Problemas de Matemáticas II
Aplicadas a las ciencias sociales

Por materias
(PAU 2019-2020)

Prof: **Isaac Musat Hervás**
última actualización:

26 de diciembre de 2020

Índice general

1. Álgebra **11**
1.1. Resúmenes teóricos . . . 11
1.2. Andalucia . . . 15
1.2.1. Modelo de 2020 . . . 15
1.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 15
1.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 16
1.3. Aragón . . . 16
1.3.1. Modelo de 2020 . . . 16
1.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 17
1.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 18
1.4. Asturias . . . 18
1.4.1. Modelo de 2020 . . . 18
1.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 19
1.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 19
1.5. Cantabria . . . 20
1.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 20
1.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 21
1.6. Castilla La Mancha . . . 21
1.6.1. Modelo de 2020 . . . 21
1.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 23
1.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 24
1.7. Castilla León . . . 24
1.7.1. Modelo de 2020 . . . 24
1.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 25
1.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 26
1.8. Cataluña . . . 27
1.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 27
1.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 27
1.9. Comunidad valenciana . . . 28
1.9.1. Modelo de 2020 . . . 28
1.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 28
1.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 29
1.10. Extremadura . . . 30
1.10.1. Modelo de 2020 . . . 30
1.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 30
1.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 31
1.11. Galicia . . . 32

1.11.1. Modelo de 2020 . . . 32
1.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 32
1.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 33
1.12. Islas Baleares . . . 33
1.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 33
1.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 34
1.13. Islas Canarias . . . 35
1.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 35
1.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 36
1.14. La Rioja . . . 36
1.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 36
1.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 38
1.15. Madrid . . . 39
1.15.1. Modelo de 2020 . . . 39
1.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 40
1.15.3. Convocatoria Ordinaria-Coincidente junio de 2020 . . . 42
1.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 43
1.16. Murcia . . . 44
1.16.1. Modelo de 2020 . . . 44
1.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 44
1.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 45
1.17. Navarra . . . 46
1.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 46
1.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 46
1.18. País Vasco . . . 47
1.18.1. Modelo de 2020 . . . 47
1.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 48
1.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 48

2. Programación Lineal 49
2.1. Andalucía . . . 49
2.1.1. Modelo de 2020 . . . 49
2.1.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2019 . . . 50
2.1.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019 . . . 51
2.2. Aragón . . . 52
2.2.1. Modelo de 2020 . . . 52
2.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2019 . . . 53
2.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019 . . . 54
2.3. Asturias . . . 55
2.3.1. Modelo de 2020 . . . 55
2.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 55
2.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 56
2.4. Cantabria . . . 57
2.4.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 57
2.4.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 58
2.5. Castilla La Mancha . . . 59
2.5.1. Modelo de 2020 . . . 59
2.5.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 60
2.5.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 61
2.6. Castilla León . . . 62

2.6.1. Modelo de 2020 . . . 62
2.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 63
2.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 64
2.7. Cataluña . . . 65
2.7.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 65
2.7.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 66
2.8. Comunidad valenciana . . . 67
2.8.1. Modelo de 2020 . . . 67
2.8.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 68
2.8.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 68
2.9. Extremadura . . . 69
2.9.1. Modelo de 2020 . . . 69
2.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 70
2.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019 . . . 72
2.10. Galicia . . . 73
2.10.1. Modelo de 2020 . . . 73
2.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 74
2.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 75
2.11. Islas Baleares . . . 76
2.11.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 76
2.11.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 77
2.12. Islas Canarias . . . 78
2.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 78
2.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 79
2.13. La Rioja . . . 80
2.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 80
2.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 81
2.14. Madrid . . . 82
2.14.1. Modelo de 2020 . . . 82
2.14.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 83
2.14.3. Convocatoria junio de 2020 (coincidente) . . . 84
2.14.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 84
2.15. Murcia . . . 85
2.15.1. Modelo de 2020 . . . 85
2.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 86
2.15.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 87
2.16. Navarra . . . 88
2.16.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 88
2.16.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 89
2.17. País Vasco . . . 91
2.17.1. Modelo de 2020 . . . 91
2.17.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 92
2.17.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 93

3. Análisis 95
3.1. Resúmenes teóricos . . . 95
3.2. Andalucía . . . 104
3.2.1. Modelo de 2020 . . . 104
3.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 106
3.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 108

3.3. Aragón . . . 111
3.3.1. Modelo de 2020 . . . 111
3.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 112
3.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 114
3.4. Asturias . . . 116
3.4.1. Modelo de 2020 . . . 116
3.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 119
3.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 122
3.5. Cantabria . . . 124
3.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 124
3.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 126
3.6. Castilla La Mancha . . . 129
3.6.1. Modelo de 2020 . . . 129
3.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 131
3.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 133
3.7. Castilla León . . . 135
3.7.1. Modelo de 2020 . . . 135
3.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 137
3.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 139
3.8. Cataluña . . . 140
3.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 140
3.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 142
3.9. Comunidad valenciana . . . 144
3.9.1. Modelo de 2020 . . . 144
3.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 147
3.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 148
3.10. Extremadura . . . 151
3.10.1. Modelo de 2020 . . . 151
3.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 153
3.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 155
3.11. Galicia . . . 156
3.11.1. Modelo de 2020 . . . 156
3.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 158
3.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 159
3.12. Islas Baleares . . . 160
3.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 160
3.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 162
3.13. Islas Canarias . . . 163
3.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 163
3.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 165
3.14. La Rioja . . . 167
3.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 167
3.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 169
3.15. Madrid . . . 171
3.15.1. Modelo de 2020 . . . 171
3.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 174
3.15.3. Convocatoria Ordinaria junio de 2020-coincidente . . . 176
3.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 178
3.16. Murcia . . . 180
3.16.1. Modelo de 2020 . . . 180

3.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 181
3.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 184
3.17. Navarra 186
3.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 186
3.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 187
3.18. País Vasco 188
3.18.1. Modelo de 2020 188
3.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 190
3.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 192

4. Probabilidad **195**
4.1. Resúmenes teóricos 195
4.2. Andalucía 198
4.2.1. Modelo de 2020 198
4.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 199
4.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 201
4.3. Aragón 202
4.3.1. Modelo de 2020 202
4.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 202
4.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 204
4.4. Asturias 204
4.4.1. Modelo de 2020 204
4.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 205
4.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 206
4.5. Cantabria 207
4.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 207
4.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 208
4.6. Castilla La Mancha 208
4.6.1. Modelo de 2020 208
4.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 209
4.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 210
4.7. Castilla León 211
4.7.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 211
4.7.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 211
4.8. Cataluña 212
4.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019 212
4.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019 212
4.9. Comunidad Valenciana 212
4.9.1. Modelo de 2020 212
4.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 213
4.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019 215
4.10. Extremadura 216
4.10.1. Modelo de 2020 216
4.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 216
4.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 217
4.11. Galicia 218
4.11.1. Modelo de 2020 218
4.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2019 219
4.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 219
4.12. Islas Baleares 220

4.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 220
4.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 220
4.13. Islas Canarias . . . 221
4.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 221
4.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 222
4.14. La Rioja . . . 222
4.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 222
4.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 224
4.15. Madrid . . . 225
4.15.1. Modelo de 2020 . . . 225
4.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 226
4.15.3. Convocatoria Ordinaria junio de 2020-coincidente . . . 227
4.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 228
4.16. Murcia . . . 229
4.16.1. Modelo de 2020 . . . 229
4.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 230
4.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 231
4.17. Navarra . . . 232
4.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 232
4.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 233
4.18. País Vasco . . . 233
4.18.1. Modelo de 2020 . . . 233
4.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 234
4.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 235

5. Estadística **237**
5.1. Resúmenes teóricos . . . 237
5.2. Andalucía . . . 240
5.2.1. Modelo de 2020 . . . 240
5.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 241
5.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 242
5.3. Aragón . . . 244
5.3.1. Modelo de 2020 . . . 244
5.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 244
5.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 245
5.4. Asturias . . . 246
5.4.1. Modelo de 2020 . . . 246
5.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 247
5.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 248
5.5. Cantabria . . . 249
5.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 249
5.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 250
5.6. Castilla La Mancha . . . 251
5.6.1. Modelo de 2020 . . . 251
5.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 252
5.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 253
5.7. Castilla León . . . 255
5.7.1. Modelo de 2020 . . . 255
5.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 256
5.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 256

5.8. Cataluña . . . 257
5.9. Comunidad Valenciana . . . 257
5.10. Extremadura . . . 257
5.10.1. Modelo de 2020 . . . 257
5.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 258
5.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 259
5.11. Galicia . . . 260
5.11.1. Modelo de 2020 . . . 260
5.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 260
5.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 261
5.12. Islas Baleares . . . 261
5.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 261
5.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 262
5.13. Islas Canarias . . . 263
5.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 263
5.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 264
5.14. La Rioja . . . 266
5.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 266
5.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 267
5.15. Madrid . . . 267
5.15.1. Modelo de 2020 . . . 267
5.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 268
5.15.3. Convocatoria Extraordinaria junio de 2020-coincidente . . . 270
5.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 271
5.16. Murcia . . . 272
5.16.1. Modelo de 2020 . . . 272
5.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 272
5.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 273
5.17. Navarra . . . 274
5.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 274
5.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 275
5.18. País Vasco . . . 276
5.18.1. Modelo de 2020 . . . 276
5.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 277
5.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 278

Capítulo 1

Álgebra

1.1. Resúmenes teóricos

Matrices

matriz A	dimensión	Transpuesta A^T	dimensión
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$m \times n$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$	$n \times m$
matriz cuadrada	orden	identidad	matriz triangular
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$	n	$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

- **Suma:** Tienen que tener la misma dimensión y se suman término a término.
- **Producto de una matriz por un número real:** Se multiplican todos los términos de la matriz por ese número.
- **Producto de dos matrices:** Se desarrolla multiplicando matriz fila por matriz columna de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

  El número de columnas de la primera matriz tiene que ser igual al número de filas de la segunda.

Determinante de una matriz

- La matriz tiene que ser cuadrada

  a) De orden dos: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

b) De orden tres: (Regla de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

- Propiedades:

a) $\begin{vmatrix} a+m & b+n & c+p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n & p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

b) $|A^T| = |A|$

c) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

d) Si cambiamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo.

e) Si una fila o una columna tiene todos sus elementos igual a cero el determinante vale cero.

f) Si dos filas o dos columnas son iguales el determinante vale cero.

g) Si dos filas o dos columnas son proporcionales el determinante vale cero.

h) Si una fila o columna es combinación lineal de las otras el determinante vale cero.

i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+a & h+b & i+c \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

j) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ xa & xb & xc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+xa & h+xb & i+xc \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila multiplicada por un número (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

Matriz Adjunta:

- Adjunto del elemento a_{ij} de una matriz es el valor del determinante resultante de eliminar la fila i y la columna j multiplicado por $(-1)^{i+j}$ y se le denomina A_{ij}.
- Matriz adjunta. $Adj(A) = (A_{ij})$

Cálculo del determinate de una matriz por adjuntos:
Se elige una fila o una columna (cualquiera es válida, siempre será mejor aquella que tenga más ceros), escojo la primera fila para el ejemplo:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Inversa de una matriz:

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^T}{|A|}$$

Una matriz tiene inversa si, y sólo si, $|A| \neq 0$.
A las matrices que tienen inversa se la llama **Regulares** y a las que no la tienen se las llama **Singulares**.

Rango de una matriz
Es el número de filas linealmente independientes.
De forma práctica se calcula por determinantes. Si tenemos una matriz de dimensión 3×4 cogemos matrices cuadradas que tengan el mayor orden posible, tendremos cuatro de orden 3, si el determinate de alguna de ellas es distinto de cero el rango es 3 y habremos terminado, si por el contrario todas son cero el rango ya no puede ser 3 y buscaremos menores de orden 2. Si alguno de estos menores es distinto de cero ya habremos terminado, y el rango será 2, si por el contrario todos son cero tendremos que buscar menores de orden 1, y en el momento que encontremos alguno distinto de cero el rango será 1.

Sistema de Ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \cdots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \quad = & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \cdots & +a_{mn}x_n = & b_m \end{array} \right.$$

Matriz del sistema: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

Matriz de variables: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$,

Matriz de términos independientes: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Se trata de una ecuación matricial: $AX = B$.
Si $|A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$ y en este caso el sistema se podrá resolver de la siguiente manera $X = A^{-1}B$

Antes de resolver un sistema estudiar si hay ecuaciones nulas, iguales o proporcionales, para el estudio del rango.

Teorema de Rouché

- Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) = nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Determinado (SCD). Y tiene solución única.
- Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) $<$ nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Indeterminado (SCI). Y tiene infinitas soluciones.
- Si Rango($\overline{A}$) $\neq$Rango(A) se trata de un Sistema Incompatible. Y no tiene solución.

Sistema homogéneos Son aquellos en los que $b_i = 0$, estos siempre tienen solución $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ solución trivial, pero en el caso de que de que Rango(A) $< m$ (nº de incógnitas) estaríamos ante infinitas soluciones, es decir:

- Si Rango$(A) = m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCD $\Longrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ solución trivial.
- Si Rango$(A) < m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCI $\Longrightarrow$ infinitas soluciones.

Regla de Cramer
Sea $\overline{A} = (C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n, B)$, entoces sustituimos la columna B en la matriz $\overline{A}$ por cada una de las columnas y tendremos:

$$x_1 = \frac{|B, C_2, C_3, \cdots, C_n|}{|A|}, \; x_2 = \frac{|C_1, B, C_3, \cdots, C_n|}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{|C_1, C_2, \cdots, B|}{|A|}$$

1.2. Andalucia

1.2.1. Modelo de 2020

Problema 1.2.1 Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Razone si la matriz, A es simétrica.

b) Calcule A^{-1}.

c) Resuelva la ecuación matricial $2XA - A^2 - 3I_3 = O$.

Solución:

a) $A^T \neq A \Longrightarrow A$ no es simétrica.

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $2XA - A^2 - 3I_3 = O \Longrightarrow 2XA = A^2 + 3I_3 \Longrightarrow X = \frac{1}{2}(A^2 + 3I_3)A^{-1} = \frac{1}{2}(A + 3A^{-1})$

$$X = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ -4 & -1/2 & -2 \\ 3 & 2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

1.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.2.2 Sean A, B, X e Y matrices invertibles que verifican $AX = B$ y $BY = A$.

a) Compruebe que $Y^{-1} = X$.

b) Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ halle X e Y.

Solución:

a) $BY = A$ y $AX = B \Longrightarrow AXY = A \Longrightarrow A^{-1}AXY = A^{-1}A \Longrightarrow XY = I \Longrightarrow XYY^{-1} = I \cdot Y^{-1} \Longrightarrow X = Y^{-1}$

b) $AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

$BY = A \Longrightarrow Y = B^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

1.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.2.3 Tres institutos piden presupuesto de alojamiento en Roma en dos agencias de viajes, que les dan el precio por noche según el tipo de habitación individual, doble y triple. La primera agencia ofrece los siguientes precios: individual a 65 euros, doble a 85 euros y triple a 104 euros. La segunda agencia oferta la individual a 78 euros, la doble a 83 euros y la triple a 106 euros. El primer instituto necesita tres habitaciones individuales, quince dobles y dos triples, el segundo dos individuales, doce dobles y cinco triples y el tercer instituto una individual, dieciséis dobles y siete triples.

a) Exprese, mediante una matriz A, los precios de las dos agencias según tipo de habitación y con otra matriz D la demanda de los tres institutos.

b) Mediante operaciones con las matrices anteriores, calcule el precio por noche que cada agencia facilita a los distintos institutos por el total de habitaciones solicitadas. ¿Qué agencia le interesaría a cada instituto?

c) ¿Existe la inversa de la matriz D? ¿Y de la matriz A? Justifique las respuestas.

Solución:

a)

	Individual	Doble	Triple
Agencia 1	65	85	104
Agencia 2	78	83	106

$$\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 65 & 85 & 104 \\ 78 & 83 & 106 \end{pmatrix}$$

	Instituto 1	Instituto 2	Instituto 3
Individual	3	2	1
Doble	15	12	16
Triple	2	5	7

$$\Longrightarrow D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

b) $$A \cdot D = \begin{pmatrix} 65 & 85 & 104 \\ 78 & 83 & 106 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1678 & 1670 & 2153 \\ 1691 & 1682 & 2148 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

	Instituto 1	Instituto 2	Instituto 3
Agencia 1	1678	1670	2153
Agencia 2	1691	1682	2148

Al Instituto 1 y al Instituto 2 les interesaría contratar con la Agencia 1, mientras que al Instituto 3 le interesaría la Agencia 2.

c) La matriz A no es cuadrada y, por tanto, no tiene inversa.
$|D| = -83 \Longrightarrow \exists D^{-1}$ (Si existe inversa de D)

1.3. Aragón

1.3.1. Modelo de 2020

Problema 1.3.1 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de x e y se tiene $AB = C$?

b) Calcular, si existe, la matriz inversa de C.

Solución:

a) $AB = C \Longrightarrow \begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2x-2y-1 & x-4y \\ -9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -2x-2y-1 = 2 \\ x-4y = -3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -9/5 \\ y = 3/10 \end{cases}$

b) $|C| = -19 \neq 0 \Longrightarrow \exists C^{-1} = \begin{pmatrix} -4/19 & -3/19 \\ -9/19 & -2/19 \end{pmatrix}$

1.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.3.2 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) ¿Es posible calcular $(BA)^2$? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.

b) Encontrar, si existe, una matriz X, que verifique $2X + 3B = 2C$.

c) Calcular, si existe, la matriz inversa de D.

Solución:

a) $\underset{3\times 2}{B} \cdot \underset{2\times 3}{A} = \underset{3\times 3}{BA} \Longrightarrow \exists (BA)$ con $\dim(BA) = 3\times 3 \Longrightarrow$ se puede calcular $(BA)^2$:

$$(BA)^2 = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 12 \\ 0 & 9 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

b) $2X + 3B = 2C \Longrightarrow X = \frac{1}{2}(2C - 3B)$:

$$X = \frac{1}{2}\left[2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 7 & 8 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 7/2 & 4 \\ 5/2 & 9/2 \end{pmatrix}$$

c) $|D| = 4 \neq 0 \Longrightarrow \exists D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & -1/4 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

1.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.3.3 En un museo las entradas cuestan 1 euro para los niños, 2 euros para los jóvenes y 5 euros para los adultos. Ayer se recaudaron un total de 600 euros y se sabe que el número de adultos que visitó el museo fue igual al doble de la suma del número de niños más el número de jóvenes; además, si hubiesen visitado el museo 100 jóvenes más, el número de jóvenes habría sido igual a la suma del número de niños más el número de adultos. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de niños, jóvenes y adultos que visitaron el museo.

Solución:
Sea x: nº de niños, y: nº de jóvenes y z: nº de adultos.

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+5z=600 \\ z=2(x+y) \\ y+100=x+z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y+5z=600 \\ 2x+2y-z=0 \\ x-y+z=100 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=24 \\ y=28 \\ z=104 \end{array}\right.$$

1.4. Asturias

1.4.1. Modelo de 2020

Problema 1.4.1 Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} y & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } D=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Si $A-B\cdot C=D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m=2$.

Solución:

a) $A-B\cdot C=D \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} y & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} my-1 \\ mx-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x-my+1 \\ -mx+y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-my=-1 \\ -mx+y=-1 \end{array}\right.$

b) $\overline{M}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & -1 \\ -m & 1 & -1 \end{array}\right)$, $|M|=1-m^2=0 \Longrightarrow m=\pm 1$.
Si $m\neq \pm 1 \Longrightarrow |M|\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(M)=2=$Rango$(\overline{M})=$ nº de incógnitas, el sistema es compatible determinado y la solución es única.
Si $m=-1$: $\overline{M}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-F_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado y el sistema tendría infinitas soluciones.
Si $m=1$: $\overline{M}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2+F_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ el sistema es incompatible y el sistema no tendría solución.
Luego de existir solución puede no ser única.

Si $m=2$: $\left\{\begin{array}{l} x-2y=-1 \\ -2x+y=-1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \end{array}\right.$

1.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.4.2 En una oficina se hicieron la semana pasada un total de 550 fotocopias entre fotocopias en blanco y negro y fotocopias en color. El coste total de dichas fotocopias fue de 3,5 euros, siendo el coste de cada fotocopia en blanco y negro de m céntimos de euro, y el coste de cada fotocopia en color cuatro veces el coste de una en blanco y negro.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de fotocopias en blanco y negro y en color hechas la semana pasada.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas fotocopias en blanco y negro se realizaron en la oficina si cada fotocopia en color costó 2 céntimos?

Solución: Sea x el nº de fotocopias en blanco y negro e y el nº de fotocopias en color.

a) $\begin{cases} x + y = 550 \\ mx + 4my = 350 \end{cases}$

b) $\overline{M} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 550 \\ m & 4m & 350 \end{array} \right)$, $|M| = 3m = 0 \Longrightarrow m = 0$.

Si $m \neq 0 \Longrightarrow |M| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(M) = 2 =$Rango$(\overline{M}) =$ nº de incógnitas, el sistema es compatible determinado y la solución es única.

Si $m = 0$: $\overline{M} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 550 \\ 0 & 0 & 350 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ el sistema es incompatible y el sistema no tendría solución.

c) Si la fotocopia en color costó $2 = 4m \Longrightarrow m = 0,5$ $m = 2 \Longrightarrow \begin{cases} x + y = 550 \\ 0,5x + 2y = 350 \end{cases} \Longrightarrow$

$\begin{cases} x = 500 \\ y = 50 \end{cases}$

1.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.4.3 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ -2 & m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1-2m \\ -2m \end{pmatrix}$$

a) Si $(A+B) \cdot C = B \cdot D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 2$.

Solución:

a) $(A+B) \cdot C = B \cdot D \Longrightarrow \left[\begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ -2 & m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2m \\ -2m \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4m \\ 1-2m \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} mx - y \\ -x + my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2m \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} mx - y = 1 \\ -x + my = 1 - 2m \end{cases}$$

b) $\overline{M} = \left(\begin{array}{cc|c} m & -1 & 1 \\ -1 & m & 1-2m \end{array} \right)$, $|M| = m^2 - 1 = 0 \Longrightarrow m = \pm 1$.

Si $m \neq \pm 1 \Longrightarrow |M| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(M) = 2 =$Rango$(\overline{M}) =$ nº de incógnitas, el sistema es compatible determinado y la solución es única.

Si $m = 1$: $\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado y el sistema tendría infinitas soluciones.

Si $m = -1$: $\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible y el sistema no tendría solución.

Luego de existir solución puede no ser única.

Si $m = 2$: $\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ -x + 2y = -3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1/3 \\ y = -5/3 \end{array} \right.$

1.5. Cantabria

1.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.5.1 Una tienda de electrodomésticos ha vendido 750 televisores de tres modelos diferentes, A, B y C. Los ingresos totales obtenidos han sido de 230400 euros. El precio de venta del modelo A era de 320 euros; el del modelo B, un 20 % más barato que A; y el del C, un 10 % más caro que A. Además, de A y C se han vendido, en total, el doble de unidades que B.

a) Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular cuántas unidades se han vendido de cada modelo de televisor.

b) Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

c) Resolverlo.

Solución:

a) Sean x el número de televisores modelo A, y el número de televisores modelo B y z el número de televisores modelo C.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 750 \\ 320x + 0,8 \cdot 320y + 1,1 \cdot 320z = 230400 \\ x + z = 2y \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 750 \\ 10x + 8y + 11z = 7200 \\ x - 2y + z = 0 \end{array} \right.$$

b) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 750 \\ 10 & 8 & 11 & 7200 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right)$, $|A| = 3 \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

c)

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 750 \\ 10x + 8y + 11z = 7200 \\ x - 2y + z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 300 \\ y = 250 \\ z = 200 \end{array} \right.$$

1.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.5.2 Una oficina necesita adquirir material de papelería. Cuenta con un presupuesto de 600 euros y necesita archivadores, cuadernos y carpetas. Los precios de cada artículo por unidad son de 6, 3 y 2 euros respectivamente. El número de cuadernos va a ser la cuarta parte que el de carpetas y el número total de archivadores y de carpetas será de 165.

a) Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular las unidades que deben comprarse de cada artículo si se pretende agotar el presupuesto disponible.

b) Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

c) Resolverlo.

Solución:

a) Sean x el número de archivadores, y el número de cuadernos y z el número de carpetas.

$$\left\{\begin{array}{l} 6x+3y+2z=600 \\ y=\frac{z}{4} \\ x+z=165 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6x+3y+2z=600 \\ 4y-z=0 \\ x+z=165 \end{array}\right.$$

b) $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 3 & 2 & 600 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 165 \end{array}\right)$, $|A|=13\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=\text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

c)

$$\left\{\begin{array}{l} 6x+3y+2z=600 \\ 4y-z=0 \\ x+z=165 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=45 \\ y=30 \\ z=120 \end{array}\right.$$

1.6. Castilla La Mancha

1.6.1. Modelo de 2020

Problema 1.6.1 En una tienda de comida a granel tienen a la venta tres tipos de judías secas: blancas, canela y pintas. Estas se venden a 2,75, 3 y 2,50 euros el kilogramo, respectivamente. Ayer se vendieron 40 kilos en total por un valor de 111,5 euros. La suma de los kilogramos de judías blancas y canela vendidas fue el triple de las pintas.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos kilogramos de judías de cada tipo se vendieron.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:
Sean x el número de kilos de judías blancas, y el número de kilos de judías canela y z el número de kilos de judías pintas.

a)

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=40 \\ 2,75x+3y+2,5z=111,5 \\ x+y=3z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=40 \\ 11x+12y+10z=446 \\ x+y-3z=0 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=40 \\ 11x+12y+10z=446 \\ x+y-3z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=14 \\ y=16 \\ z=10 \end{array}\right.$$

Problema 1.6.2 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A\cdot B-C^T$

b) Comprueba que la matriz C no tiene inversa y explica la razón por la que el producto $D^2\cdot B$ no puede ser realizado.

Solución:

a) $A\cdot B-C^T=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 15 \\ 4 & 2 & 10 \\ 8 & 4 & 20 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 15 \\ 4 & 3 & 8 \\ 6 & 6 & 16 \end{pmatrix}$

b) $|C|=0\Longrightarrow C$ no tiene inversa.

$\dim(D^2)=3\times 3$ y $\dim(B)=1\times 3\Longrightarrow$ el número de columnas de la matriz D^2 es distinto del número de filas de B.

Problema 1.6.3 Los precios de un gimnasio son diferentes según la franja horaria dispuesta en tres turnos: mañana, mediodía y tarde. Este mes han acudido 150 personas por la mañana, 30 en la franja del mediodía y 270 por la tarde y el gimnasio ha ingresado un total de 15900 euros. La diferencia entre el precio de la tarde y la mañana equivale a la mitad del precio para el mediodía y al sumar los precios del mediodía y la tarde obtenemos el doble del precio de la mañana.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el precio de cada franja horaria.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:
Sean x el precio por la mañana, y el precio por el mediodía y z el precio por la tarde.

a)

$$\left\{\begin{array}{l} 150x+30y+270z=15900 \\ z-x=0,5y \\ y+z=2x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x+9z+y=530 \\ 2x+y-2z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} 5x+9z+y=530 \\ 2x+y-2z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=30 \\ y=20 \\ z=40 \end{array}\right.$$

1.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.6.4 Un artesano hace botines, botas de media caña y botas de caña alta, vendiendo cada par, respectivamente, a 150, 200 y 250 euros. La diferencia entre los botines y las botas de caña alta vendidas equivalen al número de caña media vendidas. El número de botas de caña alta vendidas es la tercera parte de los botines. Por el total de las ventas obtiene 5500 euros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas botas de cada tipo se vendieron.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:
Sean x el nº de botines, y el nº de botas de media caña y z el nº botas de caña alta.

a)

$$\left\{\begin{array}{l} 150x + 200y + 250z = 5500 \\ x - z = y \\ z = \frac{x}{3} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x + 4y + 5z = 110 \\ x - y - z = 0 \\ x - 3z = 0 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 4y + 5z = 110 \\ x - y - z = 0 \\ x - 3z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 15 \\ y = 10 \\ z = 5 \end{array}\right.$$

Problema 1.6.5 Una marca ofrece paquetes de tortitas de arroz de tres tipos: con espelta, con amapola y con chía. Se venden el triple de paquetes de las de amapola que de las de espelta. Se venden 40 paquetes más de las de amapola que de las de chía. Los precios de los paquetes para espelta, amapola y chía son respectivamente 2,50, 3,50 y 3 euros obteniendo por la venta de todas las tortitas 1640 euros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos paquetes de cada tipo se vendieron.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:
Sean x el nº de paquetes de tortitas con espelta, y el nº de paquetes de tortitas con amapola y z el nº de paquetes de tortitas con chía.

a)

$$\left\{\begin{array}{l} y = 3x \\ y = z + 40 \\ 2,5x + 3,5y + 3z = 1640 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x - y = 0 \\ y - z = 40 \\ 5x + 7y + 6z = 3280 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} 3x - y = 0 \\ y - z = 40 \\ 5x + 7y + 6z = 3280 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 80 \\ y = 240 \\ z = 200 \end{array}\right.$$

Problema 1.6.6 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula $M = AC - (B - I)^T$ siendo I la matriz identidad de orden 2.

b) Calcula, si es posible, la matriz X tal que $XB = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $M = AC - (B-I)^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^T =$
$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 26 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 26 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 24 & 0 \end{pmatrix}$

b) $XB = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$
$\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$

1.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.6.7 La asociación "Stop Stress" tiene 60 personas asociadas que practican solo una de las siguientes actividades: correr, yoga o natación. Se sabe que hay 18 personas menos en la actividad de correr que la suma de personas que practican yoga y natación. Además, la séptima parte de las personas que corren es igual a la quinta parte de las que practican yoga. Calcular el número de personas que realiza cada una de las actividades.
Solución:
Sean x el número de personas que corren, y el número de personas que hacen yoga y z el número de personas que nadan.

$$\begin{cases} x+y+z=60 \\ x+18=y+z \\ \frac{x}{7}=\frac{y}{5} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=60 \\ x-y-z=-18 \\ 5x-7y=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=21 \\ y=15 \\ z=24 \end{cases}$$

Problema 1.6.8 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcular $AB + C$.
Solución:

$$AB + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \end{pmatrix}$$

1.7. Castilla León

1.7.1. Modelo de 2020

Problema 1.7.1 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y-z=a \\ ax+2y-z=3a \\ 2x+ay-z=6 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a.

b) Resolver el sistema para $a = 2$.

Solución:

a)
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a\\ a & 2 & -1 & 3a\\ 2 & a & -1 & 6\end{array}\right);\quad |A|=2a-a^2=0\Longrightarrow a=0,\ \ a=2$$

- Si $a\neq 0$ y $a\neq 2\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1 & 6\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-2F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 6\end{array}\right)=$$
$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

- Si $a=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1 & 6\\ 2 & 2 & -1 & 6\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-2F_1\\ F_3-2F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)=$$
$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $a=2$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=2\\ 2x+2y-z=6\\ 2x+2y-z=6\end{array}\right.\Longrightarrow\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-2F_2\\ F_3-F_2\end{array}\right]=\left\{\begin{array}{l} x+y-z=2\\ z=2\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=4-\lambda\\ y=\lambda\\ z=2\end{array}\right.$$

Problema 1.7.2 Se consideran las matrices $A=\left(\begin{array}{cc} -2 & 1\end{array}\right)$ y $B=\left(\begin{array}{c} 1\\ -3\end{array}\right)$. Calcular, cuando sea posible, los productos matriciales AB y BA.
Solución:
$AB=\left(\begin{array}{cc} -2 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 1\\ -3\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} -5\end{array}\right)$
$BA=\left(\begin{array}{c} 1\\ -3\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} -2 & 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} -2 & 1\\ 6 & -3\end{array}\right)$

1.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.7.3 Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a:

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=0\\ -3x+2y-5z=2\\ x+2y-az=-1\end{array}\right.$$

a) Clasificar el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a.

b) Resuelve el sistema para $a=-2$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & -5 & 2\\ 1 & 2 & -a & -1\end{array}\right);\quad |A|=-8(a+1)=0\Longrightarrow a=-1$$

- Si $a\neq -1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=\text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & -5 & 2\\ 1 & 2 & 1 & -1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2+3F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 8 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

b) Si $a=-2$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=0\\ -3x+2y-5z=2\\ x+2y+2z=-1\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=0\\ z=-1\end{array}\right.$$

Problema 1.7.4 ¿Es posible que una matriz 4×2 coincida con su inversa? ¿Y con su traspuesta?
Solución:
Si una matriz tiene de dimensión 4×2 no es cuadrada y, por tanto, no tiene inversa. Luego la respuesta a la primera pregunta es NO.
Si una matriz tiene de dimensión 4×2 la dimensión de su traspuesta es 2×4 y, por tanto, no pueden coincidir. Luego la respuesta a la segunda pregunta es NO.

1.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.7.5 La asociación "Stop Stress" tiene 60 personas asociadas que practican solo una de las siguientes actividades: correr, yoga o natación. Se sabe que hay 18 personas menos en la actividad de correr que la suma de personas que practican yoga y natación. Además, la séptima parte de las personas que corren es igual a la quinta parte de las que practican yoga. Calcular el número de personas que realiza cada una de las actividades.
Solución:
Sean x el número de personas que corren, y el número de personas que hacen yoga y z el número de personas que nadan.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=60\\ x+18=y+z\\ \frac{x}{7}=\frac{y}{5}\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x+y+z=60\\ x-y-z=-18\\ 5x-7y=0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=21\\ y=15\\ z=24\end{array}\right.$$

Problema 1.7.6 Dadas las matrices $A=\left(\begin{array}{cc} 1 & 2\\ 0 & 3\end{array}\right)$, $B=\left(\begin{array}{c} 3\\ 5\end{array}\right)$ y $C=\left(\begin{array}{c} 2\\ 1\end{array}\right)$, calcular $AB+C$
Solución:
$AB+C=\left(\begin{array}{cc} 1 & 2\\ 0 & 3\end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 3\\ 5\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c} 2\\ 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 13\\ 15\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c} 2\\ 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 15\\ 16\end{array}\right)$

1.8. Cataluña

1.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.8.1 Un vendedor de una librería de libros antiguos cobra, además de un sueldo fijo, diferentes comisiones dependiendo del tipo de libro que vende. Cobra 1 € por cada cómic, 1,5 € por cada revista y 2 € por cada novela. Ayer, vendió el doble de revistas que de novelas y 5 cómics menos que revistas, y va a conseguir en total una comisión de 30 €.
¿Cuántas publicaciones vendió de cada tipo?.

Solución:
Sean x número de cómic vendidos, y número de revistas vendidas y z número de novelas vendidas.

$$\left\{\begin{array}{l} x+1,5y+2z=30 \\ y=2z \\ x+5=y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+3y+4z=60 \\ y-2z=0 \\ x-y=-5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5 \\ y=10 \\ z=5 \end{array}\right.$$

Problema 1.8.2 Considere las matrices $A=\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{array}\right)$ y $B=\left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right)$

a) Compruebe que se cumple $A^{-1}=A^2$.

b) Resolver la ecuación matricial $AX+B=I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a) $A=\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1}=\left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)$
$A^2=\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1}=A^2$

b) $AX+B=I \Longrightarrow X=A^{-1}(I-B)=\left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)\left[\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)-\left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right)\right]=$
$\left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{array}\right)$

1.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.8.3 Consideramos la matriz $A=\left(\begin{array}{cc} x & -2 \\ 5 & -x \end{array}\right)$ estudiar para que valores de x la matriz inversa de la matriz A coincide con su opuesta, es decir, $A^{-1}=-A$.

Solución:
$|A|=-x^2+10=0 \Longrightarrow x=\pm\sqrt{10} \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \ \forall x\in\mathbb{R}-\left\{\pm\sqrt{10}\right\}$
$A=\left(\begin{array}{cc} x & -2 \\ 5 & -x \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1}=\frac{1}{-x^2+10}\left(\begin{array}{cc} -x & 2 \\ -5 & x \end{array}\right)=-A=\left(\begin{array}{cc} -x & 2 \\ -5 & x \end{array}\right) \Longrightarrow \frac{1}{-x^2+10}=1 \Longrightarrow$
$-x^2+9=0 \Longrightarrow x=\pm 3$

Problema 1.8.4 Un triatlón consta de tres segmentos que hay que realizar consecutivamente practicando tres modalidades de deporte diferentes: natación, ciclismo y carrera a pie. La distancia total que se recorrerá en el triatlón es de 75 km. Sabemos que el recorrido en bicicleta es igual a cuatro veces la distancia que hay recorrer nadando y corriendo conjuntamente. Sabemos también que si sumamos 3 km a la distancia que se hace corriendo nos da lo mismo que cinco veces el recorrido que se hace nadando. Determine la distancia recorrida en cada modalidad.

Solución:
Sean x número de km nadando, y número de km en bici y z número de km corriendo.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=75\\ y=4(x+z)\\ z+3=5x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=75\\ 4x-y+4z=0\\ 5x-z=3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3\\ y=60\\ z=12 \end{array}\right.$$

1.9. Comunidad valenciana

1.9.1. Modelo de 2020

Problema 1.9.1 Dada las matrices $A=\left(\begin{array}{cc} 3 & 1\\ 1 & 1 \end{array}\right)$, $B=\left(\begin{array}{cc} 0 & 2\\ -1 & 2 \end{array}\right)$

a) Calcula $(AB)^{-1}$.

b) Calcula AB^T-A^TB.

c) Resolver la ecuación $B^TX+A^TB=A^T$.

Siendo A^T y B^T las matrices traspuestas de A y B, respectivamente.
Solución:

a) $(AB)^{-1}=\left[\left(\begin{array}{cc} 3 & 1\\ 1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 0 & 2\\ -1 & 2 \end{array}\right)\right]^{-1}=\left(\begin{array}{cc} -1 & 8\\ -1 & 4 \end{array}\right)^{-1}=\left(\begin{array}{cc} 1 & -2\\ 1/4 & -1/4 \end{array}\right)$

b) $AB^T-A^TB=\left(\begin{array}{cc} 3 & 1\\ 1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 0 & -1\\ 2 & 2 \end{array}\right)-\left(\begin{array}{cc} 3 & 1\\ 3 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 0 & 2\\ -1 & 2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 3 & -9\\ 3 & -3 \end{array}\right)$

c) $B^TX+A^TB=A^T \Longrightarrow B^TX=A^T-A^TB \Longrightarrow X=(B^T)^{-1}A^T(I-B)$

$$X=\left(\begin{array}{cc} 0 & -1\\ 2 & 2 \end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{cc} 3 & 1\\ 1 & 1 \end{array}\right)\left(\left(\begin{array}{cc} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{array}\right)-\left(\begin{array}{cc} 0 & 2\\ -1 & 2 \end{array}\right)\right)=\left(\begin{array}{cc} 5 & -17/2\\ -4 & 7 \end{array}\right)$$

1.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.9.2 Dada las matrices $A=\left(\begin{array}{cc} 2 & 5\\ 1 & 2 \end{array}\right)$, $B=\left(\begin{array}{cc} 2 & 4\\ 1 & 2 \end{array}\right)$, se pide:

a) Halla la matriz inversa de A.

b) Explica por qué la matriz B no tiene inversa.

c) Razona por qué la matriz AB no tiene inversa.

d) Resolver la ecuación $AB-AX=BA$.

Solución:

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

b) $|B|=0 \Longrightarrow \nexists B^{-1}$

c) $|AB|=|A||B|=-1\cdot 0=0 \Longrightarrow \nexists (AB)^{-1}$

d) $AB-AX=BA \Longrightarrow AX=AB-BA \Longrightarrow X=A^{-1}(AB-BA)$

$$X=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right]=$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.9.3 Una fábrica de juguetes artesanales produce camiones, marionetas y rompecabezas de madera. Para fabricar un camión necesita dos kilos de madera y tres horas de trabajo, mientras que para una marioneta necesita quinientos gramos de madera y cuatro horas de trabajo. En el caso de los rompecabezas necesita ochocientos gramos de madera y tres horas y media de trabajo para producir uno. Durante una semana, la empresa ha puesto en el mercado 89 juguetes utilizando exactamente 91 kilos de madera y 313 horas de trabajo. Determina el número de camiones, de marionetas y de rompecabezas producidos.

Solución:
Sea x el nº camiones, y el nº de marionetas y z el nº de rompecabezas.

	kg madera	horas trabajo
Camiones	2	3
Marionetas	$0,5$	4
Rompecabezas	$0,8$	$3,5$
kg Hora	91	313

$$\begin{cases} x+y+z=89 \\ 2x+0,5y+0,8z=91 \\ 3x+4y+3,5z=313 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=89 \\ 20x+5y+8z=910 \\ 6x+8y+7z=626 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=23 \\ y=26 \\ z=40 \end{cases}$$

Problema 1.9.4 Dada las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Calcula $(AB)^{-1}$.

b) Calcula $C+AB$.

c) ¿Son iguales las matrices $C^{-1}+(AB)^{-1}$ y $(C+AB)^{-1}$?

Solución:

a) $(AB)^{-1}=\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right]^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $C+AB=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$

c) $(C+AB)^{-1}=I^{-1}=I$

$C^{-1}+(AB)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I.$

Luego las dos matrices resultantes que comparamos son iguales.

1.10. Extremadura

1.10.1. Modelo de 2020

Problema 1.10.1 Sean A y B la matrices siguientes: $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
Hallar, justificando la respuesta, la matriz X que sea solución de ecuación matricial: $AX-B=AB$

Solución:
$AX-B=AB \Longrightarrow AX=AB+B \Longrightarrow X=A^{-1}(AB+B)$

$$X=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]=$$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2/3 & 7/3 \\ 11/3 & 7/3 \end{pmatrix}$$

Problema 1.10.2 Sea A la matriz siguiente: $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & x \end{pmatrix}$

a) Determinar, justificando la respuesta, para qué valor del parámetro x no existe A^{-1}.

b) Hallar la inversa de la matriz A para $x=0$. Justificar la respuesta.

Solución:

a) $|A|=-6(x+1)=0 \Longrightarrow x=-1 \Longrightarrow \begin{cases} \nexists A^{-1} & \text{si } x=-1 \\ \exists A^{-1} & \forall x\in\mathbb{R}-\{-1\} \end{cases}$

b) Si $x=0 \Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/6 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.10.3 Sea A y B las matrices siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, las matrices X e Y que sean solución del sistema de ecuaciones matriciales siguiente:

$$\begin{cases} -2X+Y=A+B \\ 5X+Y=A-2B \end{cases}$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} -2X+Y=A+B \\ 5X+Y=A-2B \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} X=-\dfrac{3}{7}B=\begin{pmatrix} 3/7 & -3/7 \\ 0 & 3/7 \end{pmatrix} \\ \\ Y=\dfrac{1}{7}(7A+B)=\begin{pmatrix} 6/7 & 36/7 \\ 0 & -22/7 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

Problema 1.10.4 Sea A la matriz siguiente: $A=\begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$

Hallar, justificando la respuesta, el valor de x para el que se verifica $A^t=A^{-1}$, donde A^t es la matriz traspuesta de A y A^{-1} la matriz inversa de A.

Solución:

$|A|=x^2+1\neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} \;\; \forall x\in\mathbb{R}$
$A^t=\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ y $A^{-1}=\frac{1}{x^2+1}\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$
$A^t=A^{-1}\Longrightarrow \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}=\frac{1}{x^2+1}\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}\Longrightarrow 1=\frac{1}{x^2+1}\Longrightarrow x^2=0\Longrightarrow x=0$

1.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.10.5 Sea A, B e I las matrices siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, la matriz X que sea solución de la ecuación matricial:

$$ABX=AB+I$$

Solución:
$ABX=AB+I\Longrightarrow (AB)^{-1}(AB)X=(AB)^{-1}(AB+I)\Longrightarrow X=I+(AB)^{-1}$
$X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right]^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+$
$\begin{pmatrix} -1/5 & 3/5 \\ -3/10 & 2/5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/10 & 7/5 \end{pmatrix}$

Problema 1.10.6 Sea X, I y O las matrices siguientes:

$$X=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, los valores del parámetro a para los que se verifica

$$X^2-4X+3I=O$$

Solución:

$$X^2-4X+3I=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2-4a+3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$a^2-4a+3=0\Longrightarrow a=1,\;\; a=3$$

.

1.11. Galicia

1.11.1. Modelo de 2020

Problema 1.11.1 Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz $B^T \cdot A \cdot B$

b) Calcula la inversa de la matriz $A - I$, en donde I es la matriz identidad de orden 2.

c) Despeja la matriz X en la ecuación matricial $AX - B = X$ y calcúlala.

Solución:

a) $B^T \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $AX - B = X \Longrightarrow AX - X = B \Longrightarrow (A - I)X = B \Longrightarrow X = (A - I)^{-1}B$

$$X = (A-I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.11.2 Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule las matrices $A + B$ y $3C - B$

b) Expresa en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear $A+B = 3C-B$ y resuélvalo.

Solución:

a) $A + B = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a-b & 2 \\ a+3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$3C - B = 3\begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c-b & -9+b & 2 \\ 3c-3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} a+b & a-b & 2 \\ a+3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c-b & -9+b & 2 \\ 3c-3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a+b = 3c-b \\ a-b = -9+b \\ a+3 = 3c-3 \end{cases} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} a+2b-3c = 0 \\ a-2b = -9 \\ a-3c = -6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

1.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.11.3 Disponemos de tres granjas A, B y C para la cría ecológica de pollos. La granja A tiene capacidad para criar un 20 % más de pollos que la granja B, y la granja B tiene capacidad para criar el doble de pollos que la granja C. Se sabe además que entre las tres granjas se pueden criar un total de 405 pollos.

a) Formule el sistema de ecuaciones asociado a este problema.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones anterior. ¿Cuántos pollos se pueden criar en cada una de las tres granjas?

Solución:
Sean x número de pollos de la granja A, y número de pollos de la granja B y z número de pollos de la granja C.

a) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=405 \\ x=1,2y \\ y=2z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=405 \\ 5x-6y=0 \\ y-2z=0 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=405 \\ 5x-6y=0 \\ y-2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=180 \\ y=150 \\ z=75 \end{array}\right.$

1.12. Islas Baleares

1.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.12.1 Se considera el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} x+(a+1)y=1 \\ ax+2y=-2 \end{array}\right.$$

a) Discutir el sistema en función del parámetro a.

b) Resolverlo para $a=-2$.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a+1 & 1 \\ a & 2 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A|=-a^2-a+2=0 \Longrightarrow a=-2$ y $a=1$.

- Si $a\neq -2$ y $a\neq 1 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=-2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2+2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

- Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

b) Si $a = -2$:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -2x + 2y = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$$

Problema 1.12.2 Un trayecto de 600 km debe hacerse combinando taxi, ferrocarril y autobús. El coste del taxi es de 0,5 euros/km; el del ferrocarril, de 0,2 euros/km, y el del autobús, de 0,1 euros/km. El recorrido nos ha costado 150 euros, y se sabe que se han hecho el doble de kilómetros con ferrocarril que en taxi y autobús juntos. Determinar las distancias que se han recorrido con cada medio de transporte.

Solución:
Sean x el número de kms en taxi, y el número de kms en ferrocarril y z el número de kms en autobús.

$$\begin{cases} x + y + z = 600 \\ 0,5x + 0,2y + 0,1z = 150 \\ y = 2(x + z) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 600 \\ 5x + 2y + z = 1500 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 125 \\ y = 400 \\ z = 75 \end{cases}$$

1.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.12.3 Bernat quedó ayer con unos amigos en un bar y tomaron 4 cervezas, 3 panecillos y 5 cafés con leche. Todo ello les costó 19,50 euros. Días atrás, había ido al mismo bar con su primo Martí, y por 2 cervezas, 1 panecillo y 2 cafés con leche habían pagado 8,10 euros. En este bar todas las cervezas valen lo mismo y todos los panecillos tienen el mismo precio.

a) Identifique las variables e interprete el enunciado como un conjunto de ecuaciones lineales.

b) Hoy Bernat ha vuelto con otros amigos y han tomado 2 cervezas, 2 panecillos y 3 cafés con leche. Combina las ecuaciones del apartado anterior, para deducir cuánto han pagado en total.

c) Si 1 cerveza, 1 panecillo y 1 café con leche cuestan 5,10 euros, cuánto valen la cerveza, el panecillo y el café con leche separadamente?

Solución: Sean x el precio de una cerveza, y el precio de un panecillo y z el precio de un café con leche.

a)

$$\begin{cases} 4x + 3y + 5z = 19,50 \\ 2x + y + 2z = 8,10 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 8x + 6y + 10z = 39 \\ 20x + 10y + 20z = 81 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 8x + 6y + 10z = 39 \\ 20x + 10y + 20z = 81 \\ 2x + 2y + 3z = m \end{cases} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 10 & 39 \\ 20 & 10 & 20 & 81 \\ 2 & 2 & 3 & m \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ 2F_2 - 5F_1 \\ 4F_3 - F_1 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 10 & 39 \\ 0 & -10 & -10 & -33 \\ 0 & 2 & 2 & 4m - 39 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 10 & 39 \\ 0 & -10 & -10 & -33 \\ 0 & 0 & 0 & 20m - 228 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow m = \frac{57}{5} = 11,4$$

Si $m \neq 11,4$ el sistema sería incompatible y para este valor será compatible indeterminado, tendrá infinitas soluciones.
Tendrá que pagar 11,4 euros por 2 cervezas, 2 panecillos y 3 cafés con leche.

c)

$$\left\{\begin{array}{l} 8x+6y+10z=39\\ 20x+10y+20z=81\\ x+y+z=5,10 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 8x+6y+10z=39\\ 20x+10y+20z=81\\ 10x+10y+10z=51 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=9/5=1,8\\ y=21/10=2,1\\ z=6/5=1,2 \end{array}\right.$$

Problema 1.12.4 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^2 y A^3.

b) Calcular A^n y en particular A^{14}.

c) Resolver la ecuación matricial $AX+\frac{1}{5}B^tB=2A$, donde B^t es la matriz traspuesta de B.

Solución:

a) $A^1=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^4=A^3A=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 4 & 1 \end{pmatrix}\Longrightarrow A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ n & 1 \end{pmatrix}\Longrightarrow A^{14}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 14 & 1 \end{pmatrix}$

c) $AX+\frac{1}{5}B^tB=2A\Longrightarrow X=A^{-1}\left(2A-\dfrac{1}{5}B^tB\right)$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1 \end{pmatrix}\Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ -1 & 1 \end{pmatrix}\left[2\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1 \end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ -1 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 2 & 2 \end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 2\\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2/5\\ 8/5 & 9/5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2/5\\ 3/5 & 11/5 \end{pmatrix}$$

1.13. Islas Canarias

1.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.13.1 Una tienda de informática vende pendrives de 32 Gb, 64 Gb y 128 Gb, siendo sus precios 5 €, 15 € y 20 €, respectivamente. Un cliente ha comprado un total de 15 pendrives que le han costado 160 €. Sabiendo que el número de pendrives de 128 Gb que compró era la cuarta parte del resto,

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Calcular cuántos pendrives de cada clase compró el cliente.

Solución:
Sean x número de pendrives de 32 Gb, y número de pendrives de 64 Gb y z número de pendrives de 128 Gb.

a)

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=15 \\ 5x+15y+20z=160 \\ z=\frac{1}{4}(x+y) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=15 \\ x+3y+4z=32 \\ x+y-4z=0 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=15 \\ x+3y+4z=32 \\ x+y-4z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=8 \text{ €} \\ y=4 \text{ €} \\ z=3 \text{ €} \end{array}\right.$$

1.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.13.2 En un hotel hay 400 turistas de españoles, alemanes e ingleses. El número de alemanes es el 120 % del número de ingleses y estos últimos, sumados a los españoles, superan en 40 al número de alemanes.

a) Plantear el correspondiente sistema.

b) ¿Cuántos españoles, alemanes e ingleses hay en el hotel?

Solución:
Sean x el número de españoles, y el número de alemanes y z el número de ingleses.

a)

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=400 \\ y=1,2z \\ z+x=40+y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=400 \\ 5y-6z=0 \\ x-y+z=40 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=400 \\ 5y-6z=0 \\ x-y+z=40 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=70 \\ y=180 \\ z=150 \end{array}\right.$$

1.14. La Rioja

1.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.14.1 Consideramos el sistema de ecuaciones lineales donde a es un número real

$$\left\{\begin{array}{l} ay+az=0 \\ y+z=0 \\ 4x-2y+az=a \end{array}\right.$$

a) ¿Existe algún valor de a para el que el sistema es compatible y determinado?

b) ¿Existe algún valor de a para el que el sistema no tenga soluciones?

c) Resuelve el sistema si $a=0$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & a & a \end{array}\right)$; $|A| = 0$ y $\left|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{array}\right| = -4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 \Longrightarrow$ El sistema NO puede ser compatible determinado para cualquier valor del parámetro a.
Observación: Para que el sistema sea compatible determinado es necesario que Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ $=$nº incógnitas.

b)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & a & a \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ aF_2 - F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & a & a \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Luego el sistema es compatible indeterminado para cualquier valor del parámetro real $a \Longrightarrow$ el sistema siempre tiene solución.

c) Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 + 0 = 0 \\ y + z = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -2\lambda \end{array}\right.$$

Problema 1.14.2 Dada una matriz cuadrada A

a) ¿Puede saberse si tiene inversa sin calcularla explícitamente? ¿Cómo?

b) Sea ahora A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Halla, si existe, la inversa de A.

c) Si A es la matriz del apartado anterior, determina las matrices X e Y de orden 2 tales que:

$$\left\{\begin{array}{l} 3X + 2Y = A \\ X + Y = 2A \end{array}\right.$$

Solución:

a) $\left\{\begin{array}{l} |A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1} \\ |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} \end{array}\right.$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

c)

$$\left\{\begin{array}{l} 3X + 2Y = A \\ X + Y = 2A \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} X = -3A = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} \\ \\ Y = 5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

1.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.14.3 De los bebés que se han inscrito en el mes de mayo en el registro civil de Logroño, 63 tienen de nombre Alba, Lucía, Pedro o Mateo. 48 de ellos tienen los nombres de Alba, Pedro o Mateo. Sabemos que el número de bebés inscritos con el nombre de Pedro es igual a la suma de los inscritos con los nombres de Alba y Mateo; además se han inscrito tantos bebés con el nombre de Alba como la suma de la mitad de los inscritos con el nombre de Pedro más los inscritos con el nombre de Mateo.

a) ¿Cuántos de estos bebés se llaman Alba?, ¿cuántos Pedro?, ¿cuántos Mateo?

b) ¿Cuántos bebés se llaman Lucía?

Solución:
Sean x número inscritos como Alba, y número inscritos como Lucía, z número inscritos como Pedro y t número inscritos como Mateo.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=63 \\ x+z+t=48 \\ z=x+t \\ x=\frac{z}{2}+t \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=63 \\ x+z+t=48 \\ x-z+t=0 \\ 2x-z-2t=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=18 \\ y=15 \\ z=24 \\ t=6 \end{array}\right.$$

a) $\left\{\begin{array}{l} \text{Alba}=18 \text{ inscritos} \\ \text{Lucía}=15 \text{ inscritos} \\ \text{Pedro}=24 \text{ inscritos} \\ \text{Mateo}=6 \text{ inscritos} \end{array}\right.$

b) El nombre de Lucía se ha contabilizado 15 veces como se observa en el apartado anterior.

Problema 1.14.4 Si $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcular A^2 y A^3.

b) Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, calcula A^{15} y A^{30}.

c) Resuelve la ecuación matricial $AX=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $A^2=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^3=A^2A=IA=A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $A^{15}=\left(A^2\right)^7\cdot A=I^7A=IA=A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
$A^{30}=\left(A^2\right)^{15}=I^{15}=I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $AX=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow X=A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1.15. Madrid

1.15.1. Modelo de 2020

Problema 1.15.1 Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule los valores de a y de b para que se verifique $A^2 = 2I$.

b) Para $a = 0$ y $b = 2$, determine la matriz X tal que $XA = B - X$.

Solución:

a)

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a^2+b & a+2 \\ ab+2b & b+4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2+b=2 \\ a+2=0 \\ ab+2b=0 \\ b+4=2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=-2 \\ b=-2 \end{array} \right.$$

b) $XA = B - X \Longrightarrow XA + X = B \Longrightarrow X(A+I) = B \Longrightarrow X = B(A+I)^{-1}$

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A+I)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = B(A+I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 1.15.2 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Proporcione el valor de m para que $A \cdot B = C^t$

b) Para $m = 0$ calcule B^{-1}.

