin{array}{c} 7 \\ 2 \end{array} \right) 0,4^2 0,6^5 = 0,261$$

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3), \text{ ó}$$

$$P(X \leq 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - (P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7))$$

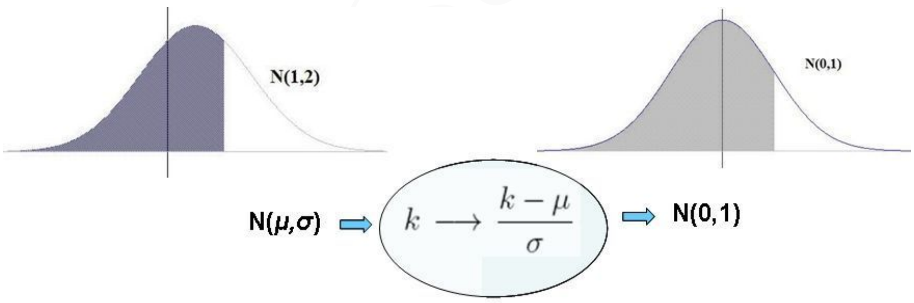
Su Media= $\mu = np$, su Varianza= $\sigma^2 = npq$ y su Desviación Típica= $\sqrt{\text{Varianza}}$.

Distribución Normal $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$:

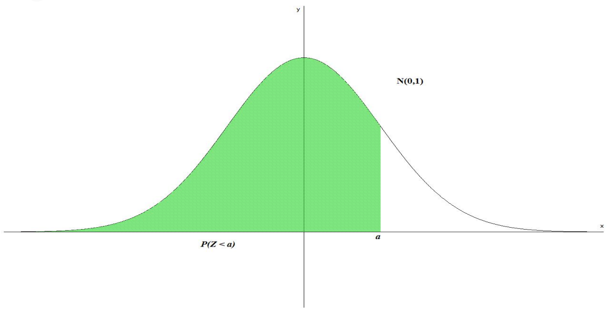
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Tipificación Paso de una normal $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$ a otra $\mathrm{N}(0, 1)$: $k \longrightarrow \dfrac{k-\mu}{\sigma}$, si queremos calcular $P(a < X < b)$ y X es de una normal $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$ entoces Z seguirá una normal $\mathrm{N}(0, 1)$

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$



Cuando una distribución binmial $B(n, p)$ cumple $np > 3$ y $nq > 3$, se aproxima a una normal $N(np, \sqrt{npq})$, si son mayores de 5 la aproximación es perfecta.



$$P(Z > a) = 1 - P(Z < a), \quad P(Z < -a) = 1 - P(Z < a)$$

$$P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$$

La corrección por continuidad de Yate seguirá las siguientes reglas:
$P(x = a) = P(a - 0, 5 \leq X \leq a + 0, 5)$

$P(X \leq a) = P(X \leq a + 0,5)$
$P(X < a) = P(X \leq a - 0,5)$
$P(X > a) = P(X \geq a + 0,5)$
$P(X \geq a) = P(X \geq a - 0,5)$
Cálculo de $z_{\alpha/2}$ con un **Nivel de confianza** del 95 %: $NC = 0,95 = 1 - \alpha$ ($\alpha =$**Nivel de significación**)$\Longrightarrow$ $\alpha = 0,05$. Para una distribución bilateral tendremos $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025 \Longrightarrow P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975$ se busca en la tabla $N(0,1)$ y obtenemos $z_{\alpha/2} = 1,96$
Para muestras aleatorias de tamaño n con media $\overline{X}$ de una $N(\mu, \sigma)$ la media $\overline{X}$ se distribuye como una normal $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
Error: $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Intervalo de Confianza: $(\overline{X} - E, \overline{X} + E) = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de medias.

Proporciones: Sea $\hat{p}$ proporción de la muestra de tamaño n, se distribuye como una $N\left(p, \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$

Error: $E = z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

Intervalo de Confianza: $(\hat{p} - E, \hat{p} + E) = \left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de proporciones.

5.2. Andalucia

5.2.1. Modelo

Sin problemas en esta materia

5.2.2. Convocatoria Ordinaria

Sin problemas en esta materia

5.2.3. Convocatoria Extraordinaria

Sin problemas en esta materia

5.3. Aragón

5.3.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.3.1 El peso de los recién nacidos de una localidad sigue una distribución normal de media 3300 gramos y desviación típica 465 gramos. Un recién nacido tiene bajo peso si su peso es inferior a 2500 gramos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido en esta localidad tenga bajo peso?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido en esta localidad tenga un peso entre 3500 y 4000 gramos?

Solución:

$$N(3300; 465)$$

a) $P(X \leq 2500) = P\left(Z \leq \dfrac{2500 - 3300}{465}\right) = P(Z \leq -1,72) =$
$1 - P(Z \leq 1,72) = 1 - 0,9573 = 0,0427$

b) $P(3500 \leq X \geq 4000) = P\left(\dfrac{3500 - 3300}{465} \leq Z \leq \dfrac{4000 - 3300}{465}\right) =$
$P\,(0,43 \leq Z \leq 1,51) = P\,(Z \leq 1,51) - P\,(Z \leq 0,43) =$
$0,9345 - 0,6664 = 0,2681$

5.3.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.3.2 De los huevos que se producen diariamente en una granja, deben desecharse el 20 % por no ser aptos para su consumo. Se seleccionan de manera aleatoria e independiente 5 huevos:

a) Calcula la probabilidad de que tengamos que desechar alguno de los huevos seleccionados (al menos 1).

b) 1. ¿Qué es más probable, que haya exactamente 2 huevos no aptos, o que haya exactamente 3 huevos no aptos? Obtén estas probabilidades.
   2. ¿Cómo razonarías la respuesta a la pregunta anterior sin hacer uso de la calculadora?

Solución:

$$B(5; 0,2)$$

a) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} 0,2^0 \cdot 0,8^5 = 0,67232$

b) 1. $P(X = 2) = \binom{5}{2} 0,2^2 \cdot 0,8^3 = 0,2048$

   $P(X = 3) = \binom{5}{3} 0,2^3 \cdot 0,8^2 = 0,0512$

   Es más probable que sean 2 huevos no aptos.

   2. Es razonable pensar que cuantos más huevos se seleccionen haya más no aptos, dado que la probabilidad de seleccionar un no apto es siempre la misma.

5.4. Asturias

5.4.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.4.1 El peso en kilos de la población de un cierto país sigue una distribución normal de media 70 y desviación típica 10. Se selecciona un individuo al azar.

a) Calcule la probabilidad de que su peso se sitúe entre 65 y 75 kilos.

b) Se realiza una campaña de comida sana y esto repercute en el peso de la población, manteniendo la desviación típica pero ahora la probabilidad de que un individuo pese menos de 75 es 0,6 ¿Cuál es la nueva media?

(Algunos valores de la función de distribución $N(0,1)$ son: $F(x) = P(Z \leq\leq x)$, $F(0) = 0,5$, $F(0,15) = 0,6$, $F(0,5) = 0,6915$, $F(0,6) = 0,7257$, $F(1,8) = 0,9641$)

Solución:

$$N(70; 10)$$

a) $P(65 \leq X \leq 75) = P\left(\frac{65-70}{10} \leq Z \leq \frac{75-70}{10}\right) = P(-0,5 \leq Z \leq 0,5) = P(Z \leq 0,5) - P(Z \leq -0,5) = P(Z \leq 0,5) - (1 - P(Z \leq 0,5)) = 0,6915 - (1 - 0,6915) = 0,383$

b) $P(X \leq 75) = 0,6 \Longrightarrow = P\left(Z \leq \frac{75-\mu'}{10}\right) = 0,6 \Longrightarrow$
$\frac{75-\mu'}{10} = 0,15 \Longrightarrow \mu = 73,5$

5.4.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.4.2 Se está estudiando la altura de la población adulta de una cierta ciudad y se observa que el modelo se rige por una distribución normal con media 1,75m y desviación típica 0,65m.

a) Calcula la probabilidad de que, tomado un adulto al azar mida más de 1,85m.

b) Si se toma una muestra de 10000 personas ¿Cuántas personas medirían más de 1,85m?

c) Se observa que, de las 10000 personas de la muestra, 6500 miden menos de 1,90m, suponiendo que se mantiene la media ¿cuál sería la desviación típica?

(Algunos valores de la función de distribución $N(0,1)$ son: $F(x) = P(Z \le x)$, $F(0) = 0,5$, $F(0,15) = 0,6$, $F(0,1538) = 0,5596$, $F(0,65) = 0,7422$, $F(0,385) = 0,65$.)

Solución:

$$N(1,75; 0,65)$$

a) $P(X \ge 1,85) = P\left(Z \ge \dfrac{1,85 - 1,75}{0,65}\right) = P(Z \ge 0,1538) =$
$1 - P(Z \le 0,1538) = 1 - 0,5596 = 0,4404$

b) $10000 \cdot P(X \ge 1,85) = 10000 \cdot 0,4404 = 4404$

c) $P(X \le 1,90) = \dfrac{6500}{10000} = 0,65 \Longrightarrow P\left(Z \le \dfrac{1,90 - 1,75}{\sigma}\right) = 0,65 \Longrightarrow \dfrac{1,90 - 1,75}{\sigma} =$
$0,385 \Longrightarrow \sigma = 0,3896$

5.5. Cantabria

5.5.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.5.1 En un almacén, el peso de los contenedores sigue una distribución normal con media 100 kg y desviación típica 10 kg. Cada contenedor se carga individualmente en un montacargas, que tiene una capacidad de 120 kg. Si el peso del contenedor supera dicha capacidad, salta una alarma. Se coloca en el montacargas un contenedor escogido al azar.

a) Calcule la probabilidad de que salte la alarma.

b) Calcule cuál debería ser la capacidad del montacargas para que la alarma salte sólo en un 1 % de las veces que cargamos un contenedor al azar.

Solución:

$$N(100; 10)$$

a) $P(X \ge 120) = P\left(Z \ge \dfrac{120 - 100}{10}\right) = P(Z \ge 2) = 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

b) $P(X \ge a) = 0,01 \Longrightarrow P(X \le a) = 0,99 \Longrightarrow$
$P(X \le a) = P\left(Z \le \dfrac{a - 100}{10}\right) = 0,99 \Longrightarrow \dfrac{a - 100}{10} = 2,33 \Longrightarrow a = 123,3$
La capacidad del montacargas debería ser de 123,3 kg para que salte la alarma 1 % de las veces.

5.5.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.5.2 El tiempo de vuelo de un avión Santander-Madrid sigue una distribución normal de media 60 minutos y desviación típica 5 minutos.

a) Para conectar con el siguiente vuelo con destino Sevilla, se necesita que el avión tarde menos de $T = 70$ minutos. Calcule la probabilidad de perder el avión a Sevilla.

b) Calcule cuanto debe valer T para que la probabilidad de perder el avión sea del 0,1 %.

Solución:

$$N(60; 5)$$

a) $P(X \geq 70) = P\left(Z \geq \dfrac{70-60}{5}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) =$
$1 - 0,9772 = 0,0228$

b) $P(X \geq a) = 0,001 \Longrightarrow P(X \leq a) = 0,999 \Longrightarrow$
$P(X \leq a) = P\left(Z \leq \dfrac{a-60}{5}\right) = 0,999 \Longrightarrow \dfrac{a-60}{5} = 3,1 \Longrightarrow a = 75,5$
El tiempo debe ser de 75 minutos y 30 segundos para perder el avión el 0,1 % de las veces.