Solución:

a) $A \cdot B = C^t \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2m-1 & 0 & m+2 \\ m-1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2m-1=3 \\ m+2=4 \\ m-1=1 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$m = 2$$

b) $m=0\Longrightarrow B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\Longrightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Problema 1.15.3 Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rl} x+ay+z= & 6\\ 2x-y+z= & a-1\\ -x+y+z= & 2\end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores de $a\in\mathbb{R}$.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a=2$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & a & 1 & 6\\ 2 & -1 & 1 & a-1\\ -1 & 1 & 1 & 2\end{array}\right);\quad |A|=-3a-1=0\Longrightarrow a=-\frac{1}{3}$$

- Si $a\neq-\dfrac{1}{3}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=\text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=-\dfrac{1}{3}$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 6\\ 2 & -1 & 1 & -\frac{4}{3}\\ -1 & 1 & 1 & 2\end{array}\right)=\frac{1}{9}\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 3 & 18\\ 6 & -3 & 3 & -4\\ -1 & 1 & 1 & 2\end{array}\right)=$$

$$\begin{bmatrix} F_1\\ F_2-2F_1\\ 3F_3+F_1\end{bmatrix}=\frac{1}{9}\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 3 & 18\\ 0 & -1 & -3 & -40\\ 0 & 2 & 6 & 24\end{array}\right)=\begin{bmatrix} F_1\\ F_2\\ F_3+2F_2\end{bmatrix}=$$

$$\frac{1}{9}\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 3 & 18\\ 0 & -1 & 1 & -40\\ 0 & 0 & 0 & -56\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $a=2$:

$$\left\{\begin{array}{rl} x+2y+z= & 6\\ 2x-y+z= & 1\\ -x+y+z= & 2\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=2\\ z=1\end{array}\right.$$

1.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.15.4 Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} x+ay=0\\ x+2z=0\\ x+ay+(a+1)z=a\end{array}\right.$$

Se pide:

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & a & a+1 & a \end{array}\right)$; $|A| = -a(a+1) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = -1$.

- Si $a \in \mathbb{R} - \{0, -1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(A) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ *SCD*: Sistema compatible determinado, solución única.
- Si $a = -1$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow$ *SI*: sistema incompatible, no tiene solución.
- Si $a = 0$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{array}\right] =$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ *SCI*: sistema compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

b) Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ 2z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Problema 1.15.5 Se considera la matriz A dada por $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcule el valor del parámetro real m para que $A^2 - 5A = -4I$, siendo I la matriz identidad.

b) Para $m = 1$, indique si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Solución:

a) $A^2 - 5A = -4I$:

$$\begin{pmatrix} 11 & m+1 & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -m-1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 5 & 10 \\ 0 & 5m & 0 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & m-4 & 10 \\ 0 & m^2 - 5m & 0 \\ 5 & 4-m & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m - 4 = 0 \\ m^2 - 5m = -4 \\ 4 - m = 0 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow m = 4$$

b) Si $m = 1$: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 4 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 1 & 3/4 \end{pmatrix}$$

1.15.3. Convocatoria Ordinaria-Coincidente junio de 2020

Problema 1.15.6 Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcule A^2 y A^{10}.

b) Calcule $(AA-3I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Solución:

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}, \ldots,$

$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix}$

b) $B = AA - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(AA-3I)^{-1} = B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 1.15.7 Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 2a \\ 2x + ay + 2z = 3 \\ -x - y - z = 2 \end{array} \right.$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|c} 3 & 2 & 1 & 2a \\ 2 & a & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right); \quad |A| = 4 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 2$$

- Si $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 2$:

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rrr|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

b) Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{c} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + 2z = 3 \\ -x - y - z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{11}{4} \\ \\ y = -\dfrac{7}{2} \\ \\ z = -\dfrac{5}{4} \end{array}\right.$$

1.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.15.8 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

a) Determine los valores del parámetro a para los que se verifica la igualdad $A^2 - 5A = -I$, donde I es la matriz identidad.

b) Calcule A^{-1} para $a = -1$.

Solución:

a) $A^2 - 5A = -I \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$\begin{pmatrix} 5a^2 - 6 & 0 \\ 0 & 5a^2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = \pm 1$

b) Si $a = -1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Problema 1.15.9 Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \overline{R}$:

$$\left\{\begin{array}{c} x - ay = 1 \\ ax - 4y - z = 2 \\ 2x + ay - z = a - 4 \end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 0 & 1 \\ a & -4 & -1 & 2 \\ 2 & a & -1 & a-4 \end{array}\right); \quad |A| = -a^2 + 3a + 4 = 0 \Longrightarrow a = -1, \ a = 4$$

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

- Si $a = 4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 4F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & -1 & -2 \\ 0 & 12 & -1 & -2 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

b) Si $a = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{c} x - 3y = 1 \\ 3x - 4y - z = 2 \\ 2x + 3y - z = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1/2 \\ y = -1/2 \\ z = -3/2 \end{array} \right.$$

1.16. Murcia

1.16.1. Modelo de 2020

Problema 1.16.1 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule A^{-1}.

b) Calcule el valor del parámetro a para que $B + C = A^{-1}$.

c) Calcule el valor del parámetro a para que $A + B + C = 3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a) Calcule $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow a - 1 = -1 \Longrightarrow a = 0$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = 0$

1.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.16.2 Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + ay + z = 1 \\ 2y + az = 2 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right.$$

Resolverlo para $a = 3$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = a^2 - a = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = 1$$

- Si $a \neq 0$ y$a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = [F_3 = F_1] \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Si $a = 3$

$$\left\{\begin{array}{l} x + 3y + z = 1 \\ 2y + 3z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/3 \\ y = 0 \\ z = 2/3 \end{array}\right.$$

1.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.16.3 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcule $(A - B)$.

b) Calcule $(A - B)^{-1}$.

c) Hallar la matriz X que verifica $AX - A = BX + B$.

Solución:

a) $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$

c) $AX - A = BX + B \Longrightarrow AX - BX = B + A \Longrightarrow (A - B)X = B + A \Longrightarrow X = (A - B)^{-1}(B + A)$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

1.17. Navarra

1.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.17.1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, responda a las siguientes cuestiones:

a) Determine el valor de m para que $AB = BA$.

b) Calcule CB^{-1} y DC^t.

c) ¿Qué dimensión debe tener una matriz N para que pueda calcularse el producto DNC ? ¿Y para qué NBD^t sea matriz cuadrada? Razone las respuestas.

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -m-5 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2m+1 & -10 \end{pmatrix} \Longrightarrow -m-5 = 2m+1 \Longrightarrow m = -2$

b) $CB^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$DC^t \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\underset{3\times 2}{D} \cdot N \cdot \underset{1\times 2}{C} \Longrightarrow \underset{2\times 1}{N}$ y $\underset{3\times 2}{DNC}$; $\dim(N) = 2\times 1$.

$N \cdot \underset{2\times 2}{B} \cdot \underset{2\times 3}{D^t}$ para que la matriz resultante sea cuadrada tendríamos: $\underset{3\times 2}{N} \cdot \underset{2\times 2}{B} \cdot \underset{2\times 3}{D^t} \Longrightarrow$

$$\dim(N) = 3\times 2$$

.

1.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.17.2 Clasifique el siguiente sistema en función del número de soluciones y resuélvalo utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & -4 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

El sistema tiene infinitas soluciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x-y+z=3 \\ 3y-z=-2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=2+3\lambda \end{array}\right.$$

Problema 1.17.3 Dadas las matrices $A=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{array}\right)$ y $B=\left(\begin{array}{rrr} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{array}\right)$, calcule AB e indique qué relación hay entre A y B.

Solución:

$$AB=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{rrr} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$AB=I \Longrightarrow B=A^{-1} \text{ y } A=B^{-1}$$

1.18. País Vasco

1.18.1. Modelo de 2020

Problema 1.18.1 Sean las matrices $A=\left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$, $B=\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{array}\right)$ y $C=\left(\begin{array}{cc} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{array}\right)$

a) Determina la matriz inversa de la matriz $I+B$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

b) Calcular las matrices X e Y que verifican que:

$$\left\{\begin{array}{l} AX+BY=C \\ AX=Y \end{array}\right.$$

Solución:

a) $(I+B)^{-1}=\left[\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)+\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{array}\right)\right]^{-1}=\left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{array}\right)^{-1}=\left(\begin{array}{rr} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{array}\right)$

b) $\left\{\begin{array}{l} AX+BY=C \\ AX=Y \end{array}\right. \Longrightarrow Y+BY=C \Longrightarrow (I+B)Y=C \Longrightarrow Y=(I+B)^{-1}C$

$$Y=(I+B)^{-1}C=\left(\begin{array}{rr} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{rr} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{rr} 5 & 11/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$AX=Y \Longrightarrow X=A^{-1}Y=\left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{rr} 5 & 11/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{rr} 5/2 & 11/4 \\ -1/3 & 1/2 \end{array}\right)$$

1.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.18.2 Se considera la ecuación matricial:

$$AX = A^tB \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) ¿Qué dimensión debe tener la matriz X?

b) Resuelve la ecuación matricial.

Solución:

a) $\underset{3\times 3}{A} \cdot X = \underset{3\times 3}{A^t} \cdot \underset{3\times 1}{B} \Longrightarrow \underset{3\times 3}{A} \cdot X = \underset{3\times 1}{A^tB} \Longrightarrow \underset{3\times 1}{X} \Longrightarrow \dim(X) = 3 \times 1.$

b) $AX = A^tB \Longrightarrow X = A^{-1}A^tB$:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -13 & 8 & -8 \\ 6 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}$$

1.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.18.3 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcular la inversa de la matriz AA^t.

b) ¿Admite inversa la matriz (A^tA)?

c) Calcular, cuando sea posible: AB y A^tB.

Solución:

a) $(AA^t) = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7/3 & -4/3 \\ -4/3 & 5/6 \end{pmatrix}$

b) $A^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{pmatrix}$ y $|A^tA| = 0 \Longrightarrow \nexists\, (A^tA)^{-1}$

c) $\underset{2\times 3}{A} \cdot \underset{2\times 2}{B} \Longrightarrow A$ y B no se pueden multiplicar.

$A^tB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Capítulo 2

Programación Lineal

2.1. Andalucía

2.1.1. Modelo de 2020

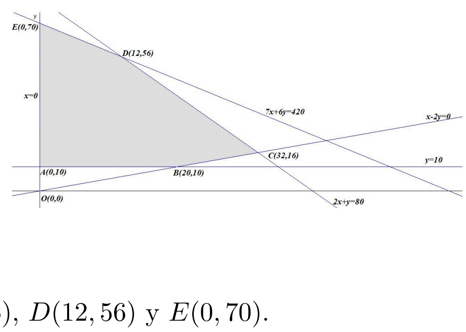
Problema 2.1.1 Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camiseta lisa necesita 70 g de algodón y 20 g de poliéster y para cada camiseta estampada 60 g de algodón y 10 g de poliéster. La empresa dispone para ello de 4200 g de algodón y 800g de poliéster. Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y además, el doble de las estampadas debe ser al menos igual al número de lisas. Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

Solución:
LLamamos x : nº de camisetas lisas e y nº de camisetas estampadas.

	algodón	poliéster	Beneficio
camisetas lisas	70	20	5
camisetas estampadas	60	10	4
	≤ 4200	≥ 800	

a) La región factible es:

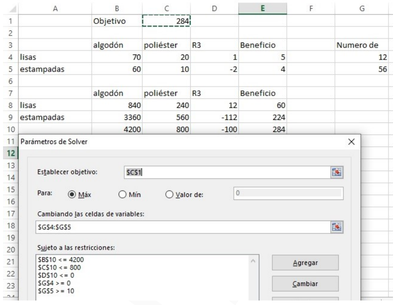
$$\left\{\begin{array}{l} 70x + 60y \leq 4200 \\ 20x + 10y \leq 800 \\ x \leq 2y \\ y \geq 10 \\ x \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 7x + 6y \leq 420 \\ 2x + y \leq 80 \\ x - 2y \leq 0 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0 \end{array}\right.$$



b) Los vértices son: $A(0,10)$, $B(20,10)$, $C(32,16)$, $D(12,56)$ y $E(0,70)$.
La función objetivo es: $f(x,y) = 5x + 4y$

$$\begin{cases} f(0,10) = 40 \\ f(20,10) = 140 \\ f(32,16) = 224 \\ f(12,56) = 284 \text{ Máximo} \\ f(0,70) = 280 \end{cases}$$

Solución por solver:



c) Hay que vender 12 camisetas lisas y 56 estampadas con un beneficio máximo de 284 euros.

2.1.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.1.2 Se pide:

a) Una fábrica de electrodomésticos dispone de dos cadenas de montaje. En una hora de trabajo, la cadena A produce 10 lavadoras y 5 frigoríficos, mientras que la cadena B produce 7 lavadoras y 6 frigoríficos. El coste de cada hora de trabajo en las cadenas A y B es de 1200 y 1500 euros, respectivamente. La cadena A puede funcionar, como máximo, el doble de horas que la cadena B. Si deben producir como mínimo 400 lavadoras y 280 frigoríficos, formule, sin resolver, el problema que permite obtener las horas de funcionamiento de las cadenas A y B para minimizar el coste de producción de esos electrodomésticos.

b) Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices.

$$x + 2y \geq 7 \quad 4x - y \geq 1 \quad 2x - y \leq 4 \quad 3x + 2y \leq 20 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

Obtenga el valor mínimo de la función $F(x, y) = 2x + y$ en el recinto anterior, así como el punto en el que se alcanza.

Solución:

a) LLamamos x : nº de horas que trabaja la cadena A e y nº de horas que trabaja la cadena B.

	lavadoras	frigoríficos	Coste
cadena A	10	5	1200
cadena B	7	6	1500
	≥ 400	≥ 280	

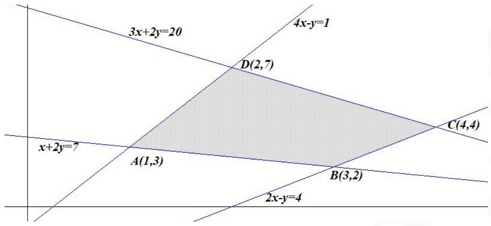
La función objetivo es: $C(x, y) = 1200x + 1500y$, sujeto a:

La región factible es:

$$\begin{cases} 10x + 7y \geq 400 \\ 5x + 6y \geq 280 \\ x \leq 2y \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 10x + 7y \geq 400 \\ 5x + 6y \geq 280 \\ x - 2y \leq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

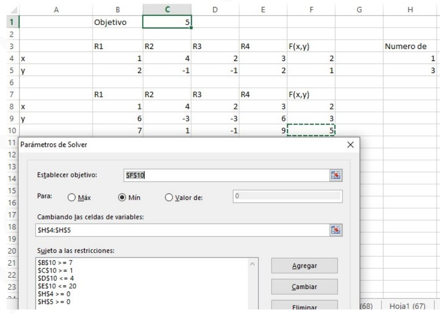
b) La región factible es:

$$\begin{cases} x + 2y \geq 7 \\ 4x - y \geq 1 \\ 2x - y \leq 4 \\ 3x + 2y \leq 20 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(1,3)$, $B(3,2)$, $C(4,4)$ y $D(2,7)$.
La función objetivo es: $F(x,y) = 2x + y$

Solución por solver:



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Objetivo	5					
2								
3		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		Numero de
4	x	1	4	2	3	2		1
5	y	2	-1	-1	2	1		3
6								
7		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		
8	x	1	4	2	3	2		
9	y	6	-3	-3	6	3		
10		7	1	-1	9	5		

$$\begin{cases} f(1,3) = 5 \ \text{Mínimo} \\ f(3,2) = 8 \\ f(4,4) = 12 \\ f(2,7) = 11 \end{cases}$$

El mínimo se obtiene en el punto $A(1,3)$ con un valor de 5.

2.1.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.1.3 Se pide:

a) Represente la región factible definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices.

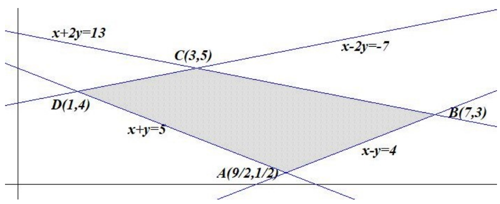
$$x + 2y \leq 13 \quad x - y \leq 4 \quad x - 2y \geq -7 \quad x + y \geq 5$$

b) Calcule los valores máximo y mánimo de la función objetivo $F(x,y) = x + y$ en la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.

Solución:

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 13 \\ x - y \leq 4 \\ x - 2y \geq -7 \\ x + y \geq 5 \end{cases}$$

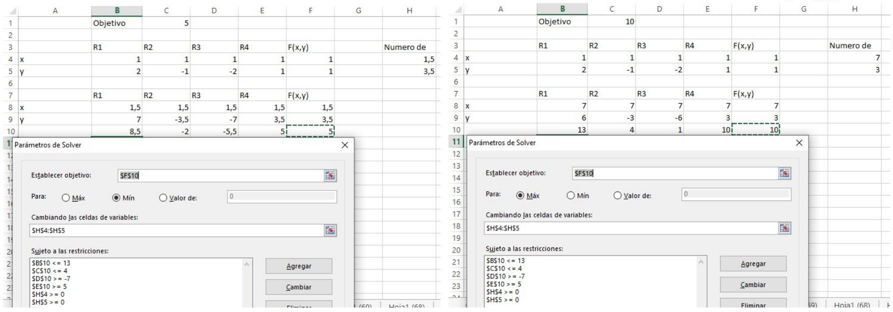


Los vértices son: $A(9/2,1/2)$, $B(7,3)$, $C(3,5)$ y $D(1,4)$.

b) La función objetivo es: $F(x,y) = x + y$

$$\begin{cases} f(9/2,1/2) = 5 \ \text{Mínimo} \\ f(7,3) = 10 \ \text{Máximo} \\ f(3,5) = 8 \\ f(1,4) = 5 \ \text{Mínimo} \end{cases}$$

El máximo se encuentra en el punto $B(7,3)$ con un valor de 10, mientras que el mínimo será cualquier punto del segmento AD con un valor de 5.
Solución por solver:



2.2. Aragón

2.2.1. Modelo de 2020

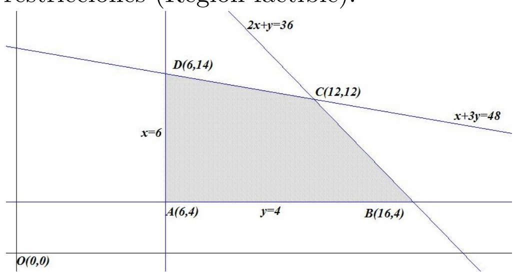
Problema 2.2.1 Un ebanista fabrica sillas y taburetes. Cada silla necesita 4 kilos de madera y 1 hora de trabajo, mientras que cada taburete necesita 2 kilos de madera y 3 horas de trabajo. El beneficio por cada silla es de 70 euros y por cada taburete es de 50 euros. Para la semana que viene quiere fabricar, al menos, 6 sillas y 4 taburetes; dispone, como máximo, de 72 kilos de madera y de 48 horas de trabajo. ¿Cuántas sillas y taburetes deben fabricar para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el valor del beneficio en ese caso?

Solución:
LLamamos x : nº de sillas e y : nº de taburetes.

	Madera	Tiempo	beneficio
Silla	4	1	70
Taburete	2	3	50
	≤ 72	≤ 48	

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = 70x + 50y$ calculando su máximo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S: \begin{cases} 4x + 2y \leq 72 \\ x + 3y \leq 48 \\ x \geq 6 \\ y \geq 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + y \leq 36 \\ x + 3y \leq 48 \\ x \geq 6 \\ y \geq 4 \end{cases}$$



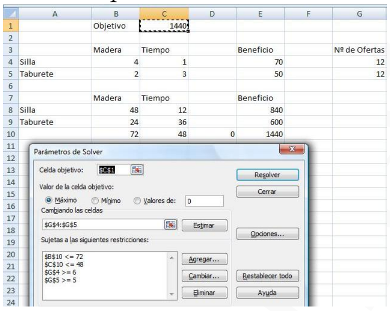
La región S y los vértices a estudiar serán: $A(6,4)$, $B(16,4)$, $C(12,12)$ y $D(6,14)$.

b) Sustituyendo en la función objetivo:

$$\begin{cases} f(6,4) = 620 \\ f(16,4) = 1320 \\ f(12,12) = 1440 \ \text{Máximo} \\ f(6,14) = 1120 \end{cases}$$

El máximo es de 1440 euros y se alcanza cuando se fabrican 12 sillas y 12 taburetes.

Solución por solver:



2.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.2.2 Una modista está organizando su trabajo para el próximo mes. Puede hacer vestidos de fiesta y vestidos de calle. Cada vestido de fiesta necesita 3 metros de tela y lleva 6 horas de trabajo, mientras que cada vestido de calle necesita 1 metro de tela y lleva 4 horas de trabajo. La modista dispone, como máximo, de 36 metros de tela y 120 horas de trabajo, y no quiere hacer más vestidos de fiesta que de calle. Por cada vestido de fiesta, obtiene un beneficio de 100 euros, mientras que por cada vestido de calle obtiene un beneficio de 65 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos vestidos de cada tipo tiene que hacer para maximizar su beneficio. ¿Cuál será el beneficio en ese caso?

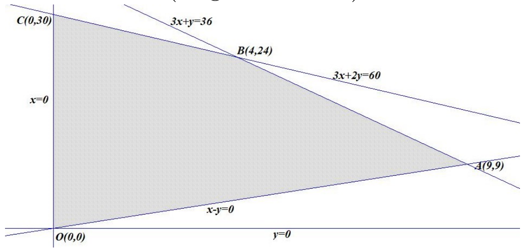
Solución:

LLamamos x : nº de vestidos de fiesta e y : nº de vestidos de trabajo.

	Tela	Tiempo	beneficio
V. Fiesta	3	6	100
V. Calle	1	4	65
	≤ 36	≤ 120	

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = 100x + 65y$ calculando su máximo, sujeto a las restricciones (Región factible):

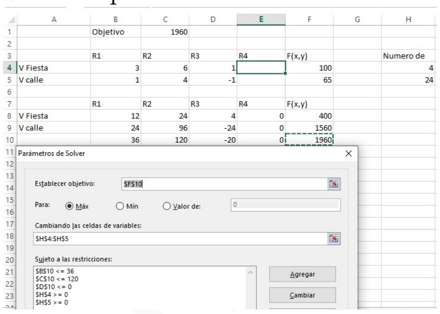
$$S: \begin{cases} 3x + y \leq 36 \\ 6x + 4y \leq 120 \\ x \leq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x + y \leq 36 \\ 3x + 2y \leq 60 \\ x - y \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



La región S y los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(9,9)$, $B(4,24)$ y $C(0,30)$.

b) Sustituyendo en la función objetivo:

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(9,9) = 1485 \\ f(4,24) = 1960 \text{ Máximo} \\ f(0,30) = 1950 \end{cases}$$

El máximo beneficio es de 1960 euros y se alcanza cuando se confeccionan 4 vestidos de fiesta y 24 de calle.

2.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

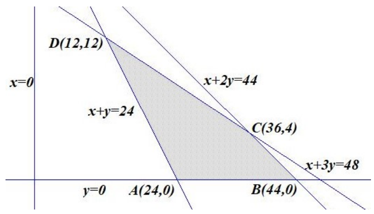
Problema 2.2.3 Un corredor aficionado tiene dos tipos de entrenamiento, el corto y el largo. En cada entrenamiento corto, al que dedica 1 hora, corre 15 km y consume 1200 kilocalorías. En cada entrenamiento largo, al que dedica 3 horas, corre 30 km y consume 2500 kilocalorías. Quiere planificar los entrenamientos del verano de forma que haga al menos 24 entrenamientos, pero no corra más de 660 km ni dedique más de 48 horas, en total. Si su objetivo es maximizar el número total de kilocalorías consumidas, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos entrenamientos de cada tipo tiene que hacer. ¿Cuántas kilocalorías consumirá en ese caso?

Solución:

LLamamos x : nº de entrenamientos cortos e y : nº de entrenamientos largos.

	Tiempo	Kms	Consumo
E. cortos	1	15	1200
E. largos	3	30	2500
	≤ 48	≤ 660	

$$f(x,y) = 1200x + 2500y$$

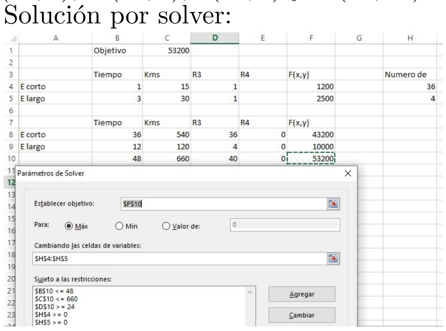


sujeto a

$$\begin{cases} x + y \geq 24 \\ x + 3y \leq 48 \\ 15x + 30y \leq 660 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \geq 24 \\ x + 3y \leq 48 \\ x + 2y \leq 44 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible estaría delimitada por los vértices: $A(24,0)$, $B(44,0)$,$C(36,4)$ y $D(12,12)$.

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(24,0) = 28800 \\ f(44,0) = 52800 \\ f(36,4) = 53200 \text{ Máximo} \\ f(12,12) = 44400 \end{cases}$$

Se debe de hacer 36 entrenamientos cortos y 4 largos con un consumo máximo de 53200 kilocalorías.

2.3. Asturias

2.3.1. Modelo de 2020

Problema 2.3.1 Para que una encuesta sobre política de inmigración sea fiable, se exige que haya al menos 2300 personas entrevistadas, entre españoles y extranjeros, de las cuales como mucho 1000 serán extranjeros, y también se exige que los extranjeros sean, por lo menos, un 10 % del total de personas entrevistadas.

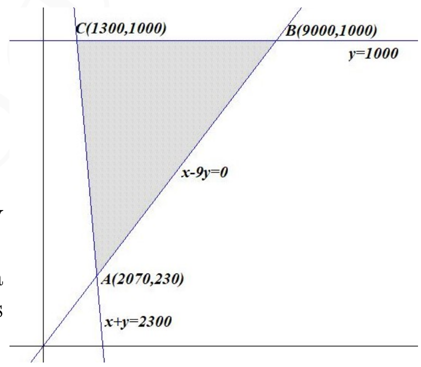
a) ¿Cuántos españoles y cuántos extranjeros pueden ser entrevistados? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían ser entrevistados 1000 españoles?

b) Si el coste estimado de cada entrevista es de 6 euros, ¿cuál sería el máximo coste que podría tener la encuesta? ¿a cuántos españoles se habría entrevistado en dicho caso?

Solución:
Llamamos x : nº de españoles entrevistados e y : nº de extranjeros entrevistados.

a) La región factible es:

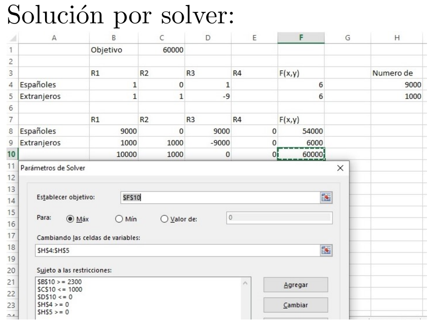
$$\begin{cases} x + y \geq 2300 \\ y \leq 1000 \\ y \geq 0,1(x+y) \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \geq 2300 \\ y \leq 1000 \\ x - 9y \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(2070, 230)$, $B(9000, 1000)$ y $C(1300, 1000)$.
Cualquier punto de abscisa inferior a 1300 estaría fuera de la región factible y por tanto no cumpliría todas las condiciones impuestas en el problema.

b) $f(x, y) = 6x + 6y$

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(2070, 230) = 13800 \\ f(9000, 1000) = 60000 \ \text{Mínimo} \\ f(1300, 1000) = 13800 \end{cases}$$

El máximo coste sería de 60000 € lo que se produciría si se encuestan a 9000 españoles y 1000 extranjeros.

2.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.3.2 En un local que se destinará a restaurante, se está pensando en poner mesas altas y bajas. Las mesas altas necesitan una superficie de 2 m^2 cada una, mientras que las mesas bajas necesitan una superficie de 4 m^2 cada una. El local dedicará a mesas como mucho una superficie de 120 m^2. El propietario quiere que haya al menos 5 mesas bajas y como mucho el doble de mesas altas que bajas.

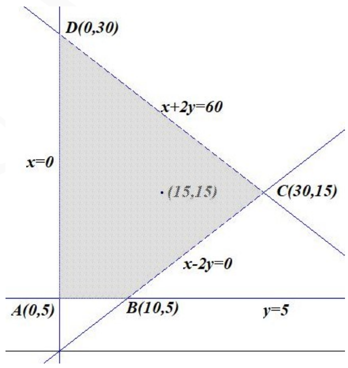
a) ¿Cuántas mesas puede haber en el restaurante de cada tipo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrá haber 15 mesas de cada tipo?

b) Por estudios de mercado, se estima que el beneficio que dejan los clientes por mesa alta es de 20 euros, mientras que el beneficio por mesa baja es de 25 euros. ¿Cuántas mesas de cada tipo debe colocar para maximizar los beneficios estimados? ¿a cuánto ascenderían dichos beneficios?

Solución:
LLamamos x : nº de mesas altas e y : nº de mesas bajas.

a) La región factible es:

$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 120 \\ x \leq 2y \\ y \geq 5 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y \leq 60 \\ x - 2y \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 5 \end{cases}$$



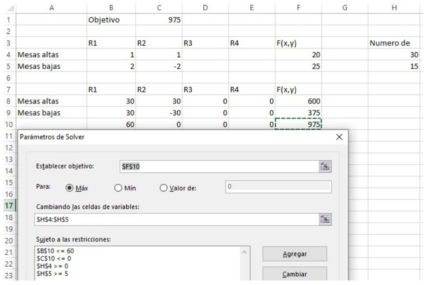
Los vértices son: $A(0,5)$, $B(10,5)$, $C(30,15)$ y $D(0,30)$. El punto $(15,15)$ está dentro de la región factible y, por tanto, es una posible solución a estas restricciones aunque no sea la óptima.

b) $f(x,y) = 20x + 25y$

$$\begin{cases} f(0,5) = 125 \\ f(10,5) = 325 \\ f(30,15) = 975 \ \text{Máximo} \\ f(0,30) = 750 \end{cases}$$

El beneficio es máximo si se colocan 30 mesas altas y 15 mesas bajas con un total de 975 €.

Solución por solver:



2.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.3.3 Una empresa puede contratar trabajadores de tipo A y trabajadores de tipo B en una nueva factoría. Por convenio, es necesario que haya mayor o igual número de trabajadores de tipo A que de tipo B y que el número de trabajadores de tipo A no supere al doble del número de trabajadores de tipo B. En total la empresa puede contratar un máximo de 30 trabajadores de tipo A y de 40 de tipo B.

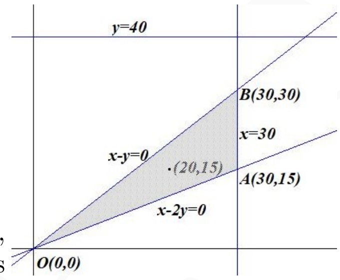
a) ¿Cuántos trabajadores de cada tipo se pueden contratar en la empresa, de forma que se satisfagan todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría contratarse a 20 trabajadores de tipo A y 15 de tipo B?

b) Si el beneficio diario esperado para la empresa por cada trabajador de tipo A es de 240 euros y por cada trabajador de tipo B es de 200 euros, ¿cuántos trabajadores de cada tipo se deben contratar para maximizar el beneficio diario? ¿a cuánto asciende dicho beneficio máximo?

Solución:
Llamamos x : nº de trabajadores de tipo A e y : nº de trabajadores de tipo B.

a) La región factible es:

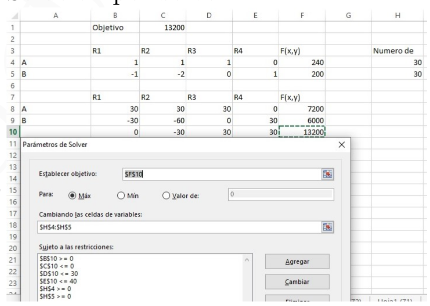
$$\begin{cases} x \geq y \\ x \leq 2y \\ x \leq 30 \\ y \leq 40 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - y \geq 0 \\ x - 2y \leq 0 \\ x \leq 30 \\ y \leq 40 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $O(0,0)$, $A(30,15)$ y $B(30,30)$.
El punto $(20,15)$ está dentro de la región factible y, por tanto, es una posible solución a estas restricciones aunque no sea la óptima.

b) $f(x,y) = 240x + 200y$

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(30,15) = 10200 \\ f(30,30) = 13200 \text{ Máximo} \end{cases}$$

Hay que contratar 30 trabajadores de cada tipo para obtener un beneficio máximo de 13200 €.

2.4. Cantabria

2.4.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.4.1 Una empresa del sector alimentario lanza al mercado dos nuevas bebidas, A y B, compuestas de zumos de frutas combinados. La composición de cada litro de bebida es la siguiente:

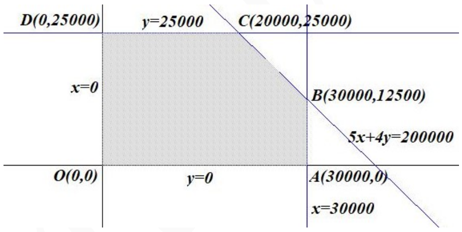
	Zumo de piña	zumo de mango	zumodepapaya
A	$0,5$	$0,5$	
B	$0,4$		$0,6$

El precio de venta fijado es de 1,5 euros por litro de A y de 1,75 euros por litro de B.
Semanalmente se cuenta con 20 000 litros de zumo de piña, con 15 000 de zumo de mango y con 15 000 de zumo de papaya.
Determinar los litros que deben producirse semanalmente de cada bebida para obtener unos ingresos semanales máximos. ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?
Solución:
Llamamos x : nº de bebidas A e y : nº de bebidas B.

	Zumo de piña	zumo de mango	zumodepapaya	venta
A	$0,5$	$0,5$	0	$1,5$
B	$0,4$	0	$0,6$	$1,75$
	≤ 20000	≤ 15000	≤ 15000	

La región factible es:

$$\begin{cases} 0,5x + 0,4y \leq 20000 \\ 0,5x \leq 15000 \\ 0,6y \leq 15000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5x + 4y \leq 200000 \\ x \leq 30000 \\ y \leq 25000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



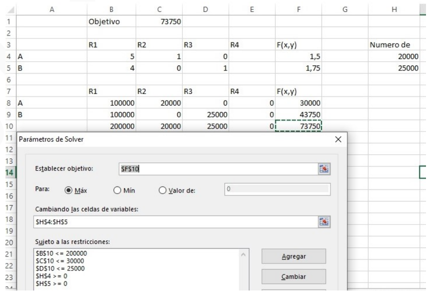
Los vértices son: $O(0,0), A(30000,0)$, $B(30000,12500)$, $C(20000,25000)$ y $D(0,25000)$.

$f(x,y) = 1,5x + 1,75y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(30000,0) = 45000 \\ f(30000,12500) = 66875 \\ f(20000,25000) = 73750 \text{ Máximo} \\ f(0,25000) = 43750 \end{cases}$$

Habría que producir 20000 litros de la bebida A y 25000 de la B con unos ingresos máximos de 73750 €.

Solución por solver:

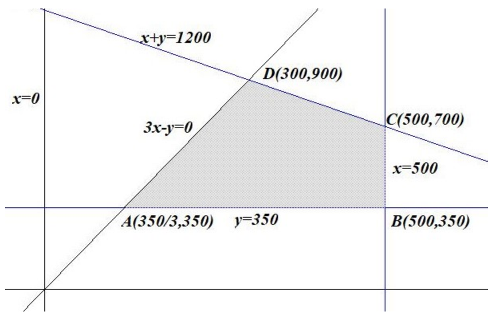


2.4.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.4.2 Un inversor quiere comprar acciones de dos clases, A y B. La suma total de acciones adquiridas será como máximo de 1200. Cada acción del tipo A le reportará un beneficio de 0,2 euros y cada acción del B, uno de 0,08 euros. Tiene claro que no comprará más de 500 acciones del tipo A. Pero sí está dispuesto a adquirir como mínimo 350 del B. Además, no quiere que el número de acciones B adquiridas sea mayor del triple de acciones A. ¿Cuántas acciones debe comprar de cada tipo para obtener los máximos beneficios? ¿A cuánto ascienden dichos beneficios?

Solución:
Llamamos x : nº de acciones de A e y : nº de acciones de B.
La región factible es:

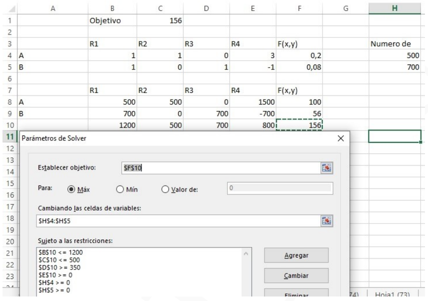
$$\begin{cases} x + y \leq 1200 \\ x \leq 500 \\ y \geq 350 \\ y \leq 3x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \leq 1200 \\ x \leq 500 \\ y \geq 350 \\ 3x - y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A\left(\dfrac{350}{3}, 350\right)$, $B(500,350)$, $C(500,700)$ y $D(300,900)$.

$f(x,y) = 0,2x + 0,08y$

Solución por solver:



$$\begin{cases} f\left(\dfrac{350}{3}, 350\right) = \dfrac{154}{3} \\ f(500, 350) = 128 \\ f(500, 700) = 156 \ \text{Máximo} \\ fD(300, 900) = 132 \end{cases}$$

Se deben comprar 500 acciones tipo A y 700 de B con unos beneficios máximos de 156 €.

2.5. Castilla La Mancha

2.5.1. Modelo de 2020

Problema 2.5.1 En un taller se confeccionan prendas vaqueras con dos tipos de tejidos de distinta calidad (T_1, T_2). Disponen de 160 m^2 del tejido T_1 y 240 m^2 del tejido T_2. Hacen dos conjuntos: Uno con chaqueta y falda y otro con cazadora y pantalón. El primero utiliza 2 m^2 de T_1 y 2 m^2 de T_2, el conjunto del pantalón utiliza 1 m^2 de T_1 y 3 m^2 de T_2. El conjunto con falda cuesta 250 euros y el del pantalón 350 euros.

a) Expresa la función objetivo.

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

c) Calcula el número de conjuntos de cada tipo que deben hacer para obtener máximas ganancias.

Solución:

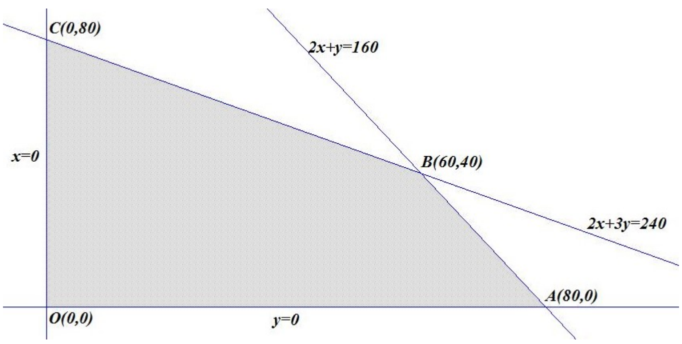
Llamamos x : nº de chaquetas con falda e y : nº de cazadoras con pantalón.

	T_1	T_2	Venta
Chaquetas	2	2	250
Cazadoras	1	3	350
	≤ 160	≤ 240	

a) La función objetivo es: $f(x, y) = 250x + 350y$

b) La región factible es:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 160 \\ 2x + 3y \leq 240 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

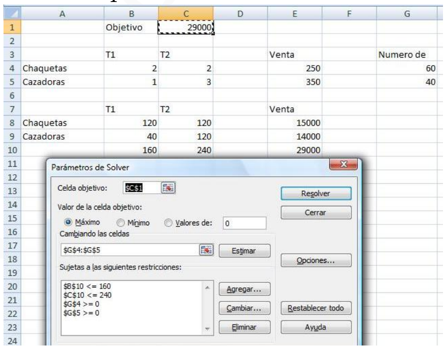


c) Los vértices son: $A(80,0)$, $B(60,40)$ y $C(0,80)$.

$$\begin{cases} f(80,0) = 20000 \\ f(60,40) = 29000 \text{ Máximo} \\ f(0,80) = 28000 \end{cases}$$

De chaquetas con faldas tiene que vender 60 y 40 de cazadoras con pantalón con un valor máximo de 29000€.

Solución por solver:



2.5.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.5.2 En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,y) = 6x - 2y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$x + y \geq 2; \;\; x - y \leq 2; \;\; y \leq 1; \;\; x \geq 0$$

a) Dibuja la región factible.

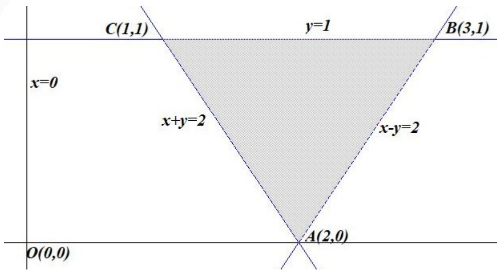
b) Determina los vértices de la región factible.

c) Indica el máximo y el mínimo y sus respectivos valores.

Solución:

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x - y \leq 2 \\ y \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

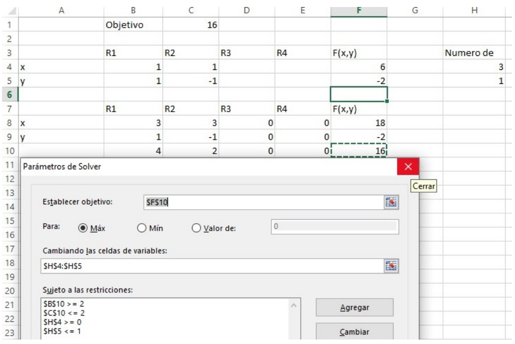
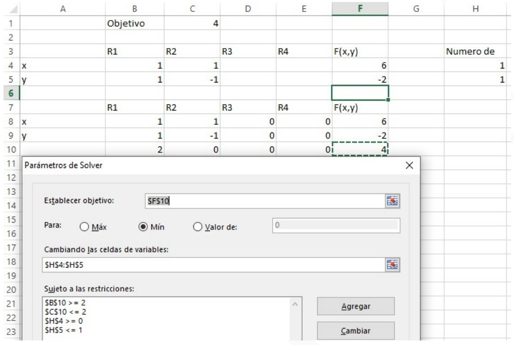


b) Los vértices son: $A(2,0)$, $B(3,1)$ y $C(1,1)$.

c) $f(x,y) = 6x - 2y$

$$\begin{cases} f(2,0) = 12 \\ f(3,1) = 16 \text{ Máximo} \\ f(1,1) = 4 \text{ Mínimo} \end{cases}$$

El máximo se encuentra en el punto $B(3,1)$ con un valor de 16 unidades. El mínimo se encuentra en el punto $C(1,1)$ con un valor de 4 unidades.
Solución por solver:

2.5.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.5.3 Un supermercado tiene almacenados 100 botes de alubias y 150 botes de garbanzos. Para su venta organiza dichos productos en dos lotes, A y B. La venta de un lote A, que contiene 1 bote de alubias y 3 botes de garbanzos, produce un beneficio de 3 €. La venta de un lote B, que contiene 2 botes de alubias y uno de garbanzos, produce un beneficio de 2 €. Además, desea vender al menos 10 lotes tipo A y al menos 15 lotes del tipo B. Utilizando técnicas de programación lineal, calcular cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar el beneficio. ¿A cuánto asciende ese beneficio máximo?

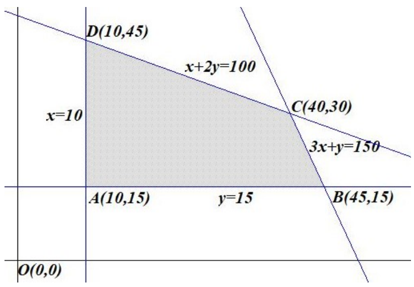
Solución:
Llamamos x : nº de lotes A e y : nº de lotes A.

	Alubias	Garbanzos	Beneficio
A	1	3	3
B	2	1	2
	≤ 100	≤ 150	

a) La función objetivo es: $f(x, y) = 3x + 2y$

b) La región factible es:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 100 \\ 3x + y \leq 150 \\ x \geq 10 \\ y \geq 15 \end{cases}$$

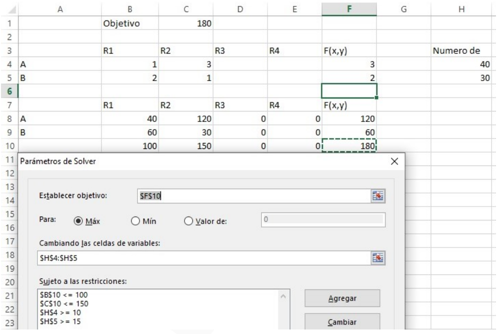


c) Los vértices son: $A(10, 15)$, $B(45, 15)$, $C(40, 30)$ y $D(10, 45)$.

$$\begin{cases} f(10,15) = 60 \\ f(45,15) = 165 \\ f(40,30) = 180 \ \text{Máximo} \\ f(10,45) = 120 \end{cases}$$

Hay que vender 40 lotes A y 30 del B con un beneficio máximo de 180 €.

Solución por solver:



2.6. Castilla León

2.6.1. Modelo de 2020

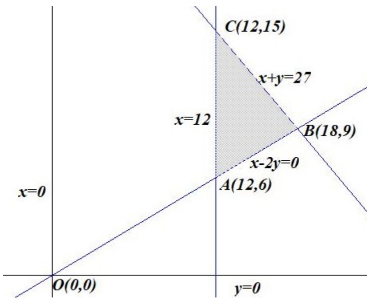
Problema 2.6.1 Una ONG organiza un convoy de ayuda humanitaria con un máximo de 27 camiones para llevar agua potable y medicinas a una zona devastada por unas inundaciones. Para agua potable dedica un mínimo de 12 camiones y para medicinas debe dedicar un número de camiones mayor o igual que la mitad del número de camiones dedicados a llevar agua. Enviar un camión con agua potable tiene un coste de 9000 €, mientras que el coste para un camión de medicinas es de 6000 €. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cómo debe organizarse el convoy para que su coste sea mínimo ¿Cuánto es el coste de la solución óptima?

Solución: Llamamos x : nº de camiones con agua e y : nº de camiones con medicinas.

a) La región factible es:

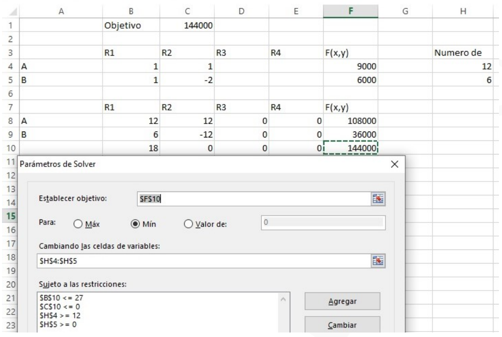
$$\begin{cases} x + y \leq 27 \\ x \geq 12 \\ y \geq \frac{x}{2} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \leq 27 \\ x - 2y \leq 0 \\ x \geq 12 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices son: $A(12,6)$, $B(18,9)$ y $C(12,15)$.



b) $f(x,y) = 9000x + 6000y$

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(12,6) = 144000 \text{ Mínimo} \\ f(18,9) = 216000 \\ f(12,15) = 198000 \end{cases}$$

Se deben mandar 12 camiones con agua y 6 con medicinas con un coste mínimo de 144000 €.

2.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.6.2 Una Una empresa utiliza 4 horas de trabajo de electrónica y 2 horas de trabajo de montaje por cada televisor LED que fabrica, y 3 horas de trabajo de electrónica y 1 hora de trabajo de montaje por cada televisor QLED. La empresa dispone de un máximo de 2400 horas de trabajo de electrónica y un máximo de 1000 horas de trabajo de montaje. Para satisfacer la demanda, la empresa debe fabricar al menos 200 televisores QLED. El beneficio obtenido en cada televisor LED es de 70 € y en cada televisor QLED es de 50 €.
Utilizar técnicas de programación lineal para determinar el número de televisores de cada tipo que la empresa debe fabricar para que el beneficio sea máximo, así como ese beneficio máximo.

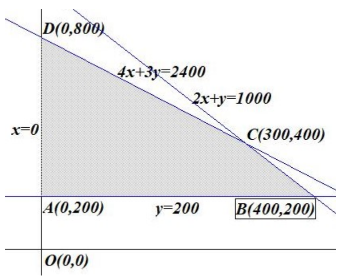
Solución: Llamamos x : nº de televisores LED e y : nº de televisores QLED.

	Horas Electrónica	Horas Montaje	Beneficio
LED	4	2	70
QLED	3	1	50
	≤ 2400	≤ 1000	

a) La región factible es:

$$\begin{cases} 4x + 3y \leq 2400 \\ 2x + y \leq 1000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 200 \end{cases}$$

Los vértices son: $A(0,200)$, $B(400,200)$, $C(300,400)$ y $D(0,800)$.

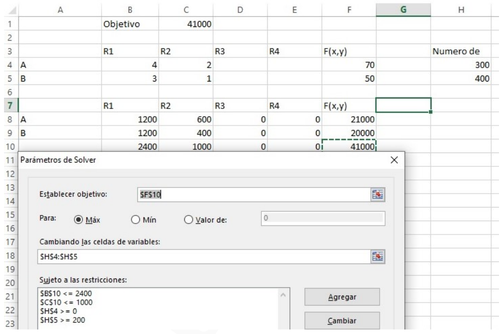


b) $f(x,y) = 70x + 50y$

$$\begin{cases} f(0,200) = 10000 \\ f(400,200) = 38000 \\ f(300,400) = 41000 \text{ Máximo} \\ f(0,800) = 40000 \end{cases}$$

Se deben fabricar 300 televisiones LED y 400 con QLED con un beneficio máximo de 41000 €.

Solución por solver:



2.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.6.3 Un supermercado tiene almacenados 100 botes de alubias y 150 botes de garbanzos. Para su venta organiza dichos productos en dos lotes, A y B. La venta de un lote A, que contiene 1 bote de alubias y 3 botes de garbanzos, produce un beneficio de 3 €. La venta de un lote B, que contiene 2 botes de alubias y uno de garbanzos, produce un beneficio de 2 €. Además, desea vender al menos 10 lotes tipo A y al menos 15 lotes del tipo B. Utilizando técnicas de programación lineal, calcular cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar el beneficio. ¿A cuánto asciende ese beneficio máximo?

Solución:

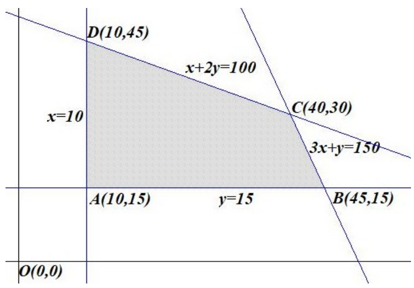
Llamamos x : nº de lotes A e y : nº de lotes A.

	Alubias	Garbanzos	Beneficio
A	1	3	3
B	2	1	2
	≤ 100	≤ 150	

a) La función objetivo es: $f(x,y) = 3x + 2y$

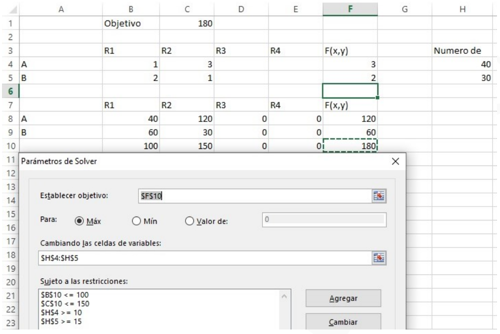
b) La región factible es:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 100 \\ 3x + y \leq 150 \\ x \geq 10 \\ y \geq 15 \end{cases}$$



c) Los vértices son: $A(10,15)$, $B(45,15)$, $C(40,30)$ y $D(10,45)$.

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(10,15) = 60 \\ f(45,15) = 165 \\ f(40,30) = 180 \text{ Máximo} \\ f(10,45) = 120 \end{cases}$$

Hay que vender 40 lotes A y 30 del B con un beneficio máximo de 180 €.

2.7. Cataluña

2.7.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.7.1 Un fabricante de muebles de jardín fabrica sillas y mesas de madera de exterior. Cada silla le aporta un beneficio de 20 € y cada mesa uno de 25 €. Sabemos que cada mes puede producir como máximo un total de 120 muebles entre los dos productos. También sabemos que, como máximo, puede fabricar 100 sillas y que debe fabricar un mínimo de 10 mesas. Por otra parte, el número de sillas fabricadas debe ser igual o superior al triple de mesas fabricadas.

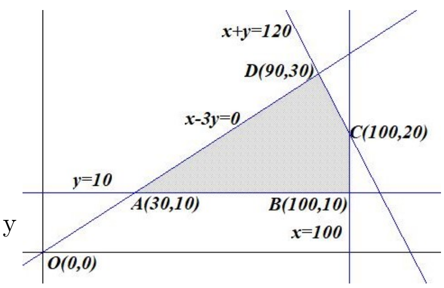
a) Determinar la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible.

b) ¿Cuál es la producción mensual que le aporta el máximo beneficio una vez vendida? ¿Cuál es este beneficio?

Solución:
Llamamos x : nº de sillas e y : nº de mesas.

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x + y \le 120 \\ x \ge 3y \\ x \le 100 \\ x \ge 0 \\ y \ge 10 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \le 120 \\ x - 3y \ge 0 \\ x \le 100 \\ x \ge 0 \\ y \ge 10 \end{cases}$$



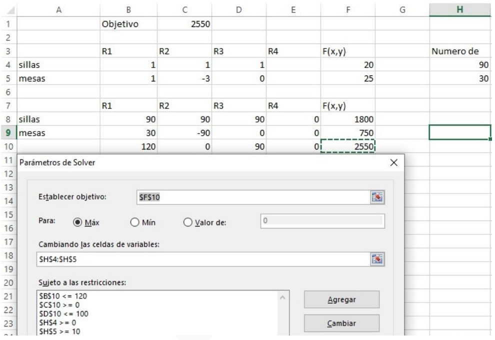
Los vértices son: $A(30,10)$, $B(100,10)$, $C(100,20)$ y $D(90,30)$.

b) $f(x,y) = 20x + 25y$

$$\begin{cases} f(30,10) = 850 \\ f(100,10) = 2250 \\ f(100,20) = 2500 \ \text{Máximo} \\ f(90,30) = 2550 \end{cases}$$

Se deben fabricar 100 sillas y 30 mesas con un beneficio máximo de 7000 €.

Solución por solver:



2.7.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.7.2 Una conocida marca fabrica dos versiones de una misma fragancia: el perfume, que es más concentrado y que se vende en botellas pequeñas cuestan 70 €, y la colonia, que es más diluida y se vende en botellas más grandes a 82 €. En la fabricación hay que mezclar dos ingredientes: el ingrediente A (que contiene el aroma concentrado) y el ingrediente B (que contiene alcohol y otros sustancias). En estos momentos el fabricante dispone de 5.000 ml del ingrediente A y de 30.000 ml del ingrediente B. Para fabricar una botella de perfume se necesitan 10 ml del ingrediente A y 40 ml del ingrediente B, y para fabricar una de colonia se necesitan 10 ml del ingrediente A y 90 ml de el ingrediente B. Los pedidos actuales obligan a fabricar al menos 120 unidades de perfume y 70 unidades de colonia.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible.

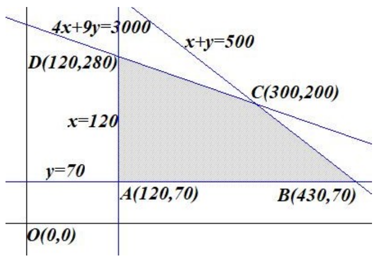
b) Cuántas unidades hay que producir de cada versión para obtener, una vez vendidas, unos ingresos máximos? ¿Cuáles son estos ingresos?

Solución:
Llamamos x : número de botellas de perfume e y : número de botellas de colonia.

	A	B	Venta
Perfume	10	40	70
Colonia	10	90	82
	≤ 5000	≤ 30000	

a) La región factible es:

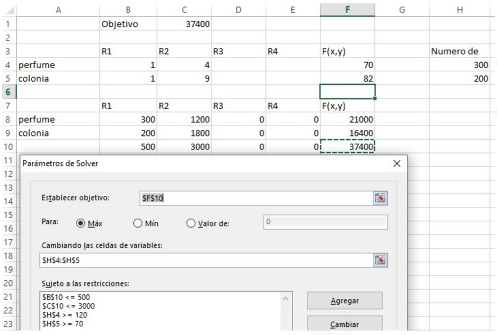
$$\begin{cases} 10x + 10y \leq 5000 \\ 40x + 90y \leq 30000 \\ y \geq 70 \\ x \geq 120 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \leq 500 \\ 4x + 9y \leq 3000 \\ y \geq 70 \\ x \geq 120 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(120,70)$, $B(430,70)$, $C(300,200)$ y $D(120,280)$.

b) La función objetivo es: $f(x,y) = 70x + 82y$

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(120,70) = 14140 \\ f(430,70) = 35840 \\ f(300,200) = 37400 \ \text{Máximo} \\ f(120,280) = 31360 \end{cases}$$

El máximo es de 37400 € y se encuentra vendiendo 300 botellas de perfume y 200 de colonia.

2.8. Comunidad valenciana

2.8.1. Modelo de 2020

Problema 2.8.1 Un inversor dispone de 9000 € y quiere invertir en dos tipos de productos financieros: A y B. La inversión en el producto A debe superar los 5000 € y, además, esta debe ser el doble, al menos, que la inversión en el producto B. Se sabe que la rentabilidad del producto A es del 2,7 % y la del producto B del 6,3 %.

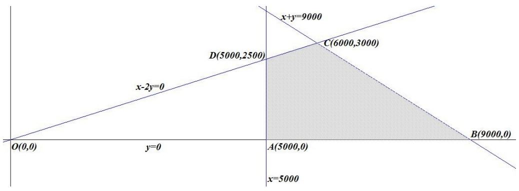
a) ¿Cuánto ha de invertir en cada producto para que la rentabilidad sea máxima?

b) ¿Cuál es esa rentabilidad máxima?