5.6. Castilla La Mancha

5.6.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.6.1 Se pide:

a) Se calcula que una quinta parte de los niños españoles presentan algún tipo de intolerancia alimentaria. En una cantina escolar los niños se sientan al azar en mesas de 4 comensales.

a.1 ¿Cuál es la probabilidad de que en una mesa haya algún niño con intolerancia alimentaria?

a.2 Cuando en una mesa hay algún niño con intolerancia alimentaria, a esa mesa se le sirve el pan sin gluten. Si un día hay ocupadas 8 mesas, ¿cuál es la probabilidad de que haya que servir pan sin gluten en alguna mesa?

b) El peso de los paquetes de 1 kg arroz que comercializa determinada marca siguen una distribución normal de 985 g de media y 25 g de desviación típica.

b.1 ¿Cuántos pesarán más de un kilo?

b.2 ¿Cuánto pesará el más ligero del 70 % de los que más pesan?

Solución:

a) Se trata de una distribución binomial $B(4; 0,2)$

a.1 $P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0} 0,2^0 \cdot 0,8^4 = 0,5904$

a.2 Se trata de una distribución binomial $B(8; 0,5904)$
$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{8}{0} 0,5904^0 \cdot 0,4096^8 = 0,99921$

b) $N(985; 25)$

b.1 $P(X \geq 1000) = P\left(Z \geq \dfrac{1000-985}{25}\right) = P(Z \geq 0,6) =$
$1 - P(Z \leq 0,6) = 1 - 0,7257 = 0,2743$
Pesarán más de un kilo el 27,43 % de los productos.

b.2 $P(X \geq a) = 0,7 \Longrightarrow P\left(Z \geq \dfrac{a-985}{25}\right) = 1 - P\left(Z \leq \dfrac{a-985}{25}\right) \overset{a-985<0}{=} 1 - 1 +$
$P\left(Z \leq \dfrac{985-a}{25}\right) = P\left(Z \leq \dfrac{985-a}{25}\right) = 0,7 \Longrightarrow$
$\dfrac{985-a}{25} = 0,525 \Longrightarrow a = 971,875$

5.6.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.6.2 Una empresa embotelladora de agua produce botellas de 150 ml. La cantidad que realmente contienen sigue una distribución normal con media 150 ml y desviación típica 5 ml.

b.1 ¿Qué proporción de las botellas contiene más de 152 ml?

b.2 ¿Qué proporción de botellas tiene entre 149 y 152 ml?

Solución:
$N(150; 5)$

b.1 $P(X \geq 152) = P\left(Z \geq \dfrac{152-150}{5}\right) = P(Z \geq 0,4) =$
$1 - P(Z \leq 0,4) = 1 - 0,6554 = 0,3446$
Contienen más de 152 ml el 34,46 % de las botellas.

b.2 $P(149 \leq X \leq 152) = P\left(\dfrac{149-150}{5} \leq Z \leq \dfrac{152-150}{5}\right) =$
$P(-0,2 \leq Z \leq 0,4) = P(Z \leq 0,4) - P(Z \leq -0,2) =$
$P(Z \leq 0,4) - (1 - P(Z \leq 0,2)) = 0,6554 - 1 + 0,5793 = 0,2347$
Contienen entre 149 y 152 ml el 23,47 % de las botellas.

Problema 5.6.3 Un piloto de Fórmula 1 tiene una probabilidad del 60 % de ganar una carrera cualquiera. Si participa en las próximas 4 carreras, ¿cuál es la probabilidad de que gane al menos dos?

Solución:
$B(4; 0,6)$
$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) = 1 - \left(\binom{4}{0} 0,6^0 \cdot 0,4^4 + \binom{4}{1} 0,6^1 \cdot 0,4^3\right) =$
$0,8208$

5.7. Castilla León

5.7.1. Modelo

Problema 5.7.1 La variable aleatoria IMC (índice de masa corporal, de modo abreviado) de las personas adultas de un determinado país sigue una distribución normal de media 26 y desviación típica de 6. Si tener un IMC superior a 35 significa ser obeso, encontrar la proporción de personas adultas obesas de ese país.
Solución:

$$N(26; 6)$$

$P(X \geq 35) = P\left(Z \geq \dfrac{35-26}{6}\right) = P(Z \geq 1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668 \Longrightarrow$
$6,68\,\%$

5.7.2. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.7.2 El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de 1500 horas y una desviación típica de 200 horas.

a) ¿Qué porcentaje de impresoras fallarán antes de 1000 horas de funcionamiento?

b) Si compramos 500 impresoras ¿Cuántas de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1000 y 2000 horas de uso?

Solución:

$$N(1500; 200)$$

a) $P(X \leq 1000) = P\left(Z \leq \frac{1000-1500}{200}\right) = P(Z \leq -2,5) =$
$1 - P(Z \leq 2,5) = 1 - 0,9938 = 0,0062 \Longrightarrow 0,62\,\%$

b) $P\,(1000 \leq Z \leq 2000) = P\left(\frac{1000-1500}{200} \leq Z \leq \frac{2000-1500}{200}\right) =$
$P(-2,5 \leq Z \leq 2,5) = P(Z \leq 2,5) - P(Z \leq -2,5) =$
$P(Z \leq 2,5) - (1 - P(Z \leq 2,5)) = 2P(Z \leq 2,5) - 1 = 2 \cdot 0,9938 - 1 = 0,9876 \Longrightarrow 98,76\,\%$
El número de impresoras que tendrán avería entre 1000 y 2000 horas de uso será $500 \cdot 0,9876 = 493,8 \Longrightarrow 494$ impresoras.

5.7.3. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.7.3 La variable agudeza visual de una población se ajusta a una distribución normal de media 2 cpg (ciclos por segundo) y desviación típica 1 cpg. A los individuos con una agudeza visual inferior a 1.1 cpg se les considera con "problemas visuales graves".

a) ¿Qué porcentaje de la población tiene "problemas visuales graves"?

b) ¿Qué porcentaje de la población tiene una agudeza visual entre 2 y 2.9 cpg?

Solución:

$$N(2; 1)$$

a) $P(X \leq 1,1) = P\left(Z \leq \frac{1,1-2}{1}\right) = P(Z \leq -0,9) =$
$1 - P(Z \leq 0,9) = 1 - 0,8159 = 0,1841 \Longrightarrow 18,41\,\%$

b) $P\,(2 \leq Z \leq 2,9) = P\left(\frac{2-2}{1} \leq Z \leq \frac{2,9-2}{1}\right) =$
$0,8159 - 0,5 = 0,3159 \Longrightarrow 31,59\,\%$

5.8. Cataluña

5.8.1. Convocatoria Ordinaria

Sin problemas en esta materia

5.8.2. Convocatoria Extraordinaria

Sin problemas en esta materia

5.9. Comunidad Valenciana

5.9.1. Convocatoria Ordinaria

Sin problemas en esta materia

5.9.2. Convocatoria Extraordinaria

Sin problemas en esta materia

5.10. Extremadura

5.10.1. Modelo

Problema 5.10.1 Se tiene una moneda trucada para la que se sabe que la probabilidad de cruz es 0,3. Si se lanza la moneda cinco veces, calcular:

a) Probabilidad de obtener cuatro cruces.

b) Probabilidad de obtener al menos cuatro cruces.

c) Probabilidad de obtener a lo sumo cuatro cruces.

d) Probabilidad de no obtener ninguna cruz.

Solución:

$$B(5;0,3) \qquad P(X=a)=\binom{n}{a}0,3^a\cdot 0,7^{n-a}$$

a) $P(X=4)=\binom{5}{4}0,3^4\cdot 0,7^1=0,02835$

b) $P(X\geq 4)=P(X=4)+P(X=5)=0,02835+\binom{5}{5}0,3^5\cdot 0,7^0=0,02835+0,00243=0,03078$

c) $P(X\leq 4)=1-P(X=5)=1-0,00243=0,99757$

d) $P(X=0)=\binom{5}{0}0,3^0\cdot 0,7^5=0,16807$

5.10.2. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.10.2 Un examen con opción múltiple está compuesto por 10 preguntas, con cuatro respuestas posibles cada una, de las cuales sólo una es correcta. Suponga que uno de los estudiantes responde todas las preguntas del examen al azar. Calcular la probabilidad de que conteste bien

a) cinco preguntas,

b) alguna pregunta.

c) Calcular la media y la desviación típica de la distribución.

Solución:

$$B(10;0,25)$$

a) $P(X=5)=\binom{10}{5}0,25^5\cdot 0,75^5=0,0583992$

b) $P(X>0)=1-P(X=0)=1-\binom{10}{0}0,25^0\cdot 0,75^{10}=1-0,0563135=0,9436865$

c) La media $\mu = np = 10 \cdot 0,25 = 2,5$ y la desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot 0,25 \cdot 0,75} = 1,3693064$

5.10.3. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.10.3 El diámetro de las cerezas picotas del Jerte se distribuye normalmente con media 2,5 cm y desviación típica 0,2 cm.

a) Si se desea seleccionar, para su exportación, el 10 % de las más grandes, ¿a partir de qué tamaño hay que cogerlas?

b) Si tomamos una cereza picota del Jerte al azar ¿qué probabilidad tiene la cereza de tener un diámetro entre 2,2 cm y 2,8 cm?

Solución:

$$N(2,5; 0,2)$$

a) $P(X \geq a) = P\left(Z \geq \dfrac{a-2,5}{0,2}\right) = 1 - P\left(Z \leq \dfrac{a-2,5}{0,2}\right) = 0,1 \Longrightarrow P\left(Z \leq \dfrac{a-2,5}{0,2}\right) = 0,9 \Longrightarrow \dfrac{a-2,5}{0,2} = 1,28 \Longrightarrow a = 2,756$

El tamaño debe de ser mayor de 2,756 cm. al elegir el 10 % de las cerezas.

b) $P(2,2 \leq X \leq 2,8) = P\left(\dfrac{2,2-2,5}{0,2} \leq Z \leq \dfrac{2,8-2,5}{0,2}\right) =$
$P(-1,5 \leq Z \leq 1,5) = P(Z \leq 1,5) - P(Z \leq -1,5) = 2P(Z \leq 1,5) - 1 =$
$2 \cdot 0,9332 - 1 = 0,8664$

5.11. Galicia

5.11.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.11.1 Se pide:

a) Calcule el valor de $P(-2 \leq X \leq 7)$ si X sigue una distribución normal de media 1 y desviación típica 3.

b) Calcule el valor de α que hace que $P(\mu-\alpha \leq X \leq \mu+\alpha) = 0,8064$ si X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 4.

Solución:

a) $N(1; 3)$

$P(-2 \leq X \leq 7) = P\left(\dfrac{-2-1}{3} \leq Z \leq \dfrac{7-1}{3}\right) = P(-1 \leq Z \leq 2) =$
$P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 2) - (1 - P(Z \leq 1)) =$
$P(Z \leq 2) + P(Z \leq 1) - 1 = 0,9772 + 0,8413 - 1 = 0,8185$

b) $N(\mu; 4)$

$P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = P\left(\dfrac{\mu-\alpha-\mu}{4} \leq Z \leq \dfrac{\mu+\alpha-\mu}{4}\right) =$
$P\left(\dfrac{-\alpha}{4} \leq Z \leq \dfrac{\alpha}{4}\right) = P\left(Z \leq \dfrac{\alpha}{4}\right) - P\left(Z \leq \dfrac{-\alpha}{4}\right) =$
$P\left(Z \leq \dfrac{\alpha}{4}\right) - \left(1 - P\left(Z \leq \dfrac{\alpha}{4}\right)\right) = 2P\left(Z \leq \dfrac{\alpha}{4}\right) - 1 = 0,8064 \Longrightarrow$
$P\left(Z \leq \dfrac{\alpha}{4}\right) = 0,9032 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{4} = 1,3 \Longrightarrow \alpha = 5,2$