Solución:
Llamamos x : cantidad invertida en A e y : cantidad invertida en B.

a) La región factible es:

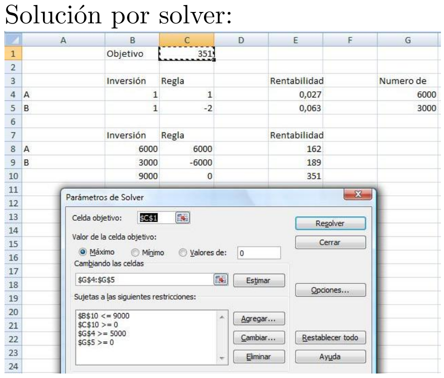
$$\begin{cases} x + y \le 9000 \\ x \ge 2y \\ x \ge 5000 \\ y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \le 9000 \\ x - 2y \ge 0 \\ x \ge 5000 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(5000,0)$, $B(9000,0)$, $C(6000,3000)$ y $D(5000,2500)$.

La función objetivo es: $f(x,y) = 0,027x + 0,063y$

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(5000,0) = 135 \\ f(9000,0) = 243 \\ f(6000,3000) = 351 \ \text{Máximo} \\ f(5000,2500) = 292,5 \end{cases}$$

b) El máximo se encuentra invirtiendo 6000 € en A y 3000 € en B con una rentabilidad de 351 €.

2.8.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.8.2 Para fertilizar una parcela de cultivo se utilizan dos tipos de fertilizantes, A y B. El cultivo de la parcela necesita un mínimo de 120 kilos de nitrógeno y 110 kilos de fósforo. El fertilizante A contiene un 25 % de nitrógeno y un 15 % de fósforo, siendo su precio de 1,2 € el kilo, mientras que el fertilizante B contiene un 16 % de nitrógeno y un 40 % de fósforo y cuesta 1,6 € el kilo.

a) ¿Qué cantidad se necesita de cada tipo de fertilizante para que el coste de la fertilización resulte mínimo?

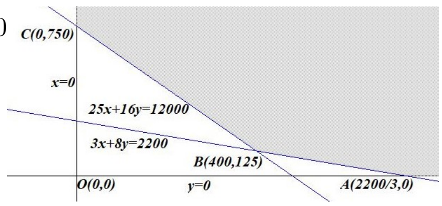
b) ¿Cuál es este coste mínimo?

Solución:
Llamamos x : número de kg del fertilizante A e y : número de kg del fertilizante A.

	N	P	Precio
A	$0,25$	$0,15$	$1,2$
B	$0,16$	$0,40$	$1,6$
	≥ 120	≥ 110	

a) La región factible es:

$$\begin{cases} 0,25x + 0,16y \geq 120 \\ 0,15x + 0,40y \geq 110 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 25x + 16y \leq 1200 \\ 3x + 8y \leq 2200 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A\left(\frac{2200}{3}, 0\right)$, $B(400, 125)$ y $C(0, 750)$.

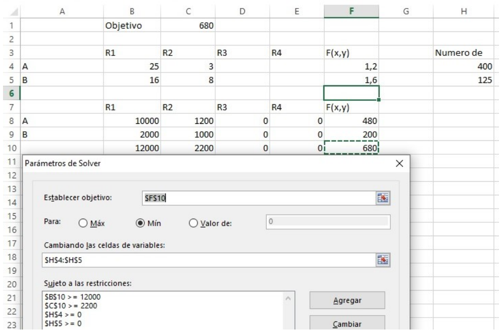
En el siguiente apartado se hacen las conclusiones.

b) La función objetivo es: $f(x, y) = 1,2x + 1,6y$

$$\begin{cases} f\left(\frac{2200}{3}, 0\right) = 880 \\ f(400, 125) = 680 \text{ Mínimo} \\ f(0, 750) = 1200 \end{cases}$$

El coste mínimo es de 680 € y se encuentra comprando 400 kg de fertilizante A y 125 kg del B.

Solución por solver:



2.8.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

No hubo problemas de este tipo en el examen de la PAU.

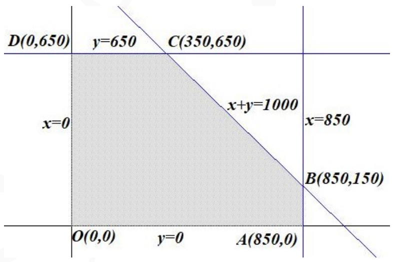
2.9. Extremadura

2.9.1. Modelo de 2020

Problema 2.9.1 Un taller de confección textil produce dos categorías de trajes: de señora y de caballero. Dispone de material para fabricar diariamente 850 trajes de señora y 650 de trajes de caballero. Si tiene que fabricar diariamente como máximo 1000 unidades totales y el beneficio obtenido por cada traje de señora es de 150 euros y de 200 euros por traje de caballero, ¿cuántos trajes de cada tipo han de fabricarse diariamente para hacer máximos los beneficios? ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? Justificar las respuestas.
Solución:
Llamamos x : número de trajes de señora e y : número de trajes de caballero.

La región factible es:

$$\begin{cases} x + y \leq 1000 \\ x \leq 850 \\ y \leq 650 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



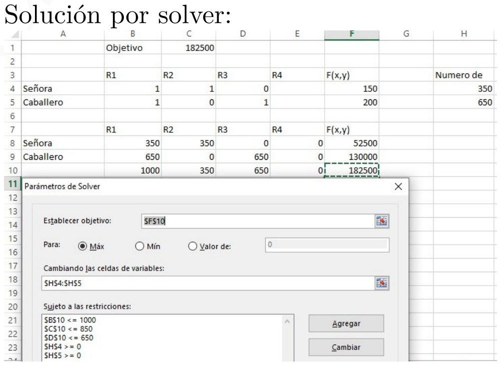
Los vértices son: $O(0,0)$, $A(850,0)$, $B(850,150)$, $C(350,650)$, $D(0,650)$.

La función objetivo es: $f(x,y) = 150x + 200y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(850,0) = 127500 \\ f(850,150) = 157500 \\ f(350,650) = 182500 \text{ Máximo} \\ f(0,650) = 130000 \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 182500 € y se encuentra confeccionando 350 trajes de señora y 650 de caballero.

Solución por solver:

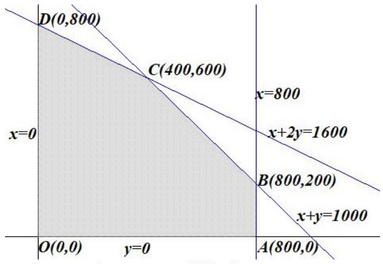


Problema 2.9.2 Con el fin de incentivar sus ventas, un vivero de árboles frutales ofrece dos tipos de lotes: el lote A formado por 1 limonero, 1 naranjo y 1 manzano y el lote B por 2 limoneros y 1 manzano. Cada lote A le produce un beneficio de 30 euros y cada lote B 40 euros. Sabiendo que tiene a la venta como máximo 1600 limoneros, 800 naranjos y 1000 manzanos, determinar la región factible y los posibles puntos solución del problema para que se obtengan los máximos beneficios. Justificar la respuesta.
Solución:
Llamamos x : número de lotes A e y : número de lotes B.

	limonero	naranjo	manzano	Beneficio
A	1	1	1	30
B	2	0	1	40
	≤ 1600	≤ 800	≤ 1000	

La región factible es:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 1600 \\ x \leq 800 \\ x + y \leq 1000 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



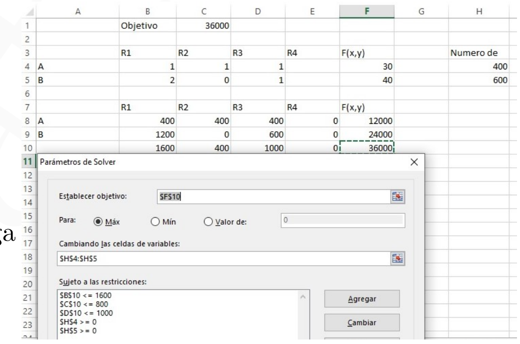
Los vértices son: $O(0,0)$, $A\,(800,0)$, $B(800,200)$, $C(400,600)$, $D(0,800)$.

La función objetivo es: $f(x,y) = 30x + 40y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(800,0) = 24000 \\ f(800,200) = 32000 \\ f(400,600) = 36000 \;\; \text{Máximo} \\ f(0,800) = 32000 \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 36000 € y se llega vendiendo 400 lotes A y 600 lotes B.

Solución por solver:



2.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.9.3 Una factoría de automóviles tiene pedidos de 180 turismos y 140 furgonetas para la próxima temporada. Dispone para ello de dos fábricas A y B. La fábrica A produce diariamente 6 turismos y 2 furgonetas con un coste diario de 30000 euros y la fábrica B 2 turismos y 2 furgonetas con un coste de 20000 euros cada día. ¿Cuántos días debe abrir cada fábrica para producir el pedido de la temporada con el mínimo coste? ¿Cuál es el valor de dicho coste mínimo? Justificar las respuestas.

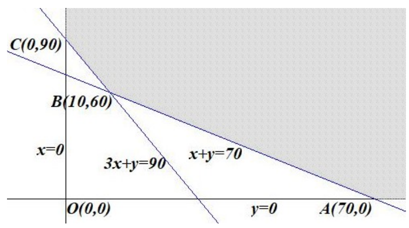
Solución:

Llamamos x : número de automóviles de la fábrica A en un día e y : número de automóviles de la fábrica B en un día.

	Turismos	Furgonetas	Coste
A	6	2	30000
B	2	2	20000
	≥ 180	≥ 140	

La región factible es:

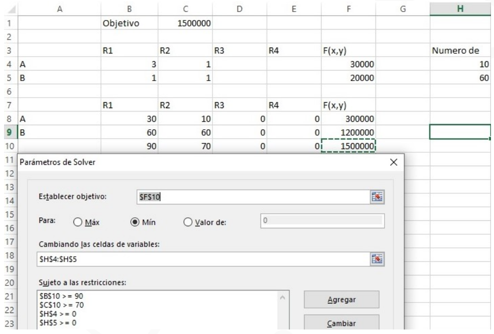
$$\begin{cases} 6x + 2y \geq 180 \\ 2x + 2y \geq 140 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x + y \geq 90 \\ x + y \geq 70 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A\,(70,0)$, $B(10,60)$ y $C(0,90)$.

La función objetivo es: $f(x,y) = 30000x + 20000y$

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(70,0) = 2100000 \\ f(10,60) = 1500000 \;\; \text{Mínimo} \\ f(0,90) = 1800000 \end{cases}$$

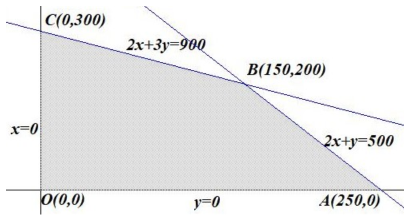
El coste mínimo es de 1500000 € y se llega vendiendo 10 días de trabajo de la fábrica A y 60 de la B.

Problema 2.9.4 Un apicultor hurdano tiene 900 botes de miel y 500 botes de polen con los que elabora dos lotes A y B que pone a la venta. Cada lote A contiene 2 botes de miel y 2 botes de polen con un beneficio de 15 euros y cada lote B 3 botes de miel y 1 bote de polen con un beneficio de 12 euros. ¿Cuántos lotes de cada tipo debe organizar para que el beneficio sea máximo? Halla el valor de dicho beneficio máximo. Justificar las respuestas.
Solución:
Llamamos x : número de lotes A e y : número de lotes B.

	Miel	Polen	Beneficio
A	2	2	15
B	3	1	12
	≤ 900	≤ 500	

La región factible es:

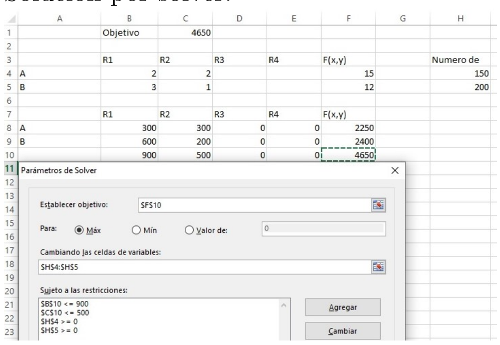
$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 900 \\ 2x + y \leq 500 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A\,(250,0)$, $B(150,200)$ y $C(0,300)$.

La función objetivo es: $f(x,y) = 15x + 12y$

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(250,0) = 3750 \\ f(150,200) = 4650 \;\; \text{Máximo} \\ f(0,300) = 3600 \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 4650 € y se llega vendiendo 150 lotes de A y 200 del B.

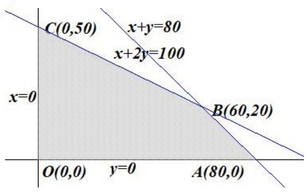
2.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.9.5 Una tienda de productos agrícolas dispone de 300 kg de abono de nitrógeno y de 80 kg de abono de potasio para la fabricación de dos compuesto A y B. Cada envase del compuesto A contiene 3 kg de abono de nitrógeno y 1 kg de abono de potasio y cada envase del compuesto B contiene 6 kg de abono de nitrógeno y 1 kg de abono de potasio. Si el beneficio producido por cada envase del compuesto A es de 100 euros y el del envase del compuesto B de 120 euros, ¿cuántos envases de cada tipo debe fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será dicho beneficio máximo? Justificar las respuestas.
Solución:
Llamamos x : número de envases A e y : número de envases B.

	N	K	Beneficio
A	3	1	100
B	6	1	120
	≤ 300	≤ 80	

La región factible es:

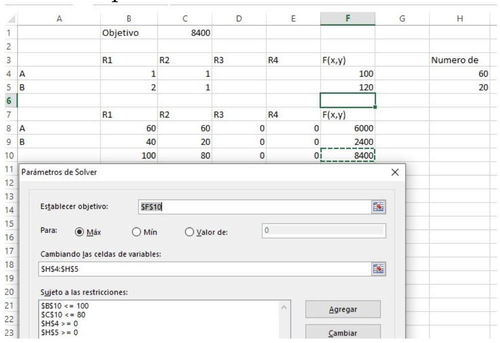
$$\begin{cases} 3x + 6y \leq 300 \\ x + y \leq 80 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y \leq 100 \\ x + y \leq 80 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A\,(80,0)$, $B(60,20)$ y $C(0,50)$.

La función objetivo es: $f(x,y) = 100x + 120y$

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(80,0) = 8000 \\ f(60,20) = 8400 \ \text{Máximo} \\ f(0,50) = 6000 \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 8400 € y se llega vendiendo 60 envases de A y 20 del B.

Problema 2.9.6 Una tienda de artesanía de calzado fabrica zapatos y botas. Cada par de zapatos requiere 1 hora de trabajo y 0,5 m^2 de piel y cada par de botas 1 hora de trabajo y 1 m^2 de piel, siendo el beneficio obtenido de 70 euros por cada par de zapatos y de 80 euros por cada par de botas. Si solo dispone de 50 horas de trabajo y de 35 m^2 de piel. ¿Cuántos pares de zapatos y de botas hay que fabricar para obtener los máximos beneficios? ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? Justificar las respuestas.
Solución:

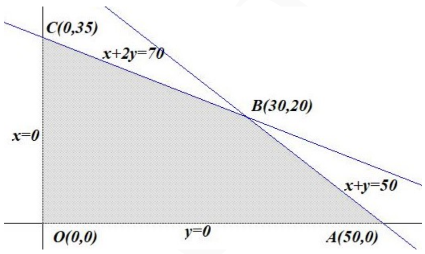
Llamamos x : número de pares de zapatos A e y : número de pares de botas B.

	Horas	m^2	Beneficio
Zapatos	1	$0,5$	70
Botas	1	1	80
	≤ 50	≤ 35	

La región factible es:

$$\begin{cases} x+y\leq 50 \\ 0,5x+y\leq 35 \\ y\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y\leq 50 \\ x+2y\leq 70 \\ y\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases}$$

Los vértices son: $A\,(50,0)$, $B(30,20)$ y $C(0,35)$.

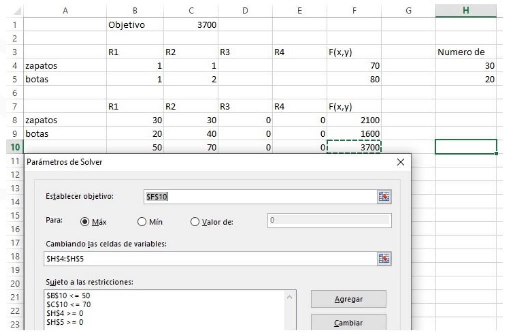


La función objetivo es: $f(x,y)=70x+80y$

$$\begin{cases} f(50,0)=3500 \\ f(30,20)=3700 \;\text{ Máximo} \\ f(0,35)=2800 \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 3700 € y se llega fabricando 30 pares de zapatos y 20 pares de botas.

Solución por solver:



2.10. Galicia

2.10.1. Modelo de 2020

Problema 2.10.1 Una tienda deportiva desea liquidar 2000 camisetas y 1000 chándales de la temporada anterior. Para ello lanza dos ofertas, 1 y 2. La oferta 1 consiste en un lote de una camiseta y un chándal, que se vende a 30 euros; la oferta 2 consiste en un lote de tres camisetas y un chándal, que se vende a 50 euros. No se desea ofrecer menos de 200 lotes de la oferta 1 ni menos de 100 de la oferta 2.

a) Plantea el problema que permite determinar cuántos lotes de cada tipo debe vender para maximizar los ingresos.

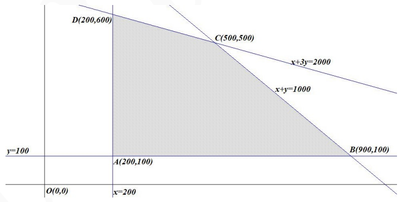
b) Representa la región factible.

c) ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar los ingresos? ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

Solución:
Llamamos x : nº de lotes de la oferta 1 e y : nº de lotes de la oferta 2.

	camisetas	chandal	Venta
$OF1$	1	1	30
$OF2$	3	1	50
	≤ 2000	≤ 1000	

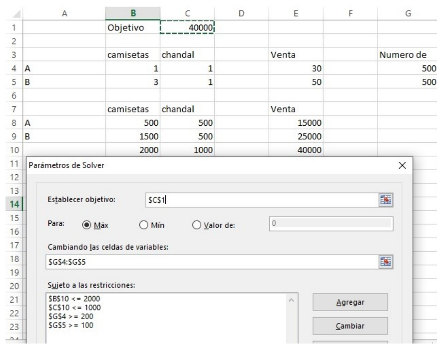
a) La región factible es:



$$\begin{cases} x + 3y \leq 2000 \\ x + y \leq 1000 \\ x \geq 200 \\ y \geq 100 \end{cases}$$

Los vértices son: $A(200, 100)$, $B(900, 100)$, $C(500, 500)$ y $D(200, 600)$.

Solución por solver :



b) La función objetivo es: $f(x, y) = 30x + 50y$

$$\begin{cases} f(200, 100) = 11000 \\ f(900, 100) = 32000 \\ f(500, 500) = 40000 \text{ Máximo} \\ f(200, 600) = 36000 \end{cases}$$

Del lote 1 hay que vender 500 y del lote 2 otros 500 con un valor de venta máximo de 40000 euros.

2.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.10.2 Un fabricante de sistemas de iluminación quiere producir focos de tecnología led en dos modelos distintos: A y B. Para diseñar la estrategia de producción diaria tendrá en cuenta que se producirán al menos 50 focos del modelo A, que el número de focos del modelo B no superará las 300 unidades y que se producirán al menos tantos focos del modelo B como del modelo A. Además, la producción total no superará las 500 unidades diarias.

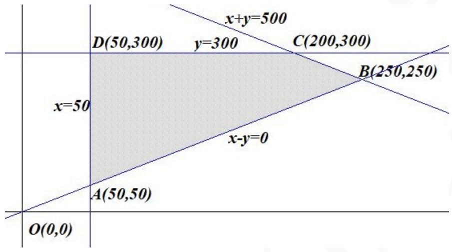
a) Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema.

b) Represente la región factible y calcule sus vértices.

c) Si el beneficio obtenido por cada foco del modelo A es de 60 € y por cada foco del modelo B es de 40 €, ¿cuántos focos de cada modelo debe producir diariamente para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende el beneficio máximo?

Solución:
Llamamos x : número de focos modelo A e y : número de focos modelo B.

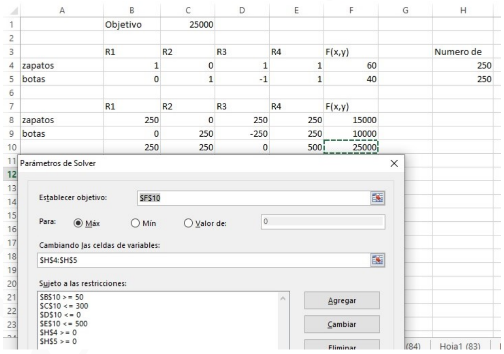
a) La región factible es:



$$\begin{cases} x \geq 50 \\ y \leq 300 \\ y \geq x \\ x + y \leq 500 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geq 50 \\ y \leq 300 \\ x - y \leq 0 \\ x + y \leq 500 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) Los vértices son: $A(50, 50)$, $B(250, 250)$, $C(200, 300)$ y $D(50, 300)$.

Solución por solver :



c) La función objetivo es: $f(x, y) = 60x + 40y$

$$\begin{cases} f(50, 50) = 5000 \\ f(250, 250) = 25000 \text{ Máximo} \\ f(200, 300) = 24000 \\ f(50, 300) = 15000 \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 25000 € y se llega fabricando 250 focos modelo A y 250 focos modelo B.

2.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.10.3 El Comité Organizador de un Congreso cuenta con dos tipos de habitaciones, A y B, para ofrecer como alojamiento a sus participantes. Para realizar la contratación, han decidido que el número de habitaciones de tipo B no debe ser mayor que el número de habitaciones de tipo A, y que el número de habitaciones de tipo A no debe ser mayor que 160. Además, se sabe que en total serán necesarias como máximo 200 habitaciones.

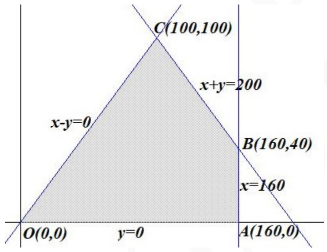
a) Plantee el sistema de inecuaciones asociado a este problema.

b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) Si los costes son de 80 € por cada habitación de tipo A y de 50 € por cada habitación de tipo B, ¿cuál es el coste máximo de alojamiento que afrontaría el Comité Organizador? ¿Cuántas habitaciones de cada tipo habría que contratar para que se diese esa situación?

Solución:
Llamamos x : número de habitaciones tipo A e y : número de habitaciones tipo B.

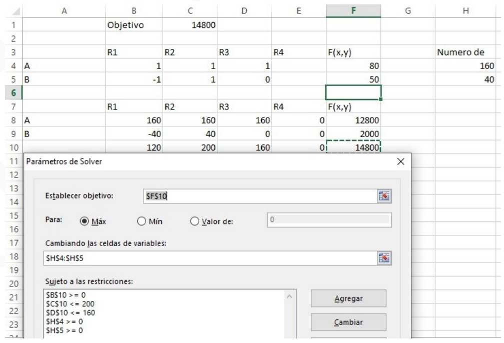
a) La región factible es:



$$\begin{cases} x \geq y \\ x \leq 160 \\ x+y \leq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x-y \geq 0 \\ x+y \leq 200 \\ x \leq 160 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) Los vértices son: $O(0,0)$, $A(160,0)$, $B(160,40)$ y $C(100,100)$.

Solución por solver :



c) La función objetivo es: $f(x,y) = 80x + 50y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(160,0) = 12800 \\ f(160,40) = 14800 \text{ Máximo} \\ f(100,100) = 13000 \end{cases}$$

El coste máximo es de 14800 € y se llega contratando 160 habitaciones tipo A y 40 tipo B.

2.11. Islas Baleares

2.11.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.11.1 Un pastelero dispone de 150 kg de harina, 22 kg de azúcar y 26 kg de mantequilla para hacer dos tipos de pasteles, A y B. Para hacer una hornada de pasteles del tipo A se necesitan 3 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla, mientras que para hacer una hornada de pasteles del tipo B se necesitan 6 kg de harina, 0,5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Se sabe que el beneficio que se obtiene al vender una hornada del tipo A es de 20 € y de 30 € en vender una hornada del tipo B.

a) Plantear la maximización del beneficio del pastelero como un problema de programación lineal.

b) Dibuja la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

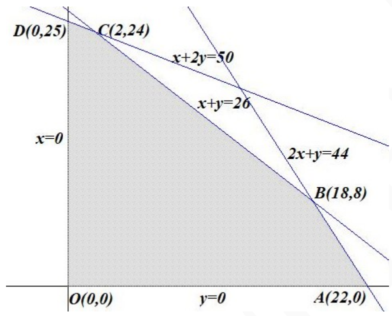
c) Determinar cuántas hornadas de cada tipo tiene que hacer y vender el pastelero para maximizar sus beneficios. Determinar también este beneficio máximo.

Solución:

Llamamos x : nº de pasteles tipo A e y : nº de pasteles tipo B.

	Harina	Azúcar	Mantequilla	Beneficio
A	3	1	1	20
B	6	$0,5$	1	30
	≤ 150	≤ 22	≤ 26	

a) La región factible es:



$$\left\{\begin{array}{l} 3x+6y\leq 150\\ x+0,5y\leq 22\\ x+y\leq 26\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y\leq 50\\ 2x+y\leq 44\\ x+y\leq 26\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{array}\right.$$

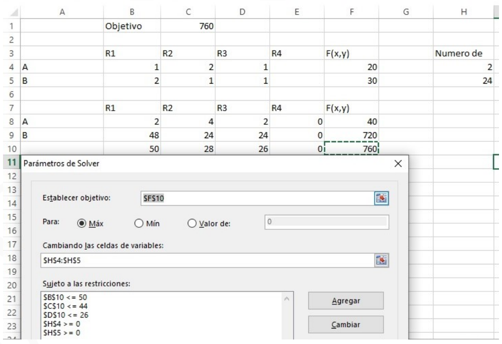
b) Los vértices son: $O(0,0)$, $A(22,0)$, $B(18,8)$, $C(2,24)$ y $D(0,25)$.

c) La función objetivo es: $f(x,y)=20x+30y$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0,0)=0\\ f(22,0)=440\\ f(18,8)=600\\ f(2,24)=760 \text{ Máximo}\\ f(0,25)=750\end{array}\right.$$

El beneficio máximo es de 760 € y se llega horneando 2 pasteles tipo A y 24 del tipo B.

Solución por solver :



2.11.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.11.2 Un taller de joyería dispone de 150 gramos de plata y de 180 horas de trabajo para producir dos modelos de anillos. Para hacer un anillo del modelo A se necesitan 6 gramos de plata y 3 horas de trabajo, mientras que para hacer uno del modelo B se necesitan 2 gramos de plata y 6 horas de trabajo. Los anillos de los modelos A y B proporcionan, respectivamente, 35 y 55 € de beneficio por unidad.

a) Plantear la maximización del beneficio del pastelero como un problema de programación lineal.

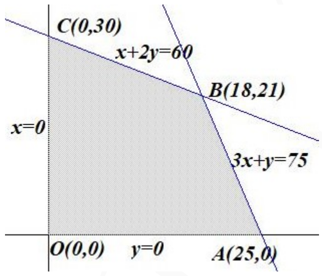
b) Dibuja la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c) Sabiendo que se venderán toda la producción, Determinar cuántos anillos de cada modelo hay que producir para obtener el máximo beneficio y indique cuál es este beneficio.

Solución:
Llamamos x : nº de anillos tipo A e y : nº de anillos tipo B.

	Plata	Horas	Beneficio
A	6	3	35
B	2	6	55
	150	180	

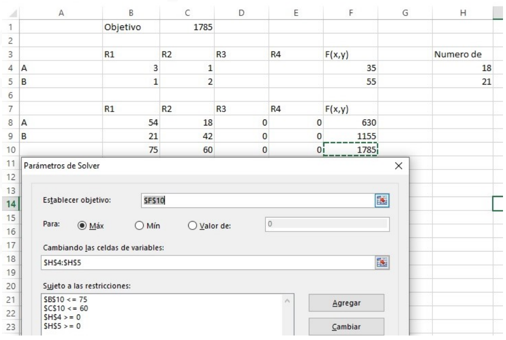
a) La región factible es:



$$\begin{cases} 6x+2y\le 150\\ 3x+6y\le 180\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x+y\le 75\\ x+2y\le 60\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$$

b) Los vértices son: $O(0,0)$, $A(25,0)$, $B(18,21)$ y $C(0,30)$.

Solución por solver :



c) La función objetivo es: $f(x,y) = 35x + 55y$

$$\begin{cases} f(0,0)=0\\ f(25,0)=875\\ f(18,21)=1785 \ \text{Máximo}\\ f(0,30)=1650\end{cases}$$

El beneficio máximo es de 1785 € y se llega fabricando 18 anillos tipo A y 21 del tipo B.

2.12. Islas Canarias

2.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.12.1 En un puesto del mercado se preparan dos tipos de cajas de frutas y verduras para repartir a domicilio. Cada caja del tipo A (caja pequeña) lleva 3 kg de fruta y 3 kg de verdura. Cada caja del tipo B (caja grande) lleva 5 kg de fruta y 8 kg de verdura. Cada día hay que cubrir una demanda fija de al menos 20 cajas de tipo A. Las cajas tipo A se venden a 10 € cada una y las cajas tipo B a 18 € cada una. El puesto tiene 195 kg de fruta y 240 kg de verduras disponibles diariamente todas las mañanas. Se desea determinar el número de cajas de cada tipo que se han de preparar diariamente para maximizar los ingresos.

a) Plantear el problema y representar la región factible.

b) ¿Cuántas cajas de cada tipo deben prepararse cada día para maximizar los ingresos? ¿Cuáles son los ingresos máximos?

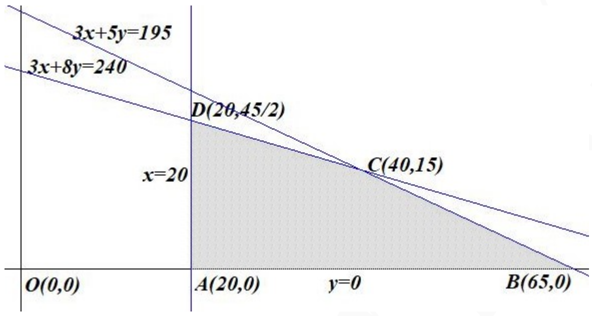
Solución: Llamamos x : nº de cajas tipo A e y : nº de cajas tipo B.

	Fruta	Verdura	Precio de venta
A	3	3	10
B	5	8	18
	≤ 195	≤ 240	

a) La región factible es:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+5y \le 195 \\ 3x+8y \le 240 \\ x \ge 20 \\ y \ge 0 \end{array}\right.$$

Los vértices son: $A(20,0)$, $B(65,0)$, $C(40,15)$ y $D\left(20,\frac{45}{2}\right)$.

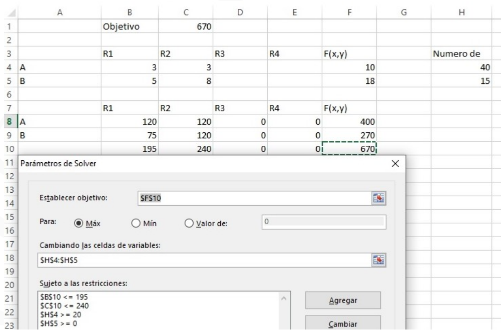


b) $f(x,y)=10x+18y$

Solución por solver :

$$\left\{\begin{array}{l} f(20,0)=200 \\ f(65,0)=650 \\ f(40,15)=670 \ \text{Máximo} \\ f\left(20,\frac{45}{2}\right)=605 \end{array}\right.$$

Se deben vender 40 cajas tipo A y 15 cajas tipo B por un valor máximo de 670 €.



2.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.12.2 Un comerciante quiere comprar a un mayorista de moda gabardinas de dos tipos: de paño a 180 € y de piel a 300 € la unidad, respectivamente. El comerciante dispone de 5400 € y no precisa más de 20 unidades.

a) Representar la región factible y los vértices.

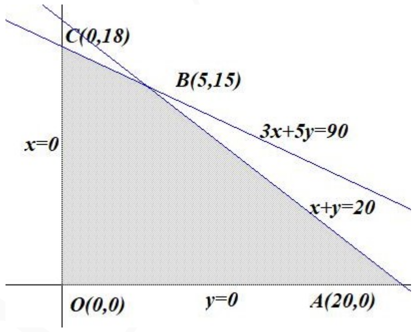
b) Si en la venta posterior obtiene un beneficio de 99€ por la venta de cada gabardina de paño y 156€ por la venta de cada gabardina de piel, calcular el número de gabardinas que ha de adquirir de cada tipo para obtener el beneficio máximo.

Solución:

Llamamos x : nº de gabardinas de paño e y : nº de gabardinas de piel.

a) La región factible es:

$$\begin{cases} 180x+300y\le 5400 \\ x+y\le 20 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x+5y\le 90 \\ x+y\le 20 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

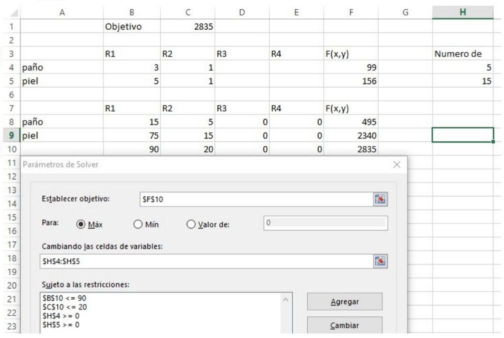


Los vértices son: $O(0,0)$, $A(20,0)$, $B(5,15)$ y $C(0,18)$.

b) $f(x,y) = 99x + 156y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(20,0) = 1980 \\ f(5,15) = 2835 \text{ Máximo} \\ f(0,18) = 2808 \end{cases}$$



Se deben comprar 5 gabardinas de paño y 15 de piel con un beneficio máximo de 2835 €.

2.13. La Rioja

2.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.13.1 Los beneficios de una empresa vienen dados por la función $f(x,y) = x + y + 1$ pero esta sujeta a las siguientes restricciones:

$$4x + y \ge 8; \quad 3x - 2y \le 12; \quad x + 5y \le 21; \quad x \ge 0, \quad y \ge 0.$$

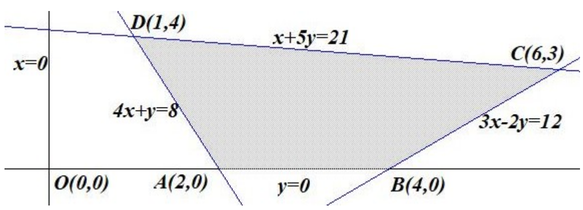
a) Dibuja en el plano la región factible que representa estas restricciones.

b) Para qué valores de x e y obtiene la empresa el beneficio máximo.

Solución:

a) La región factible es:

$$\begin{cases} 4x+y\ge 8 \\ 3x-2y\le 12 \\ x+5y\le 21 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$



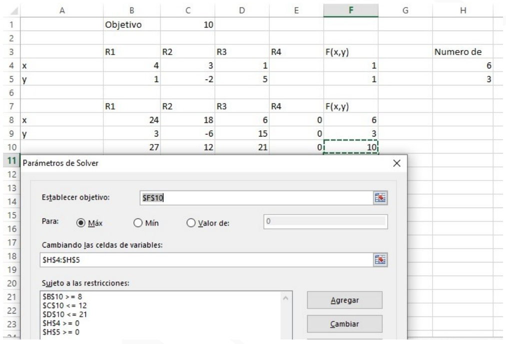
Los vértices son: $A(2,0)$, $B(4,0)$, $C(6,3)$ y $D(1,4)$.

b) $f(x,y) = x + y + 1$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(2,0) = 3 \\ f(4,0) = 5 \\ f(6,3) = 10 \text{ Máximo} \\ f(1,4) = 6 \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 10 y se obtiene para $x = 6$ e $y = 3$.



2.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.13.2 Julián dispone de 10 hectáreas de terreno para cultivar dos variedades de uva: tempranillo y viura. El beneficio que le produce una hectárea de tempranillo es de 2 mil € y la de viura 3 mil €. Dispone de 180 kg de productos fitosanitarios; una hectárea de tempranillo precisa de 10 kg de estos productos y una hectárea de viura 20. Vendimiar una hectárea de tempranillo le cuesta 20 horas y una de viura 10 horas; dispone de un total de 160 horas de trabajo de vendimiadores.

a) ¿Cómo puede distribuir Julián el cultivo de sus 10 hectáreas respetando sus restricciones? Dibuja en el plano la región factible que represente los posibles repartos.

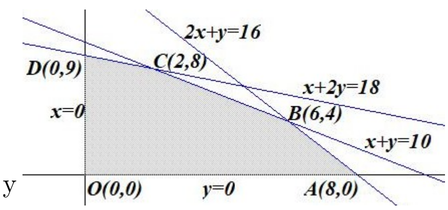
b) Escribe la función que representa el beneficio que obtiene Julián ¿Con qué distribución obtiene el máximo beneficio? Calcula dicho máximo.

Solución:

Llamamos x : nº de hectáres de tempranillo e y : nº de hectáres de viura.

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x + y \le 10 \\ 10x + 20y \le 180 \\ 20x + 10y \le 160 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \le 10 \\ x + 2y \le 18 \\ 2x + y \le 16 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

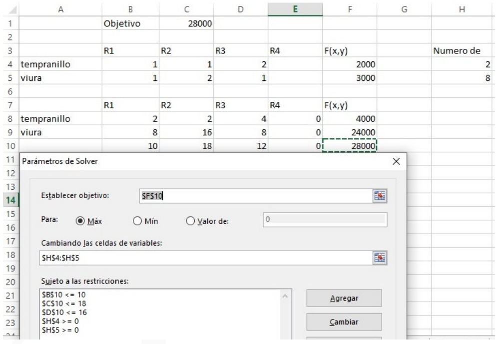


Los vértices son: $O(0,0)$, $A(8,0)$, $B(6,4)$, $C(2,8)$ y $D(0,9)$.

b) $f(x,y) = 2000x + 3000y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(8,0) = 16000 \\ f(6,4) = 24000 \\ f(2,8) = 28000 \ \text{Máximo} \\ f(0,9) = 27000 \end{cases}$$



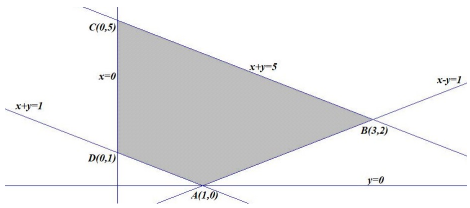
Se deben cultivar 2 hectáreas de tempranillo y 8 hectáreas de viura con un beneficio máximo de 28000 €.

2.14. Madrid

2.14.1. Modelo de 2020

Problema 2.14.1 Un agricultor dispone de 5 hectáreas, como máximo, de terreno para dedicar a la plantación de trigo y cebada. Cada hectárea dedicada al trigo le supone un beneficio de 200 €, mientras que cada hectárea dedicada a la cebada le supone un beneficio de 60 €. Entre ambos cultivos es obligatorio plantar como mínimo una hectárea, y la normativa autonómica le obliga a que el cultivo de trigo ocupe como mucho una hectárea más que el de cebada. Represente la región factible, determine las hectáreas que debería dedicar a cada cultivo para maximizar sus beneficios y obtenga el valor del beneficio máximo.

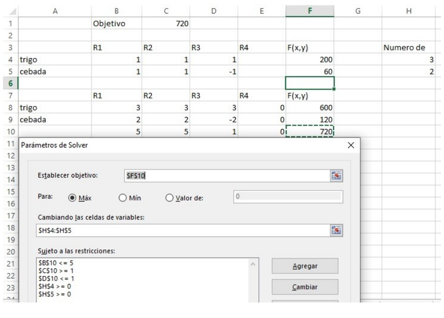
Solución:
Sea x : nº de Ha de trigo e y : nº de Ha de cebada.



La región factible es:

$$\begin{cases} x + y \le 5 \\ x + y \ge 1 \\ x - y \le 1 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

Solución por solver :



Los vértices a estudiar serán: $A(1,0)$, $B(3,2)$, C(0,5) y $D(0,1)$

La función objetivo es $f(x,y) = 200x + 60y \Longrightarrow$

$$\begin{cases} f(1,0) = 200 \\ f(3,2) = 720 \\ f(0,5) = 300 \\ f(0,1) = 60 \end{cases} \Longrightarrow \text{El máximo beneficio será de } 720 \text{ €}$$

que se obtiene plantando 3 Ha de trigo y 2 Ha de cebada.

2.14.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.14.2 La región del plano S está definida por las siguientes expresiones:

$$x \geq 3, \;\; 0 \leq y \leq 15, \;\; y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0, \;\; y - x \leq 10, \;\; y + 20 \geq 2x$$

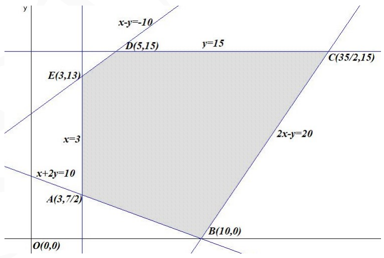
a) Determine las coordenadas de sus vértices y represente en el plano la región S.

b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = x + y$ en esta región, indicando los puntos en los cuales se alcanzan estos valores.

Solución:

a) La región factible S es:

$$\left\{\begin{array}{l} x \geq 3 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0 \\ y - x \leq 10 \\ y + 20 \geq 2x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geq 3 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ x + 2y \geq 10 \\ x - y \geq -10 \\ 2x - y \leq 20 \end{array}\right.$$



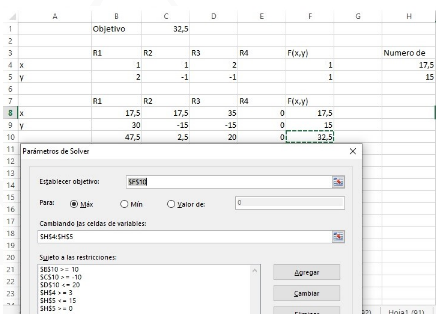
Los vértices son: $A\left(3, \frac{7}{2}\right)$, $B(10, 0)$, $C\left(\frac{35}{2}, 15\right)$, $D(5, 15)$ y $E(3, 13)$.

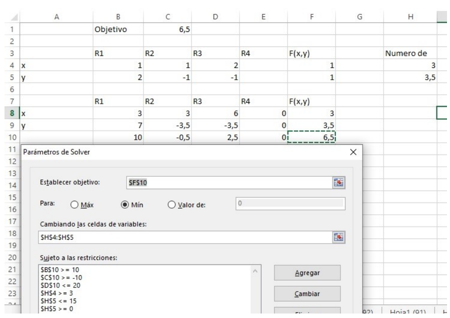
b) La función objetivo $f(x, y) = x + y$ sobre los vértices da los siguientes resultados:

$$\left\{\begin{array}{l} f\left(3, \frac{7}{2}\right) = 6,5 \Longleftarrow \text{Mínimo} \\ f(10, 0) = 10 \\ f\left(\frac{35}{2}, 15\right) = 32,5 \Longleftarrow \text{Máximo} \\ f(5, 15) = 20 \\ f(3, 13) = 16 \end{array}\right.$$

El máximo se encuentra en el punto $C\left(\frac{35}{2}, 15\right)$ con un valor de 32,5 y el mínimo en el punto $A\left(3, \frac{7}{2}\right)$ con un valor de 6,5.

Solución por solver :





2.14.3. Convocatoria junio de 2020 (coincidente)

Problema 2.14.3 *(2 puntos)* Considere la región del plano S definida por

$$x - y \geq 0, \quad y + 2x \leq 8, \quad 0 \leq y \leq 2$$

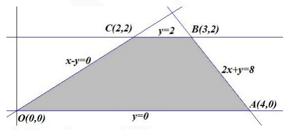
a) Represente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = 4x - y$ en la región S, indicando los puntos en los cuales se alcanzan dichos valores.

Solución:

a) La región factible:

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ y + 2x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - y \geq 0 \\ 2x + y \leq 8 \\ y \geq 0 \\ y \leq 2 \end{cases}$$

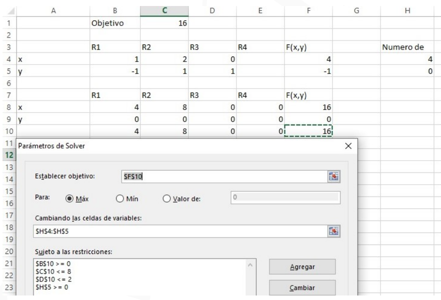


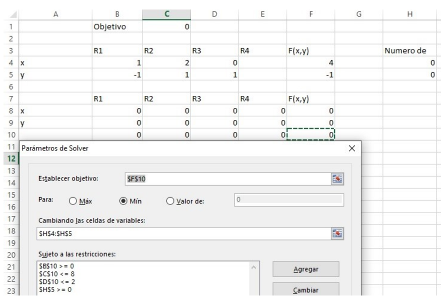
Los vértices a estudiar serán: $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(3, 2)$ y $C(2, 2)$

b) $f(x, y) = 4x - y$ en S:

$$\begin{cases} f(0, 0) = 0 \\ f(4, 0) = 16 \\ f(3, 2) = 10 \\ f(2, 2) = 6 \end{cases} \Longrightarrow$$ El valor máximo será de 16 y se alcanza en el punto $A(4, 0)$ y el valor mínimo será de 0 y se alcanza en el punto $O(0, 0)$.

Solución por solver :





2.14.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.14.4 Un vivero elabora dos tipos de sustratos. Para elaborar 1 m^3 del tipo A necesita 60 kg de tierra vegetal y 30 horas de trabajo. Para elaborar 1 m^3 del tipo B necesita 50 kg de tierra vegetal y 50 horas de trabajo. El vivero dispone como máximo de 21000 kg de tierra vegetal y 15000 horas de trabajo. Además, la cantidad de metros cúbicos que elabora de tipo A debe ser como mucho cinco veces la cantidad de tipo B. Por la venta de cada metro cúbico de tipo A obtiene un beneficio de 50 € y 60 € por cada metro cúbico de tipo B.

a) Represente la región del plano determinada por las restricciones anteriores y determine las coordenadas de sus vértices.

b) Determine cuántos metros cúbicos de cada tipo deben elaborarse para, respetando las restricciones anteriores, maximizar el beneficio. Obtenga el valor del beneficio máximo.

Solución:

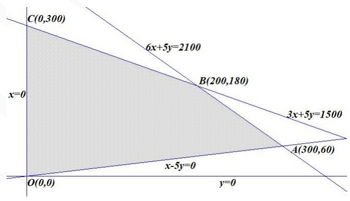
Sea x número de m^3 de tipo A e y número de m^3 de tipo B.

a) Podemos construir la siguiente tabla:

	tierra vegetal	horas de trabajo
A	60	30
B	50	50
Totales	≤ 21000	≤ 15000

La región factible será:

$$\left\{\begin{array}{l} 60x+50y\leq 21000\\ 30x+50y\leq 15000\\ x\leq 5y\\ x,y\geq 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6x+5y\leq 2100\\ 3x+5y\leq 1500\\ x-5y\leq 0\\ x,y\geq 0\end{array}\right.$$

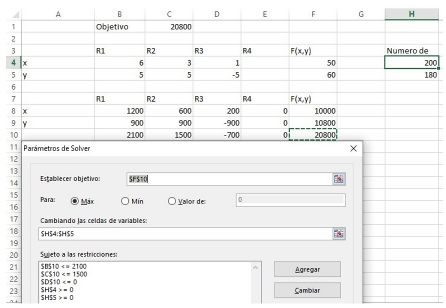


Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(300,60)$, $B(200,180)$ y $C(0,300)$

b) $f(x,y)=50x+60y$ en S:

$$\left\{\begin{array}{l} f(0,0)=0\\ f(300,60)=18600\\ f(200,180)=20800 \Longleftarrow \text{Máximo}\\ f(0,300)=18000\end{array}\right. \Longrightarrow$$ El beneficio máximo será de 20800 € y se alcanza con 200 m^3 de A y 180 m^3 de B.

Solución por solver :



2.15. Murcia

2.15.1. Modelo de 2020

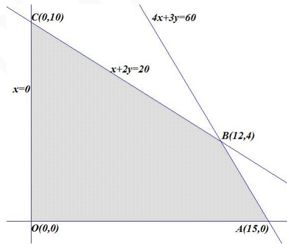
Problema 2.15.1 En un obrador se elaboran dos tipos de dulces distintos: A y B, siendo sus precios unitarios de 15 € y 12 €, respectivamente. Para elaborar un dulce del tipo A se necesitan $\frac{1}{2}$ kilo de azúcar y 8 huevos, mientras que para los del tipo B se requieren 1 kilo de azúcar y 6 huevos. En el obrador solo tienen 10 kilos de azúcar y 120 huevos. ¿Cuántos dulce deben elaborar de cada tipo para que el ingreso obtenido sea máximo? Razone la respuesta.

Solución:
Llamamos x : nº de dulces de A e y : nº de dulces de B.

	Azucar	Huevos	Venta
A	$0,5$	8	15
B	1	6	12
	≤ 10	≤ 120	

La región factible es:

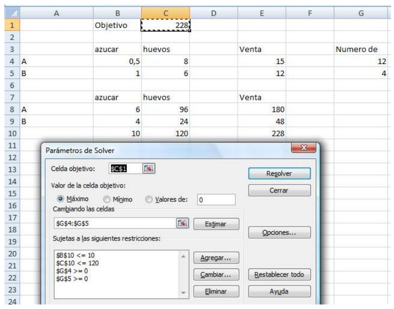
$$\begin{cases} 0,5x + y \leq 10 \\ 8x + 6y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y \leq 20 \\ 4x + 3y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(15,0)$, $B(12,4)$ y $C(0,10)$.

$f(x,y) = 15x + 12y$

Solución por solver :



$$\begin{cases} f(15,0) = 225 \\ f(12,4) = 228 \;\; \text{Máximo} \\ f(0,10) = 120 \end{cases}$$

Se deben fabricar 12 dulces A y 4 dulces B con un precio máximo de 228 €.

2.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

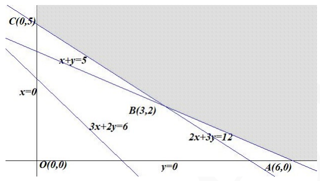
Problema 2.15.2 La repoblación forestal de un bosque quemado en un gran incendio se va a llevar a cabo por dos empresa diferentes de jardinería. Hay que repoblar con pinos, eucaliptos y chopos. La primera empresa es capaz de plantar, en una semana, 30 pinos, 20 eucaliptos y 20 chopos. La segunda empresa planta 20 pinos, 30 eucaliptos y 20 chopos. El coste semanal se estima en 33.000 € para la primera empresa de jardinería y de 35.000 € para la segunda. Se necesita plantar un mínimo de 60 pinos, 120 eucaliptos y 100 chopos. ¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste?

Solución:
Llamamos x : nº de semanas de la empresa 1 e y : nº de de semanas de la empresa 2.

	Pinos	Eucaliptus	Chopos	Coste
empresa 1	30	20	20	33000
empresa 2	20	30	20	35000
	≥ 60	≥ 120	≥ 100	

La región factible es:

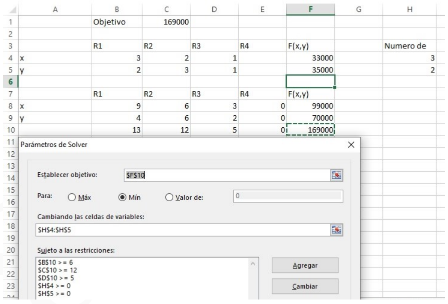
$$
\begin{cases} 30x + 20y \geq 60 \\ 20x + 30y \geq 120 \\ 20x + 20y \geq 100x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x + 2y \geq 6 \\ 2x + 3y \geq 12 \\ x + y \geq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}
$$



Los vértices son: $A(6,0)$, $B(3,2)$ y $C(0,5)$.

$f(x,y) = 33000x + 35000y$

Solución por solver :



$$
\begin{cases} f(6,0) = 198000 \\ f(3,2) = 169000, \text{ Mínimo} \\ f(0,5) = 175000 \end{cases}
$$

La empresa 1 debe de trabajar 3 semanas y 2 la empresa 2 con un coste mínimo de 169000 €.

2.15.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.15.3 Sea S la región del plano definida por las inecuaciones.

$$
S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 2x - 4,\ y \leq x - 1,\ 2y \geq x,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}
$$

a) Representar la región S y obtener sus vértices.

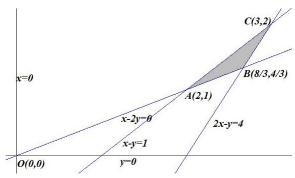
b) Maximizar la función $f(x,y) = x - 3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el máximo.

c) Minimizar la función $f(x,y) = x - 3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el mínimo.

Solución:

a) La región factible es:

$$
\begin{cases} y \geq 2x - 4 \\ y \leq x - 1 \\ 2y \geq x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - y \leq 4 \\ x - y \geq 1 \\ x - 2y \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}
$$



Los vértices son: $A(2,1)$, $B\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$ y $C(3,2)$.

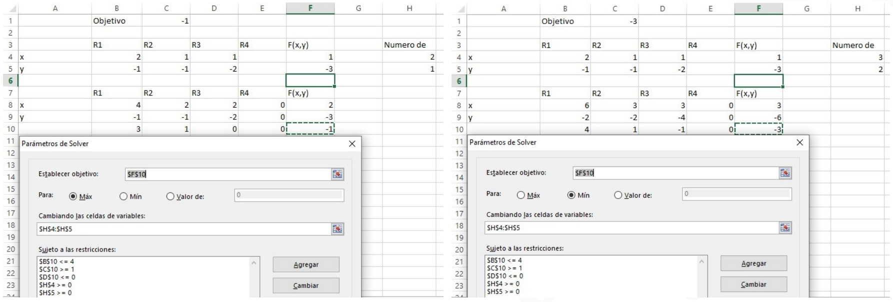
$f(x,y) = x - 3y$

$$
\begin{cases} f(2,1) = -1 \text{ Máximo} \\ f\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3} \\ f(3,2) = -3 \text{ Mínimo} \end{cases}
$$

b) El valor máximo se alcanza en el punto $A(2,1)$ y vale -1.

c) El valor mínimo se alcanza en el punto $C(3,2)$ y vale -3.

Solución por solver :



2.16. Navarra

2.16.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.16.1 Una empresa fabrica dos tipos de biocombustibles a partir de aceites vegetales ($T1$ y $T2$) y vende cada tonelada de biocombustible a un precio de 2000 € y 1800 €, respectivamente. Cada tonelada de biocombustible $T1$ requiere 3 horas de proceso en la línea de producción y 2 unidades de materia prima. Cada tonelada de biocombustible $T2$ requiere 1 hora de proceso en la línea de producción y 4 unidades de materia prima. Cada semana la empresa dispone de 195 unidades de materia prima y de 90 horas de tiempo de proceso en la línea de producción. Determine cuántas toneladas de cada tipo de biocombustible se deberá fabricar semanalmente para maximizar el precio total de venta, sabiendo que además se desea fabricar un total de al menos 40 toneladas de biocombustible.

a) Plantee el problema.

b) Resuélvalo gráficamente.

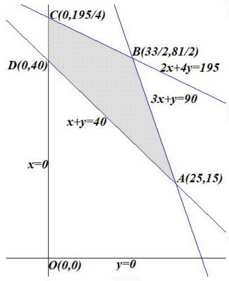
c) Analice gráficamente qué ocurriría si se considerara un objetivo de tipo ecológico, y se deseara minimizar el nivel de contaminación asociado a este proceso de producción, sabiendo que fabricar una tonelada de biocombustible $T1$ produce 5 unidades de contaminación y fabricar una tonelada de biocombustible $T2$ produce 10 unidades de contaminación.

Solución:
Llamamos x : nº de toneladas de aceite de $T1$ e y : nº de toneladas de aceite de $T2$.

	Horas	Materia prima	Venta
$T1$	3	2	2000
$T2$	1	4	1800
	≤ 90	≤ 195	

a) La región factible es:

$$\begin{cases} 3x + y \leq 90 \\ 2x + 4y \leq 195 \\ x + y \geq 40 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

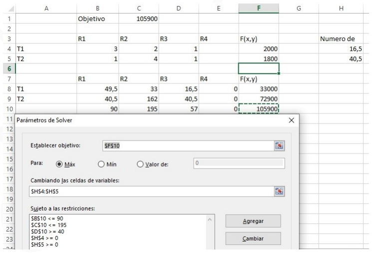


b) Los vértices son: $A(25, 15)$, $B\left(\frac{33}{2}, \frac{81}{2}\right)$, $C\left(0, \frac{195}{4}\right)$ y $D(0, 40)$.

c) $f(x, y) = 2000x + 1800y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(25, 15) = 77000 \\ f\left(\frac{33}{2}, \frac{81}{2}\right) = 105900 \ \text{Máximo} \\ f\left(0, \frac{195}{4}\right) = 87750 \\ f(0, 40) = 72000 \end{cases}$$

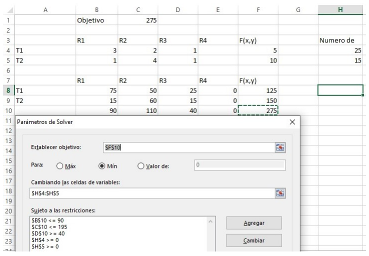


La producción sería máxima con 16,5 toneladas de $T1$ y 40,5 de $T2$ con una venta de 105900 €.

d) Ahora la función objetivo es $f(x, y) = 5x + 10y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(25, 15) = 275 \ \text{Mínimo} \\ f\left(\frac{33}{2}, \frac{81}{2}\right) = 487,5 \\ f\left(0, \frac{195}{4}\right) = 487,5 \\ f(0, 40) = 400 \end{cases}$$



La contaminación es mínima cuando se producen 25 toneladas de $T1$ y 15 de $T2$, con un valor de 275.