5.11.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.11.2 Se pide:

a) Se hace un examen tipo test con 60 preguntas y 4 opciones por pregunta, de las que sólo una es correcta. Calcule la probabilidad de acertar por lo menos 16 preguntas si se responden las 60 al azar.

b) Si X sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Luego, calcule el valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = 0,2128$

Solución:

a) $B(60; 0,25)$ como $n > 10$, $np = 15 > 5$ y $nq = 45 > 5 \Longrightarrow$

$$X \overset{N(np,\sqrt{npq})}{\approx} N(15; 3,35)$$

$P(X \geq 16) = P\left(Z \geq \dfrac{15,5 - 15}{3,35}\right) = P(Z \geq 0,15) = 1 - P(Z \leq 0,15) = 1 - 0,5596 = 0,4404$

b) $N(25; 2)$
$P(X < 24) = P\left(Z \leq \dfrac{24 - 25}{2}\right) = P(Z \leq -0,5) = 1 - P(Z \leq 0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085$

$P(25 - \alpha \leq X \leq 25 + \alpha) = P\left(\dfrac{25 - \alpha - 25}{2} \leq Z \leq \dfrac{25 + \alpha - 25}{2}\right) =$
$P\left(\dfrac{-\alpha}{2} \leq Z \leq \dfrac{\alpha}{2}\right) = P\left(Z \leq \dfrac{\alpha}{2}\right) - P\left(Z \leq \dfrac{-\alpha}{2}\right) =$
$P\left(Z \leq \dfrac{\alpha}{2}\right) - \left(1 - P\left(Z \leq \dfrac{\alpha}{2}\right)\right) = 2P\left(Z \leq \dfrac{\alpha}{2}\right) - 1 = 0,2128 \Longrightarrow$
$P\left(Z \leq \dfrac{\alpha}{2}\right) = 0,6064 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,27 \Longrightarrow \alpha = 0,54$

5.12. Islas Baleares

5.12.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.12.1 El tiempo de duración de las actualizaciones de cierto programa antivirus sigue una distribución estadística normal de media 8,8 meses con una desviación típica de 3 meses.

a) ¿Qué porcentaje de las actualizaciones supera los 10 meses?

b) ¿Qué porcentaje de las actualizaciones se ha mantenido entre 7 y 10 meses?

c) ¿Para qué valor del parámetro c se tiene que el intervalo $(8,8 - c; 8,8 + c)$ es el intervalo de tiempo de duración del 98 % de las actualizaciones?

Solución:

$$N(8,8; 3)$$

a) $P(X \geq 10) = P\left(Z \geq \dfrac{10 - 8,8}{3}\right) = P(Z \geq 0,4) = 1 - P(Z \leq 0,4) = 1 - 0,6554 = 0,3446 \Longrightarrow 34,46\,\%$

b) $P(7 \leq X \leq 10) = P\left(\frac{7-8,8}{3} \leq Z \leq \frac{10-8,8}{3}\right) = P(-0,6 \leq Z \leq 0,4) = P(Z \leq 0,4) - P(Z \leq -0,6) = P(Z \leq 0,4) - (1 - P(Z \leq 0,6)) = 0,6554 - (1 - 0,7257) = 0,3811 \Longrightarrow 38,11\,\%$

c) $P(8,8 - c \leq X \leq 8,8 + c) = P\left(\frac{8,8-c-8,8}{3} \leq Z \leq \frac{8,8+c-8,8}{3}\right) = P\left(\frac{-c}{3} \leq Z \leq \frac{c}{3}\right) =$
$P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) - \left(1 - P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right)\right) \Longrightarrow$
$2P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) - 1 = 0,98 \Longrightarrow P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) = 0,99 \Longrightarrow$
$\frac{c}{3} = 2,325 \Longrightarrow c = 6,975$

5.12.2. Convocatoria Extraordinaria

Sin problemas en esta materia

5.13. Islas Canarias

5.13.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.13.1 El numero de ventas diarias de periódicos en un quiosco se distribuye como una distribución normal de media 30 periódicos y desviación típica $\sqrt{2}$. Determina:

a) La probabilidad de que en un día se vendan entre 28 y 31 periódicos

b) Justifica si es cierto que la probabilidad de vender más de 32 periódicos es menor que 0,1

c) El dueño del quiosco considera que su puesto está situado en una buena zona, ya que sabe que hay más de un 80 % de posibilidades de vender más de 29 periódicos diarios. ¿Está en lo cierto? Justifícalo

Solución:

$$N(30; \sqrt{2})$$

a) $P(28 \leq X \leq 31) = P\left(\frac{28-30}{\sqrt{2}} \leq Z \leq \frac{31-30}{\sqrt{2}}\right) =$
$P(-1,41 \leq Z \leq 0,71) = P(Z \leq 0,71) - P(Z \leq -1,41) =$
$P(Z \leq 0,71) - (1 - P(Z \leq 1,41)) = 0,7611 - (1 - 0,9207) = 0,6818$

b) $P(X \geq 32) = P\left(Z \geq \frac{32-30}{\sqrt{2}}\right) = P(Z \geq 1,41) = 1 - P(Z \leq 1,41) = 1 - 0,9207 = 0,0793$
La probabilidad de vender más de 32 periódicos es claramente menor de 0,1.

c) $P(X \geq 29) = P\left(Z \geq \frac{29-30}{\sqrt{2}}\right) = P(Z \geq -0,71) = 1 - P(Z \leq -0,71) = 1 - (1 - P(Z \leq 0,71)) = P(Z \leq 0,71) = 0,7611$
El dueño del quiosco no está en lo cierto, la probabilidad de vender más de 29 periódicos es de 76,11 % inferior al 80 % que supone.

5.13.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.13.2 El 10 % de la población de Canarias tiene alergia a la flor del olivo. Con esta información, responde a las siguientes preguntas:

a) En una muestra de 100 individuos, ¿qué probabilidad hay de que más de 12 seleccionados tengan alergia a la flor del olivo?

b) Se toma una muestra de 400 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que menos de 32 seleccionados tengan alergia a la flor del olivo?

c) En una muestra de 500 individuos, ¿cuál es el número esperado de individuos que no tendrán alergia a la flor del olivo?

Solución:
Se trata de una distribución binomial $B(n; 0,1)$

a) $n = 100 > 10$, $np = 10 > 5$ y $nq = 90 > 5 \Longrightarrow$
$B(100; 0,1) \overset{N(np,\sqrt{npq}}{\approx} N(10; 3)$
Aplicamos la corrección por continidad de Yates.
$P(X > 12) = P\left(Z \geq \dfrac{12,5-10}{3}\right) = P(Z \geq 0,83) = 1-P(Z \leq 0,83) = 1-0,7967 = 0,2033$

b) $n = 400 > 10$, $np = 40 > 5$ y $nq = 360 > 5 \Longrightarrow$
$B(400; 0,1) \overset{N(np,\sqrt{npq}}{\approx} N(40; 6)$
Aplicamos la corrección por continidad de Yates.
$P(X \geq 32) = P\left(Z \geq \dfrac{31,5-40}{6}\right) = P(Z \geq -1,42) = 1 - P(Z \leq 1,42) = 1 - 0,9222 = 0,0778$

c) $E(X) = nq = 500 \cdot 0,9 = 450$ no tendrán alergia al olivo.

Problema 5.13.3 Una prueba, utilizada para determinar la presencia de plomo en una aleación de acero, es errónea en 8 de cada 100 análisis realizados.

a) Se realizan 10 análisis con esta prueba, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de estos análisis sean erróneos?

b) Comprueba si es cierta la siguiente afirmación: "En 10 análisis realizados con esta prueba, hay menos de un 5 % de posibilidades de encontrar más de dos análisis erróneos"

c) Si se realizan 100 análisis con esta prueba, ¿cuál es el número esperado de análisis correctos?

Solución:

$$B(n; 0,08)$$

a) $B(10; 0,08)$
$P(X = 3) = \dbinom{10}{3} 0,08^3 \cdot 0,92^7 = 0,03427409517$

b) $B(10; 0,08)$
$P(X > 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) =$
$1 - \left(\dbinom{10}{0} 0,08^0 \cdot 0,92^{10} + \dbinom{10}{1} 0,08^1 \cdot 0,92^9 + \dbinom{10}{2} 0,08^2 \cdot 0,92^8\right) = 0,04007541968$
La afirmación es cierta por debajo del 5 %.

c) $E(x) = 100 \cdot 0,92 = 92$ serían correctos.

5.14. La Rioja

5.14.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.14.1 Una variable aleatoria X sigue una distribución normal de media 4 y desviación típica 2. Calcula el valor de a para que:

$$P(4 - a \leq X \leq 4 + a) = 0,5934$$

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)
Solución:

$$N(4; 2)$$

$P(4 - a \leq X \leq 4 + a) = P\left(\dfrac{4-a-4}{2} \leq Z \leq \dfrac{4+a-4}{2}\right) = P\left(-\dfrac{a}{2} \leq Z \leq \dfrac{a}{2}\right) = P\left(Z \leq \dfrac{a}{2}\right) -$
$P\left(Z \leq -\dfrac{a}{2}\right) = P\left(Z \leq \dfrac{a}{2}\right) - \left(1 - P\left(Z \leq \dfrac{a}{2}\right)\right) =$
$2P\left(Z \leq \dfrac{a}{2}\right) - 1 = 0,5934 \Longrightarrow P\left(Z \leq \dfrac{a}{2}\right) = 0,7967 \Longrightarrow$
$\dfrac{a}{2} = 0,83 \Longrightarrow a = 1,66$

5.14.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.14.2 La presión arterial sistólica de una muestra de adolescentes sigue una distribución normal de media 120 años y desviación típica 12. Si se elige un adolescente al azar, halla:

a) la probabilidad de que su presión arterial sea superior a 132;

b) la probabilidad de que su presión arterial esté entre 96 y 144.

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)
Solución:

$$N(120; 12)$$

a) $P(X \geq 132) = P\left(Z \geq \dfrac{132-120}{12}\right) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$

b) $P(96 \leq X \geq 144) = P\left(\dfrac{96-120}{12} \leq Z \leq \dfrac{144-120}{12}\right) =$
$P(-2 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - (1 - P(Z \leq 2)) = 2P(Z \leq 2) - 1 = 2 \cdot 0,9772 - 1 = 0,9544$

5.15. Madrid

5.15.1. Modelo

Sin problemas en esta materia

5.15.2. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.15.1 Según el Instituto Nacional de Estadítica, durante el último trimestre de 2020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27,7 %.
Se reunieron 10 de estos consejeros.

a) Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.

b) Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.

c) Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que en un congreso de doscientos consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35 % de representación femenina.