2.16.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.16.2 Una empresa diseña y vende dos tipos de telas ($T1$ y $T2$) con un precio de venta de 60 €/m^2 y 100 €/m^2, respectivamente. Para cubrir la demanda semanal debe fabricar un total de al menos 15 m^2 de telas. Para elaborar un m^2 de tela $T1$ se necesitan 2 horas de máquina y 6 carretes de hilo. Para elaborar un m^2 de tela $T2$ se requieren 4 horas de máquina y 3 carretes de hilo. La disponibilidad semanal de estos dos recursos es de 80 horas de máquina y 150 carretes de hilo. ¿Cuántos m^2 de cada tipo de tela tiene que vender la empresa si busca maximizar el beneficio semanal, sabiendo que el coste de elaborar un m^2 de cada tipo de tela es 15 y 10 €, respectivamente?

a) Plantee el problema.

b) Resuélvalo gráficamente.

c) Analice gráficamente qué ocurriría si se quiere elaborar al menos el triple de m^2 de tela $T1$ que de tela $T2$.

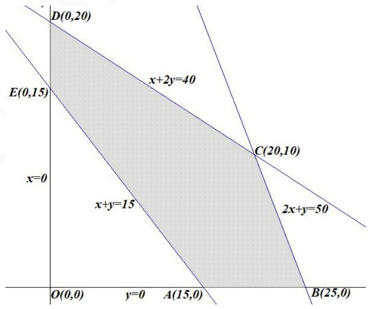
Solución:

Llamamos x : nº de m^2 de la tela $T1$ e y : nº de m^2 de la tela $T2$.

	Horas máquina	Carretes hilo	Venta	Coste	Beneficio
$T1$	2	6	60	15	45
$T2$	4	3	100	10	90
	≤ 80	≤ 150			

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x + y \geq 15 \\ 2x + 4y \leq 80 \\ 6x + 3y \leq 150 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \geq 15 \\ x + 2y \leq 40 \\ 2x + y \leq 50 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

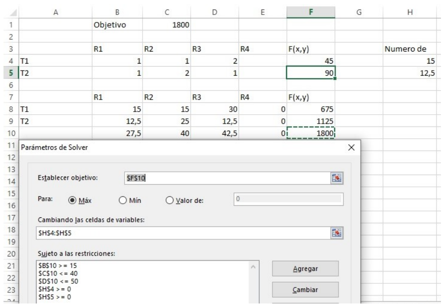


Los vértices son: $A(15,0)$, $B(25,0)$, $C(20,10)$, $D(0,20)$ y $E(0,15)$.

b) La función objetivo es: $f(x,y) = 45x + 90y$

$$\begin{cases} f(15,0) = 675 \\ f(25,0) = 1125 \\ f(20,10) = 1800 \text{ Máximo} \\ f(0,20) = 1800 \\ f(0,15) = 1350 \end{cases}$$

Solución por solver :

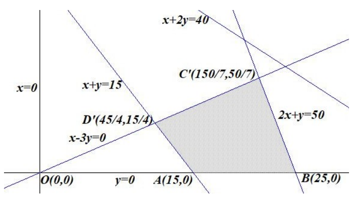


La solución no es única, será cualquier punto del segmento que une el punto $C(20,10)$ con el punto $D(0,20)$ con máximo beneficio de 1800 €.

Este segmento sería $\left\{(x,y)/y = \dfrac{40-x}{2},\ \ \forall x \in [0,20]\right\}$

c) Tenemos que añadir la inecuación $x \geq 3y$. Con esta inecuación tendríamos la siguiente región factible:

$$\begin{cases} x \geq 3y \\ x + y \geq 15 \\ 2x + 4y \leq 80 \\ 6x + 3y \leq 150 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - 3y \geq 0 \\ x + y \geq 15 \\ x + 2y \leq 40 \\ 2x + y \leq 50 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



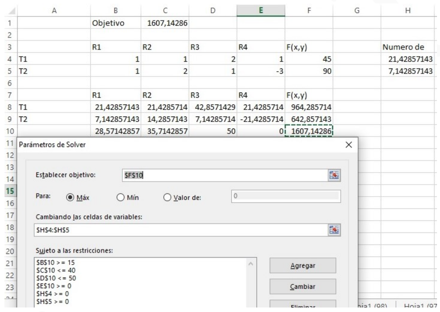
Ahora los vértices son: $A(15,0)$, $B(25,0)$, $C'\left(\dfrac{150}{7}, \dfrac{50}{7}\right)$ y $D'\left(\dfrac{45}{4}, \dfrac{15}{4}\right)$

La función objetivo es: $f(x,y) = 45x + 90y$

$$\begin{cases} f(15,0) = 2100 \\ f(25,0) = 2100 \\ f\left(\dfrac{150}{7}, \dfrac{50}{7}\right) = 1607,14 \ \text{Máximo} \\ f\left(\dfrac{45}{4}, \dfrac{15}{4}\right) = 843,75 \end{cases}$$

De tela $T1$ habría que vender 21,43 m^2 y de la $T2$ habría que vender 7,14 m^2, con un beneficio de 1607,14 €.

Solución por solver :



2.17. País Vasco

2.17.1. Modelo de 2020

Problema 2.17.1 Una pastelera fabrica dos tipos de tartas. La tarta de tipo A se elabora con 1 kg. de masa y 1,5 kg. de chocolate, y se vende a 24 €. La de tipo B se vende a 30 € y se elabora con 1,5 kg. de masa y 1 kg. de chocolate, tal como aparece en la siguiente tabla:

	Masa	Chocolate
A	$1\,\text{kg}$	$1,5\,\text{kg}$
B	$1,5\,\text{kg}$	$1\,\text{kg}$

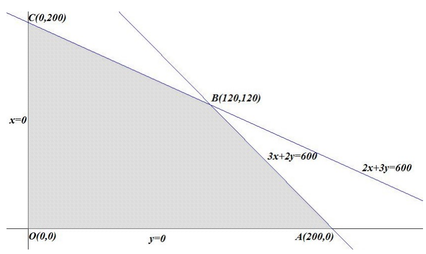
Si la pastelera sólo dispone de 300 kg. de cada ingrediente, ¿cuántas tartas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo ingreso? Calcula el valor de dicho ingreso.

Solución:
Llamamos x : nº de tartas tipo A e y : nº de tartas tipo B.

	Masa	Chocolate	Beneficio
A	1	$1,5$	24
B	$1,5$	1	30
	≤ 300	≤ 300	

La región factible es:

$$\begin{cases} x + 1,5y \leq 300 \\ 1,5x + y \leq 300 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y \leq 600 \\ 3x + 2y \leq 600 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

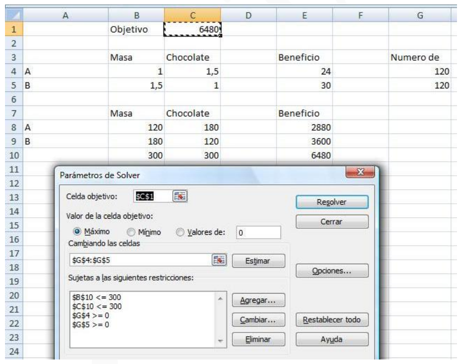


Los vértices son: $A(200,0)$, $B(120,120)$ y $C(0,200)$.

$f(x,y) = 24x + 30y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(200,0) = 4800 \\ f(120,120) = 6480 \text{ Máximo} \\ f(0,200) = 6000 \end{cases}$$



Se deben producir 120 tartas tipo A y 120 de B con un beneficio máximo de 6480 €.

2.17.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.17.2 Un guía de turismo quiere adquirir tickets de diferentes actividades para sus clientes. En concreto, quiere comprar al menos 16 tickets para acudir a un museo, 20 para realizar una visita guiada y 16 para asistir a un espectáculo.
Dos agencias disponen de ofertas para dichos tickets combinados en paquetes:

- La agencia A ofrece paquetes formados por 6 tickets para el museo, 4 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 210 € cada paquete.

- La agencia B ofrece paquetes formados por 4 tickets para el museo, 6 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 230 € cada paquete.

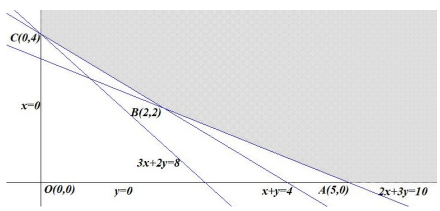
¿Cuántos paquetes deberá comprar el guía a cada agencia para que su coste sea mínimo? ¿A cuánto asciende dicho coste?

Solución:
Llamamos x : nº de paquetes de la agencia A e y : nº de paquetes de la agencia B.

	Museo	Visita guiada	Espectáculo	Precio
A	6	4	4	210
B	4	6	4	230
	≥ 16	≥ 20	≥ 16	

La región factible es:

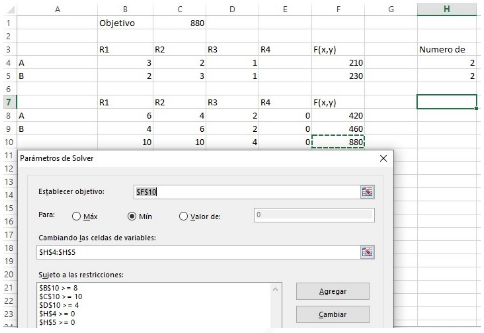
$$\begin{cases} 6x + 4y \geq 16 \\ 4x + 6y \geq 20 \\ 4x + 4y \geq 16 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x + 2y \geq 8 \\ 2x + 3y \geq 10 \\ x + y \geq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(5,0)$, $B(2,2)$ y $C(0,4)$.

$f(x,y) = 210x + 230y$

Solución por solver :



$$\begin{cases} f(5,0) = 1050 \\ f(2,2) = 880 \ \text{Mínimo} \\ f(0,4) = 920 \end{cases}$$

Se deben comprar 2 paquetes de la agencia A y 2 de la B con un coste mínimo de 880 €.

2.17.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

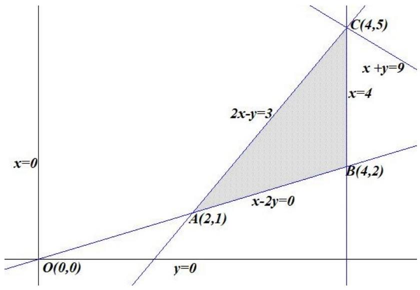
Problema 2.17.3 Determina el valor máximo de la función objetivo $F(x, y) = 5x+4y$ restringida por las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} 2y - x \geq 0 \\ y \leq 2x - 3 \\ x + y \leq 9 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

Solución:

La región factible es:

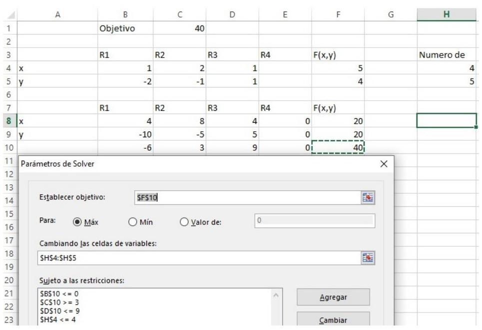
$$\begin{cases} 2y - x \geq 0 \\ y \leq 2x - 3 \\ x + y \leq 9 \\ x \leq 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ 2x - y \geq 3 \\ x + y \leq 9 \\ x \leq 4 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(2, 1)$, $B(4, 2)$ y $C(4, 5)$.

La función objetivo es: $F(x, y) = 5x + 4y$

Solución por solver :



$$\begin{cases} F(2,1) = 14 \\ F(4,2) = 28 \\ F(4,5) = 40 \ \text{Máximo} \end{cases}$$

El máximo se encuentra en el punto $C(4, 5)$ con un valor de 40 unidades.

Capítulo 3

Análisis

3.1. Resúmenes teóricos

Tabla de Derivadas

función	derivada	función	derivada
$y = k$	$y' = 0$	$y = x$	$y' = 1$
$y = ax^n$	$y' = nax^{n-1}$	$y = au^n$	$y' = nau^{n-1}u'$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	$y = uv$	$y' = u'v + uv'$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y = \dfrac{u}{v}$	$y = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$	$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
$y = u^v$	$y' = u^v(v' \ln u) + vu^{v-1}u'$	$y = a^u$	$y' = u'a^u \ln a$
$y = e^u$	$y' = u'e^u$	$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$	$y = \tan u$	$y' = u' \sec^2 u$
$y = \cot u$	$y' = -u' \csc^2 u$	$y = \csc u$	$y' = -u' \csc u \cot u$
$y = \sec u$	$y' = u' \sec u \tan u$	$y = \arcsin u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \arccos u$	$y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \arctan u$	$y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
	Regla de la Cadena	$y = f(g(x))$	$y' = g'(x)f'(g(x))$

Representación gráfica de funciones

Hay que seguir los siguientes pasos:

1° Dominio	Buscar Puntos Singulares	2° Signo	$f(x) > 0$ *o* $f(x) < 0$
3° Ptos. Corte	Corte con OX : $f(x) = 0$ Corte con OY : $x = 0$	4° Simetría :	Par : $f(-x) = f(x)$ con OY Impar : $f(-x) = -f(x)$ con O
5° Asíntotas :	Verticales : $x = p$ $\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = \pm\infty$ Horizontales : $y = p$ $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = p$ Si $\exists\, y = p \Longrightarrow$ No Oblicuas Oblicuas : $y = mx + n$ $m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ $n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx)$	6° Monotonía :	Creciente : $f'(x) > 0$ $\nearrow$ Decreciente : $f'(x) < 0$ $\searrow$ Si $f'(p) = 0$ Punto Crítico : Máximo si $f''(p) < 0$ Mínimo si $f''(p) > 0$ Pto. Inflexión si $f''(p) = 0$ y $f'''(p) \neq 0$
7° Máximos y Mínimos	Máximo : $\nearrow\searrow$ de creciente a decreciente Mínimo : $\searrow\nearrow$ de decreciente a creciente	8° Curvatura :	Cóncava : $f''(x) > 0$ $\cup$ Convexa : $f''(x) < 0$ $\cap$ Si $f''(p) = 0$ Punto Crítico : Pto. Inflexión si de Cóncava a Convexa de Convexa a Cóncava
9° Periodo :	$f(x + T) = f(x)$		

Tabla de Integrales Inmediatas

Tipo	Simple	Compuesta
Potencial $a \neq -1$	$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int f^a \cdot f'\,dx = \frac{f^{a+1}}{a+1}$
Logarítmica	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert$	$\int \frac{f'}{f}\,dx = \ln\lvert f\rvert$
Exponencial	$\int e^x\,dx = e^x$	$\int e^f \cdot f'\,dx = e^f$
Exponencial	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int a^f \cdot f'\,dx = \frac{a^f}{\ln a}$
Seno	$\int \cos x\,dx = \sin x$	$\int f' \cdot \cos f\,dx = \sin f$
Coseno	$\int \sin x\,dx = -\cos x$	$\int f' \cdot \sin f\,dx = -\cos f$
Tangente	$\int \sec^2\,dx = \tan x$	$\int f' \cdot \sec^2 f\,dx = \tan f$
	$\int (1+\tan^2 x)\,dx = \tan x$	$\int f' \cdot (1+\tan^2 f)\,dx = \tan f$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x$	$\int \frac{f'}{\cos^2 f}\,dx = \tan f$
Cotangente	$\int \csc^2\,dx = -\cot x$	$\int f' \cdot \csc^2 f\,dx = -\cot f$
	$\int (1+\cot^2 x)\,dx = -\cot x$	$\int f' \cdot (1+\cot^2 f)\,dx = -\cot f$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x$	$\int \frac{f'}{\sin^2 f}\,dx = -\cot f$
Arco seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}\,dx = \arcsin f$
	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{\sqrt{a^2-f^2}}\,dx = \arcsin \frac{f}{a}$
Arco coseno	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}\,dx = \arccos f$
	$\int \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arccos \frac{x}{a}$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{a^2-f^2}}\,dx = \arccos \frac{f}{a}$
Arco tangente	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$	$\int \frac{f'}{1+f^2}\,dx = \arctan f$
	$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \arctan \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{a^2+f^2}\,dx = \arctan \frac{f}{a}$
Neperiano − Arcotangente	$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx = \ln \pm \arctan x$	Si $M \neq 0$ ax^2+bx+c irreducible

Definición de Derivada

$$f'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad f'(a) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Continuidad: Una función f es continua en un punto a si

$$\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

- Si $\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) \Longrightarrow$ Discontinua no evitable. (La función pega un salto en ese punto)

- Si $\lim\limits_{x\longrightarrow a^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x) \neq f(a) \Longrightarrow$ Discontinua evitable. (La función tiene un agujero en ese punto)

Derivabilidad
Una función f es derivable en un punto a si $f'(a^-) = f'(a^+)$.

$$f'(a^-) = \lim_{h\longrightarrow 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \quad f'(a^+) = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Si f es una función derivable en un punto a, entonces f tiene que ser continua en a.
Teorema de Weierstrass
Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces f alcanza un máximo y un mínimo en este intervalo.
Teorema de Darboux
Si f es una función continua en $[a,b]$, entonces f toma en dicho intervalo todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo.
Teorema de Bolzano
Si f es una función continua en el intervalo cerrado y no nulo $[a,b]$ $(a<b)$ y la función toma valores de distinto signo en los extremos de este intervalo (Si signo de $f(a)$ es positivo entonces signo de $f(b)$ es negativo o viceversa). Entonces la función pasa necesariamente por un punto que corta al eje de abcisas, es decir, $\exists c \in [a,b]$ tal que $f(c)=0$.
Teorema de Rolle
Sea f continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en el intervalo (a,b). Si además cumple que $f(a)=f(b)$ entonces existe un punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.
Teorema del Valor Medio de Lagrange
Sea f continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en el intervalo (a,b). entonces existe un punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Primer Teorema Fundamental del Cálculo
Sea f una función integrable en el intervalo $[a,b]$. Definimos en este intervalo la función

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \;\text{ donde }\; c\in[a,b]$$

En estas condiciones, si f es continua en c se cumple que F es derivable en c y $F'(c)=f(c)$.
Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (Regla de Barrow)
Dada una función f continua en el intervalo $[a,b]$ y sea F cualquier función primitiva de f, es decir $F'(x)=f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

Teorema de integración por partes
Sean f y g dos funciones reales derivables en el intervalo $[a,b]$. En estas condiciones se cumple

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

$\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (sentado un día vi un valiente soldado vestido de uniforme)

Teorema del cambio de variable

Sea g una función con derivada g' continua en $[a,b]$, y sea f una función real y continua en el mismo intervalo. SI hacemos el cambio de variable $t = g(x)$ se cumple que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

Límites cuando $x \longrightarrow \pm\infty$

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que Grado$(P(x)) = n$ y Grado$(Q(x)) = m$. Sea A el coeficiente del monomio de mayor grado de $P(x)$ y sea B el coeficiente del monomio de mayor grado de $Q(x)$

$$L = \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} P(x) = \pm\infty$ el signo depende del signo del coeficiente de mayor grado de este polinomio.

- Si $n > m \Longrightarrow L =$Signo$\left(\dfrac{A}{B}\right)\cdot\infty$

- Si $n < m \Longrightarrow L = 0$

- Si $n = m \Longrightarrow L = \dfrac{A}{B}$

Si $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} P(x)^{Q(x)} = [1^\infty] = e^\lambda$, donde

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} Q(x)(P(x)-1)$$

Regla de L'Hôpital Sean f y g dos funciones reales y derivables, entonces si

$$\lim_{x\longrightarrow p}\frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \; o \; \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right] \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow p}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\longrightarrow p}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aproximaciones cuando $x \longrightarrow 0$

$\sin x \approx x$	$\tan x \approx x$	$e^x \approx 1 + x$	$\log(1+x) \approx x$
$a^x \approx 1 + x\ln a$	$\arcsin x \approx x$	$\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$	$\arccos \approx \dfrac{\pi}{2} - x$

Tabla de Derivadas

función	derivada	función	derivada
$y = k$	$y' = 0$	$y = x$	$y' = 1$
$y = ax^n$	$y' = nax^{n-1}$	$y = au^n$	$y' = nau^{n-1}u'$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	$y = uv$	$y' = u'v + uv'$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y = \dfrac{u}{v}$	$y = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$	$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
$y = u^v$	$y' = u^v(v' \ln u) + vu^{v-1}u'$	$y = a^u$	$y' = u'a^u \ln a$
$y = e^u$	$y' = u'e^u$	$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$	$y = \tan u$	$y' = u' \sec^2 u$
$y = \cot u$	$y' = -u' \csc^2 u$	$y = \csc u$	$y' = -u' \csc u \cot u$
$y = \sec u$	$y' = u' \sec u \tan u$	$y = \arcsin u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \arccos u$	$y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \arctan u$	$y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
	Regla de la Cadena	$y = f(g(x))$	$y' = g'(x)f'(g(x))$

Representación gráfica de funciones
Hay que seguir los siguientes pasos:

1 Dominio	Buscar Puntos Singulares	2 Signo	$f(x) > 0$ *o* $f(x) < 0$
3 Ptos. Corte	Corte con OX : $f(x) = 0$ Corte con OY : $x = 0$	4 Simetría :	Par : $f(-x) = f(x)$ con OY Impar : $f(-x) = -f(x)$ con O
5 Asíntotas :	Verticales : $x = p$ $\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = \pm\infty$ Horizontales : $y = p$ $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = p$ Si $\exists\, y = p \Longrightarrow$ No Oblicuas Oblicuas : $y = mx + n$ $m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx)$	6 Monotonía :	Creciente : $f'(x) > 0$ $\nearrow$ Decreciente : $f'(x) < 0$ $\searrow$ Si $f'(p) = 0$ Punto Crítico : Máximo si $f''(p) < 0$ Mínimo si $f''(p) > 0$ Pto. Inflexión si $f''(p) = 0$ y $f'''(p) \neq 0$
7 Máximos y Mínimos	Máximo : $\nearrow\searrow$ de creciente a decreciente Mínimo : $\searrow\nearrow$ de decreciente a creciente	8 Curvatura :	Cóncava : $f''(x) > 0$ $\cup$ Convexa : $f''(x) < 0$ $\cap$ Si $f''(p) = 0$ Punto Crítico : Pto. Inflexión si de Cóncava a Convexa de Convexa a Cóncava
9 Periodo :	$f(x + T) = f(x)$		

Tabla de Integrales Inmediatas

Tipo	Simple	Compuesta
Potencial $a \neq -1$	$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int f^a \cdot f'\,dx = \frac{f^{a+1}}{a+1}$
Logarítmica	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert$	$\int \frac{f'}{f}\,dx = \ln\lvert f\rvert$
Exponencial	$\int e^x\,dx = e^x$	$\int e^f \cdot f'\,dx = e^f$
Exponencial	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int a^f \cdot f'\,dx = \frac{a^f}{\ln a}$
Seno	$\int \cos x\,dx = \sin x$	$\int f' \cdot \cos f\,dx = \sin f$
Coseno	$\int \sin x\,dx = -\cos x$	$\int f' \cdot \sin f\,dx = -\cos f$
Tangente	$\int \sec^2\,dx = \tan x$	$\int f' \cdot \sec^2 f\,dx = \tan f$
	$\int (1+\tan^2 x)\,dx = \tan x$	$\int f' \cdot (1+\tan^2 f)\,dx = \tan f$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x$	$\int \frac{f'}{\cos^2 f}\,dx = \tan f$
Cotangente	$\int \csc^2\,dx = -\cot x$	$\int f' \cdot \csc^2 f\,dx = -\cot f$
	$\int (1+\cot^2 x)\,dx = -\cot x$	$\int f' \cdot (1+\cot^2 f)\,dx = -\cot f$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x$	$\int \frac{f'}{\sin^2 f}\,dx = -\cot f$
Arco seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}\,dx = \arcsin f$
	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{\sqrt{a^2-f^2}}\,dx = \arcsin \frac{f}{a}$
Arco coseno	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}\,dx = \arccos f$
	$\int \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arccos \frac{x}{a}$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{a^2-f^2}}\,dx = \arccos \frac{f}{a}$
Arco tangente	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$	$\int \frac{f'}{1+f^2}\,dx = \arctan f$
	$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \arctan \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{a^2+f^2}\,dx = \arctan \frac{f}{a}$
Neperiano − Arcotangente	$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx = \ln \pm \arctan x$	Si $M \neq 0$ ax^2+bx+c irreducible

Definición de Derivada

$$f'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad f'(a) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Continuidad: Una función f es continua en un punto a si

$$\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

- Si $\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) \Longrightarrow$ Discontinua no evitable. (La función pega un salto en ese punto)

- Si $\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) \neq f(a) \Longrightarrow$ Discontinua evitable. (La función tiene un agujero en ese punto)

Derivabilidad
Una función f es derivable en un punto a si $f'(a^-) = f'(a^+)$.

$$f'(a^-) = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'(a^+) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si f es una función derivable en un punto a, entonces f tiene que ser continua en a.
Teorema de Weierstrass
Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces f alcanza un máximo y un mínimo en este intervalo.
Teorema de Darboux
Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces f toma en dicho intervalo todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo.
Teorema de Bolzano
Si f es una función continua en el intervalo cerrado y no nulo $[a, b]$ $(a < b)$ y la función toma valores de distinto signo en los extremos de este intervalo (Si signo de $f(a)$ es positivo entonces signo de $f(b)$ es negativo o viceversa). Entonces la función pasa necesariamente por un punto que corta al eje de abscisas, es decir, $\exists c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.
Teorema de Rolle
Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). Si además cumple que $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
Teorema del Valor Medio de Lagrange
Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Primer Teorema Fundamental del Cálculo
Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Definimos en este intervalo la función

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, dt \text{ donde } c \in [a, b]$$

En estas condiciones, si f es continua en c se cumple que F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.
Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (Regla de Barrow)
Dada una función f continua en el intervalo $[a, b]$ y sea F cualquier función primitiva de f, es decir $F'(x) = f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema de integración por partes
Sean f y g dos funciones reales derivables en el intervalo $[a, b]$. En estas condiciones se cumple

$$\int_a^b f'(x)g(x)\, dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\, dx$$

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$ (sentado un día vi un valiente soldado vestido de uniforme)

Teorema del cambio de variable
Sea g una función con derivada g' continua en $[a,b]$, y sea f una función real y continua en el mismo intervalo. SI hacemos el cambio de variable $t = g(x)$ se cumple que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

Límites cuando $x \longrightarrow \pm\infty$
Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que Grado$(P(x)) = n$ y Grado$(Q(x)) = m$. Sea A el coeficiente del monomio de mayor grado de $P(x)$ y sea B el coeficiente del monomio de mayor grado de $Q(x)$

$$L = \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- $\lim_{x\longrightarrow\infty} P(x) = \pm\infty$ el signo depende del signo del coeficiente de mayor grado de este polinomio.

- Si $n > m \Longrightarrow L =$Signo$\left(\frac{A}{B}\right) \cdot \infty$

- Si $n < m \Longrightarrow L = 0$

- Si $n = m \Longrightarrow L = \frac{A}{B}$

Si $\lim_{x\longrightarrow\infty} P(x)^{Q(x)} = [1^\infty] = e^\lambda$, donde

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} Q(x)(P(x) - 1)$$

Regla de L'Hôpital Sean f y g dos funciones reales y derivables, entonces si

$$\lim_{x\longrightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \; o \; \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right] \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\longrightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aproximaciones cuando $x \longrightarrow 0$

$\sin x \approx x$	$\tan x \approx x$	$e^x \approx 1 + x$	$\log(1 + x) \approx x$
$a^x \approx 1 + x \ln a$	$\arcsin x \approx x$	$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$	$\arccos \approx \frac{\pi}{2} - x$

3.2. Andalucía

3.2.1. Modelo de 2020

Problema 3.2.1 Se considera Ia función $f(x) = x^3 - 9x + 2$

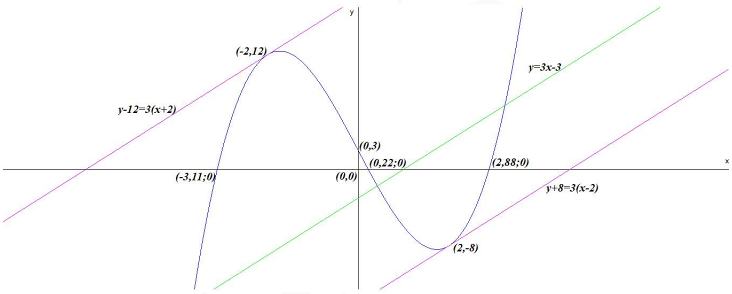
a) Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica que sean paralelas a la recta $y = 3x - 3$.

b) Estudie la monotonía y la curvatura de la función f.

c) Calcule $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 - 9 \Longrightarrow m = f'(a) = 3a^2 - 9 = 3 \Longrightarrow a = \pm 2 \Longrightarrow f(2) = -8 \Longrightarrow y + 8 = 3(x - 2)$ y $f(-2) = 12 \Longrightarrow y - 12 = 3(x + 2)$:



b) Monotonía: $f'(x) = 3x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

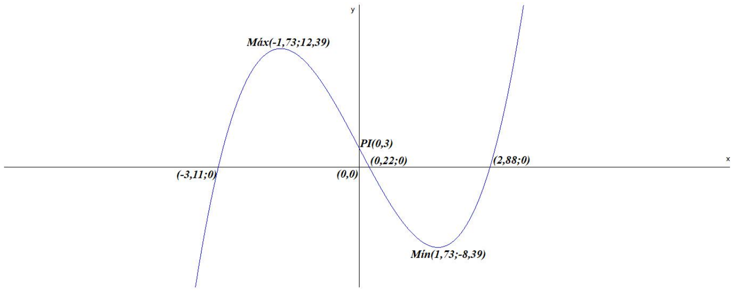
	$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$\left(\sqrt{3}, \infty\right)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función crece en el intervalo $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right)$ y deceece en el intervalo $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. La función tiene un máximo en el punto $(-\sqrt{3}, 2 + 6\sqrt{3}) = (-1,73; 12,39)$ y un mínimo en el punto $(\sqrt{3}, 2 - 6\sqrt{3}) = (1,73; -8,39)$

Curvatura: $f''(x) = 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

La función es convexa en el intervalo $(-\infty, 0)$ y cóncava en el intervalo $(0, \infty)$. Tiene un punto de inflexión en el punto $(0, 3)$.



c) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int (x^3 - 9x + 2)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} + 2x + C$

Problema 3.2.2 Sea la función $f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{1}{x-1} & \text{si} & x < 0 \\ x^2 + a & \text{si} & x \geq 0 \end{array} \right.$

a) Determine el valor del parámetro a para que f sea continua en todo su dominio. Para ese valor de a, estudie la derivabilidad de f.

b) Para $a = -2$, estudie la monotonía y curvatura de la función f. ¿Tiene algún punto de inflexión?

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:

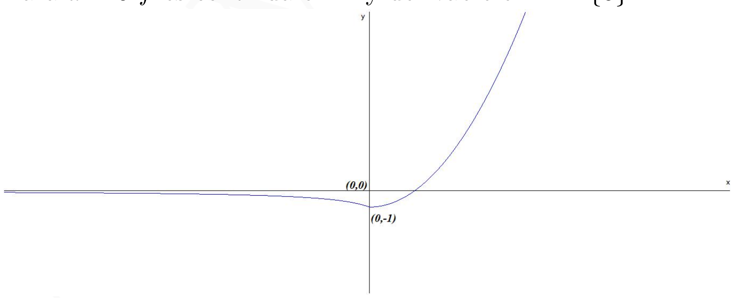
$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{1}{x-1} = -1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} (x^2 + a) = a$$

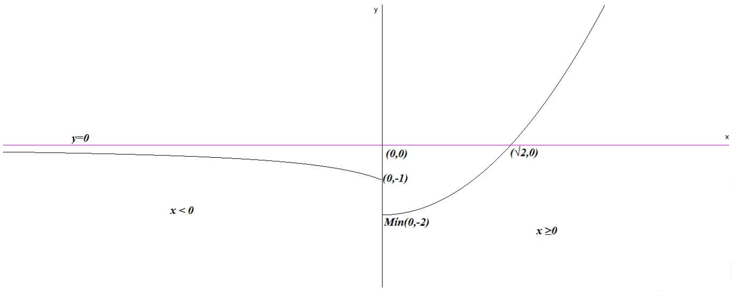
Luego $a = -1$.

$f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} -\frac{1}{(x-1)^2} & \text{si} & x < 0 \\ 2x & \text{si} & x \geq 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(0^-) = -1 \\ f(0^+) = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.

Para $a = 0$ f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.



b) Para $a = -2 \Longrightarrow f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{1}{x-1} & \text{si} & x < 0 \\ x^2 - 2 & \text{si} & x \geq 0 \end{array} \right.$ La función no es continua en $x = 0$ hay un salto y, por tanto, no es derivable en ese punto.



En la rama $x < 0$:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0, \quad \forall x \in (-\infty, 0)$$

Luego f es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

La función es convexa en el intervalo $(-\infty, 0)$ y no tiene puntos de inflexión.
En esta rama habría una asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \longrightarrow -\infty$.
En la rama $x \geq 0$: Empezaría en el punto $(0, f(0)) = (0, -2)$ $f'(x) = 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $f'(x) > 0 \ \ \forall x \in [0, \infty) \Longrightarrow f$ es creciente en el intervalo $[0, \infty)$ con un mínimo relativo en $(0, -2)$

$$f''(x) = 2 > 0 \Longrightarrow f \text{ cóncava en } [0, \infty) \ \smile$$

en esta rama tampoco habría puntos de inflexión.

3.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.2.3 Se considera la función $f(x) = ax^3 + bx + 4$, con a y b números reales.

a) Determine los valores de a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto (2, 36)

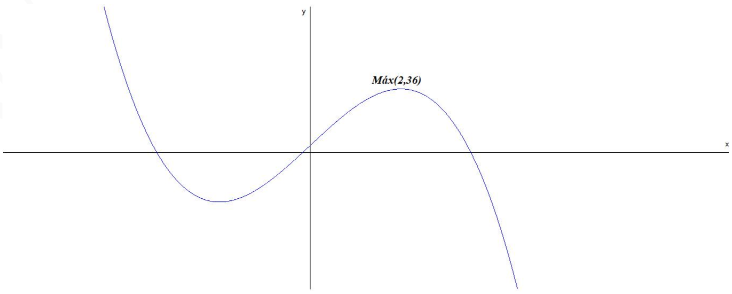
b) Para $a = 4$ y $b = -3$, estudie la monotonía de f y determine sus extremos. relativos.

c) Para $a = 4$ y $b = -3$, calcule la función $F(x)$ que verifica $F'(x) = f(x)$ y $F(2) = 10$.

Solución:

a) $f(x) = ax^3 + bx + 4 \Longrightarrow f'(x) = 3ax^2 + b$

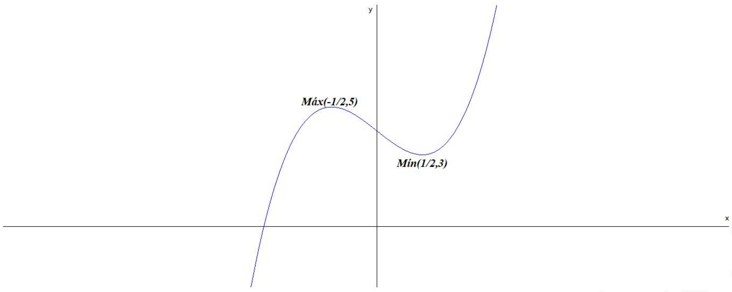
$$\left\{ \begin{array}{l} f(2) = 36 \Longrightarrow 8a + 2b = 32 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12a + b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -2 \\ b = 24 \end{array} \right. \Longrightarrow f(x) = -2x^3 + 24x + 4$$



b) $f(x) = 4x^3 - 3x + 4 \Longrightarrow f'(x) = 12x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, 1/2)$	$(1/2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función crece en el intervalo $(-\infty, -1/2) \cup (1/2, \infty)$ y deceece en el intervalo $(-1/2, 1/2)$. La función tiene un máximo en el punto $(-1/2, 5)$ y un mínimo en el punto $(1/2, 3)$



c) $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx = \int (4x^3 - 3x + 4)\,dx = x^4 - \frac{3x^2}{2} + 4x + C$

$$F(2) = 16 - 6 + 8 + C = 10 \Longrightarrow C = -8 \Longrightarrow F(x) = x^4 - \frac{3x^2}{2} + 4x - 8$$

Problema 3.2.4 Se pide:

a) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = (-5 + x^2)^2 e^{3x}, \quad g(x) = \frac{\ln(x^3 - 5x)}{1 - x^2}$$

b) Calcule el área del recinto acotado por la gráfica de $h(x) = -x^2 + 2x + 3$ y el eje de abscisas.

Solución:

a) Derivadas:

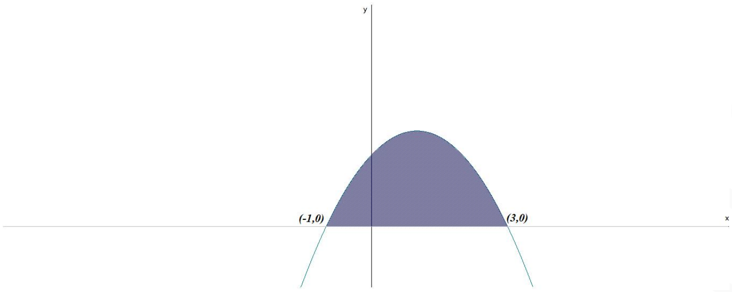
- ☛ $f(x) = (-5 + x^2)^2 e^{3x} \Longrightarrow f'(x) = 2(-5 + x^2)(2x)e^{3x} + (-5 + x^2)^2 3e^{3x} =$ $(-5 + x^2)(2x)e^{3x}\left[4x + 3(-5 + x^2)\right] = (-5 + x^2)(3x^2 + 4x - 15)e^{3x} + C$

- ☛ $g(x) = \dfrac{\ln(x^3 - 5x)}{1 - x^2} = \dfrac{\frac{3x^2-5}{x^3-5x}(1 - x^2) - (-2x)\ln(x^3 - 5x)}{(1 - x^2)^2} =$ $\dfrac{-3x^4 + 8x^2 - 5 + 2x(x^3 - 5x)\ln(x^3 - 5x)}{(x^3 - 5x)(1 - x^2)^2}$

b) Calculamos los puntos de corte de h con el eje de abscisas: $h(x) = -x^2 + 2x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 3$, que serán los límites de integración.

$$S_1 = \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)\,dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\bigg]_{-1}^{3} = \frac{32}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{32}{3} \simeq 10,67\ u^2$$



3.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.2.5 Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{a}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ a + be^x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

a) Calcule los valores a y b para que la función sea continua y derivable en su dominio.

b) Para $a = 2$ y $b = -2$, estudie la monotonía de la función f y calcule sus extremos relativos.

c) Para a $a = 2$ y $b = -2$, determine las ecuaciones de las asíntotas de f, si existen.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \left(2 + \frac{a}{x-1}\right) = 2 - a$$

.

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} (a + be^x) = a + b$$

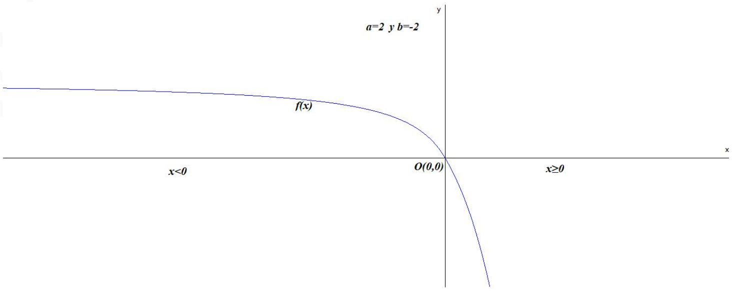
.

$$2 - a = a + b \Longrightarrow 2a + b = 2$$

Derivabilidad en $x = 0$: $f'(x) = \begin{cases} -\frac{a}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ be^x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(0^-) = -a \\ f(0^+) = b \end{cases} \Longrightarrow -a = b \Longrightarrow a + b = 0$.

$$\begin{cases} 2a + b = 2 \\ a + b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}$$

Para $a = 2$ y $b = -2 \Longrightarrow f$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$



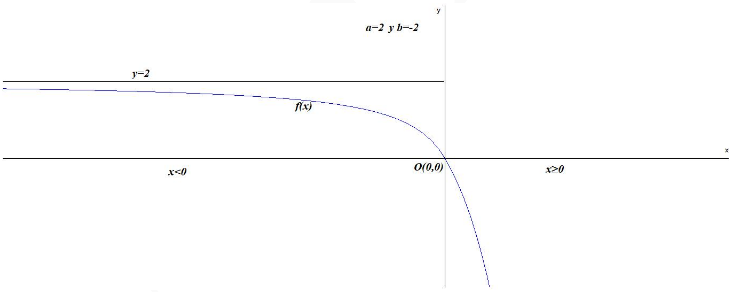
b) Si $a=2$ y $b=-2 \Longrightarrow f(x)=\left\{\begin{array}{lll} 2+\frac{2}{x-1} & \text{si} & x<0 \\ 2-2e^x & \text{si} & x\geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow f'(x)=\left\{\begin{array}{lll} -\frac{2}{(x-1)^2} & \text{si} & x<0 \\ -2e^x & \text{si} & x\geq 0 \end{array}\right.$
En la rama $x<0 \Longrightarrow f'(x)=-\frac{2}{(x-1)^2}<0 \ \ \forall x\in(-\infty,0) \Longrightarrow f$ decrece en el intervalo $(-\infty,0)$
En la rama $x\geq 0 \Longrightarrow f'(x)=-2e^x<0 \ \ \forall x\in[0,\infty) \Longrightarrow f$ decrece en el intervalo $[0,\infty)$
Luego f decrece en $(-\infty,0)\cup[0,\infty)=\mathbb{R}$.
Como la función es siempre decreciente no tiene extremos.

c) Asíntotas:
En la rama $x<0$:

- ☞ Verticales: no hay, el denominador no se anula para ningún valor del intervalo $(-\infty,0)$
- ☞ Horizontales: en $y=2$ ya que
$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}\left(2+\frac{2}{x-1}\right)=2$$
- ☞ Oblicuas: no hay por haber horizontales.

En la rama $x\geq 0$:

- ☛ Verticales: no hay, el dominio de la exponencial es el intervalo $[0,\infty)$
- ☛ Horizontales: no hay
$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}(2-2e^x)=-\infty$$
- ☛ Oblicuas: $y=mx+n$
$$m=\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{2-2e^x}{x}=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{2e^x}{1}=\infty$$
Luego no hay oblicuas.



Problema 3.2.6 Se considera la función $f(x)=\left\{\begin{array}{lll} -x+2 & \text{si} & x\leq 2 \\ -x^2+6x-8 & \text{si} & 2<x<4 \\ \frac{x-3}{x} & \text{si} & x\geq 4 \end{array}\right.$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de f en su dominio.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

c) Calcule $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx$.

Solución:

a) Las tres ramas son continuas y derivables, estudiamos en $x = 2$ y en $x = 4$.
Analizamos la continuidad de la función en estos puntos:

- ☛ Continuidad en $x = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^-} (-x+2) = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^+} \left(-x^2+6x-8\right) = 0$$

$$f(2) = 0$$

Luego f es continua en $x = 2$.

- ☛ Continuidad en $x = 4$

$$\lim_{x\longrightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 4^-} \left(-x^2+6x-8\right) = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 4^+} \left(\frac{x-3}{x}\right) = \frac{1}{4}$$

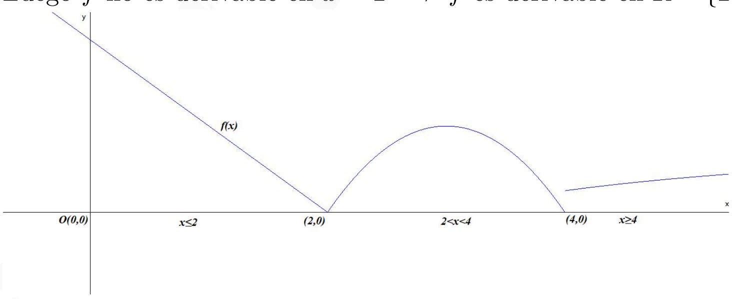
Luego f no es continua en $x = 4$ donde hay un salto.

- ☛ En conclusión f es continua en $\mathbb{R} - \{4\}$

Estudiamos la derivabilidad de f en $x = 2$. (En $x = 4$ no es continua y, por tanto no es derivable)

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} -1 & \text{si} & x \le 2 \\ -2x+6 & \text{si} & 2 < x < 4 \\ \frac{3}{x^2} & \text{si} & x \ge 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(2^-) = -1 \\ f'(2^+) = 2 \end{array}\right.$$

Luego f no es derivable en $x = 2 \Longrightarrow f$ es derivable en $\mathbb{R} - \{2, 4\}$



b) Hacemos $-2x+6 = 0 \Longrightarrow x = 3$ y tendremos:

	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función decrece en el intervalo $(-\infty, 2) \cup (3, 4)$ y ceece en el intervalo $(2, 3) \cup (4, \infty)$.

c) $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 (-x^2+6x-8)\,dx = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x\Big]_2^3 = \frac{2}{3}$

3.3. Aragón

3.3.1. Modelo de 2020

Problema 3.3.1 El precio (en euros) de una acción de una compañía entre las nueve y las diez de la mañana ha venido dado por la siguiente expresión

$$P(x) = 12 - \frac{2x-8}{x^2+4x+4}$$

donde $x \in [0, 60]$ es el tiempo en minutos desde las nueve de la mañana. Calcular:

a) El precio de la acción a las nueve y media.

b) Entre las nueve y las diez de la mañana, ¿durante cuánto tiempo la acción ha tenido un precio mayor que 12 euros?

c) El máximo y mínimo precio que ha alcanzado la acción entre las nueve y las diez de la mañana.

Solución:

a) $P(30) = \dfrac{3059}{256} = 11,9492$

b) $P'(x) = \dfrac{2(x-10)}{(x+2)^3} = 0 \Longrightarrow x = 10.$

	$[0, 10)$	$(10, 60]$
$P'(x)$	$-$	$+$
$P(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

$P(x) = 12 \Longrightarrow 12 - \dfrac{2x-8}{x^2+4x+4} = 12 \Longrightarrow x = 4.$
Tenemos que cuando $x = 0 \Longrightarrow P(0) = 14$ y la función decrece hasta $x = 4$ donde la función vale $P(4) = 12$ y sigue decreciendo hasta $x = 10$ donde valor es 11,9167, luego el valor es superior a 12 en el intervalo $[0, 4)$.
Por otra parte la función empieza a crecer a partir de $x = 10$ y tenemos que $P(60) = 11, 97$, es decir, la función no llega a superar 12 en ningún punto del intervalo $(10, 60]$.
En conclusión el intervalo pedido será $[0, 4)$.

c) El valor máximo se dará en el momento de partida $(0, 14)$ y el mínimo en el punto $(10; 11, 9167)$.

Problema 3.3.2 Se pide:

a) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 6$, con $x \in \mathbb{R}$, encontrar, si existen, a y b tales que f tenga un maximo relativo en $x = -2$ con valor $f(-2) = -6$.

b) Calcular:

$$\int_0^1 \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} - 3xe^{-4x^2} \right) dx$$

Solución:

a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 6$ y $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 3$

$$\left\{\begin{array}{l} f'(-2) = 0 \Longrightarrow 12a - 4b + 3 = 0 \\ f(-2) = -6 \Longrightarrow -8a + 4b - 6 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 3/4 \\ b = 3 \end{array}\right.$$

$f(x) = \dfrac{3}{4}x^3 + 3x^2 + 3x - 6$

Comprobamos que en $x = -2$ hay un máximo:

$$f''(x) = 6ax + 2b = 6\frac{3}{4}x + 6 = \frac{9}{2}x + 6, \quad f''(-2) = -9 + 6 = -3 < 0 \text{ y } f'(-2) = 0$$

$$\Longrightarrow x = -2 \text{ es un máximo}$$

b)

$$\int \frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = 8x^2 + 1 \\ dt = 16x dx \\ dx = \frac{dt}{16x} \end{array}\right] = \int \frac{5x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{dt}{16x} = \frac{5}{16}\int t^{-1/2}\,dt =$$

$$\frac{5}{16} \cdot \frac{t^{1/2}}{1/2} + C = \frac{5\sqrt{8x^2+1}}{8} + C$$

$$\int 3xe^{-4x^2}dx = \left[\begin{array}{c} t = -4x^2 \\ dt = -8x dx \\ dx = \frac{dt}{-8x} \end{array}\right] = \int 3xe^t \frac{dt}{-8x} = -\frac{3}{8}\int e^t dt = -\frac{3}{8}e^t + C = -\frac{3}{8}e^{-4x^2} + C$$

$$\int_0^1 \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} - 3xe^{-4x^2}\right) dx = \left[\frac{5\sqrt{8x^2+1}}{8} + \frac{3}{8}e^{-4x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{8}(7 + 3e^{-4}) = 0,88$$

3.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.3.3 Se pide:

a) Calcular la derivada de $f(x) = e^{3x^2-5x}$

b) Calcular: $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}}$

c) Calcular: $\displaystyle\int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right) dx$

Solución:

a) $f(x) = e^{3x^2-5x} \Longrightarrow f'(x) = (6x-5)e^{3x^2-5x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{3x}{\sqrt{16x^2}} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$

c) $\displaystyle\int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right) dx = x^3 - \frac{\sqrt{4x+1}}{2}\Bigg]_0^2 = \frac{13}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 7$

Nota: $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = 4x + 1 \\ dt = 4dx \\ dx = \frac{dt}{4} \end{array}\right] = \int \frac{1}{4\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\sqrt{t} = \frac{1}{2}\sqrt{4x+1}$

Problema 3.3.4 El coste unitario de fabricación de un producto (en euros) depende del tamaño de la producción a través de la siguiente fórmula:

$$C(x) = \frac{1}{10}(x^2 - 16x + 100)$$

Donde $x \in [2, 15]$ es el tamaño de la producción (en miles de unidades) y C es el coste unitario (en euros). Calcular:

a) Si se producen 5000 unidades, ¿cuánto vale el coste unitario?

b) ¿Para qué valores del tamaño de la producción $x \in [2, 15]$ el coste unitario es inferior a 4 euros?

c) ¿Para qué tamaño de la producción $x \in [2, 15]$ se alcanza el coste unitario mínimo? ¿Y el máximo? ¿Cuánto valen estos costes?

Solución:

a) $C(5) = \dfrac{9}{2} = 4,5$ €

b) $\dfrac{1}{10}(x^2 - 16x + 100) < 4 \Longrightarrow x^2 - 16x + 60 < 0 \Longrightarrow x \in (6, 10)$, es decir entre 6000 y 10000 unidades.

Nota: $x^2 - 16x + 60 = 0 \Longrightarrow x = 6$ y $x = 10$

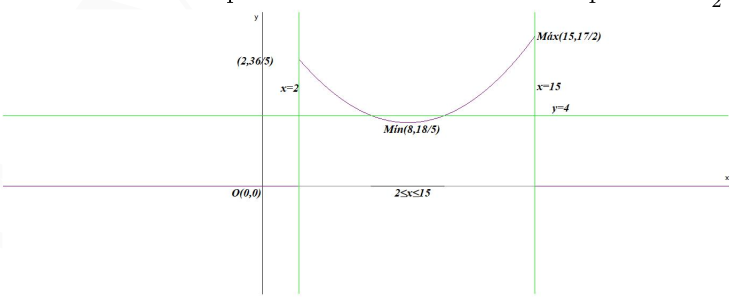
$[2, 6)$	$(6, 10)$	$(10, 12]$
$+$	$-$	$+$

$\Longrightarrow (6, 10)$

c) $C'(x) = \dfrac{x-8}{5} = 0 \Longrightarrow x = 8$ y

	$[2, 8)$	$(8, 12]$
$C'(x)$	$-$	$+$
$C(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función decrece en el intervalo $[2, 8)$ y crece en $(8, 12]$ con un mínimo local en $(8, 18/5)$.
Como $C(2) = 7,2$ y $C(15) = 8,5$ la función presenta un máximo en el punto $(15, 17/2)$.
El mínimo se alcanza con una producción de 8000 unidades a un precio de $\frac{18}{5} = 3,6$ € y el máximo cuando se producen 15000 unidades a un precio de $\frac{17}{2} = 8,5$ €



3.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.3.5 Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 12}{x - 1}$$

a) Dominio de f.

b) ¿Para qué valores de x se cumple $f(x) < 0$?

c) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) Máximos y mínimos relativos de f.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

b) $f(x) < 0 \Longrightarrow \dfrac{x^2 - 4x + 12}{x - 1} < 0 \Longrightarrow x \in (-\infty, 1)$
Nota: $x^2 - 4x + 12 > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ y $x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$

$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$-$	$+$

$\Longrightarrow x \in (-\infty, 1)$

c) Asíntotas:

- Verticales: en $x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x^2 - 4x + 12}{x - 1} = \left[\frac{9}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^2 - 4x + 12}{x - 1} = \left[\frac{9}{0^+} \right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 12}{x - 1} = \infty$$

- Oblicuas:$y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 12}{x^2 - x} = 1$$

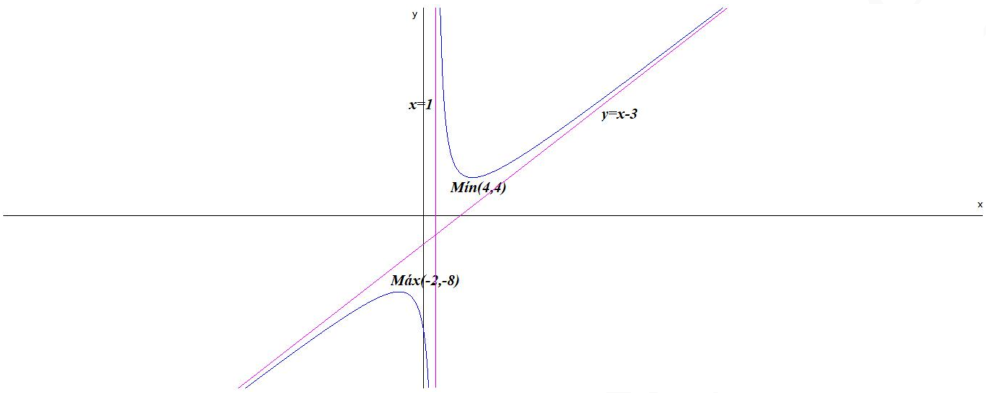
$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4x + 12}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{-3x + 12}{x - 1} = -3$$

$$y = x - 3$$

d) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{(x - 1)^2} = 0 \Longrightarrow x = -2$ y $x = 4$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función f crece en el intervalo $(-\infty,-2)\cup(4,\infty)$.
La función f decrece en el intervalo $(-2,1)\cup(1,4)$ (Hay que quitar $x=1$ en el intervalo (-2,4) por no estar en el dominio)
La función f tiene un máximo en el punto $(-2,-8)$.
La función f tiene un mínimo en el punto $(4,4)$.



Problema 3.3.6 Dada la función, definida para $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccr}\frac{3}{x+1} & \text{si} & x<-1\\ x^3-4x^2+2x-10 & \text{si} & -1\le x\le 4\\ \sqrt{4x^2-7x}-2x & \text{si} & x>4\end{array}\right.$$

a) Estudiar la continuidad de f.

b) Calcular: $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x)$

c) Calcular: $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

Solución:

a) Las tres ramas son continuas, estudiamos en $x=-1$ y en $x=4$.
Analizamos la continuidad de la función en estos puntos:

- Continuidad en $x=-1$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow -1^-}\frac{3}{x+1}=\left[\frac{3}{0^-}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow -1^+}\left(x^3-4x^2+2x-10\right)=-17$$

Luego f es no continua en $x=-1$, hay un salto. La discontinuidad en ese punto no es evitable.

- Continuidad en $x=4$

$$\lim_{x\longrightarrow 4^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 4^-}\left(x^3-4x^2+2x-10\right)=-2$$

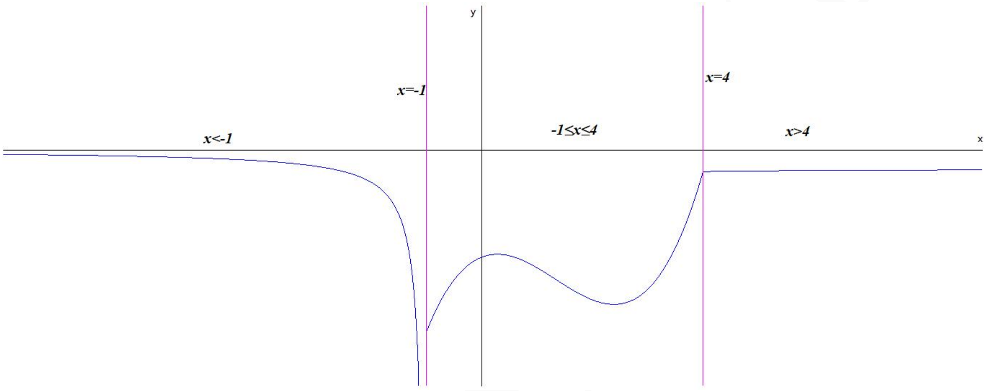
$$\lim_{x\longrightarrow 4^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 4^+}\left(\sqrt{4x^2-7x}-2x\right)=-2$$

$$f(4)=-2$$

Luego f es continua en $x=4$.