Solución:

a) $B(10; 0,277)$
$P(X = 5) = \binom{10}{5} 0,277^5 \cdot (1 - 0,277)^{10-5} = 0,08118781857$

b) Sea A el suceso al menos hay un hombre tendremos:
$P(A) = 1 - (P(X = 10)) = 1 - \binom{10}{10} 0,277^{10} \cdot (1 - 0,277)^{10-10} = 0,9999973405$

c) Tenemos $p = 0,277$, $q = 1 - 0,277 = 0,723$.
Como $n = 200 > 10$, $np = 200 \cdot 0,277 = 55,4 > 5$ y $nq = 200 \cdot 0,723 = 144,6 > 5$ podemos utilizar la aproximación a una normal:

$$X \approx B(n; p) \Longrightarrow X \approx N(np; \sqrt{npq})$$

$$X \approx B(200; 0,277) \Longrightarrow X \approx N(55,4; 6,329)$$

$$0,35 \cdot 200 = 70$$

$$P(X \geq 70) = P\left(Z > \frac{69,5 - 55,4}{6,329}\right) = P(Z > 2,23) = 1 - P(Z < 2,23)$$
$$= 1 - 0,9871 = 0,0129$$

5.15.3. Convocatoria Ordinaria(coincidente)

Problema 5.15.2 En una tienda se hace un estudio sobre la venta de dos productos A y B a lo largo de un mes. La probabilidad de que un cliente compre el producto A es de un 62 % y la de que compre el producto B es de un 40 %. Se observa, además, que el 12 % de los clientes compran al mismo tiempo el producto A y el producto B. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que un cliente haya comprado el producto A sabiendo que no ha adquirido el producto B.

b) Calcular la probabilidad de que un cliente no compre ni el producto A ni el producto B.

c) Sabiendo que a lo largo de un mes visitan la tienda 3000 personas, calcular, utilizando la aproximación de la distribución binomial mediante la distribución normal, cuál es la probabilidad de que compren el producto B más de 1250 personas.

Solución:
Tenemos $P(A) = 0,62$, $P(B) = 0,4$ y $P(A \cap B) = 0,12$

a) $P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \dfrac{0,62 - 0,12}{1 - 0,4} = 0,8333$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0,62 + 0,4 - 0,12) = 0,1$

c) $p = 0,4 \Longrightarrow q = 0,6 \Longrightarrow B(3000; 0,4)$
Como $n > 10$, $np = 1200 > 5$ y $nq = 1800 > 5 \Longrightarrow$
$\mu = np = 3000 \cdot 0,4 = 1200$ y $\sigma = \sqrt{npq} = 26,83 \Longrightarrow$

$$N(1200; 26,83)$$

$P(X > 1250) = P\left(Z \geq \dfrac{1250,5 - 1200}{26,83}\right) = P(Z \geq 1,88) =$
$1 - P(Z \leq 1,88) = 1 - 0,9699 = 0,0301$

5.15.4. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.15.3 En una comunidad autónoma tres de cada cinco alumnos de segundo de bachillerato están matriculados en la asignatura de Matemáticas II. Se eligen 6 alumnos al azar de entre todos los alumnos de segundo de bachillerato. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en Matemáticas II.

b) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esté matriculado en Matemáticas II.

c) Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos, calcular, aproximando la distribución binomial mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de 60 de estos alumnos estén matriculados en Matemáticas II.

Solución:

a) $B(6; 0,6)$
$P(X = 4) = \binom{6}{4} 0,6^4 \cdot (1 - 0,6)^{6-4} = 0,31104$

b) Sea A el suceso alguno está matriculado:
$P(A) = 1 - (P(X = 0)) = 1 - \binom{6}{0} 0,6^0 \cdot (1 - 0,6)^{6-0} = 0,995904$

c) Tenemos $p = 0,277$, $q = 1 - 0,277 = 0,723$.
Como $n = 120 > 10$, $np = 120 \cdot 0,6 = 72 > 5$ y $nq = 120 \cdot 0,4 = 48 > 5$ podemos utilizar la aproximación a una normal:

$$X \approx B(n; p) \Longrightarrow X \approx N(np; \sqrt{npq})$$
$$X \approx B(120; 0,6) \Longrightarrow X \approx N(72; 5,37)$$
$$P(X > 60) = P\left(Z \geq \frac{60,5 - 72}{5,37}\right) = P(Z \geq -2,14) =$$
$$P(Z \leq 2,14) = 0,9838$$

5.15.5. Convocatoria Extraordinaria (coincidente)

Problema 5.15.4 El 60 % de los habitantes de una ciudad utiliza para trabajar un móvil, el 30 % utiliza un ordenador portátil y el 25 % no usa ninguno de los dos dispositivos.

a) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar utilice ambos dispositivos para trabajar.

b) En esa ciudad, ¿es independiente el uso del móvil y del ordenador portátil para trabajar? Justifique la respuesta.

c) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar utilice exclusivamente el ordenador portátil para trabajar.

d) Si elegimos al azar 10 individuos, calcule la probabilidad de que exactamente 8 de ellos utilicen para trabajar un móvil.

Solución:
Sean M utiliza el móvil para trabajar y O utiliza el ordenador.
Tenemos $P(M) = 0,6$, $P(O) = 0,3$ y $P(\overline{M} \cap \overline{O}) = 0,25$

a) $P(\overline{M} \cap \overline{O}) = P(\overline{M \cup O}) = 1 - P(M \cup O) = 0,25 \Longrightarrow P(M \cup O) = 0,75$
$P(M \cup O) = P(M) + P(O) - P(M \cap O) \Longrightarrow$
$0,75 = 0,6 + 0,3 - P(M \cap O) \Longrightarrow P(M \cap O) = 0,9 - 0,75 = 0,15$

b) $P(M)P(O) = 0,6 \cdot 0,3 = 0,18$ y $P(M \cap O) = 0,15 \Longrightarrow P(M \cap O) \neq P(M)P(O) \Longrightarrow$ los sucesos M y O no son independientes.

c) $P(O \cap \overline{M}) = P(O) - P(M \cap O) = 0,3 - 0,15 = 0,15$

d) $B(10; 0,6)$
$P(X = 8) = \binom{10}{8} 0,6^8 \cdot 0,4^2 = 0,12093$

5.16. Murcia

5.16.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.16.1 En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.
El cociente intelectual (CI) de los estudiantes universitarios sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que la media es igual a 10 veces la desviación típica y que el 93,32 % de los estudiantes tiene un CI menor de 115.

a) Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

b) Si se eligen al azar 5 estudiantes universitarios, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellos tengan un CI mayor de 115?