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} (\sqrt{4x^2-7x}-2x) = [\infty-\infty] =$
$\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{(\sqrt{4x^2-7x}-2x)(\sqrt{4x^2-7x}+2x)}{\sqrt{4x^2-7x}+2x} = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{4x^2-7x-4x^2}{\sqrt{4x^2-7x}+2x} =$
$\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{-7x}{\sqrt{4x^2-7x}+2x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{-7x}{\sqrt{4x^2}+2x} = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{-7x}{4x} = -\dfrac{7}{4}$

c) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (x^3-4x^2+2x-10)\,dx = \left.\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+x^2-10x\right]_1^2 = -\frac{151}{12} = -12,583$



3.4. Asturias

3.4.1. Modelo de 2020

Problema 3.4.1 A la hora de estudiar la relación entre el beneficio de una empresa y el producto vendido, se representa por $f(x)$ el beneficio mensual, en miles de euros, si se han vendido x toneladas de producto ese mes. Si un mes se venden como mucho 10 toneladas de producto, el beneficio mensual se puede considerar que es de $10x - \frac{5x^2}{4} + 1800$ miles de euros. Si se venden más de 10 toneladas, el beneficio mensual se considera que es constante e igual a 1805000 euros.

a) Obtén la expresión de dicha función f para cualquier valor positivo x.

b) ¿Es el beneficio una función continua de la cantidad de producto vendido?

c) Estudia y representa gráficamente la función f.

d) ¿Cuál es el beneficio mensual mínimo? ¿Puede llegar algún mes a tener unos beneficios de 1900 miles de euros? ¿y de 1815 miles de euros?

Solución:

a) $b(x) = \begin{cases} 10x - \frac{5x^2}{4} + 1800 & \text{si} \quad 0 < x \le 10 \\ 1805 & \text{si} \quad x > 10 \end{cases}$

b) Hay que estudiar la continuidad en $x = 10$

$$\lim_{x\longrightarrow 10^-} b(x) = \lim_{x\longrightarrow 10^-} \left(10x - \frac{5x^2}{4} + 1800\right) = 1775$$

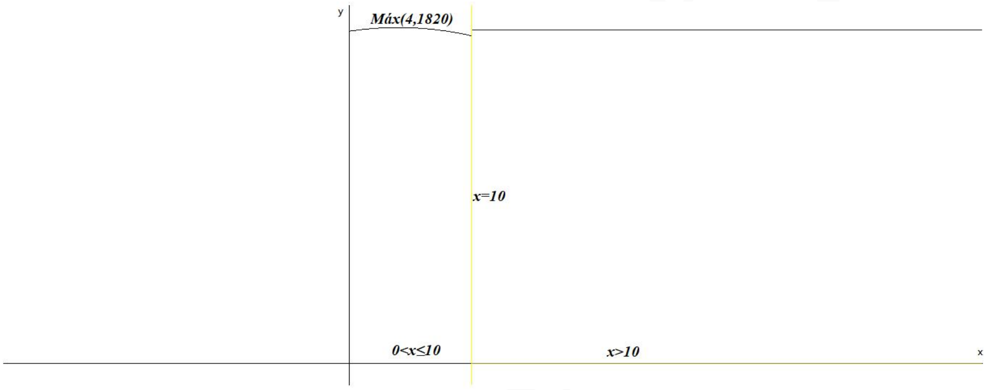
$$\lim_{x\longrightarrow 10^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 10^+} (1805000) = 1805$$

Luego f no es continua en $x = 10$, hay un salto. La discontinuidad en ese punto no es evitable. La función f es continua en el intervalo $(0, 10) \cup (10, \infty)$

c) El $\text{Dom}(b) = (0, \infty)$. Si $x = 0 \Longrightarrow (0, 1800)$ punto de corte con el eje de ordenadas y no corta al eje de abscisas.
$b'(x) = \begin{cases} 10 - \frac{5x}{2} & \text{si} \quad 0 < x \le 10 \\ 0 & \text{si} \quad x > 10 \end{cases} \Longrightarrow 10 - \frac{5x}{2} = 0 \Longrightarrow x = 4$

	$(0, 4)$	$(4, 10]$
$b'(x)$	$+$	$-$
$b(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

La función crece en el intervalo (0,4) y decrece en el (4,10] a partir de $x = 10$ la función es constante. Luego hay un máximo local en el punto (4,1820)



d) El beneficio mínimo estaría en $b(0) = 1800$ o en $b(10) = 1775$ luego el beneficio mínimo se produce cuando se venden exactamente 10 Tm por 1775000€. El valor máximo se obtiene cuando se venden 4 Tm por 1820000€ y, por tanto nunca se llega a unos beneficios de 1900000€, pero si a unos beneficios de 1815000€.

Problema 3.4.2 Dada la función $f(x) = \dfrac{9}{x} - \dfrac{18}{x^2} - 1$, se pide:

a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 20$.

b) Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 12$.

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int \left(\frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1\right) = 9\ln x - x + \frac{18}{x} + C$

$F(1) = 17 + C = 20 \Longrightarrow C = 3 \Longrightarrow F(x) = 9\ln x - x + \dfrac{18}{x} + 3$

b) $f(x) = \dfrac{-x^2 + 9x - 18}{x^2}$

I. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

II. Puntos de corte con OY: no hay
Puntos de corte con $OX : -x^2 + 9x - 18 = 0 \Longrightarrow (3, 0)$ y $(6, 0)$

III. Signo:

	$(-\infty,3)$	$(3,6)$	$(6,\infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

IV. Simetría: No hay

V. Asíntotas:

- ✍ Verticales: $x=0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{-x^2+9x-18}{x^2}=\left[\ \frac{-18}{0^+}\ \right]=-\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{-x^2+9x-18}{x^2}=\left[\ \frac{-18}{0^+}\ \right]=-\infty$$

- ✍ Horizontales: $y=-1$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{-x^2+9x-18}{x^2}=-1$$

- ✍ Oblicuas: No hay por haber horizontales

VI. Monotonía: $f'(x)=\dfrac{9(4-x)}{x^3}=0\Longrightarrow x=4$

	$(-\infty,0)$	$(0,4)$	$(4,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

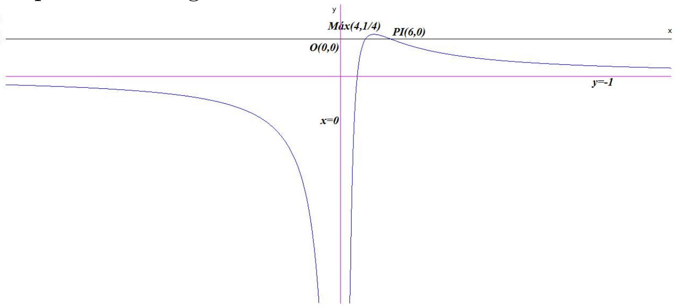
La función crece en el intervalo: $(0,4)$.
La función decrece en el intervalo: $(-\infty,0)\cup(4,\infty)$.
La función tiene un máximo en el punto $\left(4,\dfrac{1}{8}\right)$.

VII. Curvatura: $f''(x)=\dfrac{18(x-6)}{x^4}=0\Longrightarrow x=6$

	$(-\infty,6)$	$(6,\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

La función convexa en el intervalo: $(-\infty,0)\cup(0,6)$.
La función cóncava en el intervalo: $(6,\infty)$.
La función tiene un punto de inflexión en $(6,0)$.

VIII. Representación gráfica:



IX. La función corta al eje OX en $x = 3$ y en $x = 6$ ambos puntos dentro del intervalo de integración $[1, 12]$, luego tendremos tres áreas S_1 entre 1 y 3, S_2 entre 3 y 6 y S_3 entre 6 y 12.

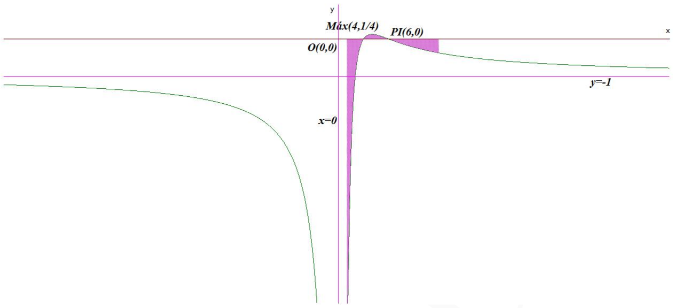
$$F(x) = \int \left(\frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1\right) dx = 9\ln|x| - x + \frac{18}{x}$$

$$S_1 = \int_1^3 f(x)\,dx = F(3) - F(1) = 9\ln 3 - 14 \simeq -4,112$$

$$S_2 = \int_3^6 f(x)\,dx = F(6) - F(3) = 9\ln 2 - 6 \simeq 0,238$$

$$S_3 = \int_6^{12} f(x)\,dx = F(12) - F(3) = 9\ln 2 - \frac{15}{2} \simeq -1,262$$

$$S = |S_1| + |S_2| + |S_3| = \frac{31}{2} - 9\ln 3 \simeq 5,612\ u^2$$



3.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.4.3 Dada la función $f(x) = \dfrac{a}{x+1}$, se pide:

a) Encontrar el valor de a que verifica que $F(0) = 0$ y $F(1) = 10\ln(2)$, donde F denota una primitiva de f.

b) Suponiendo que $a = 10$, estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = -2$.

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx = \int \frac{a}{x+1}\,dx = a\ln(x+1) + C$
$F(0) = C = 0$ y $F(1) = a\ln 2 = 10\ln 2 \Longrightarrow a = 10$. Luego $F(x) = 10\ln(x+1)$

b) Tenemos $f(x) = \dfrac{10}{x+1}$

1. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$
2. Puntos de corte con OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 10)$
   Puntos de corte con OX: no hay
3. Signo:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

4. Simetría: No hay

5. Asíntotas:

   ✍ Verticales: $x = -1$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{10}{x+1} = \left[\ \frac{10}{0^-} \ \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{-x^2 + 9x - 18}{x^2} = \left[\ \frac{10}{0^+} \ \right] = +\infty$$

   ✍ Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{10}{x+1} = 0$$

   ✍ Oblicuas: No hay por haber horizontales

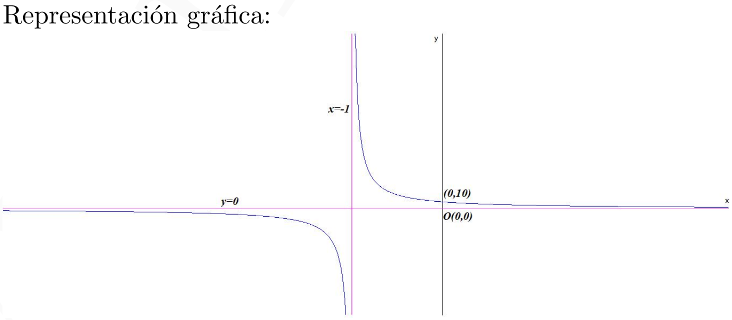
6. Monotonía: $f'(x) = -\dfrac{10}{(x+1)^2} \neq 0 \Longrightarrow$ No hay extremos. Como $f'(x) < 0 \ \forall x \in$Dom$(f)$ la función es siempre decreciente en $\mathbb{R} - \{-1\}$

7. Curvatura: $f''(x) = \dfrac{20}{(x+1)^3} \neq 0 \Longrightarrow$ no hay puntos de inflexión.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava $\smile$	convexa $\frown$

   La función es cóncava en el intervalo: $(-\infty, -1)$.
   La función es convexa en el intervalo: $(-1, \infty)$.

8. Representación gráfica:

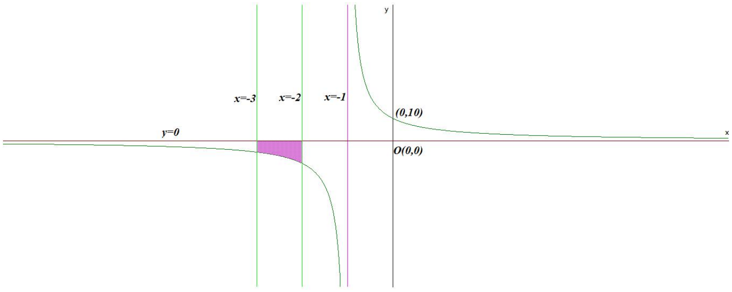


9.

$$F(x) = \int \frac{10}{x+1}\, dx = 10 \ln |x+1|$$

$$S_1 = \int_{-3}^{-2} f(x)\, dx = F(-2) - F(-3) = 10 \ln 1 - 10 \ln 2 = -10 \ln 2 \simeq -6,9315$$

$$S = |S_1| = 10 \ln 2 \simeq 6,9315 \ u^2$$



Problema 3.4.4 A la hora de estudiar la relación entre el beneficio mensual de una empresa y cantidad de producto fabricado, se representa por $f(x)$ el beneficio mensual, en millones de euros, si se han fabricado x toneladas de producto ese mes. Si en un mes se fabrican como mucho 100 toneladas de producto, el beneficio mensual se puede considerar que es $\dfrac{1}{100}(-x^2 + 100x - 1600)$ millones de euros, mientras que si se fabrican más de 100 toneladas de producto, el beneficio viene dado por $1 - \dfrac{120}{x}$.

a) Obtén la expresión de la función f. Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[0, \infty)$.

b) ¿Qué cantidad debe fabricar para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Qué cantidad hay que fabricar para que el beneficio sea positivo?

Solución:

a) La función beneficio $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100}(-x^2 + 100x - 1600) & \text{si} \quad 0 < x \le 100 \\ 1 - \dfrac{120}{x} & \text{si} \quad x > 100 \end{cases}$

Seguimos los siguientes pasos:

- Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = (0, \infty)$
- Continuidad: las dos ramas son continuas, estudiamos en x=100

$$\lim_{x \longrightarrow 100^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 10^-} \frac{1}{100}(-x^2 + 100x - 1600) = -16$$

$$\lim_{x \longrightarrow 10^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 10^+} \left(1 - \frac{120}{x}\right) = -0,2$$

  Luego f no es continua en $x = 100$, hay un salto. La discontinuidad en ese punto no es evitable.

- La rama $0 < x \le 100$ tiene dos puntos de corte con el eje de abscisas: $\frac{1}{100}(-x^2 + 100x - 1600) = 0 \Longrightarrow x = 20$ y $x = 60$, es decir, los puntos $(20, 0)$ y $(60, 0)$. Con el eje de ordenadas tiene $(0, f(0)) = (0, -16)$.

  La rama $x > 100$ tiene un punto de corte con el eje de abscisas $1 - \dfrac{120}{x} = 0 \Longrightarrow x = 120$, es decir, el punto $(120, 0)$ y no tendría corte con el eje de ordenadas.

- Asíntotas:
  En la rama $0 < x \le 100$ no hay asíntotas por tratarse de un polinomio.
  En la rama $x > 100$ no hay verticales por ser $x > 0$, hay una horizontal en $y = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(1 - \frac{120}{x}\right) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x - 120}{x}\right) = 1$$

No habría oblicuas al haber horizontales.

- Monotonía: $f'(x)=\left\{\begin{array}{lcl} \frac{1}{100}(-2x+100) & \text{si} & 0<x\le 100\\ \dfrac{120}{x^2} & \text{si} & x>100 \end{array}\right.$

  En la rama $0<x\le 100 \Longrightarrow -2x+100=0 \Longrightarrow x=50$

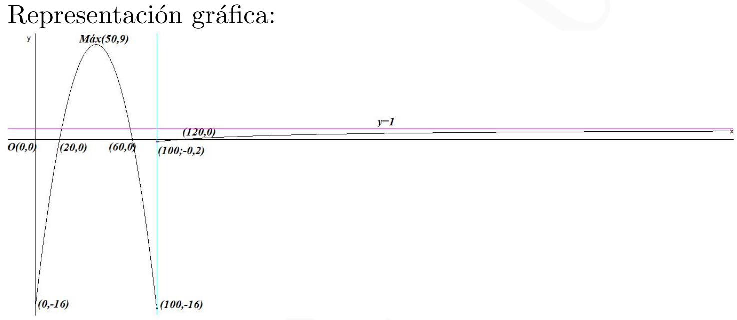
	$(0,50)$	$(50,100]$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

  La función crece en el intervalo $(0,50)$ y decrece en $(50,100]$ con un máximo local en $(50,9)$

  En la rama $x>100$ es $f'(x)>0\ \forall x\in(100,\infty) \Longrightarrow f$ es creciente en toda la rama.

- La rama $0<x\le 100$ tenemos $(0,f(0))=(0,-16)$ y $(100,f(100^-))=(100;-16)$. Y en la rama $x>100$ tenemos $(100;f(100^+))=(100;-0,2)$

- Representación gráfica:



b) Por los datos obtenidos en el apartado anterior hay que fabricar 50 Tm para obtener el máximo beneficio de 9000000€.
El beneficio será positivo siempre que fabrique entre 20 y 60 Tm.

3.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.4.5 Según una compañía telefónica, el coste de la transferencia de datos se descompone en dos conceptos: un coste fijo de 25 céntimos de euro por transferencia realizada más un coste variable en función de los gigabytes transferidos. El coste variable asociado a los 2 primeros gigabytes en gratis, pero a partir de 2 gigabytes, pasa a tarifar los gigabytes restantes a 10 céntimos de euro por gigabyte.

a) Si $f(x)$ representa el coste total en céntimos de euro de una transferencia en función de la cantidad de gigabytes transferidos en la misma (x), obtén la expresión de dicha función f para cualquier valor positivo x. ¿Es el coste una función continua de la cantidad transferida?

b) Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $(0,\infty)$. Si el coste total de una transferencia ha sido de 2,25 euros, ¿cuantos gigabytes se han transferido? ¿Cual es el coste mínimo de una transferencia cualquiera? ¿Y el coste máximo?

Solución:

a) La función coste $f(x)=\left\{\begin{array}{lcl} 25 & \text{si} & 0<x\le 2\\ 25+10(x-2) & \text{si} & x>2 \end{array}\right. \Longrightarrow$

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lcl} 25 & \text{si} & 0<x\le 2\\ 10x+5 & \text{si} & x>2 \end{array}\right.$$

Estudiamos su continuidad en $x = 2$, ya que las ramas son continuas:

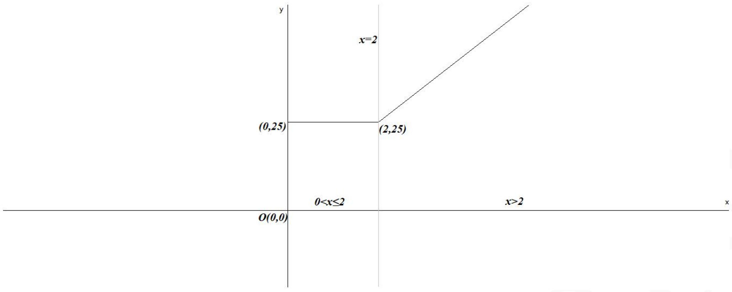
$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} 25 = 25$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} (10x + 5) = 25$$

$$f(2) = 25$$

Luego f es continua en $x = 2 \Longrightarrow f$ es continua en $\mathbb{R}$.

b) las ramas son dos rectas:



Si el coste de la trasferencia ha sido 225 céntimos $f(x) = 10x+5 = 225 \Longrightarrow x = 22$ gigabyte. El coste mínimo es de 25 céntimos y no hay coste máximo.

Problema 3.4.6 Dada la función $f(x) = \dfrac{6}{x+1} - 2$, se pide:

a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 2$.

b) Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo $[0, \infty)$. Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$.

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int \left(\frac{6}{x+1} - 2\right) = 6\ln|x+1| - 2x + C$
$F(0) = C = 2 \Longrightarrow F(x) = 6\ln|x+1| - 2x + 2$

b) $f(x) = \dfrac{6}{x+1} - 2 = \dfrac{-2x+4}{x+1}$

I. $\mathrm{Dom}(f) = [0, \infty)$

II. Puntos de corte con OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 4)$
Puntos de corte con OX : $-2x + 4 = 0 \Longrightarrow (2, 0)$

III. Signo:

	$[0,2)$	$(2,\infty)$
$f(x)$	$+$	$-$

IV. Simetría: No hay

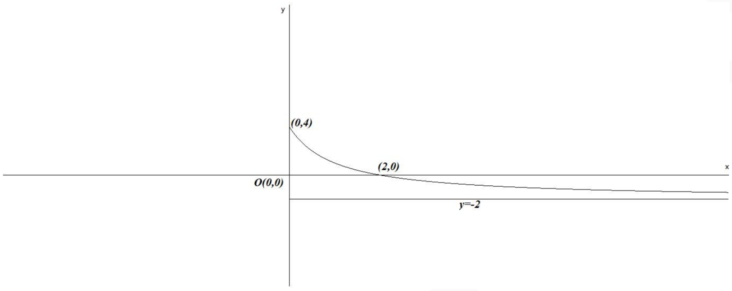
V. Asíntotas:

- Verticales: $x = -1 \notin [0, \infty) \Longrightarrow$ No hay
- Horizontales: $y = -2$ ya que $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{-2x+4}{x+1} = -2$
- Oblicuas: No hay por haber horizontales

VI. Monotonía: $f'(x) = -\dfrac{6}{(x+1)^2} \neq 0 \Longrightarrow$ No hay extremos. Como $f'(x) < 0 \ \forall x \in [0, \infty) \Longrightarrow f$ es decreciente en todo el dominio.

VII. Curvatura: $f''(x) = \dfrac{12}{(x+1)^3} \neq 0 \Longrightarrow$ No hay puntos de inflexión y $f''(x) > 0$ en todo el dominio, por lo que es siempre convexa $\frown$.

VIII. Representación gráfica:



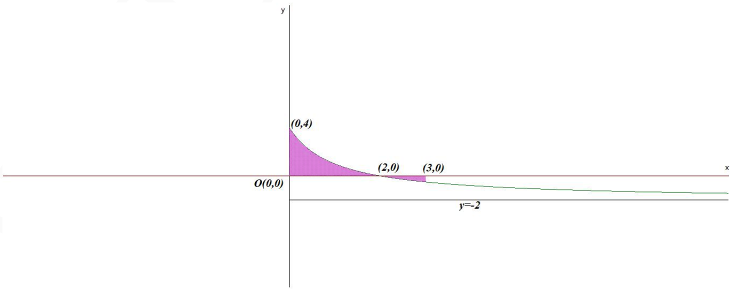
La función corta al eje OX en $x = 2$ punto dentro del intervalo de integración $[0, 3]$, luego tendremos dos áreas S_1 entre 0 y 2 y S_2 entre 2 y 3

$$F(x) = \int \left(\frac{6}{x+1} - 2\right) dx = 6 \ln |x+1| - 2x$$

$$S_1 = \int_0^2 f(x)\, dx = F(2) - F(0) = 6 \ln 3 - 4 - 0 = 6 \ln 3 - 4$$

$$S_2 = \int_2^3 f(x)\, dx = F(3) - F(2) = 6 \ln 4 - 6 - (6 \ln 3 - 4) = -6 \ln \left(\frac{3}{4}\right) - 2$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 6 \ln 3 - 4 + 6 \ln \left(\frac{3}{4}\right) + 2 = 12 \ln \left(\frac{3}{2}\right) - 2 \simeq 2,86558\ u^2$$



3.5. Cantabria

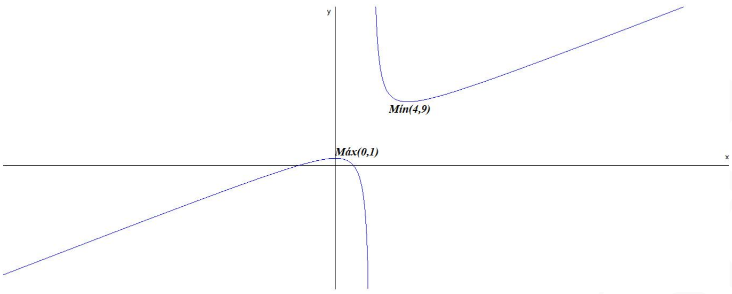
3.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.5.1 Dada la función: $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 2}$ obtener sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
Solución:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
- $f'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ y } x = 4$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función crece en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y decrece en el intervalo $(0, 2) \cup (2, 4)$. La función tiene un máximo local en el punto $(0, 1)$ y un mínimo en el punto $(4, 9)$



Problema 3.5.2 Dada la función $f(x) = \dfrac{2x+4}{x^2+5x+6}$

a) ¿En qué puntos es discontinua?

b) ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad?

c) Calcular los dos límites laterales en $x = -3$. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor.

Solución:

a) Dado que es un cociente de polinomios sólo puede haber discontinuidades en los puntos que anulan el denominador.

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -3, \ \ x = -2$$

Estudiamos la continuidad en estos puntos:

- ☛ En $x = -3$

$$\lim_{x \longrightarrow -3^-} \frac{2x+4}{x^2+5x+6} = \left[\frac{-2}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -3^+} \frac{2x+4}{x^2+5x+6} = \left[\frac{-2}{0^-} \right] = +\infty$$

En este caso hay una asíntota y se trata de una discontinuidad no evitable (hay un salto)

- ☛ En $x = -2$

$$\lim_{x \longrightarrow -2} \frac{2x+4}{x^2+5x+6} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \longrightarrow -2} \frac{2}{2x+5} = 2$$

En este caso los límites laterales coinciden pero no existe el valor de la función en $x = -2$ por lo que hay un agujero y se trata de una discontinuidad evitable.

b) En el caso de $x = -3$ no podemos encontrar un valor obligue a las dos ramas a unirse, dado que hay un salto. Pero en $x = -2$ si se podría hacer imponiendo $f(-2) = 2$, lo que sería una extensión por continuidad y quedaría la función g:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2x+4}{x^2+5x+6} & \text{si} \quad x \neq -2 \\ 2 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$$

La función g es continua en $R - \{-2\}$

c) Este apartado está desarrollado en el apartado $a)$

Problema 3.5.3 Dada la función: $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x - 1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x^2 - 5 & \text{si} \quad -1 < x \leq 3 \\ \frac{b+x}{3x-2} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$
determinar los valores de a y b para los que la función es continua en $x = -1$ y en $x = 3$.
Solución:

☛ En $x = -1$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} (ax^2 + 2x - 1) = a - 3$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} (x^2 - 5) = -4$$

$a - 3 = -4 \Longrightarrow a = -1$

☛ En $x = 3$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} (x^2 - 5) = 4$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} \frac{b + x}{3x - 2} = \frac{b + 3}{7}$$

$4 = \dfrac{b + 3}{7} \Longrightarrow b = 25$

3.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.5.4 Dada la función $f(x) = \dfrac{x + 5}{2x^2 + 4x - 30}$

a) ¿En qué puntos es discontinua?

b) ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad?

c) Calcular los dos límites laterales en $x = 3$. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor.

Solución:

a) Dado que es un cociente de polinomios sólo puede haber discontinuidades en los puntos que anulan el denominador.

$$2x^2 + 4x - 30 = 0 \Longrightarrow x = -5, \;\; x = 3$$

Estudiamos la continuidad en estos puntos:

☛ En $x = 3$

$$\lim_{x\longrightarrow 3^-} \frac{x+5}{2x^2+4x-30} = \left[\frac{8}{0^-}\right] = -\infty$$
$$\lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{x+5}{2x^2+4x-30} = \left[\frac{8}{0^+}\right] = +\infty$$

En este caso hay una asíntota y se trata de una discontinuidad no evitable (hay un salto)

☛ En $x = -5$

$$\lim_{x\longrightarrow -5} \frac{x+5}{2x^2+4x-30} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow -2} \frac{1}{4x+4} = -\frac{1}{16}$$

En este caso los límites laterales coinciden pero no existe el valor de la función en $x = -5$ por lo que hay un agujero y se trata de una discontinuidad evitable.

b) En el caso de $x = 3$ no podemos encontrar un valor obligue a las dos ramas a unirse, dado que hay un salto. Pero en $x = -5$ si se podría hacer imponiendo $f(-5) = -\frac{1}{16}$, lo que sería una extensión por continuidad y quedaría la función g:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x+5}{2x^2+4x-30} & \text{si} \quad x \neq -5 \\ -\frac{1}{16} & \text{si} \quad x = -5 \end{cases}$$

La función g es continua en $R - \{3\}$

c) Este apartado está desarrollado en el apartado $a)$

Problema 3.5.5 Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2a}{x-5} & \text{si} \quad x \leq 2 \\ x^2 - 5 & \text{si} \quad 2 < x \leq 4 \\ x^2 + 2x - b & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$
determinar los valores de a y b para los que la función es continua en $x = 2$ y en $x = 4$.
Solución:

☛ En $x = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{x+2a}{x-5} = -\frac{2+2a}{3}$$
$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} (x^2 - 5) = -1$$

$$-\frac{2+2a}{3} = -1 \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$$

☛ En $x = 4$

$$\lim_{x\longrightarrow 4^-} (x^2 - 5) = 11$$
$$\lim_{x\longrightarrow 4^+} (x^2 + 2x - b) = 24 - b$$

$11 = 24 - b \Longrightarrow b = 13$

Problema 3.5.6 Dadas las funciones: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ y $g(x) = x^2 - x$

a) Obtener los puntos de corte con los ejes OX y OY.

b) Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

c) Dibujar las gráficas de ambas funciones indicando la región delimitada por ambas.

d) Calcular el área de la región anterior.

Solución:

a) Puntos de corte

- Función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
  - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Longrightarrow (0,0)$ y $(3,0)$.
  - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0,0)$.
- Función $g(x) = x^2 - x$
  - Corte con el eje OX hacemos $g(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - x = 0 \Longrightarrow (0,0)$ y $(1,0)$.
  - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow g(0) = 0 \Longrightarrow (0,0)$.

b) Monotonía

- Función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = 3$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(1, 3)$, y creciente en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$, tiene un máximo relativo en el punto $(1, 4)$ y un mínimo relativo en el $(3, 0)$

- Función $f(x) = x^2 - x \Longrightarrow f'(x) = 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

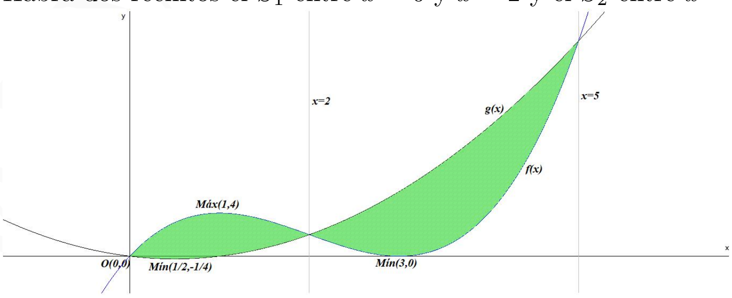
	$(-\infty, 1/2)$	$(1/2, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 1/2)$, y creciente en el intervalo $(1/2, \infty)$, tiene un mínimo relativo en el punto $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$

c) Los puntos de corte entre las dos curvas son

$$x^3 - 6x^2 + 9x = x^2 - x \Longrightarrow x^3 - 7x^2 + 10x = 0 \Longrightarrow x = 0, \quad x = 2 \ \text{ y } \ x = 5$$

Habrá dos recintos el S_1 entre $x = 0$ y $x = 2$ y el S_2 entre $x = 2$ y $x = 5$.



d) $F(x) = \displaystyle\int (f(x) - g(x))\,dx = \int (x^3 - 7x^2 + 10x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 5x^2$

$$S_1 = \int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx = F(2) - F(0) = \frac{16}{3} - 0 = \frac{16}{3}$$

$$S_2 = \int_2^5 (f(x) - g(x))\,dx = F(5) - F(2) = -\frac{125}{12} - \frac{16}{3} = -\frac{63}{4}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{16}{3} + \frac{63}{4} = \frac{253}{12} \simeq 21,083\ u^2$$

3.6. Castilla La Mancha

3.6.1. Modelo de 2020

Problema 3.6.1 Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x+t & \text{si} & x \le -3 \\ 4 & \text{si} & -3 < x < 3 \\ (x-4)^2 - 5 & \text{si} & x \ge 3 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = -3$.

b) Para $t = 3$, representa gráficamente la función f.

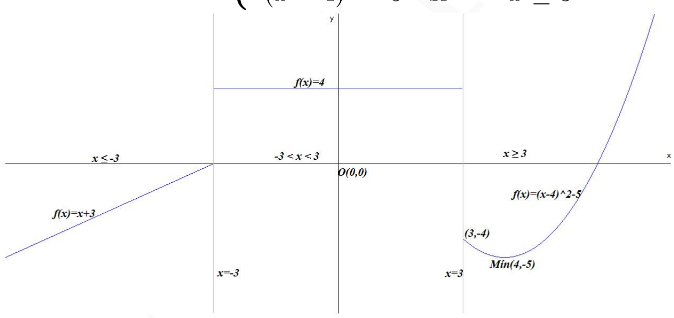
Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow -3^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -3^-} (x+t) = -3+t \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -3^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -3^+} 4 = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow -3+t = 4 \Longrightarrow t = 7$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} 4 = 4 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} ((x-4)^2 - 5) = -4 \end{array} \right. \Longrightarrow \text{discontinua}$$

b) Para $t = 3$: $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si} & x \le -3 \\ 4 & \text{si} & -3 < x < 3 \\ (x-4)^2 - 5 & \text{si} & x \ge 3 \end{cases}$



Problema 3.6.2 Sabemos que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un mínimo en el punto (1,1) y corta al eje de ordenadas en 4. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c.

Solución:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 2ax + b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = 1 \Longrightarrow a+b+c = 1 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 2a+b = 0 \\ f(0) = 4 \Longrightarrow c = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b = -6 \\ c = 4 \end{array} \right.$$

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

Problema 3.6.3 Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x-4 & \text{si} \quad x < c \\ -3 & \text{si} \quad c \le x \le 0 \\ x^2 - 10x & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$?

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$.

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, +\infty)$.

Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow c^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow c^-} (-x-4) = -c-4 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow c^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow c^+} (-3) = -3 \end{array} \right. \Longrightarrow -c-4 = -3 \Longrightarrow c = -1$$

b) En el intervalo $(0, +\infty)$ es $f(x) = x^2 - 10x \Longrightarrow f'(x) = 2x - 10 = 0 \Longrightarrow x = 5$ La función tiene un extremo en el punto $(5, -25)$. $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(5) = 2 > 0 \Longrightarrow$ el extremo calculado es un mínimo.

	$(0,5)$	$(5,\infty)$
$f'(t)$	$-$	$+$
$f(t)$	decreciente	creciente

c) La función decrece en el intervalo $(0, 5)$, y crece en el intervalo $(5, \infty)$.

Problema 3.6.4 Los costes de fabricación de un modelo de vehículo $C(x) = -x^3 + 45x^2 - 243x + 500$ (en miles de euros) en función del número de vehículos (en cientos) fabricados $(1 \le x \le 27)$

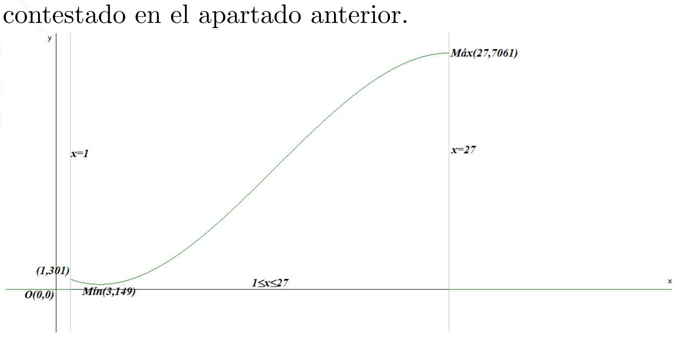
a) Determina la cantidad de vehículos que dan el coste máximo y mínimo.

b) ¿A qué valor ascienden ambos?

Solución:

a) $C'(x) = -3x^2 + 90x - 243 = 0 \Longrightarrow x = 3$ y $x = 27$
$C''(x) = 90 - 6x$. En $x = 3 \Longrightarrow c''(3) = 72 > 0 \Longrightarrow$ el punto $(3, 149)$ es un mínimo, es decir, se fabrican tres vehículos con un coste de producción de 149000 euros.
En $x = 27 \Longrightarrow c''(27) = -72 < 0 \Longrightarrow$ el punto $(27, 7061)$ es un máximo, es decir, se fabrican 27 vehículos con un coste de producción de 7061000 euros.

b) contestado en el apartado anterior.



3.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.6.5 Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+4)^2 - 4 & \text{si} \quad x \le -2 \\ t & \text{si} \quad -2 < x < 2 \\ (x-4)^2 - 4 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = -2$.

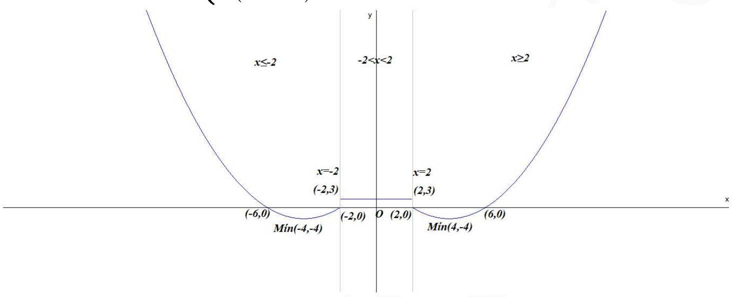
b) Para $t = 3$, representa gráficamente la función f.

Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -2^-} ((x+4)^2 - 4) = 0 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -2^+} t = t \end{array} \right. \Longrightarrow t = 0$$

b) Si $t = 3$: $f(x) = \begin{cases} (x+4)^2 - 4 & \text{si} \quad x \le -2 \\ 3 & \text{si} \quad -2 < x < 2 \\ (x-4)^2 - 4 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$



Para dibujar la rama $x \le -2$ es una parábola que corta con el eje OX en los puntos $(x+4)^2 - 4 = 0 \Longrightarrow (-6, 0), \ \ (-2, 0)$, no tendría corte con el eje OY (no está en las ramas) Tendría como vértice el mínimo de la función: $f'(x) = 2(x+4) = 0 \Longrightarrow x = -4 \Longrightarrow (-4, -4)$. Se trata de un mínimo ya que $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(2) = 2 > 0$

Para dibujar la rama $x \ge 2$ es una parábola que corta con el eje OX en los puntos $(x-4)^2 - 4 = 0 \Longrightarrow (6, 0), \ \ (2, 0)$, no tendría corte con el eje OY (no esta en las ramas) Tendría como vértice el mínimo de la función: $f'(x) = 2(x-4) = 0 \Longrightarrow x = 4 \Longrightarrow (4, -4)$. Se trata de un mínimo ya que $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(2) = 2 > 0$

En la rama $-2 < x < 2$ la función es constante y es $f(x) = 3$

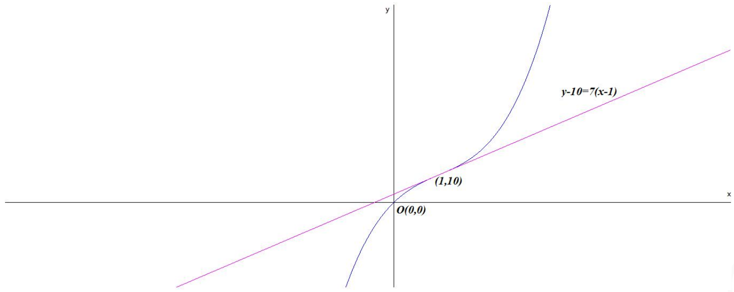
Problema 3.6.6 Sea la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 16x + c$ tiene un punto de inflexión en $(1, 10)$ y la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es 7. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c.

Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + 16x + c \Longrightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 16 \Longrightarrow f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(1) = 0 \Longrightarrow 6a + 2b = 0 \\ f'(1) = 7 \Longrightarrow 3a + 2b + 16 = 7 \\ f(1) = 10 \Longrightarrow a + b + 16 + c = 10 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b = -9 \\ c = 0 \end{array} \right.$$

$$f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 16x$$



Problema 3.6.7 Se considera la función $f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x+t & \text{si} & x \le -1 \\ x^3 - 2x^2 + 4 & \text{si} & x > -1 \end{array} \right.$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = -1$?

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, +\infty)$.

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-1, +\infty)$.

Solución:

a) Para que la función f sea continua en $x = -1$ los límites laterales deben de coincidir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} (x+t) = -1+t \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} (x^3 - 2x^2 + 4) = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow -1 + t = 1 \Longrightarrow t = 2$$

b) En ese intervalo $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \dfrac{4}{3}$

$$f''(x) = 6x - 4 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f''(0) = -4 < 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ es un máximo} \Longrightarrow (0, 4) \\ f''\left(\frac{4}{3}\right) = 4 > 0 \Longrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ es un mínimo} \Longrightarrow \left(\frac{4}{3}, \frac{76}{27}\right) \end{array} \right.$$

c)

	$(-1, 0)$	$(0, 4/3)$	$(4/3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-1, 0) \cup \left(\dfrac{4}{3}, \infty\right)$ y decreciente en el $\left(0, \dfrac{4}{3}\right)$

Problema 3.6.8 Las botellas de agua vendidas por un hipermercado (que abre de 10 de la mañana a 4 de la tarde) durante una ola de calor viene dado por la función $C(t) = 2t^3 - 27t^2 + 120t$, con $1 \le t \le 6$ siendo $t = 1$ la primera hora desde la apertura y $t = 6$ la ultima hora hasta el cierre y $C(t)$ en cientos de botellas.

a) ¿En qué intervalos de tiempo las ventas aumentan? ¿Y en cuáles disminuye?

b) ¿Cuándo se produce la máxima venta? ¿Y la mínima?

c) ¿Cuántas botellas se venden en esos dos casos?

Solución:

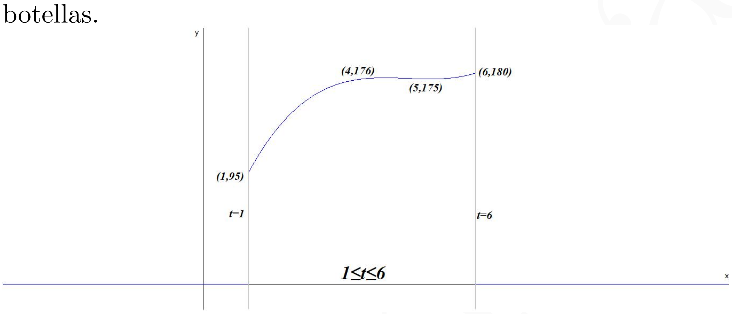
a) $C'(t) = 6t^2 - 54t + 120 = 0 \Longrightarrow t = 4$ y $t = 5$.

	$[1,4)$	$(4,5)$	$(5,6]$
$C'(t)$	$+$	$-$	$+$
$C(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

Las ventas aumentan desde la primera hasta la cuarta hora, disminuyen entre la cuarta y la quinta hora y vuelven a crece hasta la sexta hora. La función crece en el intervalo: $[1,4)\cup(5,6]$
La función decrece en el intervalo: $(4,5)$

b) Hay un máximo local en $t = 4$, pero no es absoluto ya que $C(4) = 176$ y $C(6) = 180$. Luego la máxima venta se produce en la hora sexta
Hay un mínimo local en $t = 5$, pero no es absoluto ya que $C(5) = 175$ y $C(1) = 95$. Luego la mínima venta se produce en la hora primera

c) La venta máxima es $C(6) = 180 \Longrightarrow 18000$ botellas y la venta mínima de $C(1) = 95 \Longrightarrow 9500$ botellas.



3.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.6.9 Se considera la función $f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} -4x+4 & \text{si} & x \le c \\ x^2 - 4x & \text{si} & x > c \end{array} \right.$

a) ¿Para qué valor de la función $f(x)$ es continua en $x = c$?

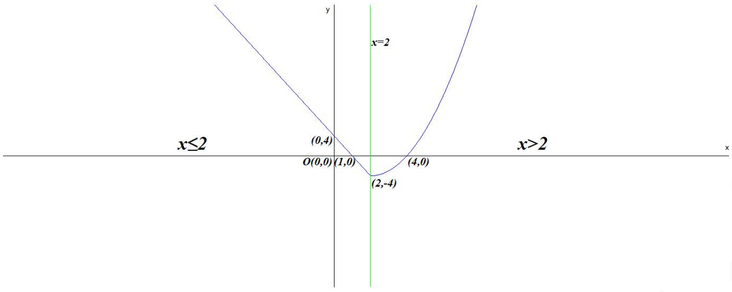
b) Para $c = 2$, representa gráficamente la función f.

Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow c^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow c^-} (-4x+4) = -4c+4 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow c^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow c^+} (x^2-4x) = c^2-4c \end{array} \right. \Longrightarrow -4c+4 = c^2-4c \Longrightarrow c^2 = 4 \Longrightarrow c = \pm 2$$

b) Para $c = 2 \Longrightarrow f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} -4x+4 & \text{si} & x \le 2 \\ x^2 - 4x & \text{si} & x > 2 \end{array} \right.$ Dando valores:



Problema 3.6.10 Una función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un máximo en $x = -1$ y un punto de inflexión en el punto $(1, -9)$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c.

Solución:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Longrightarrow f''(x) = 6x + 2a$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(1) = -9 \Longrightarrow 1 + a + b + c = -9 \\ f'(-1) = 0 \Longrightarrow 3 - 2a + b = 0 \\ f''(1) = 0 \Longrightarrow 6 + 2a = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -3 \\ b = -9 \\ c = 2 \end{array}\right.$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$$

Problema 3.6.11 Se considera la función $f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} x - t & \text{si} & x \le 0 \\ (x-t)^2 - 5(x+t) + 4 & \text{si} & x > 0 \end{array}\right.$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$?

b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$.

c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, +\infty)$.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} (x - t) = -t \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} [(x-t)^2 - 5(x+t) + 4] = t^2 - 5t + 4 \end{array}\right. \Longrightarrow -t = t^2 - 5t + 4 \Longrightarrow$$

$$t^2 - 4t + 4 = 0 \Longrightarrow t = 2$$

b) $t = 0 \Longrightarrow f(x) = x^2 - 5x + 4$ en el intervalo $(0, +\infty)$.
$f'(x) = 2x - 5 = 0 \Longrightarrow \dfrac{5}{2}$ La función tiene un extremo en el punto $\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{9}{4}\right)$. $f''(x) = 2 \Longrightarrow$ $f''\left(\dfrac{5}{2}\right) = 2 > 0 \Longrightarrow$ el extremo calculado es un mínimo.

	$(0, 5/2)$	$(5/2, \infty)$
$f'(t)$	$-$	$+$
$f(t)$	decreciente	creciente

c) La función decrece en el intervalo $\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$, y crece en el intervalo $\left(\dfrac{5}{2}, \infty\right)$.

Problema 3.6.12 En un taller para automóviles el número de clientes a los que cambiaron las ruedas de su coche durante 5 días de esta semana se ajusta a la función $f(x) = 2x^3-15x^2+24x+75$, $1 \le x \le 5$, siend $x = 1$ el lunes y $x = 5$ el viernes.

a) ¿Qué día acuden menos clientes a cambiar las ruedas de su coche? ¿Cuántos clientes son?

b) ¿Cuál es el día que van más clientes a que les cambien las ruedas y cuántos son esos clientes?

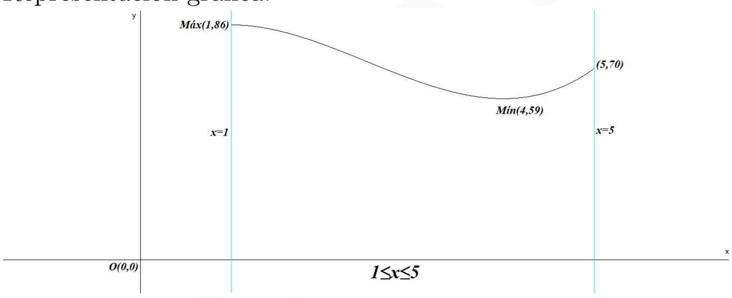
Solución:
Dibujamos la función y analizamos sobre la gráfica:

- ✍ Dominio: $[1, 5]$
- ✍ Puntos de corte: No son necesarios, pero si los cortes de la función con las rectas $x = 1 \Longrightarrow (1, 86)$ y con $x = 5 \Longrightarrow (5, 70)$
- ✍ Monotonía: $f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = 4$

	$(1,4)$	$(4,5)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(1, 4)$ y creciente en el $(4, 5)$. Presenta un mínimo local en el punto $(4, 59)$ y en $(1, 86)$ un máximo local.

- ✍ Representación gráfica:



a) El día que acuden menos clientes es el jueves y son 59.

b) El día que acuden más clientes es el lunes y son 86.

3.7. Castilla León

3.7.1. Modelo de 2020

Problema 3.7.1 Una cadena local de TV ha determinado, por medio de encuestas, que el porcentaje de ciudadanos que la ven entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche viene dado por la función

$$S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3$$

donde t indica las horas transcurridas desde las 12 en punto de la mañana.

a) ¿A qué hora tiene máxima y mínima audiencia la cadena entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche? ¿Qué porcentaje de ciudadanos ven la cadena de TV a esas horas de máxima y mínima audiencia?

b) Dibujar la gráfica de la función $S(t)$ para t comprendido entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche.

Solución:

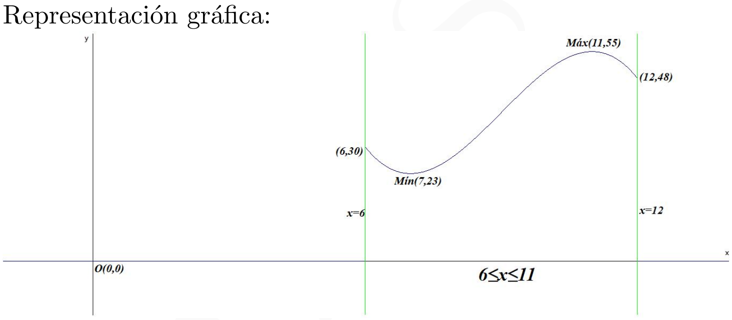
Dibujamos la función y analizamos sobre la gráfica:

- ✍ Dominio: $[6, 12]$
- ✍ Puntos de corte: No son necesarios, pero si los cortes de la función con las rectas $t = 6 \Longrightarrow (6, 30)$ y con $t = 12 \Longrightarrow (12, 48)$
- ✍ Monotonía: $f'(t) = -231 + 54t - 3t^2 = 0 \Longrightarrow x = 7$ y $x = 11$

	$(6,7)$	$(7,11)$	$(11,12)$
$f'(t)$	$-$	$+$	$-$
$f(t)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

La función es decreciente en el intervalo $(6, 7) \cup (11, 12)$ y creciente en el $(7, 11)$. Presenta un mínimo local en el punto $(7, 23)$ y en $(11, 55)$ un máximo local.

- ✍ Representación gráfica:



a) La hora de máxima audiencia es a las 11 con un porcentaje del 55 %.
La hora de mínima audiencia es a las 7 con un porcentaje del 23 %.

b) gráfica dibujada anteriormente.

Problema 3.7.2 Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ \frac{2x+71}{4x+7} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

a) Estudia la continuidad de $f(x)$.

b) Calcular el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 2]$, dibujando el recinto correspondiente.

Solución:

a) Las dos ramas son continuas, hay que estudiar la continuidad en $x = 2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} (3x - 1) = 5 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} \dfrac{2x + 71}{4x + 7} = 5 \\ f(2) = 5 \end{array} \right. \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 5$$

Luego f es continua en $\overline{R}$.

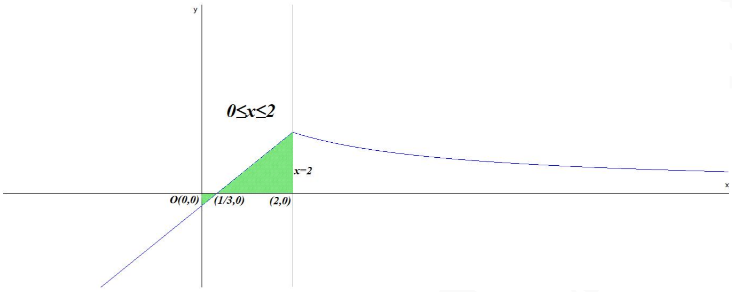
b) En el recinto $[0,2]$ la función es $f(x) = 3x - 1$ y corta al eje de abcisas en $x = \dfrac{1}{3}$. Tendremos dos recintos S_1 de 0 a $\dfrac{1}{3}$ y S_2 de $\dfrac{1}{3}$ a 2.

$$F(x) = \int (3x-1)\,dx = \frac{3x^2}{2} - x$$

$$S_1 = \int_0^{1/3} (3x-1)\,dx = F\left(\frac{1}{3}\right) - F(0) = -\frac{1}{6} - 0 = -\frac{1}{6}$$

$$S_2 = \int_{1/3}^{2} (3x-1)\,dx = F(2) - F\left(\frac{1}{3}\right) = 4 + \frac{1}{6} = \frac{25}{6}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{1}{6} + \frac{25}{6} = \frac{13}{3} \simeq 4,33\ u^2$$



3.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.7.3 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si} \quad x \le 3 \\ 3x - 2m & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

a) Hallar el valor de m para que la función sea continua en todos los números reales.

b) Para $m = -1$, calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[5,7]$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 5$

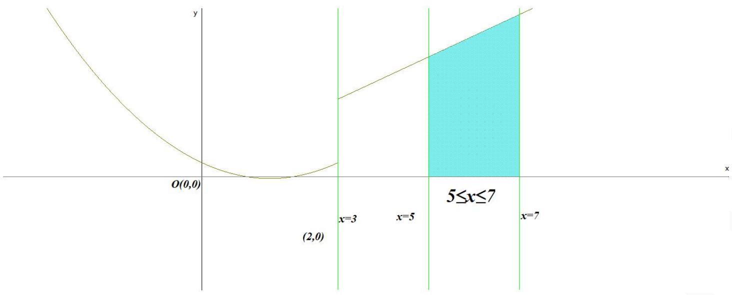
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} (x^2 - 3x + 2) = 2 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} (3x - 2m) = 9 - 2m \end{cases} \Longrightarrow 2 = 9 - 2m \Longrightarrow m = \frac{7}{2}$$

Con este valor la función es continua en las dos ramas y en el punto de unión entre ellas.

b) $m = -1$ y el intervalo $[5,7] \Longrightarrow f(x) = 3x + 2$ cuyo punto de corte con OX no está dentro del intervalo, por lo que sólo hay un recinto entre 5 y 7.

$$S_1 = \int_5^7 (3x+2)\,dx = \left.\frac{3x^2}{2} + 2x\right]_5^7 = 40$$

$$S = |S_1| = 40 \ \ u^2$$



Problema 3.7.4 La temperatura adecuada para el desarrollo vegetativo en el cultivo de tomates no debe exceder los 23 grados Celsius (°C) y en ningún caso debe bajar de 7°C. La siguiente función expresa la temperatura, en grados Celsius, el día 14 de agosto en una zona de cultivo:

$$T(x) = \frac{-1}{14}x^2 + 2x + 10$$

donde $x \in [0, 24]$ es la hora del dia.

a) Determinar a qué hora de ese día se alcanza la temperatura máxima y si ésta supera los 23°C.

b) ¿La zona de cultivo tuvo una temperatura inferior a los 7°C el 14 de agosto?

Solución:

Dibujamos la función y analizamos sobre la gráfica:

✍ Dominio: $[0, 24]$

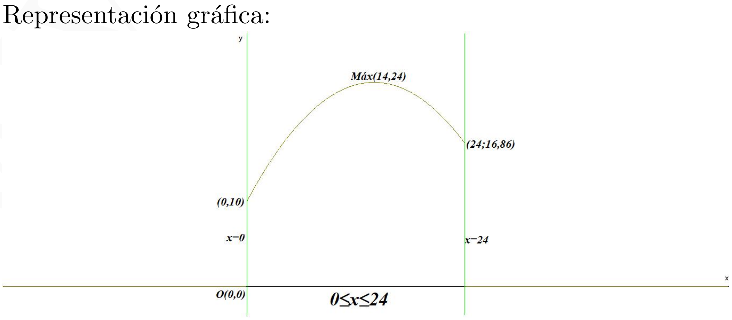
✍ Puntos de corte: No son necesarios, pero si los cortes de la función con las rectas $x = 0 \Longrightarrow (0, 10)$ y con $x = 24 \Longrightarrow (24; 16, 86)$

✍ Monotonía: $f'(x) = \dfrac{14 - x}{7} = 0 \Longrightarrow x = 14$

	$[0, 14)$	$(14, 24]$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

La función es decreciente en el intervalo $(14, 24]$ y creciente en el $[0, 14)$. Presenta un máximo local en el punto $(14, 24)$.

✍ Representación gráfica:



a) La máxima temperatura se alcanza a la hora 14 con 24°C temperatura superior a 23°C.

b) No, la temperatura mínima fue de 10°C a las cero horas superior a 7°C.

3.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.7.5 Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+8 & \text{si} \quad -1 < x \le 2 \\ x+m & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Determinar el valor de m para que la $f(x)$ sea continua.

b) Calcular el área delimitada por $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[0,1]$.

Solución:

a) Continuidad en $x=2$

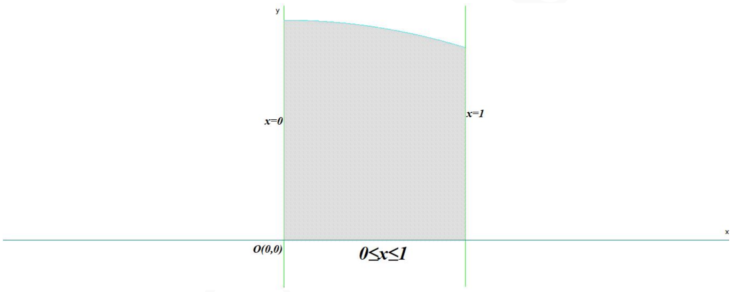
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} (-x^2+8) = 4 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} (x+m) = 2+m \end{array} \right. \Longrightarrow 4 = 2+m \Longrightarrow m = 2$$

Con este valor la función es continua en las dos ramas y en el punto de unión entre ellas.

b) En el intervalo $[0,1] \Longrightarrow f(x) = -x^2+8$ cuyo punto de corte con OX no está dentro del intervalo, por lo que sólo hay un recinto entre 0 y 1.

$$S_1 = \int_0^1 (-x^2+8)\, dx = \left.\frac{-x^3}{3} + 8x\right]_0^1 = \frac{23}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{23}{3} \simeq 7,67 \ \ u^2$$



Problema 3.7.6 La cotización en euros de la criptomoneda Bitcoin en un determinado día del pasado año siguió la función $f(t) = 20t^2 - 200t + 1000$ donde t es el tiempo medido en horas desde el comienzo del día.

a) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $f(t)$.

b) ¿Cuánto se paga por la compra de 10 Bitcoins en el momento de mínima cotización de ese día?

Solución:

Dibujamos la función y analizamos sobre la gráfica:

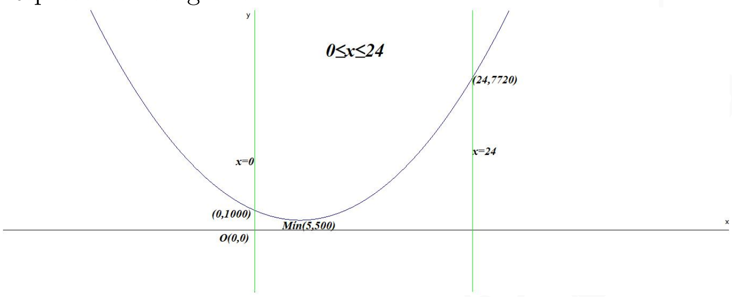
- ✍ Dominio: $[0,24]$
- ✍ Puntos de corte: No son necesarios, pero si los cortes de la función con las rectas $t=0 \Longrightarrow (0,1000)$ y con $t=24 \Longrightarrow (24,7720)$

✍ Monotonía: $f'(t) = 40t - 200 = 0 \Longrightarrow t = 5$

	$[0,5)$	$(5,24]$
$f'(t)$	$-$	$+$
$f(t)$	decreciente ↘	creciente ↗

La función es decreciente en el intervalo $[0,5)$ y creciente en el $(5,24]$. Presenta un mínimo local en el punto $(5,500)$.

✍ Representación gráfica:



a) La función decrece desde la hora cero hasta la 5 y crece a partir de la hora 5 hasta la 24.

b) Los Bitcoins alcanzan la mínima cotización a las 5 a 500€ por lo que habría que abonar $10 \cdot 500 = 5000$€ por los 10 Bitcoins.

3.8. Cataluña

3.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.8.1 El 1 de enero de 2019 salió al mercado un nuevo modelo de un producto técnico de esquí. la función de tercer grado $f(x) = 10x^3 - 210x^2 + 1470x$ nos da el número total de unidades vendidas, en donde x denota el número de meses transcurridos, desde el lanzamiento del producto, durante el primer año (es decir, $x \in [0,12]$).

a) Cuántas unidades se habían vendido al cabo de 3 meses? Cuántas se vendieron al cabo de un año? Determine la tasa de variación media entre los meses 3 y 12.

b) Comprobar que la función es creciente en el intervalo $[0,12]$ y encuentra en qué instante el crecimiento ha sido más lento.

Solución:
Dibujamos la función y analizamos sobre la gráfica:

☛ Dominio: $[0,12]$

☛ Puntos de corte: No son necesarios, pero si los cortes de la función con las rectas $x = 0 \Longrightarrow (0,0)$ y con $x = 12 \Longrightarrow (12,4680)$

☛ Monotonía: $f'(x) = 30x^2 - 420x + 1470 = 0 \Longrightarrow x = 7$

	$[0,7)$	$(7,12]$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	creciente ↗	creciente ↘

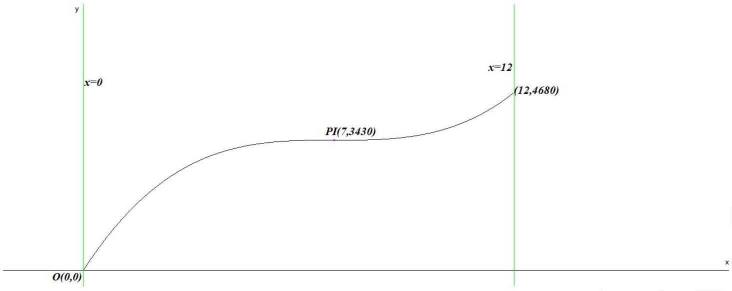
La función es creciente en el intervalo $[0,12]$. No hay extremos.

☛ Curvatura: $f''(x) = 60x - 420 = 0 \Longrightarrow x = 7$

	$[0,7)$	$(7,12]$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función tiene un punto de inflexión en el $(7, 3430)$

☛ Representación gráfica:



a) Al cabo de 3 meses se han vendido $f(3) = 2790$ unidades.
Al cabo de un año se han vendido $f(12) = 4680$ unidades.
$TVN[3,12] = \dfrac{f(12) - f(3)}{12 - 3} = \dfrac{4680 - 2790}{9} = 210$

b) En el estudio de la función se observa que la función es siempre creciente. Con un crecimiento más lento en su punto de inflexión, el mes 7 con 3430 unidades, donde la función cambia su curvatura.

Problema 3.8.2 El coste de elaboración de un menú en un restaurante es de 8€. Se ha realizado un estudio de mercado y se ha llegado a la conclusión de que si el precio del menú es de 18€ entran a comer en el restaurante 120 clientes. También se ha concluido que la relación entre el precio del menú y el número de clientes es lineal, de manera que, por cada euro que aumentamos el precio del menú, disminuye en 4 el número de clientes. Y al revés, por cada euro que disminuimos el precio, aumenta en 4 el número de clientes.

a) Obtener la función que expresa el beneficio del restaurante en función del número de euros en que aumentamos o disminuimos el precio inicial del menú.

b) Encuentre en cuantos euros hay que aumentar o disminuir el precio inicial del menú para que el restaurante obtenga el máximo beneficio. ¿Cuál sería el precio final del menú y cuál sería el beneficio obtenido con este precio?

Solución:

a) Relación lineal entre nº de clientes y precio: $y = ax + b$ donde y es el nº de clientes y x la cantidad de euros que aumentamos o disminuimos del valor del precio del menú.
Si el menú está a 18€ $\Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow 120 = a \cdot 0 + b \Longrightarrow b = 120$.
Si reducimos el precio del menú en 1€ $\Longrightarrow 124 = a\cdot(-1)+b \Longrightarrow 124 = -a+120 \Longrightarrow a = -4$.
Luego la relación lineal entre el número de clientes y la reducción o aumento del precio del menú es $y = -4x + 120$
Un menú se venderá a $18 + x$ € y como lleva un coste de 8€ el beneficio de un menú es

$18 + x - 8 = 10 + x$ €
El beneficio será $y \cdot (10+x) = (-4x+120)(10+x) = -4x^2+80x+1200$. La función beneficio es $B(x) = -4x^2 + 80x + 1200$

b) $B'(x) = -8x + 80 = 0 \Longrightarrow x = 10$
$B''(x) = -8 \Longrightarrow B''(10) = -8 < 0 \Longrightarrow x = 10$ es un máximo. Si se sube el precio 10€ se obtiene el benficio máximo $B(10) = 1600$€ y el menú debe de valer 28€.

Problema 3.8.3 El beneficio de una empresa, expresado en millones de euros, es dado por la función siguiente, en la que x indica el número de años que han pasado desde que comenzó a funcionar:

$$B(x) = \frac{5x+20}{x^2+9} - \frac{20}{9}$$

a) ¿Cuál es el beneficio en el momento en que la empresa empieza a funcionar? ¿En qué momento la empresa pasa de tener beneficios a tener pérdidas?

b) ¿En qué momento consigue la empresa el beneficio máximo? ¿Cuál es este beneficio máximo?

Solución:

a) Empieza con $B(0) = 0$ empieza sin tener beneficios ni pérdidas.
Hacemos $B(x) = \frac{5x+20}{x^2+9} - \frac{20}{9} = \frac{5x(9-4x)}{9(x^2+9)} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2,25$. En el intervalo $(0; 2,25)$ la función es positiva, es decir, $B(x) > 0 \ \forall x \in (0; 2,25)$ a partir de $x = 2,25$ la función es negativa. La función entra en pérdidas a partir de dos años y 3 meses.

b) $B'(x) = \dfrac{-5(x^2+8x-9)}{(x^2+9)^2} = 0 \Longrightarrow x = -9$ (solución no válida) y $x = 1$

	$[0,1)$	$(1,\infty)$
$B'(x)$	$+$	$-$
$B(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

El beneficio máximo se da cuando pase un año exactamente con un beneficio $B(1) = 0,2777777 \Longrightarrow 277777,78$€

3.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.8.4 Un fabricante tuvo un producto a la venta durante diez años. Durante este tiempo, el precio del producto P, en euros, estuvo relacionado con el tiempo que hacía que estaba a la venta t, expresado en años, siguiendo la siguiente función:

$$P(t) = \begin{cases} 5(t+1)^2 - 5 & \text{si} \quad 0 \le t \le 2 \\ -4t + 48 & \text{si} \quad 2 < x \le 10 \end{cases}$$

a) Indique los intervalos de crecimiento y de decrecimiento del precio del producto durante estos diez años.

b) Encuentre el precio máximo que alcanzó el producto durante el tiempo que estuvo a la venta y calcule la tasa de variación media del precio del producto durante los últimos cinco años que estar a la venta.

Solución: Dibujamos la función y analizamos sobre la gráfica:

✍ Dominio: $[0,10]$

✍ Continuidad: La función es claramente continua en todo el dominio de la función. Comprobamos en $t=2$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t\longrightarrow 2^-} P(t) = \lim\limits_{t\longrightarrow 2^-} (5(t+1)^2-5) = 40 \\ \lim\limits_{t\longrightarrow 2^+} P(t) = \lim\limits_{t\longrightarrow 2^+} (-4t+48) = 40 \\ P(2) = 40 \end{array}\right. \qquad P \text{ continua en } t=2$$

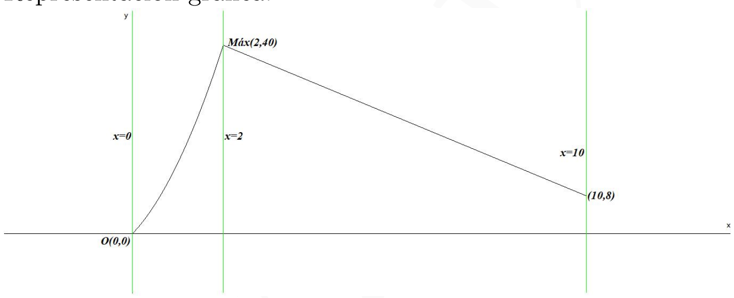
✍ Puntos de corte: No son necesarios, pero si los cortes de la función con las rectas $t=0 \Longrightarrow (0,0)$, con $t=10 \Longrightarrow (10,8)$ y con $t=2 \Longrightarrow (2,40)$

✍ Monotonía:

$$P'(t) = \left\{\begin{array}{lll} 10(t+1) & \text{si} & 0\le t\le 2 \\ -4 & \text{si} & 2<x\le 10 \end{array}\right.$$

La derivada de la función en la rama $0\le t\le 2$ es siempre positiva, por lo que la función crece en el intervalo $(0,2)$
La derivada de la función en la rama $2<x\le 10$ es siempre negativa, por lo que la función decrece en el intervalo $(2,10)$
La función es decreciente en el intervalo $[0,5)$ y creciente en el $(5,24]$. Presenta un máximo local en el punto $(2,40)$.

✍ Representación gráfica:



a) La función crece desde el año cero hasta el 2 y decrece a partir del año 2 hasta el 10.

b) El máximo se encuentra el año 2 con un precio de 40€.

$$TVM[5,10]\frac{f(10)-f(5)}{10-5} = \frac{8-28}{10-5} = -4\text{€ año}$$

Problema 3.8.5 Consideremos las funciones $f(x)=x^2+ax+b$ y $g(x)=-x^2+c$

a) Calcular los valores de los parámetros a, b y c para que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se corten en los puntos $(-1,3)$ y $(3,-5)$.

b) Para $c=4$, encuentra la ecuación de la recta tangente a $g(x)$ en el punto de abscisa $x=-1$.

Solución:

a) $x^2+ax+b=-x^2+c \Longrightarrow 2x^2+ax+b-c=0$
Sustituyendo $x=-1 \Longrightarrow 2-a+b-c=0 \Longrightarrow a-b+c=2$
Sustituyendo $x=3 \Longrightarrow 18+3a+b-c=0 \Longrightarrow 3a+b-c=-18$
$f(-1)=3 \Longrightarrow 1-a+b=3 \Longrightarrow -a+b=2$
$f(3)=-5 \Longrightarrow 9+3a+b=-5 \Longrightarrow 3a+b=-14$

$$\begin{cases} a-b+c=2 \\ 3a+b-c=-18 \\ -a+b=2 \\ 3a+b=-14 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=-2 \\ c=4 \end{cases}$$

b) Si $c=4 \Longrightarrow g(x)=-x^2+4 \Longrightarrow g'(x)=-2x$ luego $g(-1)=3$ y $m=g'(-1)=2$ la recta tangente a g en $x=-1$ es

$$y-3=2(x+1) \Longrightarrow y=2x+5$$

Problema 3.8.6 La función $Q(x)=(x+1)^2(32-x)$, donde $x \in [-1,32]$, representa la producción, en kilogramos, de una hortaliza en un invernadero en función de la temperatura x, expresada en grados centígrados (°C), que puede variar entre -1°C y 32°C.

a) Calcule cuál es la temperatura del invernadero con la que se obtiene la máxima producción ¿qué producción de hortaliza obtendremos a esta temperatura?

b) Calcular a qué temperaturas se alcanza el nivel mínimo de producción y cuál es ese valor mínimo.

Solución:

a) $Q(x)=(x+1)^2(32-x)=-x^3+30x^2+63x+32 \Longrightarrow Q'(x)=-3x^2+60x+63=0 \Longrightarrow x=-1$ y $x=21$
$Q''(x)=-6x+60$ en $x=-1 \Longrightarrow Q''(-1)=120>0 \Longrightarrow x=-1$ es un mínimo relativo en $(-1,0)$
$Q''(x)=-6x+60$ en $x=21 \Longrightarrow Q''(21)=-66<0 \Longrightarrow x=21$ es un máximo relativo en $(21,5324)$
La temperatura para una producción máxima debe ser de 21°C con 5324 Kg. La producción crece en $(0,21)$ y decrece en $(21,32)$. La función es siempre positiva en $[-1,32]$

b) Tenemos $Q(-1)=Q(32)=0 \Longrightarrow$ la mínima producción se da cuando la temperatura es de -1°C o cuando es de 32°C con 0 kg.

3.9. Comunidad valenciana

3.9.1. Modelo de 2020

Problema 3.9.1 Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{2-x}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Solución:

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ el único punto de corte con los ejes coordenados es el $(0,0)$.

b) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{x^2}{2-x} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{x^2}{2-x} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{x^2}{2-x} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2}{2-x} = -\infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x - x^2} = -1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{2-x} + x\right) = -2$$

$$y = -x - 2$$

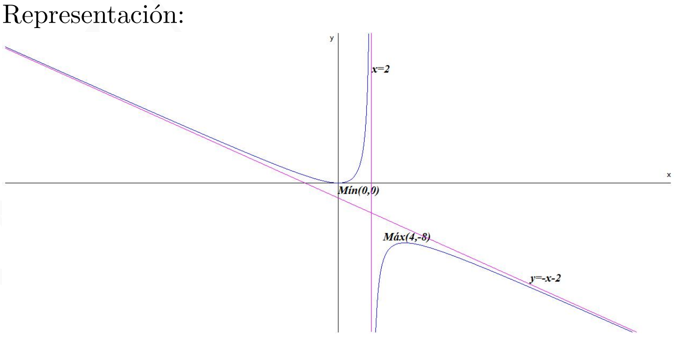
c) $f'(x) = -\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 4$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$, y es creciente en el intervalo $(0, 2) \cup (2, 4)$.

d) Tiene un máximo en $(4, -8)$ y un mínimo en $(0, 0)$.

e) Representación:



Problema 3.9.2 En los primeros 6 años, una empresa obtuvo unos beneficios (en decenas de miles de euros) que pueden representarse mediante la función $f(t) = t^3 - 8t^2 + 15t$, donde t es el tiempo en años transcurridos.

a) Determinar los periodos en los que la empresa tuvo beneficios y en los que tuvo pérdidas.

b) ¿En qué valor de t se alcanzó el máximo beneficio y cuál fue este?

c) ¿En qué valor de t se tuvo la máxima pérdida y cuál fue esta?

d) Suponiendo que a partir de los 6 años los beneficios siguen la misma función, ¿volverá a tener la empresa periodos alternos de beneficios y pérdidas? Justifica la respuesta.

Solución:

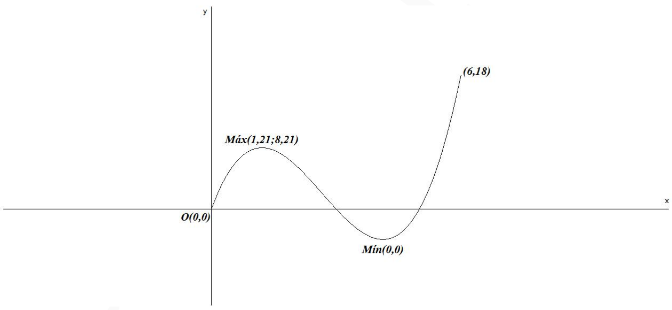
a) $f(t) = t^3 - 8t^2 + 15t = 0 \Longrightarrow t = 0$, $t = 3$ y $t = 5$.

	$(0,3)$	$(3,5)$	$(5,6)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

Hasta el tercer año la función tiene beneficios, entre el tercer y quinto año tiene pérdidas, volviendo a tener beneficios a partir del quinto año.

b) $f'(t) = 3t^2 - 16t + 15 = 0 \Longrightarrow t = 4,12$ y $t = 1,21$.

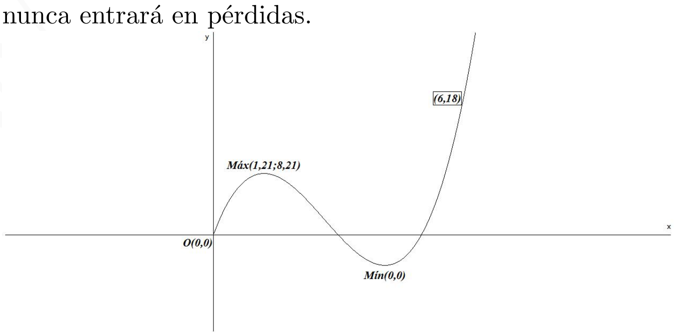
	$[0; 1,21)$	$(1,21; 4,12)$	$(4,12; 6]$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$



La función tiene un máximo local en el punto $(1,21; 8,21)$, pero el máximo absoluto estaría en $t = 6 \Longrightarrow (6,18)$.

c) La función tiene un mínimo local en el punto $(4,12; -4,06)$, además sería el mínimo absoluto.

d) La función es polinómica de tercer grado y siempre creciente en el intervalo $(6; \infty)$, como en $t = 6 \Longrightarrow f(6) = 18$, a partir de este punto la función seguirá creciendo en beneficios y nunca entrará en pérdidas.



3.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.9.3 Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$
Punto de corte con el eje OY: hacemos $f(0) = -5 \Longrightarrow (0, -5)$
Punto de corte con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow 2x^2 - 3x + 5 \neq 0 \Longrightarrow$ no hay puntos de corte con el eje OX.

b) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = -1$

$$\lim_{x \longrightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \pm\infty$$
$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \left[\frac{10}{0^+}\right] = +\infty$$
$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \left[\frac{10}{0^-}\right] = -\infty$$

En $x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \pm\infty$$
$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$
$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** $y = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = 2$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

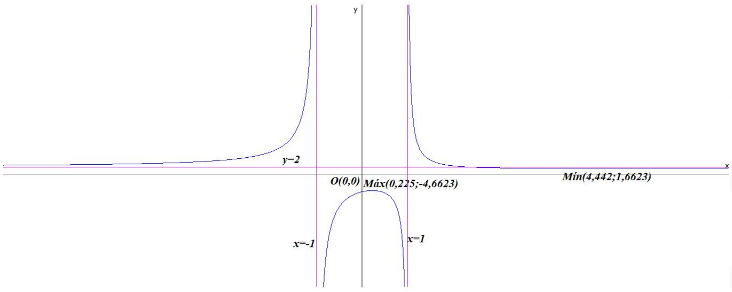
c) $f'(x) = -\dfrac{3x^2 - 14x + 3}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0,225$ y $x = 4,442$.

	$(-\infty; 0,225)$	$(0,225; 4,442)$	$(4,442; \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (-1; 0,225) \cup (4,442, \infty)$, y es decreciente en el intervalo $(0,225, 1) \cup (1, 4,442)$.

d) Tiene un máximo relativo en $(0,225; -4,6623)$ y un mínimo relativo en $(4,442; 1,6623)$.

e) Representación:



Problema 3.9.4 Una empresa farmacéutica lanza al mercado un nuevo fármaco que se distribuye en cajas de seis unidades. La relación entre el precio de cada caja y el beneficio mensual obtenido en euros viene dada por la función

$$B(x) = -x^2 + 16x - 55$$

donde x es el precio de venta de una caja. Se pide:

a) ¿Qué beneficio obtiene cuando vende cada caja a 6 euros?

b) ¿Entre qué valores debe fijar el precio de venta de cada caja para obtener beneficios?

c) Calcula a qué precio ha de vender cada caja para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es el beneficio máximo?

d) ¿Entre qué valores el beneficio crece y entre qué valores el beneficio decrece?

Solución:

a) $B(6) = 5$€

b) $B(x) = 0 \Longrightarrow -x^2 + 16x - 55 = 0 \Longrightarrow x = 5$ y $x = 11$. Si $x \in [5, 11] \Longrightarrow B(x) > 0 \Longrightarrow$ para tener beneficios debe vender la caja entre 5€ y 11€.

c) $B'(x) = -2x + 16 = 0 \Longrightarrow x = 8$.

	$(0,8)$	$(8,\infty)$
$B'(x)$	$+$	$-$
$B(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función tiene un máximo local en el punto $(8,9)$ y sería absoluto ya que a partir de $x = 8$ la función es siempre decreciente.

d) los beneficios crecen para precios de 0€ a 8€ y decrecen para precios superiores a 8€.

3.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.9.5 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

- Punto de corte con el eje OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
- Puntos de corte con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow \dfrac{x^2}{x-1} = 0 \Longrightarrow (0, 0)$.

b) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^2}{x-1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + x}{x-1}\right) = 1$$

$$y = x + 1$$

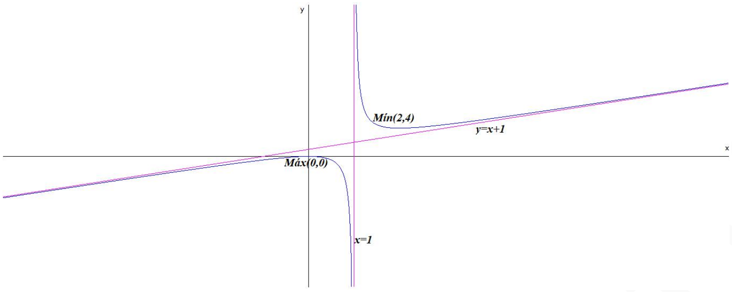
c) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, y es decreciente en el intervalo $(0, 1) \cup (1, 2)$.

d) Tiene un máximo relativo en $(0, 0)$ y un mínimo relativo en $(2, 4)$.

e) Representación:



Problema 3.9.6 Una tienda de alquiler de bicicletas dispone mensualmente de 350 bicicletas. Haciendo un estudio entre los ingresos y los costes de explotación se ha determinado que los beneficios mensuales, en euros, se ajustan a la función

$$f(x) = 350x - x^2 - 15000$$

siendo x el número de bicicletas alquiladas en un mes.

a) Calcula el número de bicicletas que hay que alquilar cada mes para obtener un beneficio máximo.

b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo?

c) Determina a partir de qué cantidad de bicicletas alquiladas el taller obtiene beneficios.

d) ¿Puede tener pérdidas a pesar de alquilar una cantidad mayor de bicicletas que la obtenida en el apartado anterior?

Solución:

a) Tenemos $f(0) = -15000$, $f(350) = -15000$ y $\text{Dom}(f) = [0, 350]$.
$f(x) = 350x - x^2 - 15000 \Longrightarrow f'(x) = 350 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 175$
$f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(175) = -2 < 0 \Longrightarrow x = 175$ es un máximo relativo.

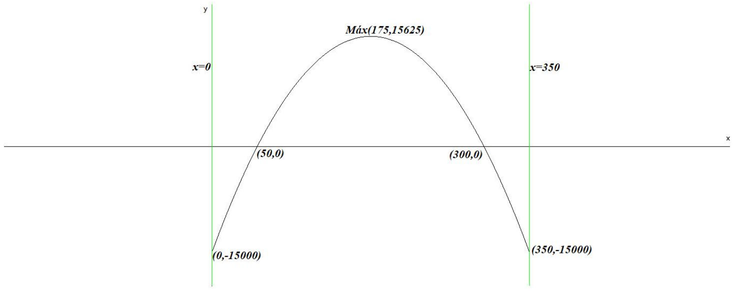
	$[0, 175)$	$(175, 350]$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $[0, 175)$ y decreciente en el $(175, 350]$.
El máximo beneficio se obtiene alquilando 175 bicicletas.

b) El beneficio máximo es $f(175) = 15625$€

c) $f(x) = 0 \Longrightarrow 350x - x^2 - 15000 = 0 \Longrightarrow x = 50$ y $x = 300$. Luego la función tiene beneficios a partir del alquiler de 50 bicicletas, creciendo éste hasta el momento en el que alquila 175, después de ese momento decrece el beneficio.

d) Cuando se supera el alquiler de 300 bicicletas la función beneficio es negativa, es decir, la empresa entraría en pérdidas.



3.10. Extremadura

3.10.1. Modelo de 2020

Problema 3.10.1 Durante la crecida de un río, la Confederación Hidrográfica del Tajo ha estimado que el caudal (en m^3/s) ha variado durante las primeras 6 horas de acuerdo con la función:

$$C(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 20 \quad (0 \le t \le 6)$$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar las horas de máximo y mínimo caudal.

b) Calcular dichos valores máximo y mínimo.

c) Hallar el valor del área encerrada por la función $C(t)$ y el eje OX entre los valores $t = 3$ y $t = 5$.

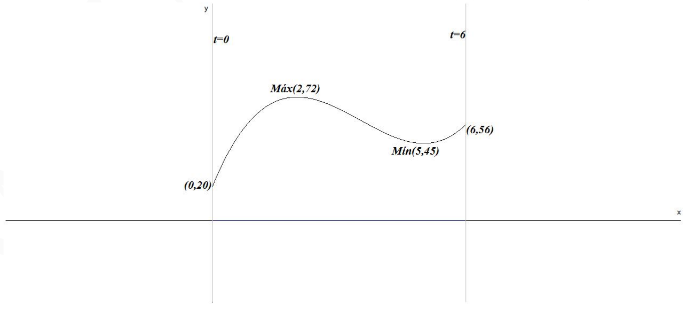
Solución:

a) $C'(t) = 6t^2 - 42t + 60 = 0 \Longrightarrow t = 2$ y $t = 5$

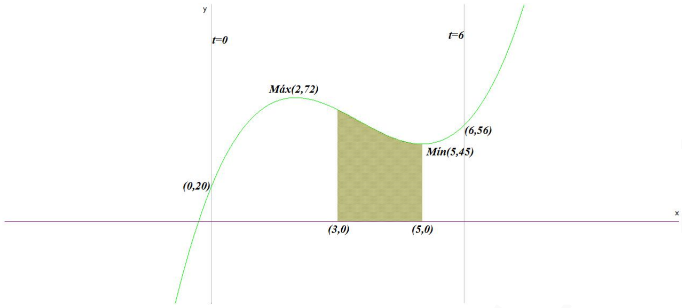
	$[0,2)$	$(2,5)$	$(5,6]$
$C'(t)$	$+$	$-$	$+$
$C(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

Luego hay un máximo en $t = 2$ horas y un mínimo en $t = 5$ horas, ambos locales.

b) $C(2) = 72$ m^3/s es el caudal máximo y $C(5) = 45$ m^3/s es el caudal mínimo. El valor mínimo absoluto estaría en la hora cero con $C(0) = 20$ m^3/s.



c) La función no corta al eje OX en el intervalo $[3, 5]$:
$$S = \int_3^5 (2t^3 - 21t^2 + 60t + 20)\, dt = \left.\frac{t^4}{2} - 7t^3 + 30t^2 + 20t\right]_3^5 = 106\ u^2$$



Problema 3.10.2 Se pide, justificando las respuestas:

a) Hallar el área encerrada por la función: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ el eje OX y entre $x = 0$ y $x = 2$.

b) Calcular las asíntotas de la función: $g(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x - 4}$

Solución:

a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0 \Longrightarrow x = -1$, $x = 2$ y $x = 4$. De estos puntos sólo $x = 2$ está en el intervalo $[0, 2]$ y es uno de sus extremos, luego sólo hay un recinto.

$$S_1 = \int_0^2 (x^3 - 5x^2 + 2x + 8)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + x^2 + 8x\right]_0^2 = \frac{32}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{32}{3} \simeq 10,667\ u^2$$

b) Asíntotas:

☛ **Verticales:**
$x = -1$

$$\lim_{x \longrightarrow -1} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x - 4} = \pm\infty$$
$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x - 4} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$
$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x - 4} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty$$

$x = 4$

$$\lim_{x \longrightarrow 4} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x - 4} = \pm\infty$$
$$\lim_{x \longrightarrow 4^-} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x - 4} = \left[\frac{33}{0^+}\right] = -\infty$$
$$\lim_{x \longrightarrow 4^+} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x - 4} = \left[\frac{33}{0^-}\right] = +\infty$$

☛ **Horizontales:** $y = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x - 4} = 2$$

☛ **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

Problema 3.10.3 El precio de cada acción de una determinada empresa oscila entre 1 y 5 euros. La facturación de dicha empresa en bolsa depende del precio de la acción y viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} A + Bx & \text{si} \quad 1 \le x \le 2 \\ 2 - Bx + Ax^2 & \text{si} \quad 2 < x \le 5 \end{cases}$$

Se sabe que para un precio de la acción de 1 euro, la facturación es 4 y que la función es continua. Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.
Solución:
Por continuidad:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} F(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} (A + Bx) = A + 2B \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} F(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} (2 - Bx + Ax^2) = 4A - 2B + 2 \end{array} \right. \Longrightarrow A + 2B = 4A - 2B + 2 \Longrightarrow$$

$$3A - 4B = -2 \text{ y como } f(1) = 4 \Longrightarrow A + B = 4 \Longrightarrow \begin{cases} 3A - 4B = -2 \\ A + B = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 2 \end{cases}$$

3.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

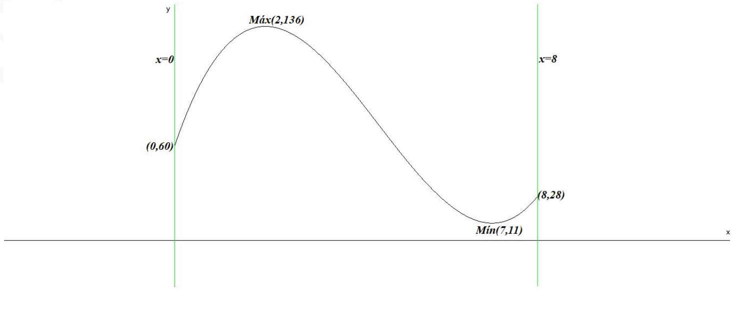
Problema 3.10.4 El gasto G (en euros) por el consumo de energía eléctrica en un taller durante las 8 horas de funcionamiento varía de acuerdo con la función:

$$G(t) = 2t^3 - 27t^2 + 84t + 60 \quad (0 \le t \le 8)$$

donde t es el tiempo transcurrido en horas. Se pide, justificando las respuestas, determinar a qué horas se producen los gastos máximo y mínimo y los valores de dichos gastos máximo y mínimo.
Solución:
$G'(t) = 6t^2 - 54t + 84 = 0 \Longrightarrow t = 2$ y $t = 7$

	$[0,2)$	$(2,7)$	$(7,8]$
$G'(t)$	$+$	$-$	$+$
$G(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función crece en el intervalo $[0,2) \cup (7,8]$ y decrece en el $(2,7)$. Tiene un máximo relativo en $(2,136)$ y un mínimo relativo en $(7,11)$
En los extremos del intervalo tenemos $G(0) = 60$ (por debajo del máximo y por encima del mínimo) y $G(8) = 28$ (por debajo del máximo y por encima del mínimo) Luego el máximo y el mínimo relativos también son absolutos.
En conclusión: El consumo de energía eléctrica es máximo cuando han transcurrido 2 horas con un gasto de 136€. El consumo de energía eléctrica es mínimo cuando han transcurrido 7 horas con



un gasto de 11€

Problema 3.10.5 En una piscina natural, el aumento de temperatura (en grados centígrados), x, ocasiona un aumento en la cantidad de algas en superficie (en kg), $F(x)$. La relación entre ambas cantidades viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} 2Bx + 2A & \text{si} \quad 0 \le x \le 3 \\ x^2 - 3Ax + 8B & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

Se sabe que para un aumento de 4 grados centígrados, se han recogido 12 kg de algas y que la función es continua. Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

Solución:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} F(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} (2Bx + 2A) = 2A + 6B \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} F(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} (x^2 - 3Ax + 8B) = -9A + 8B + 9 \end{cases} \Longrightarrow 2A + 6B = -9A + 8B + 9 \Longrightarrow$$

$11A - 2B = 9$ y $F(4) = 12 \Longrightarrow 16 - 12A + 8B = 12 \Longrightarrow -3A + 2B = -1$.

$$\begin{cases} 11A - 2B = 9 \\ -3A + 2B = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Problema 3.10.6 Se pide, justificando las respuestas:

a) Hallar el área encerrada por la función: $f(x) = x^2 + x - 2$ el eje OX y entre $x = 4$ y $x = 6$.

b) Calcular las asíntotas de la función: $g(x) = \dfrac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)}$

Solución:

a) $f(x) = x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -2$ y $x = 1$. Ninguno de estos puntos está en el intervalo $[4, 6]$, luego sólo hay un recinto.

$$S_1 = \int_4^6 (x^2 + x - 2)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_4^6 = \frac{170}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{170}{3} \simeq 56{,}667\ u^2$$

b) Asíntotas:

- **Verticales:**

  $x = -2$

$$\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-} \frac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)} = \left[\frac{-9}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^+} \frac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)} = \left[\frac{-9}{0^-}\right] = +\infty$$

  $x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)} = \left[\frac{-3}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)} = \left[\frac{-3}{0^+}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:** $y = -\dfrac{2}{3}$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{-2x^2-1}{3(x^2+x-2)} = -\frac{2}{3}$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

3.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.10.7 Durante el estudio de medida del ruido R, expresado en decibelios, en un punto de una determinada ciudad se ha comprobado que varía con el tiempo, t, expresado en horas de acuerdo con la función:

$$R(t) = t^3 - 12t^2 + 36t + 60 \ \ (1 \le t \le 7)$$

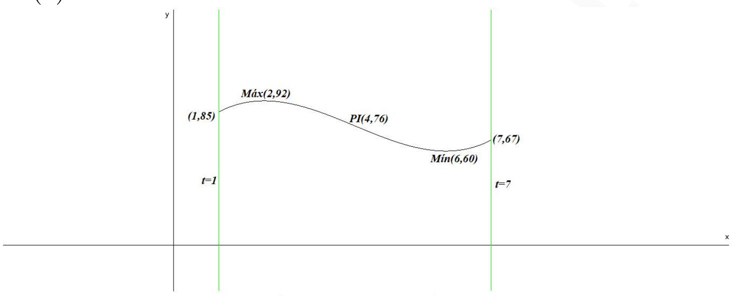
Determinar, justificando las respuestas, en qué momento se producen los valores máximo y mínimo de ruido. Calcular dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

$R'(t) = 3t^2 - 24t + 36 = 0 \Longrightarrow t = 2$ y $t = 6$

	$[0,2)$	$(2,6)$	$(6,7]$
$R'(t)$	$+$	$-$	$+$
$R(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

Luego hay un máximo local en $t = 2$ horas con 92 decibelios y un mínimo local en $t = 6$ horas con 60 decibelios. Este máximo y este mínimo son absolutos cuando los comparamos con $R(1) = 85$ y con $R(7) = 67$.



Problema 3.10.8 Cierta levadura es utilizada en la masa del pan en una cantidad, x, entre 1 y 5 gramos, El crecimiento de la masa en el horno, $F(x)$ (en cm) viene determinado por la cantidad de levadura de acuerdo a la función:

$$F(x) = \begin{cases} Bx + 2A & \text{si} \quad 1 \le x < 3 \\ x^2 + Ax - B & \text{si} \quad 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

Se sabe que con 2 gramos de levadura la masa experimenta un crecimiento de 2 cm y que la función es continua. Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

Solución:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} F(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} (Bx + 2A) = 2A + 3B \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} F(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} (x^2 + Ax - B) = 3A - B + 9 \end{cases} \Longrightarrow 2A + 3B = 3A - B + 9 \Longrightarrow$$

$A - 4B = -9$ y $F(2) = 2 \Longrightarrow 2A + 2B = 2 \Longrightarrow A + B = 1$.

$$\begin{cases} A - 4B = -9 \\ A + B = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \end{cases}$$

Problema 3.10.9 Se pide, justificando las respuestas:

a) Hallar el área encerrada por la función: $f(x) = x^2 + 3x + 2$ el eje OX y entre $x = 1$ y $x = 3$.

b) Calcular las asíntotas de la función: $g(x) = \dfrac{-2x^2 + 3}{2(x^2 + 3x + 2)}$

Solución:

a) $f(x) = x^2 + 3x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -2$ y $x = -1$. Ninguno de estos puntos está en el intervalo $[1, 3]$, luego sólo hay un recinto.

$$S_1 = \int_1^3 (x^2 + 3x + 2)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_1^3 = \frac{74}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{74}{3} \simeq 24,667\ u^2$$

b) Asíntotas:

- **Verticales:**
  $x = -2$

$$\lim_{x \longrightarrow -2} \frac{-2x^2 + 3}{2(x^2 + 3x + 2)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{-2x^2 + 3}{2(x^2 + 3x + 2)} = \left[\frac{-5}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{-2x^2 + 3}{2(x^2 + 3x + 2)} = \left[\frac{-5}{0^-}\right] = +\infty$$

  $x = -1$

$$\lim_{x \longrightarrow -1} \frac{-2x^2 + 3}{2(x^2 + 3x + 2)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{-2x^2 + 3}{2(x^2 + 3x + 2)} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{-2x^2 + 3}{2(x^2 + 3x + 2)} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** $y = -1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 3}{2(x^2 + 3x + 2)} = -1$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

3.11. Galicia

3.11.1. Modelo de 2020

Problema 3.11.1 El número de espectadores de una serie (N), en millones, en función del tiempo (t), en años, sigue un modelo dado por la función: $N(t) = K + \dfrac{8t}{1 + t^2}$

a) Calcula el valor de K si se sabe que al final del segundo año el número de espectadores era de 4,2 millones.

b) Estudia el crecimiento, el decrecimiento y el momento y valor máximo de la audiencia.

Solución:

a) $N(2) = K + \dfrac{16}{5} = 4,2 \Longrightarrow K = 1$ millón. Luego $N(t) = 1 + \dfrac{8t}{1+t^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{8(1-t^2)}{(t^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow t = \pm 1$ años, la solución negativa no tiene relevancia.

	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

La función tiene un máximo en $(1,5)$, al año se llega a los 5 millones de espectadores.

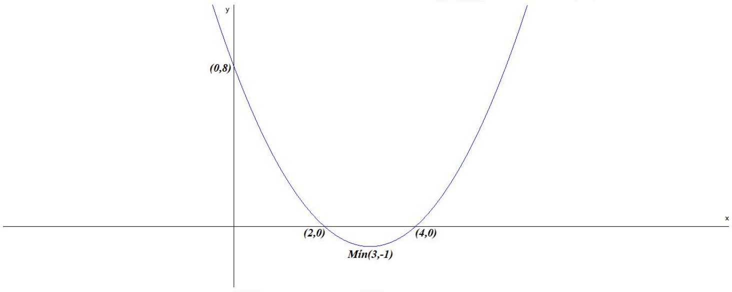
Problema 3.11.2 Dada la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$

a) Realiza su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremo relativo.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y los ejes de coordenadas.

Solución:

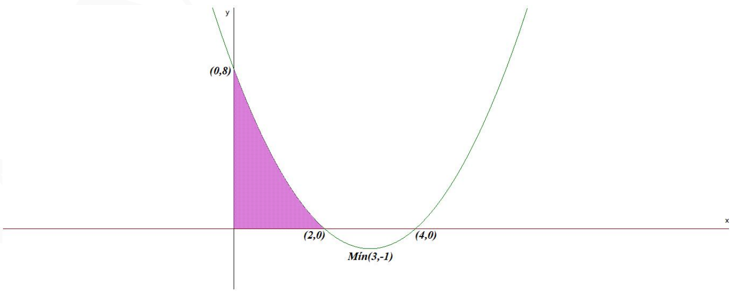
a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Los puntos de corte con el eje OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0,8)$, con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Longrightarrow (2,0)$ y $(4,0)$.
Monotonía: $f'(x) = 2x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 3$ y como $f''(x) = 2 < 0$ se trata de un mínimo.



b)

$$S_1 = \int_0^2 (x^2 - 6x + 8)\, dx = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\Big]_2^4 = \frac{20}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{20}{3}\ u^2$$



3.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.11.3 El número de personas (en miles) que visitan cada año un parque temático viene dado por la función $P(t) = \dfrac{180t}{t^2+9}$, $t \geq 0$ en donde t es el tiempo transcurrido en años desde su apertura en el año 2010 ($t = 0$)

a) Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento del número de visitantes.

b) ¿En qué año recibió el mayor número de visitantes? ¿A cuánto ascienden? Razone las respuestas.

c) ¿A partir de qué año el número de visitantes será inferior a 18000 personas? ¿Qué ocurrirá con el número de visitantes con el paso del tiempo? Razone las respuestas.

Solución:

a) $P'(x) = -\dfrac{180(t^2-9)}{(t^2+9)^2} = 0 \Longrightarrow t = \pm 3$ años, la solución negativa no tiene relevancia.

	$(0,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

La función crece en el intervalo $(0,3)$ años (2010-2013) y decrece en el $(3,\infty)$ años $(2013,\infty)$

b) La función tiene un máximo relativo en el año 3 (2013) con 30000 visitantes $(3,30)$. Este máximo es absoluto.

c) $P(t) = \dfrac{180t}{t^2+9} = 18 \Longrightarrow 18t^2 - 180t + 162 = 0 \Longrightarrow t = 1$ y $t = 9$. Cuando $t = 1$ (2011) la función está creciendo. Cuando $t = 9$ (2019) la función está decreciendo, a partir de ese momento siempre habrá menos de 18000 visitantes.
Cuando t se va haciendo más grande $t \longrightarrow \infty$ tenemos $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{180(t^2-9)}{(t^2+9)^2} = 0$, el número de visitantes tiende a desaparecer con el paso del tiempo.

Problema 3.11.4 Dada la función $f(x) = -4x^2 + 12x - 5$

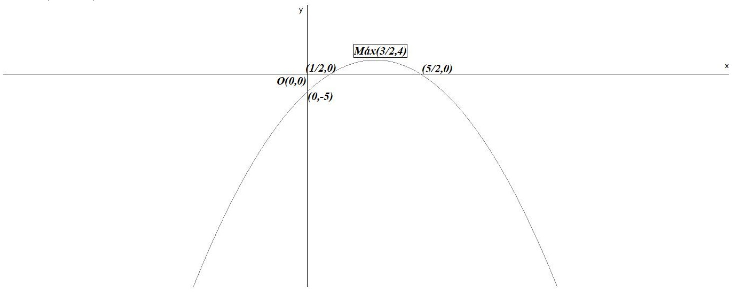
a) Realice su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremo relativo.

b) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 1$, $x = 2$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Los puntos de corte con el eje OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0,-5)$, con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow -4x^2 + 12x - 5 = 0 \Longrightarrow \left(\frac{5}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.
Monotonía: $f'(x) = -8x + 12 = 0 \Longrightarrow x = \frac{3}{2}$ y como $f''(x) = -8 < 0$ se trata de un máximo

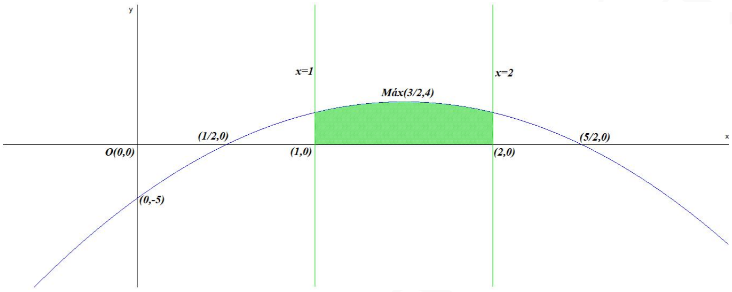
en $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$



b)

$$S_1 = \int_1^2 (-4x^2 + 12x - 5)\, dx = \left.\frac{-4x^3}{3} + 6x^2 - 5x\right]_1^2 = \frac{11}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{11}{3} \simeq 3,67\ u^2$$



3.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.11.5 Los gastos financieros de una organización, en cientos de miles de euros, siguen la función: $G(t) = \begin{cases} 4 - \frac{t}{3} & \text{si} \quad 0 \le t \le 3 \\ \frac{5t-3}{t+1} & \text{si} \quad t > 3 \end{cases}$ siendo t el tiempo en años transcurridos.

a) ¿En qué momento los gastos son iguales a 400000 euros? Razona la respuesta.

b) ¿Cuándo crece $G(t)$? ¿Cuándo decrece $G(t)$? ¿Cuándo los gastos alcanzan su valor mínimo y cuánto valen?

c) ¿Qué ocurre con los gastos cuando el número de años crece indefinidamente?

Solución:

a) $G(t) = 4 \Longrightarrow \begin{cases} 4 - \frac{t}{3} = 4 & \text{si} \quad 0 \le t \le 3 \\ \frac{5t-3}{t+1} = 4 & \text{si} \quad t > 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = 0 & \text{si} \quad 0 \le t \le 3 \\ t = 7 & \text{si} \quad t > 3 \end{cases}$, los gastos son iguales a 400000€ cuando la organización empieza a dar sevicios financieros y cuando han transcurrido 7 años.

b) $G'(t) = \begin{cases} -\frac{1}{3} & \text{si} \quad 0 \le t \le 3 \\ \frac{8}{(t+1)^2} & \text{si} \quad t > 3 \end{cases} \Longrightarrow$

	$(0,3)$	$(3,\infty)$
$G'(t)$	$-$	$+$
$G(t)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

Los gastos financieros decrecen desde el incio del servicio hasta el tercer año, a partir de este año los gastos crecen.
Los gastos mínimos se producen el tercer año y son de $G(3) = 3$, es decir, 300000€

c) Cuando el número de años crece indefinidamente:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{5t-3}{t+1}=5\Longrightarrow$$

Los gastos tienden a estabilizarse en valores muy cercanos a 500000€

Problema 3.11.6 Una pequeña empresa comercializa paraguas a 60 euros la unidad. El coste de producción diario de "x" paraguas viene dado por la función $C(x) = x^2 - 10x$, estando limitada su capacidad de producción a un máximo de 70 paraguas al día $(0 \le x \le 70)$

a) Obtenga las expresiones de las funciones que determinan los ingresos y los beneficios diarios obtenidos por la empresa en función del número de paraguas producidos "x".

b) Determine el número de paraguas que debe producir diariamente para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto ascienden los ingresos, los costes y los beneficios diarios en este caso? Razone la respuesta.

Solución:

a) La función beneficio sería $f(x) = 60x - C(x) = -x^2 + 70x$ con $x \in [0, 70]$.

b) $f'(x) = -2x + 70 = 0 \Longrightarrow x = 35$

	$(0,35)$	$(35,70)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

Los beneficios crecen hasta la producción de 35 paraguas y decrecen a medida que producen más de 35. Luego los beneficios máximos se obtienen con una producción de 35 paraguas y son de $f(35) = 1225$€.
Los coste que se han producido son: $C(35) = 835$€.
Los ingresos totales han sido: $60x = 60 \cdot 35 = 2100$€.

3.12. Islas Baleares

3.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.12.1 En una empresa se pueden producir hasta 500 mesas cada mes. La función de costes en relación con el número q de mesas producidas es $C(q) = \frac{q^3}{50} + 8q + 40$. Si q es el número de mesas producidas, el coste medio de cada mesa se expresa mediante la función $Q(q) = \frac{C(q)}{q}$

a) Cacular el coste medio de cada mesa, si la empresa produce 5. ¿Y si produce 20?

b) Determinar cuántas mesas hay que producir para que el coste medio sea mínimo. Justificar que se trata efectivamente de un mínimo y Calcular este coste medio.

Solución:

a) El coste medio es:

$$Q(q)=\frac{C(q)}{q}=\frac{\frac{q^3}{50}+8q+40}{q}=\frac{q^3+400q+2000}{50q}$$

$$Q(5)=\frac{33}{2}=16,5 \quad Q(20)=18$$

b) Si no se fabricase ninguna mesa el coste se sería de $C(0) = 40$ y el coste medio se haría muy grande:

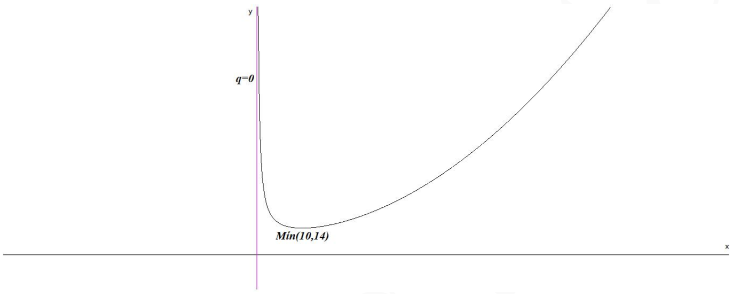
$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{q^3 + 400q + 2000}{50q} = \left[\frac{2000}{0^+}\right] = +\infty$$

Si se fabricasen 500 mesas tenemos $Q(500) = 5008,08$ y el dominio de la función será $\text{Dom}(Q) = (0, 500]$

$$Q'(q) = \frac{q^3 - 1000}{25q^2} = 0 \Longrightarrow q = 10$$

	$(0, 10)$	$(10, 500)$
$Q'(q)$	$-$	$+$
$Q(q)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

la función decrece en el intervalo $(0, 10)$ y crece en el $(10, 500)$ con un mínimo local en el punto $(10, 14)$.
El mínimo obtenido es absoluto y se obtiene con una producción de 10 mesas y un coste medio de 14.



Problema 3.12.2 Dadas las funciones $f(x) = -x^2 + 5$ y $g(x) = x^2 - a$ con $a \in \mathbb{R}$

a) Encontrar todos los posibles valores de a de la intersección de $f(x)$ y $g(x)$.

b) Para $a = 3$, dibujar el recinto cerrado entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$, identificando los puntos de intersección.

c) Para $a = 3$, Calcular el área del recinto que encierran.

Solución:

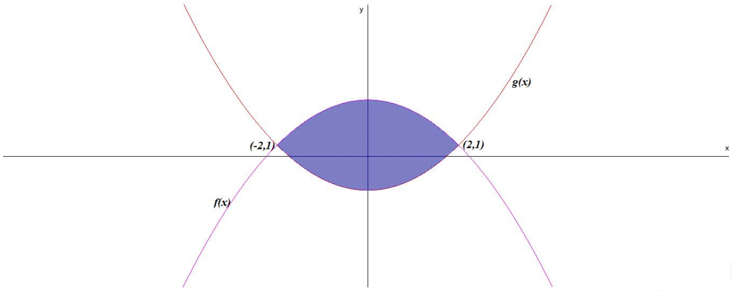
a) $f(x) = g(x) \Longrightarrow -x^2 + 5 = x^2 - a \Longrightarrow 2x^2 = a + 5 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a+5}{2}} \Longrightarrow \frac{a+5}{2} \geq 0 \Longrightarrow a \geq -5 \Longrightarrow a \in [-5, \infty)$

b) Si $a = 3$ y $f(x) = g(x) \Longrightarrow -x^2 + 5 = x^2 - 3 \Longrightarrow 2x^2 = 8 \Longrightarrow x = \pm 2$

c)

$$S_1 = \int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\, dx = \int_{-2}^{2} (2x^2 - 8)\, dx = \left.\frac{2x^3}{3} - 8x\right]_{-2}^{2} = -\frac{64}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{64}{3} = 21,33 \;\; u^2$$



Problema 3.12.3 Consideremos una función $f(x)$ tal que su primera derivada es $f'(x) = x^3 + bx + 4$, en la que b es un parámetro real.

a) Determinar el valor de b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo a $x = -1$ y razonar si se trata de un máximo o de un mínimo.

b) Suponiendo que $b = 1$, calcular una primitiva de $f'(x)$, y es $\int f'(x)\,dx$.

c) Utilice la primitiva anterior para calcular $f(x)$ para $b = 1$ sabiendo que $f(2) = -1$.

Solución:

a) $f'(-1) = 0 \Longrightarrow -1 - b + 4 = 0 \Longrightarrow b = 3$. Luego $f'(x) = x^3 + 3x + 4 \Longrightarrow f''(x) = 3x^2 + 3$ y $f''(-1) = 6 > 0 \Longrightarrow x = -1$ es un mínimo.

b) Tenemos $f'(x) = x^3 + x + 4$.

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (x^3 + x + 4)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 4x + C$$

c) $f(2) = 14 + C = -1 \Longrightarrow C = -15 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2} + 4x - 15$

3.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.12.4 De una función $y = f(x)$ sabemos que su derivada $f'(x) = 2x^3 - 18x$

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $y = f(x)$.

b) Determinar las abscisas de sus extremos relativos y clasificarlos.

Solución:

a) $f'(x) = 2x^3 - 18x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pm 3$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

la función decrece en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$ y crece en el $(-3, 0) \cup (3, \infty)$

b) La función tiene mínimos relativos en los puntos $x = -3$ y $x = 3$ y un máximo relativo en $x = 0$.

Problema 3.12.5 Los beneficios semanales de una empresa expresados en euros, cuando fabrica y vende x objetos, se ajustan a la función $B(x) = -0,75x^2 + 75x - 1200$; donde $20 \le x \le 80$

a) Calcular el beneficio que obtiene en fabricar y vender 20 objetos.

b) Buscar el número de objetos que ha de fabricar y vender para obtener el beneficio máximo, así como este beneficio máximo.

c) El beneficio medio para x objetos es $M(x) = B(x)/x$. Diga cuántos objetos debe fabricar y vender para que el beneficio medio sea máximo, y cuál es este beneficio.

Solución:

a) $B(20) = 0$€

b) $B'(x) = -1,5x + 75 = 0 \Longrightarrow x = 50$

	$[20, 50)$	$(50, 80]$
$B'(x)$	$+$	$-$
$B(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

Los beneficios crecen hasta la fabricación y venta de 50 objetos.
Los beneficios decrecen desde la fabricación y venta de 50 objetos hasta la fabricación y venta de 80 objetos.
Los beneficios serán máximos con la venta y fabricación de 50 objetos y será de $B(50) = 675$€.
Se trataría de un máximo relativo que, en nuestro caso, es absoluto.

c) $M(x) = \dfrac{B(x)}{x} = \dfrac{-0,75x^2 + 75x - 1200}{x} \Longrightarrow M'(x) = -\dfrac{3(x^2 - 1600)}{4x^2} = 0 \Longrightarrow x = 40$

	$[20, 40)$	$(40, 80]$
$M'(x)$	$+$	$-$
$M(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

El beneficio medio crece hasta la fabricación y venta de 40 objetos y decrece desde ese momento hasta la fabricación y venta de 80 objetos. Por lo que tiene un máximo relativo en $x = 40$ con un beneficio medio de $M(40) = 15$€

3.13. Islas Canarias

3.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.13.1 Una empresa que ofrece servicios en internet tiene, en el día de más actividad del año una demanda de datos que viene dada por la función:

$$D(t) = \begin{cases} \frac{1}{10}t^2 - \frac{6}{5}t + 4 & \text{si} \quad 0 \le t \le 8 \\ \\ -\frac{36}{t} + 6 & \text{si} \quad 8 < t \le 24 \end{cases}$$

donde t es la hora del día (de 0 a 24) y $D(t)$ es la demanda de datos a esa hora expresada en cientos de Gigabits por segundo.

a) Representa gráficamente la función. ¿Hubo una demanda continua de datos a lo largo del día? En caso negativo, ¿a qué hora hubo un salto instantáneo de la demanda y cuál fue la magnitud del salto?

b) Calcula los valores de las demandas mínima y máxima absolutas y cuando se alcanzaron.