Solución:

$$N(\mu, \sigma) = N(10\sigma; \sigma)$$

a) $P(X \leq 115) = 0,9332 \Longrightarrow P(X \leq 115) = P\left(Z \leq \dfrac{115 - 10\sigma}{\sigma}\right) = 0,9332 \Longrightarrow \dfrac{115 - 10\sigma}{\sigma} = 1,5 \Longrightarrow \sigma = 10$ y $\mu = 100$

$$N(100; 10)$$

b) $p = P(X \geq 115) = P\left(Z \geq \dfrac{115-100}{10}\right) = P(Z \geq 1,5) =$
$1 - P(Z \leq 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668 \Longrightarrow$
$B(5; 0,0668)$ y $q = 1 - 0,0668 = 0,9332$
$P(X = 3) = \binom{5}{3} 0,0668^3 \cdot 0,9332^2 = 0,0026$

5.16.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.16.2 En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.
La altura de los individuos de una población sigue una distribución normal de media 175 cm y desviación típica 4 cm.

a) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar mida más de 170 cm.

b) Calcule qué porcentaje de la población mide entre 170 y 185 cm.

c) Calcule la altura que es superada por el 33 % de la población.

Solución:

$$N(\mu, \sigma) = N(175; 4)$$

a) $P(X \geq 170) = P\left(Z \geq \dfrac{170-175}{4}\right) = P(Z \geq -1,25) =$
$P(Z \leq 1,25) = 0,8944$

b) $P(170 \leq X \leq 185) = P\left(\dfrac{170-175}{4} \leq Z \leq \dfrac{185-175}{4}\right) =$
$P(-1,25 \leq Z \leq 2,5) = P(Z \leq 2,5) - P(Z \leq -1,25) =$
$P(Z \leq 2,5) - (1 - P(Z \leq 1,25)) = 0,9938 - (1 - 0,8944) = 0,8882$

c) $P(X \geq a) = P\left(Z \geq \dfrac{a-175}{4}\right) = 1 - P\left(Z \leq \dfrac{a-175}{4}\right) = 0,33 \Longrightarrow P\left(Z \leq \dfrac{a-175}{4}\right) =$
$0,67 \Longrightarrow \dfrac{a-175}{4} = 0,44 \Longrightarrow a = 176,76$ cm

5.17. Navarra

5.17.1. Convocatoria Ordinaria

Sin problemas en esta materia

5.17.2. Convocatoria Extraordinaria

Sin problemas en esta materia

5.18. País Vasco

5.18.1. Convocatoria Ordinaria

Problema 5.18.1 El peso (en gramos) de una pieza fabricada en serie sigue una distribución normal de media 52 y desviación típica 6,5.

a) Calcula la probabilidad de que el peso de una pieza fabricada esté comprendida entre 50 y 68 gramos.

b) Si el 30 % de las piezas fabricadas pesa más que una pieza dada, ¿cuánto pesa esta última?

Solución:

$$N(52; 6,5)$$

a) $P(50 \leq X \leq 68) = P\left(\dfrac{50-52}{6,5} \leq Z \leq \dfrac{68-52}{6,5}\right) =$
$P(-0,31 \leq Z \leq 2,46) = P(Z \leq 2,46) - P(Z \leq -0,31) =$
$P(Z \leq 2,46) - (1 - P(Z \leq 0,31)) = 0,9931 - (1 - 0,6217) = 0,6148$

b) $P(X \geq a) = P\left(Z \geq \dfrac{a-52}{6,5}\right) = 1 - P\left(Z \leq \dfrac{a-52}{6,5}\right) = 0,3 \Longrightarrow$
$P\left(Z \leq \dfrac{a-52}{6,5}\right) = 0,7 \Longrightarrow \dfrac{a-52}{6,5} = 0,525 \Longrightarrow a = 55,4125$
El 30 % de las piezas fabricadas pesan más de 55,4125 gramos.

5.18.2. Convocatoria Extraordinaria

Problema 5.18.2 Un estudio ha mostrado que, en un cierto barrio, el 60 % de los hogares tienen al menos dos coches. Se elige al azar una muestra de 50 hogares en el citado barrio. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 de los citados hogares tengan cuando menos dos coches?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 30 y 40 hogares, ambos incluidos, tengan al menos dos coches?

Solución:

$$B(50; 0,6)$$

Como $n > 10$, $np = 30 > 5$ y $nq = 20 > 5 \Longrightarrow$

$$B(50; 0,6) \overset{N(np,\sqrt{npq})}{\approx} N(30; 3,464)$$

a) $P(X \geq 20) = P\left(Z \geq \dfrac{19,5-30}{3,464}\right) = P(Z \geq -3,03) =$
$P(Z \leq 3,03) = 0,9988$

b) $P(30 \leq X \leq 40) = P\left(\dfrac{29,5-30}{3,464} \leq Z \leq \dfrac{40,5-30}{3,464}\right) =$
$P(-0,14 \leq Z \leq 3,03) = P(Z \leq 3,03) - (1 - P(Z \leq 0,14)) =$
$0,9988 - (1 - 0,5557) = 0,5545$

Prof: **Isaac Musat Hervás**

Profesor de Matemáticas en el colegio Villaeuropa de Móstoles

Bachillerato y Selectividad en las dos opciones

Ferroviario en la Dirección de Cercanías de Madrid

Diferentes estudios y trabajos

Jubilado en la actualidad

La educación ha sido mi pasión, el recuerdo del aula, el olor a tiza
y el pantalón manchado de polvo blanco lo llevo siempre conmigo.
Las voces con las preguntas de mis alumnos y mis respuestas,
acertadas o no, quedan en nuestros recuerdos valiosos.
He sido un afortunado, mi trabajo ha sido mi diversión favorita.