Solución:

a) Dibujamos la gráfica de la función

- Estudiamos la continuidad en $t = 8$

$$\lim_{t\longrightarrow 8^-}\left(\frac{1}{10}t^2 - \frac{6}{5}t + 4\right) = \frac{4}{5}$$

$$\lim_{t\longrightarrow 8^+}\left(-\frac{36}{t} + 6\right) = \frac{4}{5}$$

Luego la función es discontinua no evitable en ese punto, hay un salto.

- $\mathrm{Dom}(f) = [0, 24]$

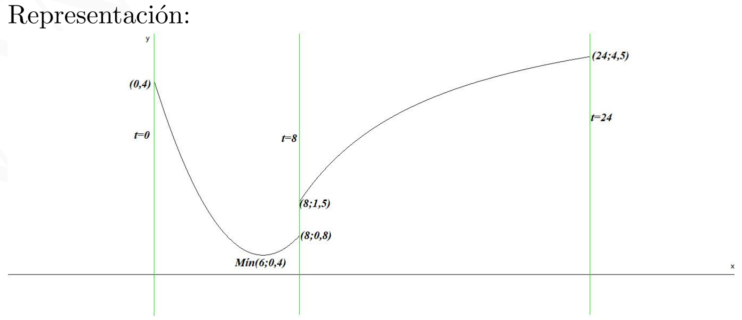
- Cortes con eje OY hacemos $t = 0 \Longrightarrow (0, 4)$
Puntos de corte con OX hacemos $D(t) = 0 \Longrightarrow$
$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{1}{10}t^2 - \dfrac{6}{5}t + 4 \neq 0 & \text{si} & 0 \le t \le 8 \\ -\dfrac{36}{t} + 6 = 0 \Longrightarrow t = 6(\text{no vale}) & \text{si} & 8 < t \le 24 \end{array}\right. \Longrightarrow$$, luego no hay puntos de corte con OX.

- $$D'(t) = \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{t-6}{5} = 0 \Longrightarrow t = 6 & \text{si} & 0 \le t \le 8 \\ \dfrac{36}{t^2} & \text{si} & 8 < t \le 24 \end{array}\right.$$

	$[0, 6)$	$(6, 8]$	$(8, 24]$
$D'(t)$	$-$	$+$	$+$
$D(t)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$	crece $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $[0, 6)$ y creciente en el intervalo $(6, 8] \cup (8, 24]$ con un mínimo relativo en el punto $(6, 2/5)$.

- Representación:

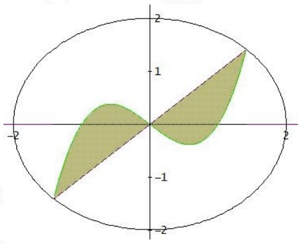


En resumen: La demanda no fue continua a lo largo del día a las 8 horas hubo un salto de 1,5-0,8=0,7 de cientos de Gigabits.

b) La demanda mínima sería a las 6 horas con 0,4 de cientos de Gigabits.
La demanda máxima es a las 24 horas con $f(24) = 4,5$ de cientos de Gigabits. (En $f(0) = 4$ que es menor)

Problema 3.13.2 La empresa $XYPERIA$ ha encargado la construcción de su logotipo corporativo en madera y cobre, tomando como modelo la figura adjunta, que diseñó una empresa contratada para ello. El círculo, que será de madera, está centrado en el punto (0,0) y tiene 2 metros de radio. Las funciones que delimitan el área sombreada son:

$$f(x) = x^3 - x \quad g(x) = x$$



a) La zona sombreada se va a recubrir de cobre ¿Qué superficie tiene esta zona?

b) Teniendo en cuenta que el m^2 de plancha de cobre se cobra a 60€ y no se desperdicia nada, que el coste de mano de obra es el 30 % de lo que cuesta el cobre, y que el círculo de madera, el transporte y el montaje in situ tienen un coste de fijo 270€, ¿cuánto deberá pagar $XYPERIA$ por la construcción e instalación de su logotipo corporativo?

Solución:

a) calculamos los puntos de intersección de las dos gráficas:

$$x^3 - x = x \Longrightarrow x^3 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 0, \quad x = \pm\sqrt{2}$$

Habría dos recintos que, por simetría, son iguales:

$$S_1 = \int_0^{\sqrt{2}} (x^3 - 2x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - x^2\right]_0^{\sqrt{2}} = -1$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 2|S_1| = 2\ u^2$$

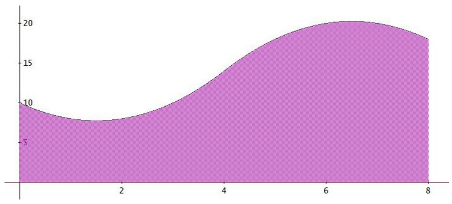
b) Coste del cobre$= 60 \cdot 2 = 120$€
Mano de obra$= 0,3 \cdot 120 = 36$€
Coste fijo$= 270$€
Total $= 120 + 36 + 270 = 426$€

3.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.13.3 Para hacer los decorados de una película se necesita construir y pintar una pared de cartón piedra como la de la figura adjunta. La curva superior de la pared puede representarse mediante la función:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 10 & \text{si} \quad x \in [0, 4] \\ -x^2 + 13x - 22 & \text{si} \quad x \in (4, 8] \end{cases}$$

Las unidades se miden en metros.



a) Calcular cuando mide la superficie de la pared.

b) Si el cartón piedra cuesta 4€/m^2, la pintura 0,5€/m^2 y el coste la mano de obra es igual al 70 % del coste de los materiales (cartón y pintura) ¿cuánto costará la elaboración de esta pared?

Solución:

a) Tenemos dos recintos

$$S_1 = \int_0^4 (x^2 - 3x + 10)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 10x\right]_0^4 = \frac{112}{3}$$

$$S_2 = \int_4^8 (-x^2 + 13x - 22)\, dx = \left.-\frac{x^3}{3} + \frac{13x^2}{2} - 22x\right]_4^8 = \frac{224}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{112}{3} + \frac{224}{3} = 112\ u^2$$

b) Cartón piedra $= 112 \cdot 4 = 448$€
Pintura $= 112 \cdot 0,5 = 56$€
Mano de obra $= 0,7(448 + 56) = 352,8$€
Total $= 448 + 56 + 352,8 = 856,8$€

Problema 3.13.4 Durante los últimos 10 años el déficit en las cuentas de una institución, en millones de euros, viene dado por la función:

$$D(t) = \begin{cases} -\frac{(t-2)^2}{4} + 5 & \text{si} \quad t \in [0,4] \\ \frac{(t-7)^2}{9} + 3 & \text{si} \quad t \in (4,10] \end{cases}$$

siendo t el tiempo en años. Justificando la respuesta:

a) ¿Es continua $D(t)$? Representarla gráficamente.

b) ¿Es $D(t)$ derivable?

c) ¿Entre qué valores varía $D(t)$? ¿Cuáles son sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento? ¿Cuándo alcanza los valores máximos y mínimos absolutos?

Solución:

a) Las dos ramas son continuas, hay que analizar la continuidad en $t = 4$:

$$\lim_{t \longrightarrow 4^-} f(x) = \lim_{t \longrightarrow 4^-} \left(-\frac{(t-2)^2}{4} + 5 \right) = 4$$

$$\lim_{x \longrightarrow 4^+} f(x) = \lim_{t \longrightarrow 4^+} \left(\frac{(t-7)^2}{9} + 3 \right) = 4$$

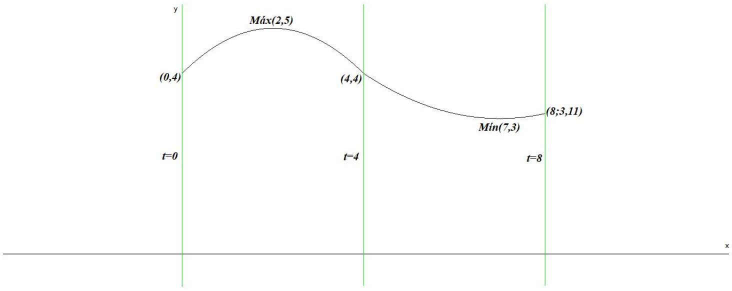
$$f(4) = 4$$

Luego D es continua en $t = 4$
Dando valores: $D(0) = 4 \Longrightarrow (0,4)$, $D(4) = 4$ y $D(8) = 3,11$

$$D'(t) = \begin{cases} -\frac{t-2}{2} = 0 \Longrightarrow t = 2 & \text{si} \quad t \in [0,4] \\ \frac{2(t-7)}{9} = 0 \Longrightarrow t = 7 & \text{si} \quad t \in (4,10] \end{cases}$$

	$[0,2)$	$(2,4)$	$(4,7)$	$(7,10)$
$D'(t)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$D(t)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(2,7)$ y creciente en el intervalo $(0,2) \cup (7,10)$ con un mínimo relativo en el punto $(7,3)$ y un máximo relativo en $(2,5)$



Como se puede ver en la gráfica el máximo relativo (2,5) también es absoluto y el mínimo relativo (7,3) también es absoluto.

b) $D'(4^-) = -1$ y $D'(4^+) = -2/3 \Longrightarrow D$ no es derivable en $t = 4$. Luego D es derivable en el intervalo $[0, 4) \cup (4, 10]$

c) Resuelto en el apartado primero.

3.14. La Rioja

3.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.14.1 Consideramos la función $f(x) = x^4 - ax^2 + b$

a) ¿Qué valores deben tomar a y b para que la función tenga un mínimo en el punto $(1, 0)$?

b) Con los valores de a y b del apartado anterior, calcula los puntos donde $f(x)$ tiene tangente paralela a la recta $y = 1$.

c) Calcula la recta tangente a la función en el punto $x = 1$.

Nota:si no has conseguido determinar a y b en el apartado anterior, toma $a = 2$ y $b = 1$ en los apartados *b*) y *c*).
Solución:

a) $f(x) = x^4 - ax^2 + b \Longrightarrow f'(x) = 4x^3 - 2ax$

$$\left\{\begin{array}{l} f(1) = 0 \Longrightarrow 1 - a + b = 0 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 4 - 2a = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

Como $f''(x) = 12x^2 - 4 \Longrightarrow f''(1) = 8 > 0 \Longrightarrow (1, 0)$ es un mínimo.

b) Una recta paralela a $y = 1$ tiene que tener pendiente cero:

$$f'(x_0) = 4x_0^3 - 4x_0 = 0 \Longrightarrow x_0 = 0, \ \ x_0 = \pm 1$$

En los puntos $(0, 0)$, $(-1, 0)$ y $(1, 0)$

c) $x_0 = 1 \Longrightarrow y_0 = f(x_0) = 0$ el punto de tangencia es el $(1, 0)$ y $m = f'(1) = 0 \Longrightarrow y - 0 = 0(x - 1) \Longrightarrow y = 0$

Problema 3.14.2 Sea la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ccr} 0 & \text{si} & x < 0 \\ x^2 & \text{si} & 0 \le x < 1 \\ ax - 2 & \text{si} & 1 \le x \end{array}\right.$$

a) ¿Para qué valor de a la función es continua?

b) Utilizando el valor de a del apartado anterior, esboza una gráfica de la función f.

c) Con el valor de a del apartado a), calcula el área encerrada por la gráfica de la función f, el eje OX y la recta $x = 3$.

Nota: si no has conseguido determinar a en el apartado anterior, toma $a = 3$ en los apartados b) y c).

Solución:

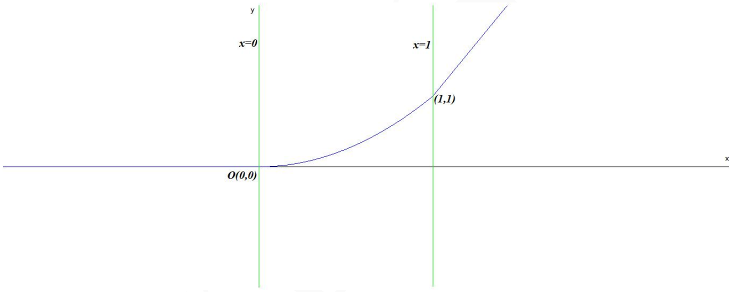
a) Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} x^2 = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 0$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} (ax-2) = a - 2 \end{array}\right. \Longrightarrow a - 2 = 1 \Longrightarrow a = 3$$

b) Dando valores:



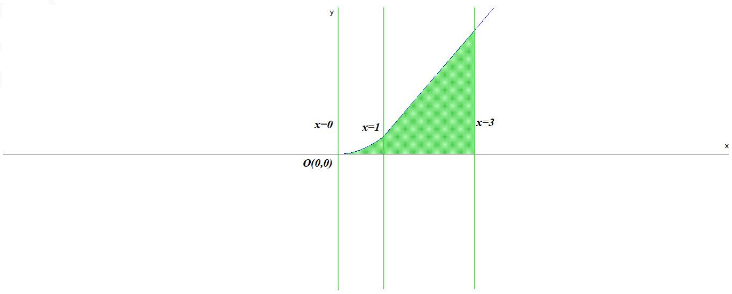
c) Hay que calcular dos áreas:
S_1 en el intervalo $(0, 1)$ y S_2 en el intervalo $(1, 3)$:

$S_1 = \displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$S_2 = \displaystyle\int_1^3 (3x-2)\,dx = \left.\frac{3x^2}{2} - 2x\right]_1^3 = 8$

Luego:

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{1}{3} + 8 = \frac{25}{3} \simeq 8,33\ u^2$$



Problema 3.14.3 La parte positiva de la función $f(t) = -2t^2 + 16t$ indica la gravedad de un enfermo desde que contrae una determinada enfermedad hasta que vuelve a estar sano.

a) Haz un esbozo de la gráfica de la función.

b) Si la variable t se mide en días, ¿cuántos días dura la enfermedad?

c) ¿En qué día del proceso está más grave el enfermo?

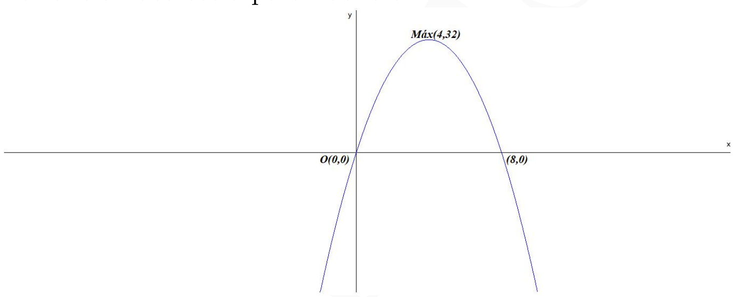
Solución:

a) Esbozo de la función:

- ☛ Puntos de corte:
  Con OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
  Con OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ y $(8, 0)$
- ☛ $f'(t) = -4t + 16 = 0 \Longrightarrow t = 4$

	$(-\infty, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(t)$	$+$	$-$
$f(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función crece hasta el día 4 donde hay un máximo local en (4,32).
La función decrece a partir del día 4.



b) La enfermedad termina el día 8.

c) La máxima gravedad se da el día 4.

3.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.14.4 Sea la función

$$f(t) = \begin{cases} 2t^2 & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ 3t - 1 & \text{si} \quad 1 \le t < 2 \\ -5t + 15 & \text{si} \quad 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

a) Estudia razonadamente su continuidad.

b) Haz una representación gráfica de la función f.

c) Si la función f representa la asistencia (en miles de personas) a un festival de música en función del tiempo t (medido en horas). ¿en qué momento la asistencia fue máxima? (Para qué valor de t). ¿Cuántas personas había en el festival en ese momento?.

Solución:

a) Continuidad en $t = 1$:

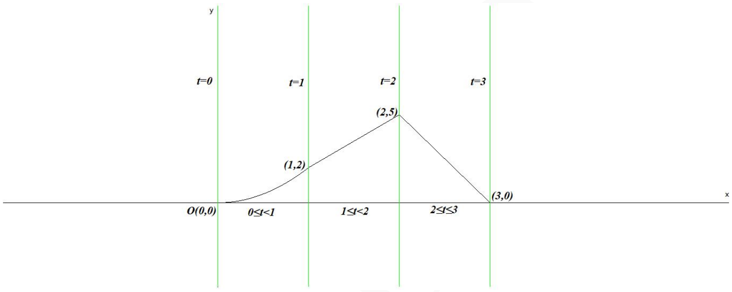
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t\longrightarrow 1^-} f(t) = \lim\limits_{t\longrightarrow 1^-} 2t^2 = 2 \\ \lim\limits_{t\longrightarrow 1^+} f(t) = \lim\limits_{t\longrightarrow 1^+} (3t-1) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow f \text{ continua en } t = 1$$

Continuidad en $t = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t\longrightarrow 2^-} f(t) = \lim\limits_{t\longrightarrow 2^-} (3t-1) = 5 \\ \lim\limits_{t\longrightarrow 2^+} f(t) = \lim\limits_{t\longrightarrow 2^+} (-5t+15) = 5 \\ f(2) = 5 \end{array}\right. \Longrightarrow f \text{ continua en } t = 2$$

Las ramas son continuas, luego f es continua en $[0, 3]$

b) Representación gráfica:



c) La asistencia máxima fue a la hora 2 con 5000 personas.

Problema 3.14.5 Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + c$

a) Determina a, b y c sabiendo que el punto $(-2, 1)$ pertenece a la gráfica de la función f y que, además, el punto $(-1, 0)$ es un extremo relativo de f.

b) Determina el área que encierra la gráfica de f y el eje OX en el intervalo $[0, 3]$.

NOTA: Si no has conseguido determinar a, b y c en el apartado anterior, toma $a = 1$, $b = 2$ y $c = 1$ en este segundo apartado.

Solución:

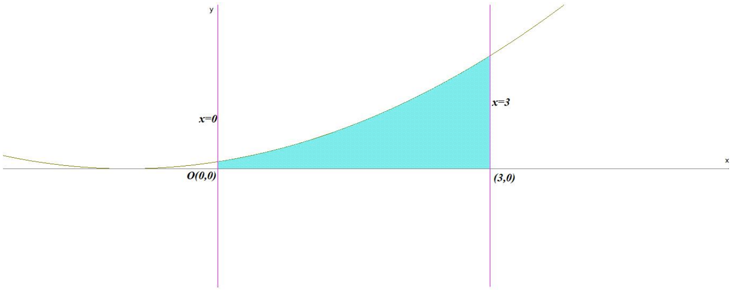
a) $f(x) = ax^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 2ax + b$

$$\left\{\begin{array}{l} f(-2) = 1 \Longrightarrow 4a - 2b + c = 1 \\ f(-1) = 0 \Longrightarrow a - b + c = 0 \\ f'(-1) = 0 \Longrightarrow -2a + b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = x^2 + 2x + 1$$

b) $f(x) = x^2 + 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$, la función f no corta al eje de abscisas dentro del intervalo $[0, 3]$, por lo que sólo hay un recinto

$$S_1 = \int_0^3 (x^2 + 2x + 1)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]_0^3 = 21\ u^2$$

$$S = |S_1| = 21\ u^2$$



Problema 3.14.6 La producción de un invernadero depende de la temperatura a la que esté regulado. La cantidad de toneladas de verduras que produce viene dada por la siguiente función, en la que x indica la temperatura en grados Celsius

$$f(x) = (x+3)^2(36-x) \quad (0 \le x \le 36)$$

a) ¿Para qué valor de x se obtiene la máxima producción?

b) ¿Cuántas toneladas se obtienen a esa temperatura?

c) ¿Para qué valores de x el invernadero no produce nada?

Solución:

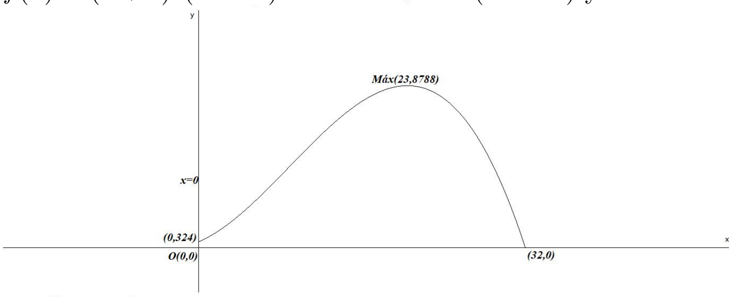
a) $f(x) = (x+3)^2(36-x) = -x^3 + 30x^2 + 207x + 324 \Longrightarrow f'(x) = -3x^2 + 60x + 207 = 0 \Longrightarrow$ $x = -3$(no vale) y $x = 23$

	$[0, 23)$	$(23, 36]$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $[0, 23)$, y es decreciente en el intervalo $(23, 36]$. Tiene un máximo relativo (en este caso absoluto) en $(23, 8788)$.

b) La producción es máxima con 8788 Tm cuando la temperatura es de 23°C.

c) $f(x) = (x+3)^2(36-x) = 0 \Longrightarrow x = -3$(no vale) y $x = 36$°C.



3.15. Madrid

3.15.1. Modelo de 2020

Problema 3.15.1 Se considera la función real de variable real $f(x)$ definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

a) Obtenga los coeficientes reales a, b y c, de $f(x)$ sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x=-3$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$ es $y=6x+8$.

b) Para $a=2$, $b=1$ y $c=1$, calcule la integral $\displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx$.

Solución:

$$f(x)=ax^2+bx+c\Longrightarrow f'(x)=2ax+b,\quad y=6x+8$$

a) $\left\{\begin{array}{l} f'(-3)=0\Longrightarrow -6a+b=0\\ m=f'(0)=6\Longrightarrow b=6\\ f(0)=6\cdot 0+8=8\Longrightarrow c=8\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} a=1\\ b=6\\ c=8\end{array}\right.\Longrightarrow$

$$f(x)=x^2+6x+8$$

b) Si $a=2$, $b=1$ y $c=1\Longrightarrow f(x)=2x^2+x+1$:

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx=\int_1^e \frac{2x^2+x+1}{x}\,dx=\int_1^e\left(2x+1+\frac{1}{x}\right)dx=$$

$$x^2+x+\ln x\Big]_1^e=e^2+e-1\simeq 9,107$$

Problema 3.15.2 Dada la función $f(x)=x+\dfrac{4}{x^2}$

a) Halle el dominio de la función y sus asíntotas.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y, si los hubiera, sus extremos relativos.

Solución:

$$f(x)=x+\frac{4}{x^2}=\frac{x^3+4}{x^2}$$

a) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{0\}$.
Asíntotas:

- ☛ Verticales:
  En $x=0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{x^3+4}{x^2}=\left[\frac{4}{0^+}\right]=+\infty\\[2ex] \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{x^3+4}{x^2}=\left[\frac{4}{0^+}\right]=+\infty\end{array}\right.$$

- ☛ Horizontales: No hay.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3+4}{x^2}=\infty\quad \lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{x^3+4}{x^2}=-\infty$$

- ☛ Oblícuas: $y=mx+n$:

$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1$$

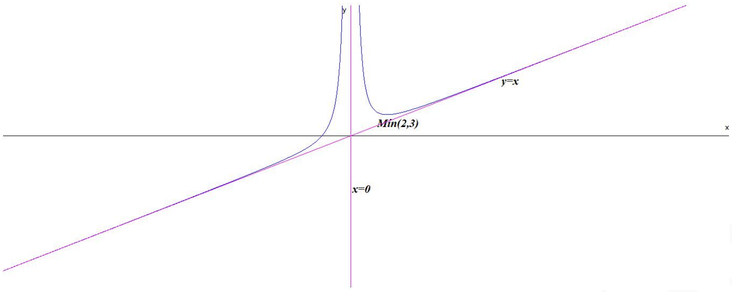
$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right)=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3+4-x^3}{x^2}=0\Longrightarrow y=x$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^3} = 0 \Longrightarrow x = 2$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(0, 2)$, tiene un mínimo relativo en el punto $(2, 3)$.



Problema 3.15.3 Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - \dfrac{1}{9} & \text{si} \quad x \le 0 \\[2ex] \dfrac{x+1}{x^2 - 9} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea derivable en todo su dominio.

b) Para $a = 0$ determine, si existen, las asíntotas de $f(x)$.

Solución:

a) Estudiamos la continuidad en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \left(x^2 + ax - \dfrac{1}{9} \right) = -\dfrac{1}{9} \\[3ex] \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{x+1}{x^2 - 9} = -\dfrac{1}{9} \\[3ex] f(0) = -\dfrac{1}{9} \end{cases} \Longrightarrow$$

La función es continua en $x = 0$ pero no lo es en $x = 3 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.
Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$, que es el único punto del dominio en el que hay duda.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si} \quad x \le 0 \\[2ex] -\dfrac{x^2 + 2x + 9}{(x^2 - 9)^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Tenemos que $f'(0^-) = a$ y $f'(0^+) = -\dfrac{1}{9} \Longrightarrow a = -\dfrac{1}{9}$. Para este valor la función sería derivable en todo el dominio de la función $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - \dfrac{1}{9} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \\ \dfrac{x+1}{x^2-9} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

Asíntotas:
En la rama $x \le 0$ no hay asíntotas, se trata de un polinomio.
En la rama $x > 0$

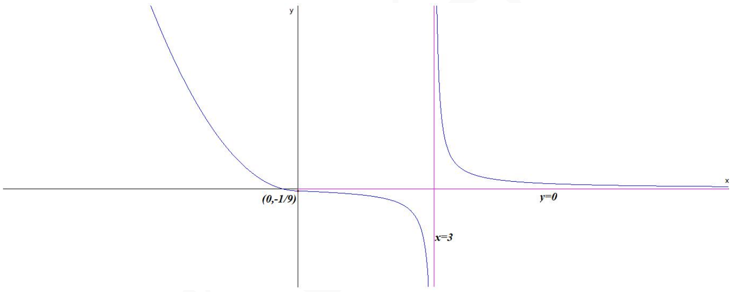
- ☛ Verticales:
  En $x = 3$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} \dfrac{x+1}{x^2-9} = \left[\dfrac{4}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} \dfrac{x+1}{x^2-9} = \left[\dfrac{4}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- ☛ Horizontales: $y = 0$.

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2-9} = 0$$

- ☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.



3.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.15.4 Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4$$

a) Calcule el dominio de la función y obtenga el valor que hay que asignar a $f(x)$ en $x = 0$ para que la función anterior sea continua en este punto.

b) Obtenga las asíntotas de esta función en caso de que existan.

Solución:

a) $3x + x^2 = x(3 + x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -3 \Longrightarrow$
$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3, 0\}$.

En $x = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4 = \left[\frac{0}{0}\right] + 4 = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{4 - 3x^2}{3 + 2x} + 4 = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3} \Longrightarrow$$

La función f presenta en el punto $x = 0$ una discontinuidad evitable (un agujero) La extensión por continuidad que necesita esta función para ser continua en ese punto sería hacer $f(0) = \dfrac{16}{3}$.

b) **Asíntotas**:

- **Verticales**: En $x = 0$ no hay asíntota por el apartado anterior. Analizamos en $x = -3$:

$$\lim_{x\longrightarrow -3^-} \frac{4-x^2}{3+x} + 4 = \left[\frac{-5}{0^-}\right] + 4 = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^+} \frac{4-x^2}{3+x} + 4 = \left[\frac{-5}{0^+}\right] + 4 = -\infty$$

- **Horizontales**: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{4-x^2}{3+x} + 4 = -\infty$$

- **Oblicuas**: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{-x^2+4x+16}{x^2+3x} = -1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{7x+16}{x+3} = 7$$

$$y = -x + 7$$

Problema 3.15.5 Se considera la función real de variable real

$$f(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2$$

a) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$.

b) Obtenga el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$ y el eje de abscisas para valores de $x > 0$.

Solución:

a) $b = f(-1) = 0$. $f'(x) = -4x^3 + 3x^2 + 4x \Longrightarrow m = f'(-1) = 3$ Luego la ecuación de la recta tangente será:

$$y = 3(x+1) \Longrightarrow y = 3x + 3$$

b) $-x^4 + x^3 + 2x^2 = 0 \Longrightarrow x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$. Como $x \geq 0$ el intervalo de integración será el $[0, 2]$.

$$S = \int_0^2 (-x^4 + x^3 + 2x^2) = \frac{-x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\bigg]_0^2 = \frac{44}{15}\ u^2$$

Problema 3.15.6 Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = 3(x+k)e^{-\frac{x}{2}}$$

a) Indique el dominio de la función y obtenga razonadamente el valor del parámetro real k para que la tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal. Determine también la ecuación de la recta tangente a la función en dicho punto.

b) Para $k = 1$, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

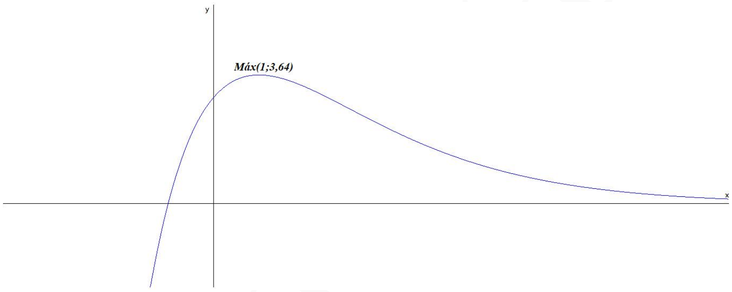
a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = -\frac{3}{2}e^{-\frac{x}{2}}(x + k - 2) \text{ y } f'(1) = 0 \Longrightarrow \frac{3}{2}e^{-\frac{x}{2}}(1 - k) = 0 \Longrightarrow k = 1$$

b) Si $k = 1 \Longrightarrow f(x) = 3(x + 1)e^{-\frac{x}{2}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{3}{2}e^{-\frac{x}{2}}(1 - x) = 0 \Longrightarrow x = 1$

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$, y decreciente en el intervalo $(1, \infty)$ con un máximo en $\left(1, \frac{6}{\sqrt{e}}\right) = (1; 3, 64)$.



3.15.3. Convocatoria Ordinaria junio de 2020-coincidente

Problema 3.15.7 Considere la función real de variable real

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 - 1$$

a) Determine el valor de del parámetro real a para que el punto de abscisa $x = -1$ de la función $f(x)$ sea un máximo relativo.

b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ para $a = 1$.

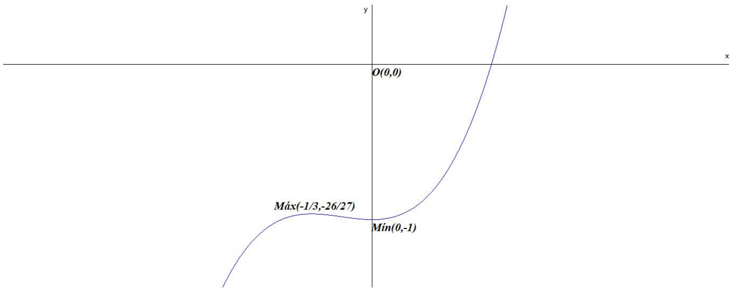
Solución:

a) $f'(x) = 6x^2 + 2ax \Longrightarrow f'(-1) = 6 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 3$
$f''(x) = 12x + 2a \Longrightarrow f''(-1) = -12 + 6 = -6 < 0 \Longrightarrow x = -1$ es un máximo relativo.

b) Si $a = 1 \Longrightarrow f(x) = 2x^3 + x^2 - 1 \Longrightarrow f'(x) = 6x^2 + 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -\frac{1}{3}$.

	$(-\infty, -1/3)$	$(-1/3, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (0, \infty)$, y decreciente en el intervalo $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$, tiene un mínimo en el punto $(0, -1)$ y un máximo en $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{26}{27}\right)$.



Problema 3.15.8 Dada la función real de variable real:

$$f(x) = ax^3 - x^2 - x + a$$

a) Determine el valor del parámetro real a para que haya un punto de inflexión en $x = 1$.

b) Para $a = 2$, calcule el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

a) $f'(x) = 3ax^2 - 2x - 1 \Longrightarrow f''(x) = 6ax - 2$, $f''(1) = 6a - 2 = 0 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{3}$

b) $a = 2 \Longrightarrow f(x) = 2x^3 - x^2 - x + 2$. La función no tiene puntos de corte con el eje de abcisas en el intervalo $[0, 1]$, luego:

$$S = \int_0^1 (2x^3 - x^2 - x + 2)\, dx = \left.\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \frac{5}{3}\; u^2$$

Problema 3.15.9 Considere la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} & \text{si} \quad x > 1 \\[2ex] -x^2 & \text{si} \quad x \le 1 \end{cases}$$

a) Calcule $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} f(x)$. ¿Es la función $f(x)$ continua en todo su dominio?.

b) Calcule las asíntotas de $f(x)$.

Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (-x^2) = -1 \\[3ex] \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{2x^2 - 4}{2x} = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow 1} f(x) = -1$$

Y como $f(1) = -1 \Longrightarrow f$ es continua en $x = 1$.

b) La rama $x \le 1$ no tiene asíntotas, estudiamos la rama $x > 1$:

- ☛ Verticales: Las únicas posibles son $x = 1$ (por el apartado anterior no lo es) y $x = -1$ no está en la rama, luego no hay asíntotas verticales.
- ☛ Horizontales: $y = 1$.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2-4x+3}{x^2-1} = 1$$
- ☛ Oblícuas: No hay por haber horizontales.

3.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.15.10 Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6x}{2x^2+1} & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ 2m + \ln x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) Estudie los valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ y calcule la derivada de la función para $x < 1$.

b) Halle el área de la región del plano limitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = -1$ y $x = 0$ y el eje OX:

Solución:

a) Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{6x}{2x^2+1} = 2 \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^+} (2m + \ln x) = 2m \\ \\ f(1) = 2m \end{array} \right. \Longrightarrow 2m = 2 \Longrightarrow m = 1$$

En $x < 1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{6x}{2x^2+1} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{-12x^2+6}{(2x^2+1)^2}$

b) En el intervalo $[-1, 0]$ la función es $f(x) = \dfrac{6x}{2x^2+1}$ y no corta al eje OX en ese intervalo.

$S_1 = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{6x}{2x^2+1}\, dx = \frac{3}{2}\left(\ln(2x^2+1)\right]_{-1}^{0} = -\frac{3\ln 3}{2}$

$S = |S_1| = \left|-\dfrac{3\ln 3}{2}\right| = \dfrac{3\ln 3}{2} \simeq 1,65\ u^2$

Problema 3.15.11 Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{ax^2-3}{x^2-5}$$

a) Calcule el valor del parámetro $a \in \overline{R}$ para que $f(x)$ tenga una asíntota horizontal en $y = -1$.

b) Para $a = 1$, halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y los extremos relativos, si existen.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{ax^2-3}{x^2-5}=a=-1$$

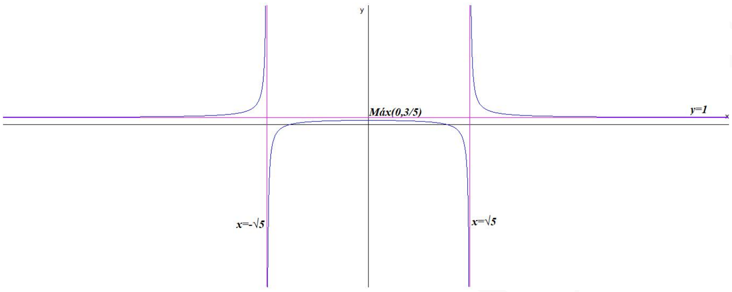
b) Si $a=1\Longrightarrow f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2-5}$, $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{\pm\sqrt{5}\}$.

$$f'(x)=\frac{-4x}{(x^2-5)^2}=0\Longrightarrow x=0$$

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

$\Longrightarrow x=0$ es un máximo local.

La función crece en el intervalo $(-\infty,-\sqrt{5})\cup(-\sqrt{5},0)$ y decrece en el intervalo $(0,\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},\infty)$.



Problema 3.15.12 Dada la función real de variable real

$$f(x)=e^{2x}+x$$

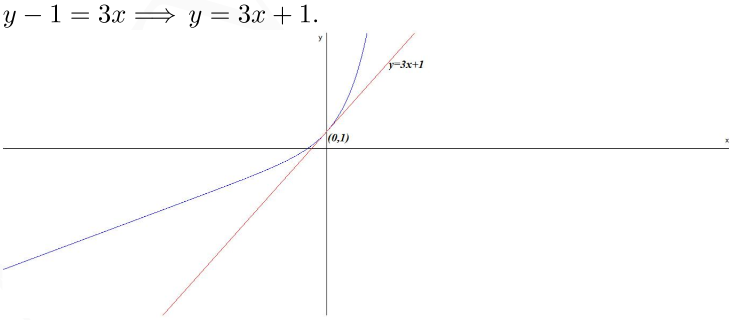
a) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=0$.

b) Calcule

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

Solución:

a) $a=0$, $f'(x)=2e^{2x}+1\Longrightarrow m=f'(0)=3$ y $b=f(0)=1$ como $y-b=m(x-a)\Longrightarrow y-1=3x\Longrightarrow y=3x+1$.



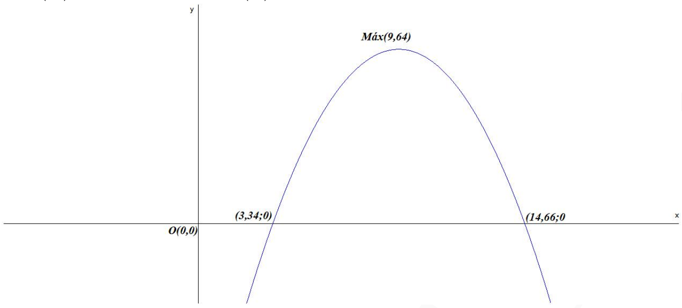
b) $\displaystyle\int_0^1(e^{2x}+x)\,dx=\left.\frac{e^{2x}+x^2}{2}\right]_0^1=\frac{e^2}{2}\simeq 3,6945$

3.16. Murcia

3.16.1. Modelo de 2020

Problema 3.16.1 Una empresa, que vende un cierto artículo al precio unitario de 40 euros, tiene por función de coste, $C(x) = 2x^2 + 4x + 98$, donde x es el número de unidades producidas del artículo. Calcular el número de unidades que debe vender para que el beneficio de la empresa sea máximo. Obtener el beneficio (ingresos menos los costes) máximo obtenido.

Solución:
La función beneficio será: $B(x) = 40x - C(x) = -2x^2 + 36x - 98$
$B'(x) = -4x + 36 = 0 \Longrightarrow x = 9$ unidades
$B''(x) = -4 \Longrightarrow B''(9) = -4 < 0 \Longrightarrow$ en $x = 9$ hay un máximo local con un beneficio de 64 euros.



Problema 3.16.2 Dada la función $f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad 1 \le x \le 3 \\ x + b & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$

a) Determinar a y b para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Hallar $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$

Solución:

a) Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} (x + a) = 1 + a \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} (x^2 - 2) = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow 1 + a = -1 \Longrightarrow a = -2$$

Continuidad en $x = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} (x^2 - 2) = 7 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} (x + b) = 3 + b \end{array} \right. \Longrightarrow 7 = 3 + b \Longrightarrow b = 4$$

b) $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 (x^2 - 2)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - 2x\right]_1^3 = \frac{14}{3}$

Problema 3.16.3 Se pide:

a) Sea la función $f(x) = ax^3 + bx$, calcular los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1, 1)$ y que en este punto la pendiente de la recta tangente vale -3.

b) Si en la función anterior $a = 1$ y $b = -12$, determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus puntos extremos.

Solución:

a) $f(x) = ax^3 + bx \Longrightarrow f'(x) = 3ax^2 + b$

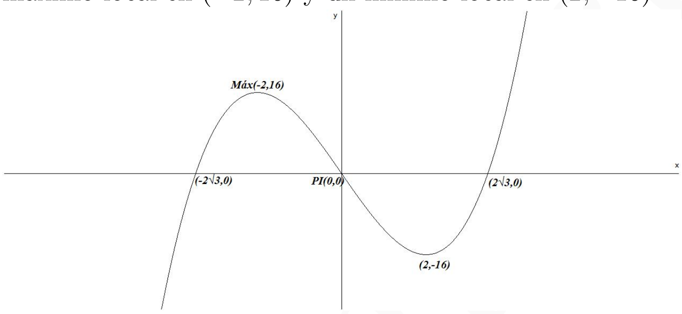
$$\left\{\begin{array}{l} f(1) = 1 \Longrightarrow a + b = 1 \\ f'(1) = -3 \Longrightarrow 3a + b = -3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 3 \end{array}\right.$$

$$f(x) = -2x^3 + 3x$$

b) $f(x) = x^3 - 12x \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función crece en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ y decrece en el intervalo $(-2, 2)$. Tiene un máximo local en $(-2, 16)$ y un mínimo local en $(2, -16)$



Problema 3.16.4 Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las recta $y = 6 - 2x$ y la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$. Calcular su área.

Solución:

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow 6 - 2x = -x^2 + 2x + 3 \Longrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Longrightarrow x = 1 \text{ y } x = 3$$

$$S_1 = \int_1^3 (f(x) - g(x))\, dx = \int_1^3 (x^2 - 4x + 3)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_1^3 = -\frac{4}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{4}{3}\ u^2$$

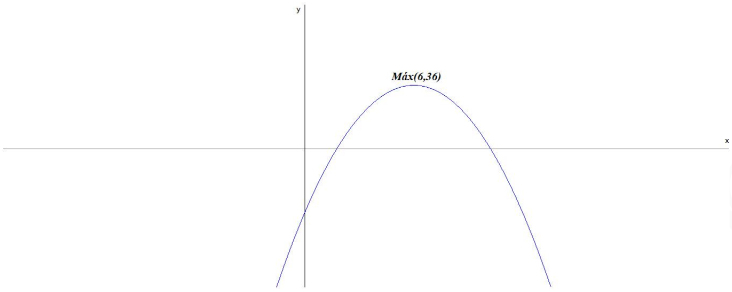
3.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.16.5 El beneficio semanal obtenido en una empresa de ordenadores viene dado para la función $B(x) = -2x^2 + 24x - 36$, donde x representa el número de ordenadores vendidos semanalmente. Calcular el número de ordenadores vendidos cada semana para que el beneficio sea máximo. ¿Cual es este beneficio máximo?

Solución:

$B(x) = -2x^2 + 24x - 36 \Longrightarrow B'(x) = -4x + 24 = 0 \Longrightarrow x = 6$

$B''(x) = -4 \Longrightarrow B''(6) = -4 < 0 \Longrightarrow$ en $x = 6$ hay un máximo local con un beneficio de 36.



Problema 3.16.6 Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$

a) Determinar los valores de a y b de forma que la función tenga un extremo relativo en $x = 1$ y la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ tenga de pendiente $m = -1$.

b) Si en la función anterior $a = -2$ y $b = -4$, determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus extremos relativos.

Solución:

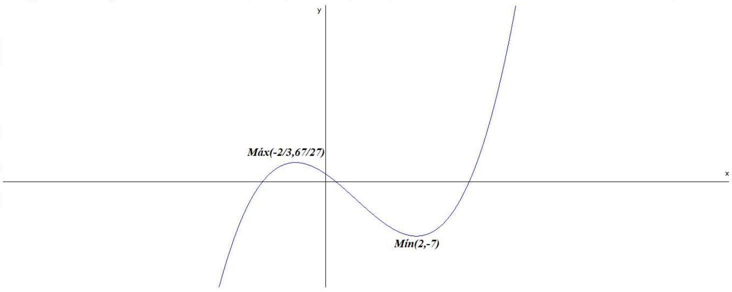
a) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$\left\{\begin{array}{l} f'(1) = 0 \Longrightarrow 3 + 2a + b = 0 \\ f'(0) = -1 \Longrightarrow b = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ b = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $x = -\dfrac{2}{3}$

	$(-\infty, -2/3)$	$(-2/3, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función crece en el intervalo $(-\infty, -2/2) \cup (2, \infty)$ y decrece en el intervalo $(-2/3, 2)$. Tiene un máximo local en $(-2/3, 67/27)$ y un mínimo local en $(2, -7)$

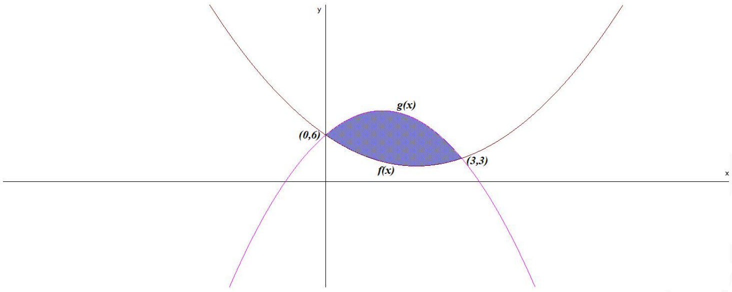


Problema 3.16.7 Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x) = x^2 - 4x + 6$ y $g(x) = -2x^2 + 5x + 6$. Calcular su área.

Solución:
$f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 - 4x + 6 = -2x^2 + 5x + 6 \Longrightarrow 3x^2 - 9x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 3$

$$S_1 = \int_0^3 (3x^2 - 9x)\, dx = x^3 - \frac{9x^2}{2}\bigg]_0^3 = -\frac{27}{2}$$

$$S = |S_1| = \frac{27}{2} \simeq 13,5\ u^2$$



Problema 3.16.8 Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $x = 1$.

b) Calcular el área de la región del plano limitado por la gráfica de la función $f(x)$ el eje OX y las rectas de ecuación $x = 0$ y $x = 1$.

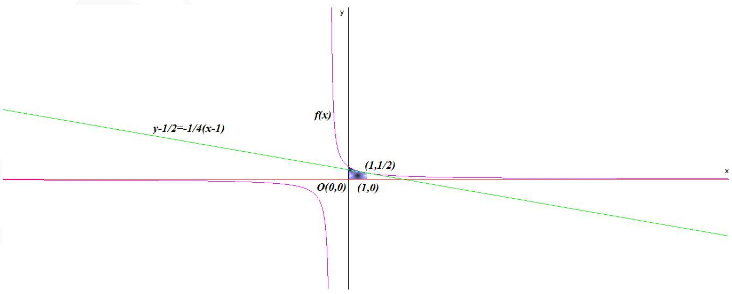
Solución:

a) $b = f(a) = f(1) = \dfrac{1}{2}$
$f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} \Longrightarrow m = f'(1) = -\dfrac{1}{4}$
$y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}(x-1) \Longrightarrow y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}$

b) La función f no tiene puntos de corte con el eje de abscisas luego sólo hay un recinto

$$S_1 = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\, dx = \ln|x+1|]_0^1 = \ln 2$$

$$S = |S_1| = \ln 2 \simeq 0,693\ u^2$$



3.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.16.9 Se ha estimado en una empresa que su beneficio en los próximos 10 años viene dado por la función: $B(t) = \begin{cases} at - t^2 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 6 \\ 2t & \text{si} \quad 6 < t \geq 10 \end{cases}$ siendo t el tiempo transcurrido en años.

a) Calcular el valor del parámetro a para que la función de beneficios sea continua.

b) Para $a = 8$ represente su gráfica y diga en qué intervalo de tiempo la función crece o decrece.

c) Para $a = 8$ indique en qué momento, de los 6 primeros años, se obtiene el máximo beneficio y cuál es su valor.

Solución:

a) las dos ramas son continuas, hay que analizar la continuidad en $t = 6$:

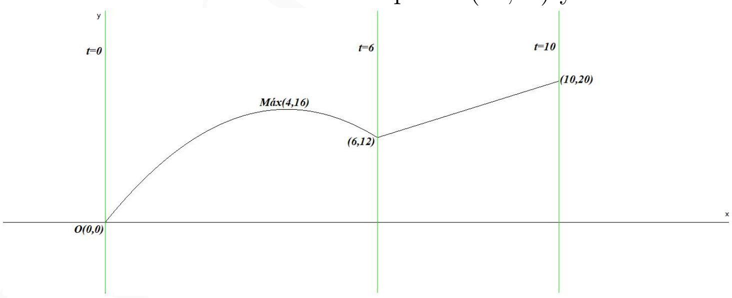
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t \longrightarrow 6^-} B(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow 6^-} (at - t^2) = 6a - 36 \\ \lim\limits_{t \longrightarrow 6^+} B(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow 6^+} (2t) = 12 \end{array}\right. \Longrightarrow 6a - 36 = 12 \Longrightarrow a = 8$$

Con $a = 8 \Longrightarrow B(8) = 12$, se cumplen las condiciones de continuidad en $t = 6 \Longrightarrow B$ continua en $[0, 10]$

b) Si $0 \leq t \leq 6 \Longrightarrow B(t) = 8t - t^2 \Longrightarrow B'(t) = 8 - 2t = 0 \Longrightarrow t = 4$.

	$[0,4)$	$(4,6)$	$(6,10]$
$B'(t)$	$+$	$-$	$+$
$B(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función crece en el intervalo $[0, 4) \cup (6, 10]$ y decrece en el intervalo $(4, 6)$. Tiene un máximo local en $(4, 16)$ y un mínimo local en $(6, 12)$
El máximo absoluto estaría en el punto (10,20) y el mínimo absoluto estaría en $O(0, 0)$.



c) Según hemos analizado en el apartado anterior habría un máximo en el año 4 con un beneficio de 16.

Problema 3.16.10 Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x^2 - 2) \ln x$

b) $f(x) = e^{4x^3+2}$

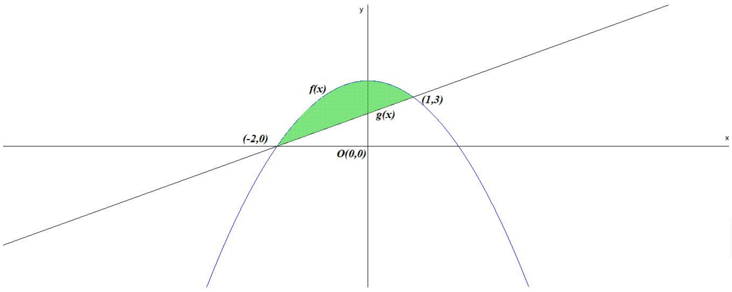
Solución:

a) $f'(x) = 2x \ln x + \dfrac{x^2 - 2}{x} = \dfrac{2x^2 \ln x + x^2 - 2}{x}$

b) $f'(x) = 12x^2 e^{4x^3+2}$

Problema 3.16.11 Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x) = 4 - x^2$ y la recta $g(x) = 2 + x$. Calcular su área.

Solución:
$f(x) = g(x) \Longrightarrow 4 - x^2 = 2 + x \Longrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -2$ y $x = 1$



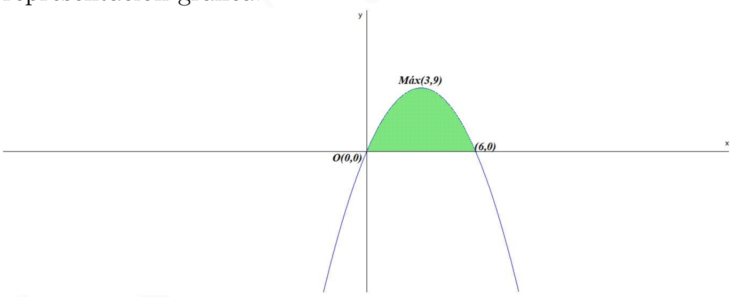
$$S_1 = \int_{-2}^{1} (f(x) - g(x))\, dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\, dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\Big]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$$

$$S = |S_1| = \frac{9}{2} \simeq 4,5 \;\; u^2$$

Problema 3.16.12 Calcular el área del recinto limitado por la parábola $f(x) = -x^2 + 6x$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

Solución:

- Puntos de corte:
  Con OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0,0)$
  Con OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (0,0)$ y $(6,0)$
- $f'(x) = -2x + 6 = 0 \Longrightarrow x = 3$. Y $f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(3) = -2 < 0 \Longrightarrow x = 3$ un máximo local. Sería el punto $(3,9)$
- representación gráfica:



$$S_1 = \int_0^6 f(x)\, dx = \int_0^6 (-x^2 + 6x)\, dx = -\frac{x^3}{3} + 3x^2\Big]_0^6 = 36$$

$$S = |S_1| = 36 \;\; u^2$$

3.17. Navarra

3.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.17.1 Se pide:

a) Calcule el valor de los parámetros de la función $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$, sabiendo que tiene un extremo relativo en el punto $(-1, 0)$ y un punto de inflexión en el punto $x = \dfrac{1}{3}$

b) Calcule las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x-2}$

Solución:

a) $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = -3x^2 + 2ax + b \Longrightarrow f''(x) = -6x + 2a$

$$\left\{\begin{array}{l} f(-1) = 0 \Longrightarrow 1 + a - b + c = 0 \\ f'(-1) = 0 \Longrightarrow -3 - 2a + b = 0 \\ f'\left(\dfrac{1}{3}\right) = -2 + 2a = 0 \Longrightarrow a = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 5 \\ c = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = x^3 + x^2 + 5x + 3$$

b) Asíntotas:

- Verticales: $x = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{3x^2+1}{x-2} = \left[\frac{13}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{3x^2+1}{x-2} = \left[\frac{13}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{3x^2+1}{x-2} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-2x} = 3$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{3x^2+1}{x-2} - 3x\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3x^2+1-3x^2+6x}{x-2} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{1+6x}{x-2} = 6 \Longrightarrow y = 3x + 6$$

Problema 3.17.2 Sea la función $y = x^3 - 3x^2$

a) Calcule los puntos de corte con los ejes.

b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calcule los máximos y mínimos.

c) Dibuje el recinto limitado por la función y el eje OX.

d) Calcule el área de dicho recinto.

Solución:

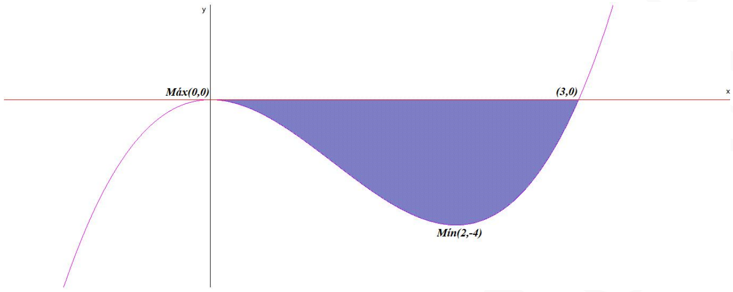
a) Puntos de corte:
Con OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
Con OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ y $(3, 0)$

b) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función crece en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ y decrece en el intervalo $(0, 2)$. Tiene un máximo local en $(0, 0)$ y un mínimo local en $(2, -4)$

c) Recinto:



d) $S_1 = \displaystyle\int_0^3 (x^3 - 3x^2)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} - x^3\right]_0^3 = -\frac{27}{4}$

$$S = |S_1| = \frac{27}{4} \simeq 6,75\ u^2$$

3.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.17.3 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 4}{x}$

a) Calcule los máximos y mínimos.

b) Calcule $\displaystyle\int_1^2 f(x)\, dx$.

c) Calcule la derivada de la función $g(x)$, siendo $g(x) = f(x) + \ln(5x - 3)^2 + xe^{3x}$

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función crece en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ y decrece en el intervalo $(-2, 2)$. Tiene un máximo relativo en $(-2, -1)$ y un mínimo relativo en $(2, 7)$.

b) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{x^2+3x+4}{x}\,dx = \int_1^2 \left(x+3+\frac{4}{x}\right) = \frac{x^2}{2}+3x+4\ln|x|\Big]_1^2 =$
$\displaystyle\frac{9}{2}+4\ln 2 \simeq 7,27$

c) $\displaystyle g(x) = f(x)+\ln(5x-3)^2+xe^{3x} = \frac{x^2+3x+4}{x}+2\ln(5x-3)+xe^{3x} \Longrightarrow$
$\displaystyle g'(x) = \frac{x^2-4}{x^2}+\frac{10}{5x-3}+e^{3x}+3xe^{3x} = \frac{x^2-4}{x^2}+\frac{10}{5x-3}+(1+3x)e^{3x}$

Problema 3.17.4 Considere la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x^2-6x+5 & \text{si} \quad 1 < x < 4 \\ 2x-11 & \text{si} \quad x \ge 4 \end{cases}$$

a) Calcule las derivadas laterales de $f(x)$ en $x = 4$, utilizando la definición de derivada.

b) ¿La función $f(x)$ es derivable en $x = 4$? ¿Es continua en $x = 4$? Justifique la respuesta.

c) Calcule las siguiente integral: $\displaystyle\int \sqrt{6x-1}\,dx$

Solución:

a) $\displaystyle f'(4^-) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{(4+h)^2-6(4+h)+5-(-3)}{h} = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{h^2+2h}{h} =$
$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{h+2}{1} = 2$
$\displaystyle f'(4^+) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{2(4+h)-11-(-3)}{h} = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{2h}{h} = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{2}{1} = 2$

b) En principio las derivadas laterales coinciden pero hay que comprobar su continuidad en ese punto:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 4^-} (x^2-6x+5) = -3 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 4^+} (2x-11) = -3 \\ f(4) = -3 \end{cases} \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 4$$

En conclusión: La función f es continua y derivable en $x = 4$.

c) $\displaystyle\int \sqrt{6x-1}\,dx = \begin{bmatrix} t = 6x-1 \\ dt = 6dx \\ dx = dt/6 \end{bmatrix} = \int t^{1/2}\frac{dt}{6} = \frac{1}{6}\int t^{1/2}\,dt = \frac{1}{6}\frac{t^{3/2}}{3/2}+C = \frac{t^{3/2}}{9}+C =$
$\displaystyle\frac{(6x-1)\sqrt{6x-1}}{9}+C$

3.18. País Vasco

3.18.1. Modelo de 2020

Problema 3.18.1 Se considera la curva $f(x) = x^3-6x^2+9x$.

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) Determinar los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión.

c) Encontrar los puntos de corte con el eje OX. Realizar la representación gráfica de la función.

d) Calcular el área del recinto finito delimitado por la curva y el eje de abscisas OX.

Solución:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Longrightarrow f''(x) = 6x - 12$$

a) $f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = 3$.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

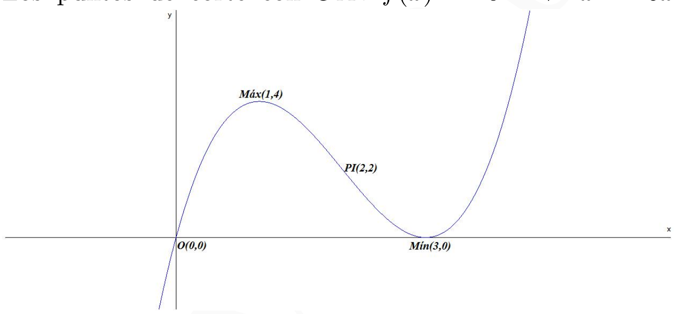
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(1, 3)$.

b) Por el apartado anterior, la función presenta un máximo local en el punto $(1, 4)$ y un mínimo local en $(3, 0)$.
Para calcular los puntos de inflexión: $f''(x) = 0 \Longrightarrow 6x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 2$

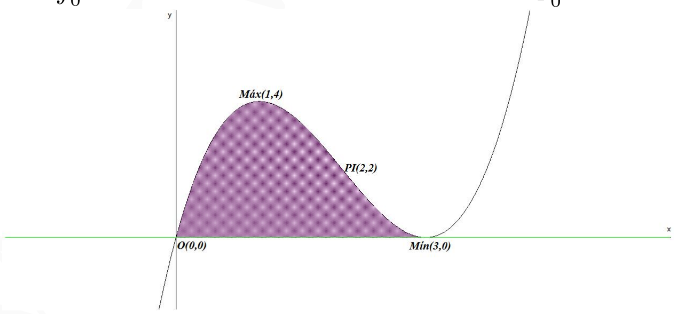
	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función sería convexa en el intervalo $(-\infty, 2)$ y cóncava el $(2, \infty)$ con un punto de inflexión en $(2, 2)$.

c) Los puntos de corte con OX: $f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ y $(3, 0)$.



d) $S = \displaystyle\int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)\, dx = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2}\Big]_0^3 = \frac{27}{4}\ u^2$



Problema 3.18.2 Se pide:

a) Hallar la función polinómica de segundo grado cuyo gráfico pasa por el punto $(0, 0)$, y tiene un máximo en el punto $(1, 1)$.

b) Hallar el área del recinto finito delimitado por la curva obtenida y el eje de abscisas OX.

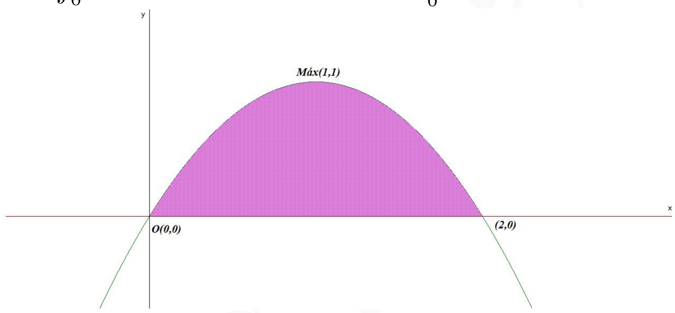
Solución:

a) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 2ax + b$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 0 \Longrightarrow c = 0 \\ f(1) = 1 \Longrightarrow a + b + c = 1 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 2a + b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{array}\right.$$

$$f(x) = -x^2 + 2x$$

b) $f(x) = 0 \Longrightarrow -x^2 + 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$:
$S = \displaystyle\int_0^2 (-x^2 + 2x)\, dx = -\frac{x^3}{3} + x^2\Big]_0^2 = \frac{4}{3}\ u^2$



3.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.18.3 Sea $f(x)$ la siguiente función:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} x^2 & \text{si} & 0 \le x \le 1 \\ ax + 2 & \text{si} & 1 < x \le 2 \end{array}\right.$$

a) Determina el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x = 1$.

b) Realiza la representación gráfica de la función cuando $a = 2$.

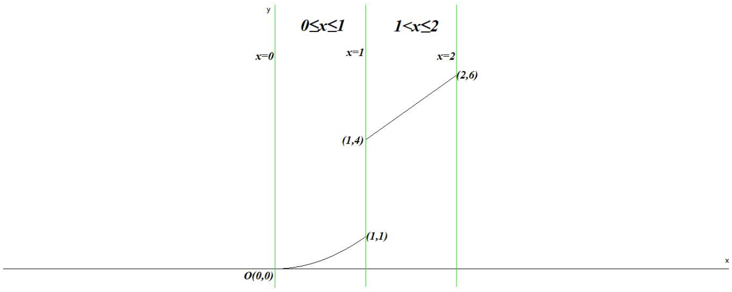
c) Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX para $a = 2$.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} x^2 = 1 \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} (ax + 2) = 2 + a \\ f(1) = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow 2 + a = 1 \Longrightarrow a = -1 \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 1$$

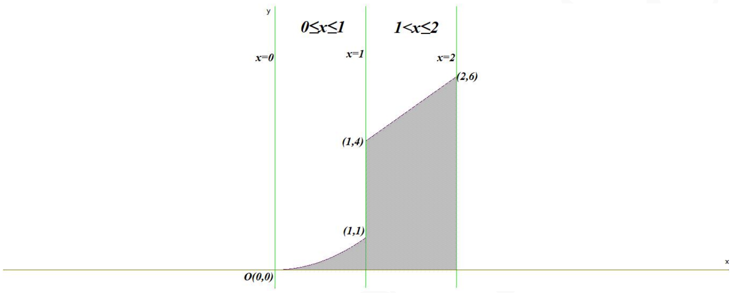
b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ 2x+2 & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$ hacemos una tabla de valores para dibujar la gráfica:



c) Hay dos recintos:

$$S_1 = \int_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}, \quad S_2 = \int_1^2 (2x+2)\,dx = \left. x^2 + 2x\right]_1^2 = 5$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{1}{3} + 5 = \frac{16}{3} \simeq 5,33\ u^2$$



Problema 3.18.4 Sea la siguiente función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función.

b) Calcula las asíntotas verticales y horizontales de la función.

c) Representa gráficamente el área comprendida entre la función y la recta $y = \dfrac{x}{2}$

d) Obtén la primitiva de la función $f(x)$, sabiendo que en $x = 0$ toma el valor 1.

Solución:

a) $f'(x) = -\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

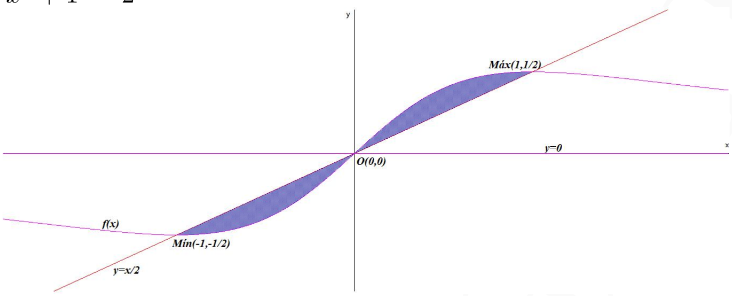
	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

La función decrece en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y crece en el intervalo $(-1, 1)$. Tiene un máximo relativo en $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ y un mínimo relativo en $\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$.

b) Asíntotas:

- Verticales: No hay, el denominador no se anula para ningún valor de x.
- Horizontales: $y = 0$ ya que $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$
- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

c) $\dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{x}{2} \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pm 1$:



d) $F(x) = \displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = x^2+1 \\ dt = 2x dx \\ dx = dt/2x \end{array}\right] = \int \frac{x}{t}\cdot\frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\ln|t| + C =$
$\dfrac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$
$F(0) = 0 + C = 1 \Longrightarrow F(x) = \dfrac{1}{2}\ln|x^2+1| + 1$

3.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.18.5 Sea la función $f(x) = ax^3 + bx + 1$.

a) Calcula los valores de los parámetros a y b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $(1, -5)$.

b) Para $a = 2$ y $b = -6$, estudiar los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función $f(x)$.

c) Para $a = 2$ y $b = -6$, calcula el área comprendida entre la función y la recta $y = 2x + 1$. Realiza la representación gráfica.

Solución:

a) $f(x) = ax^3 + bx + 1 \Longrightarrow f'(x) = 3ax^2 + b$

$$\left\{\begin{array}{l} f(1) = -5 \Longrightarrow a + b + 1 = -5 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 3a + b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 3 \\ b = -9 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = 3x^3 - 9x + 1$$

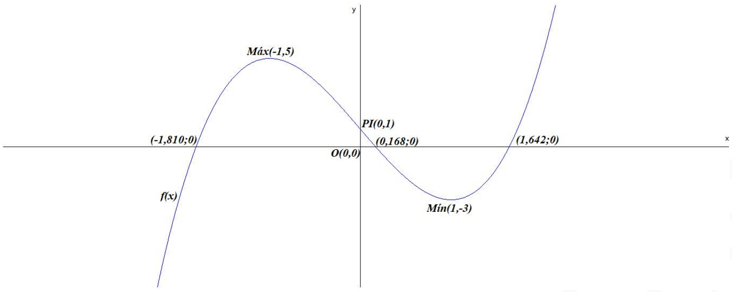
b) $f(x) = 2x^3 - 6x + 1 \Longrightarrow f'(x) = 6x^2 - 6 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-1, 5)$.
Con un máximo relativo en el punto $(-1, 5)$ y un mínimo relativo en el punto $(1, -3)$.
Para los puntos de inflexión hacemos $f''(x) = 12x = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

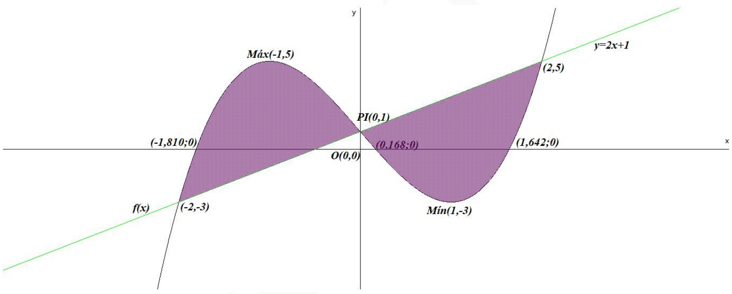
La función sería convexa en el intervalo $(-\infty, 0)$ y cóncava el $(0, \infty)$ con un punto de inflexión en $(0, 1)$.



c) $2x^3 - 6x + 1 = 2x + 1 \Longrightarrow 2x^3 - 8x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pm 2$. Luego hay dos recintos:

$$S_1 = \int_{-2}^{0} (2x^3 - 8x)\, dx = \left.\frac{x^4}{2} - 4x^2\right]_{-2}^{0} = 8, \quad S_2 = \int_{0}^{2} (2x^3 - 8x)\, dx = \left.\frac{x^4}{2} - 4x^2\right]_{0}^{2} = -8$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 8 + 8 = 16\ u^2$$



Problema 3.18.6 Se pide:

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función $y = 4 - x^2$.

b) Representar gráficamente la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \\ 4 - x & \text{si} \quad 0 \le x \le 4 \end{cases}$$

c) Calcula el área de la región delimitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas.

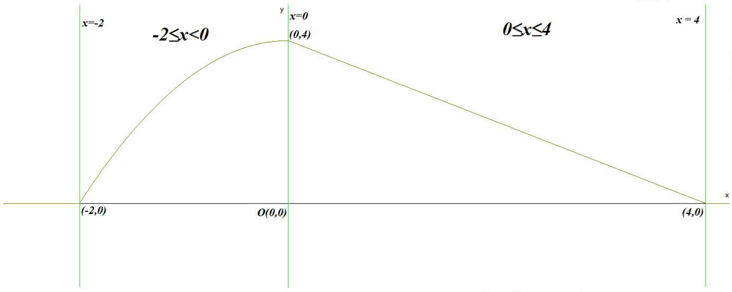
Solución:

a) Estudio de $g(x) = 4 - x^2 \Longrightarrow g'(x) = -2x = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decreciente en el intervalo $(0, \infty)$. Con un máximo relativo en el punto $(0, 4)$.

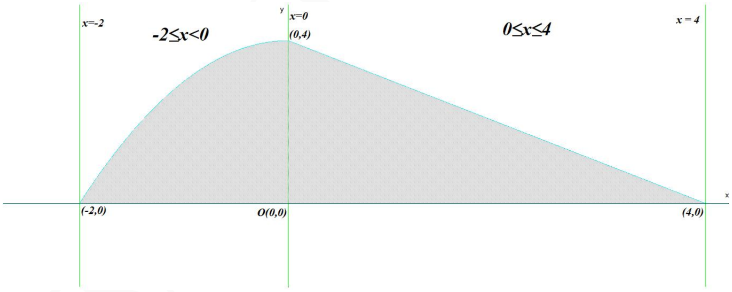
b) Por tabla de valores:



c) Hay dos recintos:

$$S_1 = \int_{-2}^{0} (4 - x^2)\, dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Big]_{-2}^{0} = \frac{16}{3}, \quad S_2 = \int_{0}^{4} (4 - x)\, dx = 4x - \frac{x^2}{2}\Big]_{0}^{4} = 8$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{16}{3} + 8 = \frac{16}{3} \simeq 13,33\ u^2$$



Capítulo 4

Probabilidad

4.1. Resúmenes teóricos

Frecuencia absoluta de un suceso A es el número de veces que se repite dicho suceso $\Longrightarrow f(A)$

Frecuencia relativa de un suceso A es la proporción de veces que ha sucedido A de N experiencias $\Longrightarrow f_r(A) = \dfrac{f(A)}{N}$

Ley de los grandes números: $\lim\limits_{N \longrightarrow \infty} f_r(A) = P(A)$

Ley de Laplace: $P(A) = \dfrac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$

$\Omega \equiv$ **Espacio muestral** es el de todos los sucesos, sería el suceso seguro: $P(\Omega) = 1$.

$\emptyset \equiv$ **Espacio vacío** es el de ningún suceso, sería el suceso imposible: $P(\emptyset) = 0$.

Diagramas de Venn: (esquemas usados en la teoría de conjuntos)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

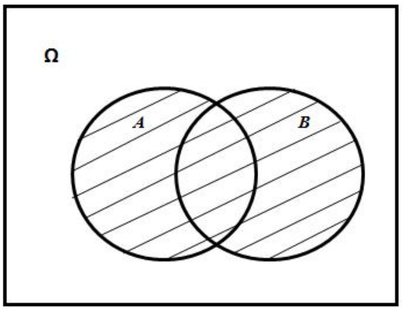
En el caso de que los dos sucesos sean incompatibles la fórmula quedaría:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Sucesos independientes: Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

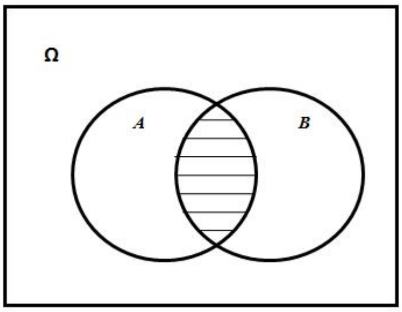
Leyes de Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

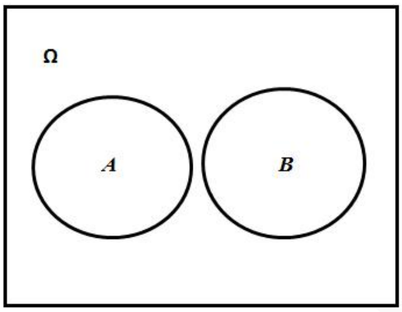
Probabilidad condicionada: es la probabilidad de que ocurra un suceso A sabiendo que ha ocurrido el suceso B: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$



Unión de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos del conjunto A con todos los de B: $A \cup B$

Intersección de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos comunes entre los conjuntos A y B: $A \cap B$



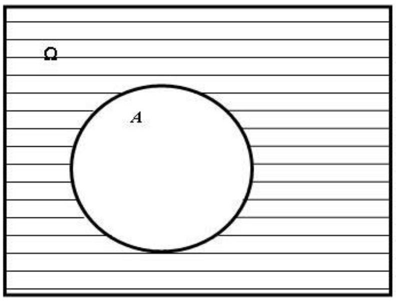


Sucesos Incompatibles: Dos sucesos son incompatibles si su intersección es vacía. $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cap B) = 0$

Teorema de Bayes: $P(A|B) = \dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

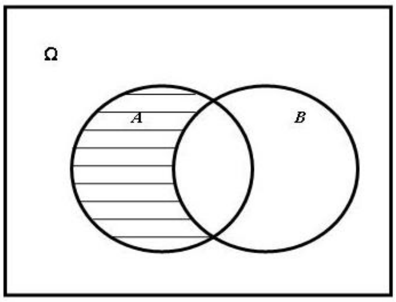
Teorema de la probabilidad total: Si $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \Omega$ y los sucesos A_i con $i = 1, ..., 5$ son incompatibles dos a dos (intersección vacía), entonces:

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) + P(A_4)P(A|A_4) + P(A_5)P(A|A_5)$$



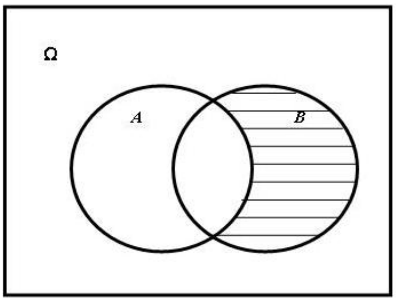
$\overline{A}$ es el suceso contrario o complementario de A:

$$\overline{A} = \Omega - A \Longrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$



$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

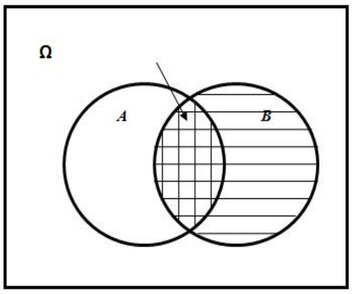


Organización por árboles:

Organización por tablas de contingencia:

	Renault	Seat	Mercedes	Totales
Blanco	15	20	10	45
Negro	300	455	200	955
	315	475	210	1000

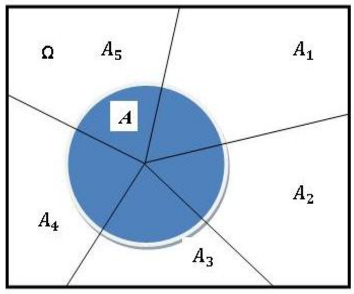
$$P(B|S) = \frac{20}{475},\ P(N|M) = \frac{200}{210},\ P(B) = \frac{45}{1000},\ P(M) = \frac{210}{1000}$$



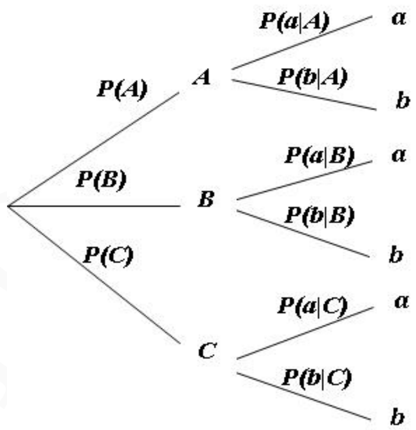
Probabilidad condicionada:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

probabilidad total



$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1)+P(A_2)P(A|A_2)+P(A_3)P(A|A_3)+P(A_4)P(A|A_4)+P(A_5)P(A|A_5)$$



Problemas

4.2. Andalucía

4.2.1. Modelo de 2020

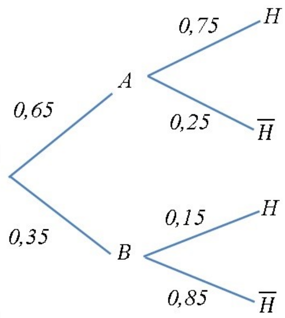
Problema 4.2.1 El 65 % de los turistas que visitan una provincia elige alojamientos en la capital y el resto en zonas rurales. Además, el 75 % de los turistas que se hospedan en la capital y el 15 % de los que se hospedan en zonas rurales lo hace en hoteles, mientras que el resto lo hace es apartamentos turísticos. Se elige al azar un turista de los que se han alojado en esa provincia.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en un hotel?

b) Si se sabe que se ha hospedado en un apartamento turístico, ¿cuál es la probabilidad de que el apartamento esté en zonas rurales?

Solución:

Sea A alojamientos en la capital, B alojamientos en zonas rurales, H en hoteles y $\overline{H}$ en apartamentos turísticos.



a)
$$P(H) = P(H|A)P(A) + P(H|B)P(B) =$$
$$0,75 \cdot 0,65 + 0,15 \cdot 0,35 = 0,54$$

b)
$$P(B|\overline{H}) = \frac{P(\overline{H}|B)P(B)}{P(\overline{H})}$$
$$\frac{0,85 \cdot 0,35}{1 - 0,54} = 0,6467$$

Problema 4.2.2 El 69 % de los habitantes de una determinada ciudad ven series, el 35 % películas y el 18 % no ven ni series ni películas. Se elige al azar un habitante de la ciudad.

a) Calcule la probabilidad de que vea series o películas.

b) Sabiendo que ve series, calcule la probabilidad de que vea películas.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que vea series y no vea películas?

Solución:

Sea A ven series y B ven películas.
$P(A) = 0,69$, $P(B) = 0,35$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,18$

	B	$\overline{B}$	Total
A			$0,69$
$\overline{A}$		$0,18$	
Total	$0,35$		1

$\Longrightarrow$

	B	$\overline{B}$	Total
A	$0,22$	$0,47$	$0,69$
$\overline{A}$	$0,13$	$0,18$	$0,31$
Total	$0,35$	$0,65$	1

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,18 \Longrightarrow P(A \cup B) = 0,82$

b) $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,22}{0,69} = 0,3188$

c) $P(A \cap \overline{B}) = 0,47$

4.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.2.3 A 120 estudiantes se les ha recomendado la lectura de dos libros. Se sabe que 46 de ellos han leído el primer libro recomendado, 34 el segundo y 16 estudiantes han leído ambos libros. Se elige un estudiante al azar.

a) Calcule la probabilidad de que haya leído alguno de los dos libros.

b) Calcule la probabilidad de que no haya leído ninguno de los dos libros.

c) Calcule la probabilidad de que solamente haya leído el primer libro.

d) Calcule la probabilidad de que haya leído el primer libro, si se sabe que no ha leído el segundo.

Solución:

Sean A han leído el primer libro recomendado, B han leído el segundo libro recomendado. Tenemos: $P(A) = \frac{46}{120} = \frac{23}{60}$, $P(B) = \frac{34}{120} = \frac{17}{60}$ y $P(A \cap B) = \frac{16}{120} = \frac{2}{15}$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{23}{60} + \frac{17}{60} - \frac{2}{15} = \frac{8}{15} = 0,5333$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15} = 0,4666$

c) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{23}{60} - \frac{2}{15} = \frac{1}{4} = 0,25$

d) $P(A|\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{17}{60}} = \frac{15}{43} = 0,3488$

Problema 4.2.4 Las bicicletas de alquiler de una ciudad se clasifican por su calidad: buena, media y mala. El 30 % de dichas bicicletas son gestionadas por una empresa E_1 y el resto por una empresa E_2. De las bicicletas de la empresa E_1, el 80 % son de buena calidad, el 5 % de calidad media y el resto de mala calidad. De las bicicletas de la empresa E_2 se sabe que el 60 % son de buena calidad, pero se desconocen los porcentajes de bicicletas de calidad media y calidad mala. Se elige al azar una bicicleta de alquiler de esa ciudad.

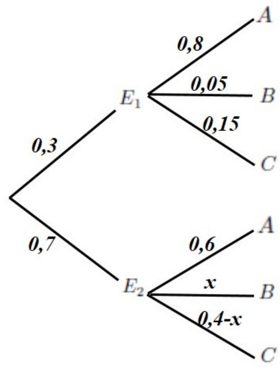
a) Calcule la probabilidad de que sea de buena calidad.

b) Calcule la probabilidad de que sea de la empresa E_1 y de mala calidad.

c) Si se sabe que el porcentaje de bicicletas de alquiler de calidad media en toda la ciudad es del 19 %, ¿cuál es la probabilidad de que sea de calidad media, sabiendo que la bicicleta elegida es de la empresa E_2?

Solución:

Sean A buena calidad, B calidad media y C mala calidad. Tenemos: $P(E_1) = 0,3$, $P(E_2) = 0,7$, $P(A|E_1) = 0,8$, $P(B|E_1) = 0,05$, $P(C|E_1) = 0,15$, $P(A|E_2) = 0,6$ y $P(B \cup C|E_2) = 0,4$



a) $P(A) = P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) = 0,8 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,7 = 0,66$

b) $P(E_1 \cap C) = P(C|E_1)P(E_1) = 0,15 \cdot 0,3 = 0,045$

c) $P(B) = 0,19 = P(B|E_1)P(E_1) + P(B|E_2)P(E_2) = 0,05 \cdot 0,3 + P(B|E_2) \cdot 0,7 \Longrightarrow P(B|E_2) = 0,25$

4.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

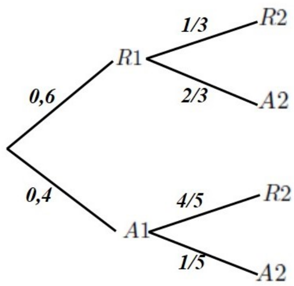
Problema 4.2.5 Una urna contiene 6 bolas rojas y 4 azules. Se extrae una bola al azar y se reemplaza por seis bolas del otro color. A continuación, se vuelve a extraer una segunda bola de la urna.

a) Calcule la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja.

b) Si sabemos que la segunda bola extraída es azul, ¿cuál es la probabilidad de que también lo haya sido la primera?

Solución:

Sea $R1$ sale roja la primera bola, $A1$ sale azul la primera bola, $R2$ sale roja la segunda bola y $A2$ sale azul la segunda bola.
Tenemos: $P(R1) = 0,6$, $P(A1) = 0,4$, $P(R2|R1) = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$, $P(A2|R1) = \dfrac{2}{3}$, $P(R2|A1) = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}$ y $P(A2|A1) = \dfrac{1}{5}$



a) $P(R2) = P(R2|R1)P(R1) + P(R2|A1)P(A1) = \dfrac{1}{3} \cdot 0,6 + \dfrac{4}{5} \cdot 0,40 = 0,52$

b) $P(A1|A2) = \dfrac{P(A2|A1)P(A1)}{P(A2)} = \dfrac{\frac{1}{5} \cdot 0,4}{1 - 0,52} = 0,167$

Problema 4.2.6 Una empresa fabrica dos tipos de bombillas: una LED y otra halógena. Se sabe que un 5 % de las LED y un 2 % de las halógenas salen defectuosas. Se elige al azar una bombilla de una caja que contiene 40 bombillas LED y 10 halógenas.

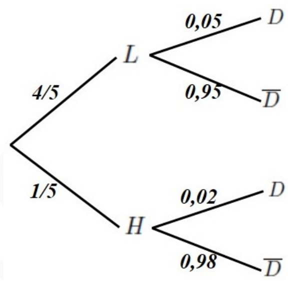
a) Calcule la probabilidad de que la bobilla elegida no sea defectuosa.

b) Calcule la probabilidad de que la bombilla elegida sea LED, sabiendo que es defectuosa.

Solución:
Sea L se extrae una bombilla LED, H se extrae una bombilla halógena y D es defectuosa.
Tenemos: $P(L) = \dfrac{40}{50} = \dfrac{4}{5}$, $P(H) = \dfrac{1}{5}$, $P(D|L) = 0,05$ y $P(D|H) = 0,02$.

a) $P(\overline{D}) = P(\overline{D}|L)P(L) + P(\overline{D}|H)P(H) =$
$0,95 \cdot \dfrac{4}{5} + 0,98 \cdot \dfrac{1}{5} = 0,956$

b) $P(L|D) = \dfrac{P(D|L)P(L)}{P(D)} = \dfrac{0,05 \cdot \frac{4}{5}}{1 - 0,956} = 0,909$



4.3. Aragón

4.3.1. Modelo de 2020

Problema 4.3.1 Según los datos del Instituto Nacional de Estadística, el 49,3 % de la población aragonesa son hombres y el 50,7 % son mujeres. Del total de hombres, un 80,9 % tienen menos de 65 años; del total de mujeres, un 75,9 % tienen menos de 65 años.

a) Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer de menos de 65 años?

b) Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 65 años?

c) Elegimos una persona de Aragón de entre las que tienen menos de 65 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

d) Si se eligen al azar (con reemplazamiento) tres personas de Aragón, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de las tres sea mujer?

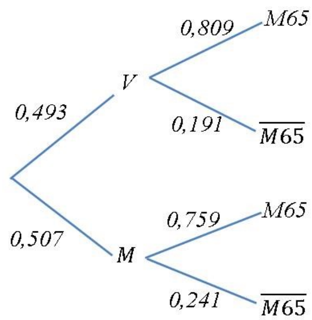
Solución:
Sean V al suceso hombre, M al suceso mujer y $M65$ al suceso "menos de 65 años":

a) $P(M \cap M65) = P(M65|M)P(M) = 0,759 \cdot 0,507 = 0,385$

b) $P(M65) = P(M65|V)P(V) + P(M65|M)P(M) =$
$0,809 \cdot 0,493 + 0,759 \cdot 0,507 = 0,784$

c) $P(M|M65) = \dfrac{P(M65|M)P(M)}{P(M65)} = \dfrac{0,759 \cdot 0,507}{0,784} = 0,49$

d) $P(\text{al menos una es mujer}) = 1 - P(VVV) = 1 - 0,493^3 = 0,88$



4.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.3.2 En el curso de primero de Bachillerato de un centro educativo se ha hecho una encuesta sobre el destino del viaje de estudios con dos opciones: Londres y París. El curso está compuesto por tres clases: A, B y C. La clase A tiene 28 estudiantes, de los cuales 12 han votado por Londres y el resto por París; en la clase B, que tiene 25 estudiantes, 10 han votado por Londres y el resto por París; en la clase C, con 23 estudiantes, 18 han votado por Londres y el resto por París.

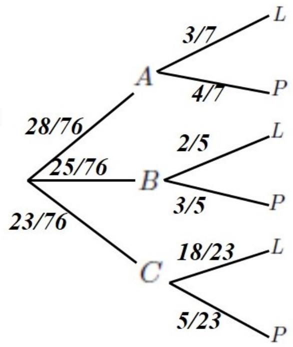
a) Si elegimos al azar un estudiante del curso, ¿cuál es la probabilidad de que haya votado por Londres?

b) Si elegimos al azar un estudiante de entre los que han votado por Londres, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la clase B?

c) Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) dos estudiantes del curso, ¿cuál es la probabilidad de los dos hayan votado por Londres?

d) Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) tres estudiantes del curso, ¿cuál es la probabilidad de que sea uno de cada clase?

Solución:



Sean A : al suceso clase A, B al suceso clase B, C al suceso clase C,

L al suceso votan Londres y P al suceso al suceso votan París.

Tenemos: $P(A) = \frac{28}{76}$, $P(B) = \frac{25}{76}$, $P(C) = \frac{23}{76}$, $P(L|A) = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$, $P(L|B) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ y $P(L|C) = \frac{18}{23}$

a) $P(L) = P(L|A)P(A) + P(L|B)P(B) + P(L|C)P(C) =$ $\frac{3}{7} \cdot \frac{28}{76} + \frac{2}{5} \cdot \frac{25}{76} + \frac{18}{23} \cdot \frac{23}{76} = \frac{40}{76} = \frac{10}{19} = 0,526$

b) $P(B|L) = \dfrac{P(L|B)P(B)}{P(L)} = \dfrac{\frac{2}{5} \cdot \frac{25}{76}}{\frac{10}{19}} = \frac{1}{4} = 0,25$

c) $P(L) = \frac{40}{76}$ si apartamos a este estudiante la probabilidad de elegir a un segundo estudiante que haya votado Londres será $P(L) = \frac{39}{75} = 0,52 \Longrightarrow P(LL) = \frac{40}{76} \cdot \frac{39}{75} = \frac{26}{95} = 0,2737$.

d) Los sucesos posibles son ABC, BAC, BCA, ACB, CAB y CBA. Tenemos que calcular cada una de estas probabilidades:
Tenemos un total de 76 con 28 en A, con 25 en B y 23 en C

$$P(ABC) = \frac{28}{76}\frac{25}{75}\frac{23}{74} = \frac{161}{4218} = 0,0382, \quad P(BAC) = \frac{25}{76}\frac{28}{75}\frac{23}{74} = \frac{161}{4218} = 0,0382,$$

$$P(BCA) = \frac{25}{76}\frac{23}{75}\frac{28}{74} = \frac{161}{4218} = 0,0382, \quad P(ACB) = \frac{28}{76}\frac{23}{75}\frac{25}{74} = \frac{161}{4218} = 0,0382,$$

$$P(CAB) = \frac{23}{76}\frac{28}{75}\frac{25}{74} = \frac{161}{4218} = 0,0382, \quad P(CBA) = \frac{23}{76}\frac{25}{75}\frac{28}{74} = \frac{161}{4218} = 0,0382.$$

$$P(\text{Uno de cada curso}) = 6 \cdot \frac{161}{4218} = \frac{966}{4218} = 0,229$$

4.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.3.3 En una bolsa tenemos 8 bolas: 3 blancas, 1 roja y 4 negras. Extraemos dos bolas sin reemplazamiento. Calcular:

a) La probabilidad de que las dos sean blancas.

b) La probabilidad de que al menos una sea blanca.

c) La probabilidad de que las dos sean del mismo color.

d) Si las dos bolas son del mismo color, la probabilidad de que sean blancas.

Solución:

a) $P(BB) = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{2}{7} = \dfrac{3}{28} = 0,107$

b) $P(\text{al menos una blanca}) = 1 - P(\text{ninguna blanca}) = 1 - \dfrac{5}{8} \cdot \dfrac{4}{7} = \dfrac{9}{14} = 0,643$

c) $P(\text{mismo color}) = P(BB) + P(NN) = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{2}{7} + \dfrac{4}{8} \cdot \dfrac{3}{7} = \dfrac{9}{28} = 0,321$

d) $P(BB|\text{mismo color}) = \dfrac{P(BB \cap \text{mismo color})}{P(\text{mismo color})} = \dfrac{P(BB)}{P(\text{mismo color})} = \dfrac{3/28}{9/28} = \dfrac{1}{3} = 0,333$

4.4. Asturias

4.4.1. Modelo de 2020

Problema 4.4.1 De los estudiantes de secundaria que fueron al viaje de estudios, se determina que tres quintas partes de ellos han comprado camisetas de recuerdo y que un cuarto de ellos han comprado sudaderas. Además se sabe que el veinte por ciento de ellos han comprado tanto camisetas como sudaderas.

a) Si un estudiante elegido al azar ha comprado sudaderas, ¿cuál es la probabilidad de que haya comprado camisetas?

b) Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya comprado ni camisetas ni sudaderas?

Solución:
Sea A al suceso "ha comprado camisetas" y S al suceso "ha comprado sudaderas".

$$P(A) = \frac{3}{5}, \quad P(S) = \frac{1}{4}, \quad P(A \cap S) = 0,2$$

a) $P(A|S) = \dfrac{P(A \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,2}{1/4} = 0,8$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{S}) = P(\overline{A \cup S}) = 1 - P(A \cup S) = 1 - (P(A) + P(S) - P(A \cap S)) = 1 - \left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{4} - 0,2\right) = 0,35$

Problema 4.4.2 De los turistas que visitaron Asturias el año pasado, el 5 % eran españoles y viajaban en avión. Además se sabe que un 20 % eran extranjeros y que el 25 % de los que viajaron en avión eran españoles.

a) Si se selecciona un turista al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya viajado en avión?

b) Si seleccionamos un turista al azar entre los extranjeros, ¿cuál es la probabilidad de que haya viajado en avión?

Solución:
Sea E al suceso "Español", $\overline{E}$ al suceso "Extranjero" y A al suceso "viaja en avión". Tenemos: $P(\overline{E}) = 0,2$, $P(E) = 0,8$, $P(E|A) = 0,25$ y $P(E \cap A) = 0,05$.

a) $P(E|A) = \dfrac{P(E \cap A)}{P(A)} \Longrightarrow P(A) = \dfrac{P(E \cap A)}{P(E|A)} = \dfrac{0,05}{0,25} = 0,2$

b) $P(A|\overline{E}) = \dfrac{P(A \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \dfrac{P(A) - P(A \cap E)}{P(\overline{E})} = \dfrac{0,2 - 0,05}{0,2} = 0,75$

4.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.4.3 El 20 % de los trabajadores de una empresa tiene estudios superiores y el 80 % restante no los tiene. De los que tienen estudios superiores, el 6 % fuma. Además se sabe que del total de los trabajadores, el 12 % fuma.

a) De los trabajadores que fuman, ¿qué porcentaje tiene estudios superiores?

b) De los trabajadores que no tienen estudios superiores, ¿qué porcentaje fuma?

Solución:
Sea S al suceso tiene estudios superiores y F el suceso fuma.
Tenemos: $P(S) = 0,2$, $P(F|S) = 0,06$ y $P(F) = 0,12 \Longrightarrow$
$P(F \cap S) = P(F|S) \cdot P(S) = 0,06 \cdot 0,2 = 0,012$

	S	$\overline{S}$	Total
F	$0,012$		$0,12$
$\overline{F}$			
Total	$0,2$		1

$\Longrightarrow$

	S	$\overline{S}$	Total
F	$0,012$	$0,108$	$0,12$
$\overline{F}$	$0,188$	$0,692$	$0,88$
Total	$0,2$	$0,8$	1

a) $P(S|F) = \dfrac{P(S \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0,012}{0,12} = 0,1 \Longrightarrow 10\,\%$

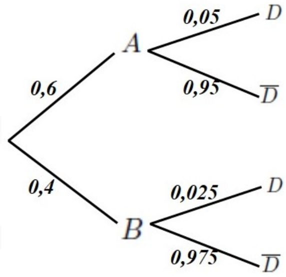
b) $P(F|\overline{S}) = \dfrac{P(F \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \dfrac{0,108}{0,8} = 0,135 \Longrightarrow 13,5\,\%$

Problema 4.4.4 Una fábrica de tornillos utiliza en su fabricación el 60 % de las veces la máquina A y el 40 % restante la B. La máquina A produce un 5 % de tornillos defectuosos y la B un 2,5 %.

a) Calcula la probabilidad de que un tornillo, elegido al azar, sea defectuoso.

b) Si un tornillo elegido al azar resulta defectuoso, calcula la probabilidad de que lo haya producido la máquina B.

Solución:
Sea A al suceso máquina A, B al suceso máquina B y D defectuoso.
Tenemos: $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,4$, $P(D|A) = 0,05$ y $P(D|B) = 0,025$.



a) $P(D) = P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B) = 0,05\cdot 0,6+0,025\cdot 0,4 = 0,04$

b) $P(B|D) = \dfrac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \dfrac{0,025\cdot 0,4}{0,04} = 0,25$

4.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.4.5 Se sortea un viaje a Japón entre los 240 mejores clientes de una agencia de viajes. De ellos, 144 son mujeres, 168 son personas con hijos y 90 son hombres con hijos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre sin hijos?

b) Si la persona a la que le toca el viaje tiene hijos, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

Solución:
Sea V al suceso "hombre", M al suceso "mujer" y H al suceso "con hijos".

$$P(M) = \frac{144}{240} = \frac{3}{5} = 0,6, \quad P(H) = \frac{168}{240} = \frac{7}{10} = 0,7, \quad P(V\cap H) = \frac{90}{240} = \frac{3}{8} = 0,375$$

	H	$\overline{H}$	Total
V	$0,375$		
M			$0,6$
Total	$0,7$		1

$\Longrightarrow$

	H	$\overline{H}$	Total
V	$0,375$	$0,025$	$0,4$
M	$0,325$	$0,275$	$0,6$
Total	$0,7$	$0,3$	1

a) $P(V\cap\overline{H}) = 0,025$

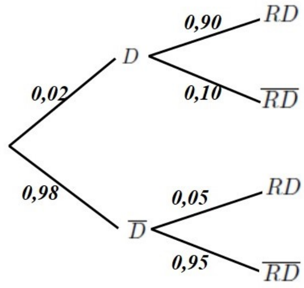
b) $P(M|H) = \dfrac{P(M\cap H)}{P(H)} = \dfrac{0,325}{0,7} = 0,4643$

Problema 4.4.6 En un proceso de fabricación se sabe que el 2 % de las piezas producidas son defectuosas. Se utiliza un dispositivo para detectarlas que califica como defectuosas al 90 % de las piezas defectuosas, pero también califica como defectuosas a un 5 % que no lo son.

a) Calcula la probabilidad de que el dispositivo califique una pieza cualquiera como defectuosa.

b) Calcula la probabilidad de que no sea defectuosa una pieza que el dispositivo ha calificado como defectuosa.

Solución:
Sean D al suceso "defectusa" y RD al suceso "reconoce defectoso".
Tenemos: $P(D) = 0,02$, $P(RD|D) = 0,9$ y $P(RD|\overline{D}) = 0,05$



a) $P(RD) = P(RD|D)P(D) + P(RD|\overline{D})P(\overline{D}) =$
$0,9 \cdot 0,02 + 0,05 \cdot 0,98 = 0,067$

b) $P(\overline{D}|RD) = \dfrac{P(RD|\overline{D})P(\overline{D})}{P(RD)} = \dfrac{0,05 \cdot 0,98}{0,067} = 0,7313$

4.5. Cantabria

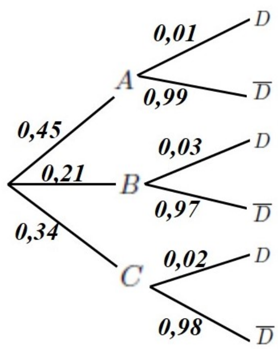
4.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.5.1 Una empresa juguetera lanza al mercado un nuevo modelo de balón de playa, que fabrica en tres plantas, A, B y C, de las que salen respectivamente el 45 %, 21 % y el 34 % de la producción total. Se ha detectado un fallo en la máquina utilizada en cada planta para aplicar los colores. De hecho, sale defectuoso el 1 % de los balones procedentes de la planta A, el 3 % de los provenientes de la B, y el 2 % de los de la C.
Seleccionamos un balón al azar de entre todos los que han salido de las tres plantas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso y haya pasado por la máquina de la planta A?

b) Si no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido de la máquina de la planta B?.

Solución:
Sea A sale de la fábrica A, B sale de la fábrica B, C sale de la fábrica C y D sale defectuoso.
Tenemos: $P(A) = 0,45$, $P(B) = 0,21$, $P(C) = 0,34$, $P(D|A) = 0,01$, $P(D|B) = 0,03$ y $P(D|C) = 0,02$.



a) $P(\overline{D} \cap A) = P(\overline{D}|A)P(A) = 0,99 \cdot 0,45 = 0,4455$

b) $P(\overline{D}) = P(\overline{D}|A)P(A) + P(\overline{D}|B)P(B) + P(\overline{D}|C)P(C) =$
$0,99 \cdot 0,45 + 0,97 \cdot 0,21 + 0,98 \cdot 0,34 = 0,9824$
$P(B|\overline{D}) = \dfrac{P(\overline{D}|B)P(B)}{P(\overline{D}} = \dfrac{0,97 \cdot 0,21}{0,9824} = 0,2073$

4.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.5.2 En una población de 3510 habitantes, se conoce el número, por franjas de edades, de los que colaboran con alguna ONG. Los datos completos aparecen en la siguiente tabla:

	18 – 35 años	36 – 55 años	Mayores de 55 años	Total
Colabora con alguna ONG	537	759	463	1759
No colabora con ninguna ONG	115	1034	602	1751
Total	652	1793	1065	3510

Elegido un habitante al azar,

a) Calcular la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 18 y 35 años.

b) Si sabemos que no colabora con ninguna ONG, ¿cuál es la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 36 y 55 años??

Solución:
Sean J personas entre 18-35 años, A personas entre 36-55 años, M personas mayores de 55 años, C colabora con una ONG.

	J	A	M	Total
C	537	759	463	1759
$\overline{C}$	115	1034	602	1751
Total	652	1793	1065	3510

a) $P(J) = \dfrac{652}{3510} = 0,1858$

b) $P(A|\overline{C}) = \dfrac{P(A \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \dfrac{1034/3510}{1751/3510} = 0,5905$

4.6. Castilla La Mancha

4.6.1. Modelo de 2020

Problema 4.6.1 En una universidad el 40 % de los estudiantes son aficionados a la lectura, el 50 % al cine, y al 70 % les gusta el cine o la lectura o ambas cosas.

a) Se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la lectura y el cine?

b) Si elegimos un estudiante al azar y le gusta la lectura, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el cine?

Solución:
Sean L le gusta la lectura y C le gusta el cine.

$$P(L) = 0,4, \quad P(C) = 0,5, \quad P(L \cup C) = 0,7$$

a) $P(L \cap C) = P(L) + P(C) - P(L \cup C) = 0,4 + 0,5 - 0,7 = 0,2$

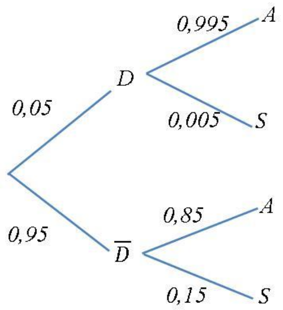
b) $P(C|L) = \dfrac{P(L \cap C)}{P(L)} = \dfrac{0,2}{0,4} = 0,5$

Problema 4.6.2 El 5 % de los estudiantes matriculados en una determinada asignatura de bachillerato son deportistas aficionados. El 0,5 % de estos alumnos deportistas aficionados obtienen una calificación de suspenso en dicha asignatura. Mientras que el 15 % de los alumnos no deportistas aficionados obtienen una calificación de suspenso.

a) Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido un suspenso en la citada asignatura?

b) Sabiendo que un alumno elegido al azar ha obtenido un suspenso, ¿cuál es la probabilidad de que sea deportista aficionado?

Solución:
Sean D a deportista aficionado, A aprueba y S suspende.



a)
$$P(S) = P(S|D)P(D) + P(S|\overline{D})P(\overline{D}) =$$
$$0,005 \cdot 0,05 + 0,15 \cdot 0,95 = 0,14275$$

b)
$$P(D|S) = \frac{P(S|D)P(D)}{P(S)} = \frac{0,005 \cdot 0,05}{0,14275} = 0,00175$$

4.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.6.3 En un instituto el 15 % de los alumnos ven la tele todos los días, el 25 % juegan todos los días a la consola y el 26 % ven la tele todos los días o juegan todos los días a la consola o ambos.

a) Se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que vea la tele todos los días y juegue a la consola todos los días?

b) Si elegimos un alumno al azar y juega todos los días a la consola, ¿cuál es la probabilidad de que vea todos los días la televisión?

Solución:
Sean T ven la tele y J juegan a la videoconsola.
Tenemos: $P(T) = 0,15$, $P(J) = 0,25$ y $P(T \cup J) = 0,26$.

a) $P(T \cup J) = P(T) + P(J) - P(T \cap J) \Longrightarrow P(T \cap J) = P(T) + P(J) - P(T \cup J) = 0,15 + 0,25 - 0,26 = 0,14$

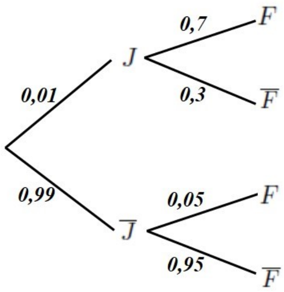
b) $P(T|J) = \dfrac{P(T \cap J)}{P(J)} = \dfrac{0,14}{0,25} = 0,56$

Problema 4.6.4 En una ciudad el 1 % de los habitantes ha ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas. De las personas que han ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas, el 70 % tiene problemas financieros. De los habitantes que no han ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas, se sabe que un 5 % tiene problemas financieros.

a) Calcula la probabilidad de que elegido un habitante al azar tenga problemas financieros.

b) Sabiendo que una persona tiene problemas financieros, ¿cuál es la probabilidad de que haya ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas?

Solución:
Sean J jugar en una casa de apuestas y F problemas financieros.
Tenemos: $P(J) = 0,01$, $P(F|J) = 0,7$ y $P(F|\overline{J}) = 0,05$.



a) $P(F) = P(F|J)P(J) + P(F|\overline{J})P(\overline{J}) = 0,7 \cdot 0,01 + 0,05 \cdot 0,99 = 0,0565$

b) $P(J|F) = \dfrac{P(F|J)P(J)}{P(F)} = \dfrac{0,7 \cdot 0,01}{0,0565} = 0,1239$

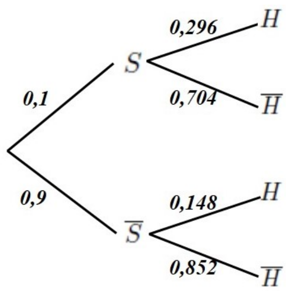
4.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.6.5 El 10 % de los adultos padece sobrepeso. Se sabe por estudios previos que el riesgo de padecer hipertensión arterial es dos veces mayor en las personas con sobrepeso que las que no tienen sobrepeso y también que la probabilidad de que un adulto sin sobrepeso padezca hipertensión arterial es del 14,8 %.

a) ¿Qué porcentaje de adultos tienen sobrepeso e hipertensión arterial?

b) Si se escoge un adulto al azar y tiene hipertensión arterial, ¿cuál es la probabilidad de que tenga sobrepeso?

Solución:
Sea S tener sobrepeso y H tener hipertensión.
Tenemos: $P(S) = 0,1$, $P(H|S) = 0,296$, $P(H|\overline{S}) = 0,148$



a) $P(S \cap H) = P(H|S)P(S) = 0,296 \cdot 0,1 = 0,0296 \Longrightarrow 2,96\,\%$

b) $P(H) = P(H|S)P(S) + P(H|\overline{S})P(\overline{S}) = 0,296 \cdot 0,1 + 0,148 \cdot 0,9 = 0,1628$

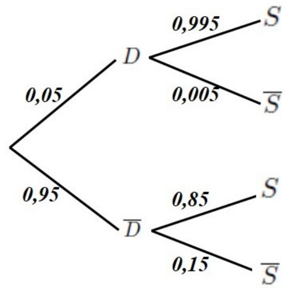
$P(S|H) = \dfrac{P(H|S)P(S)}{P(H)} = \dfrac{0,296 \cdot 0,1}{0,1628} = 0,1818$

Problema 4.6.6 En un municipio el 5 % de los habitantes son deportistas aficionados. El 0,5 % de estos deportistas aficionados no han superado un test respiratorio. Mientras que de los habitantes no deportistas aficionados el 15 % no han superado el mismo test respiratorio.

a) Elegido un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya superado el test respiratorio?

b) Sabiendo que un habitante elegido al azar no ha superado el test respiratorio, ¿cuál es la probabilidad de que sea deportista aficionado?

Solución:
Sean D deportista aficionado y S supera el test.
Tenemos $P(D) = 0,05$, $P(\overline{S}|D) = 0,005$ y $P(\overline{S}|\overline{D}) = 0,15$



a) $P(\overline{S}) = P(\overline{S}|D)P(D) + P(\overline{S}|\overline{D})P(\overline{D}) =$
$0,005 \cdot 0,05 + 0,15 \cdot 0,95 = 0,14275$

b) $P(D|\overline{S}) = \dfrac{P(\overline{S}|D)P(D)}{P(\overline{S})} = \dfrac{0,005 \cdot 0,05}{0,14275} = 0,0018$

4.7. Castilla León

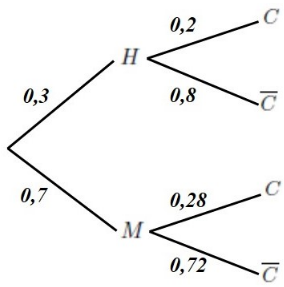
4.7.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.7.1 El 30 % de los clientes de un banco especializado en microcréditos son hombres y el 70 % son mujeres. Se sabe que el 20 % de los hombres recibieron un crédito inferior a 6000 € mientras que el 72 % de las mujeres recibieron un crédito igual o superior a dicha cantidad.

a) Elegido uno de los clientes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que éste haya recibido un crédito inferior a 6000 €?

b) Elegido al azar un cliente entre los que recibieron un crédito inferior a 6000 €, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Solución:
Sean H hombre, M mujer, C crédito inferior a 6000 € y $\overline{C}$ crédito igual o superior a 6000 €.
Tenemos: $P(H) = 0,3$, $P(M) = 0,7$, $P(C|H) = 0,2$ y $P(\overline{C}|M) = 0,72$



a) $P(C) = P(C|H)P(H) + P(C|M)P(M) =$
$0,2 \cdot 0,3 + 0,28 \cdot 0,7 = 0,256$

b) $P(M|C) = \dfrac{P(C|M)P(M)}{P(C)} = \dfrac{0,28 \cdot 0,7}{0,256} = 0,7656$

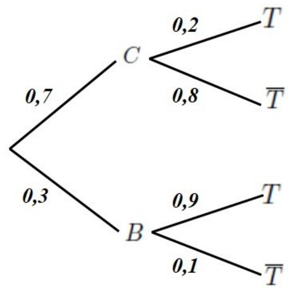
4.7.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.7.2 Para ir a clase, un estudiante utiliza su coche el 70 % de los días, mientras que va en autobús el resto de los días. Cuando utiliza su coche, llega tarde el 20 % de los días, mientras que si va en autobús llega a tiempo el 10 % de los días. Elegido un día al azar:

a) Calcular la probabilidad de que el estudiante llegue tarde.

b) Si ha llegado a tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que haya venido en autobús?

Solución:
Sean C utiliza el coche, B utiliza el autobús y T llega tarde.



a) $P(T) = P(T|C)P(C) + P(T|B)P(B) =$
$0,2 \cdot 0,7 + 0,9 \cdot 0,3 = 0,41$

b) $P(B|\overline{T}) = \dfrac{P(\overline{T}|B)P(B)}{P(\overline{T})} = \dfrac{0,1 \cdot 0,3}{1 - 0,41} = 0,0508$

4.8. Cataluña

4.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Sin problemas de este tipo.

4.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Sin problemas de este tipo.

4.9. Comunidad Valenciana

4.9.1. Modelo de 2020

Problema 4.9.1 En una cierta ciudad, las dos terceras partes de los hogares tienen una Smart TV, de los cuales, las tres octavas partes han contratado algún servicio de televisión de pago, porcentaje que baja al 30 % si consideramos el total de los hogares. Si se elige un hogar al azar

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV pero sí haya contratado televisión de pago?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga Smart TV si sabemos que ha contratado televisión de pago?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV si sabemos que no ha contratado televisión de pago?

Solución:
LLamamos TV : televisión y SM : Smart TV.

$$P(TV|SM) = \frac{P(TV \cap SM)}{P(SM)} \Longrightarrow P(TV \cap SM) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = 0,25$$

	Sucesos		
	TV	$\overline{TV}$	Totales
SM	$0,25$		$0,67$
$\overline{SM}$			
Totales	$0,3$		1

$\Longrightarrow$

	Sucesos		
	TV	$\overline{TV}$	Totales
SM	$0,25$	$0,42$	$0,67$
$\overline{SM}$	$0,05$	$0,28$	$0,33$
Totales	$0,3$	$0,7$	1

a) $P(\overline{SM} \cap TV) = 0,05$

b) $P(SM|TV) = \dfrac{P(SM \cap TV)}{P(TV)} = \dfrac{0,25}{0,3} = 0,83$

c) $P(\overline{SM}|\overline{TV}) = \dfrac{P(\overline{SM} \cap \overline{TV})}{P(\overline{TV})} = \dfrac{0,28}{0,7} = 0,4$

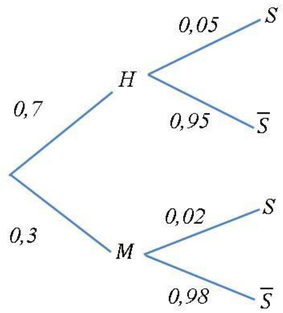
Problema 4.9.2 Sabemos que el 5 % de los hombres y el 2 % de las mujeres que trabajan en una empresa tienen un salario mensual mayor que 5000 euros. Se sabe también que el 30 % de los trabajadores de dicha empresa son mujeres.

a) Calcula la probabilidad de que un trabajador de la empresa, elegido al azar, tenga un salario mensual mayor que 5000 euros.

b) Si se elige al azar un trabajador de la empresa y se observa que su salario mensual es mayor que 5000 euros, ¿cuál es la probabilidad de que dicho trabajador sea mujer?

c) ¿Qué porcentaje de trabajadores de la empresa son hombres con un salario mensual mayor que 5000 euros?

Solución:
Sean H hombre, M mujer y S superior a 5000 euros.



a) $P(S) = P(S|H)P(H) + P(S|M)P(M) =$
$0,05 \cdot 0,7 + 0,02 \cdot 0,3 = 0,041$

b) $P(M|S) = \dfrac{P(S|M)P(M)}{P(S)} = \dfrac{0,02 \cdot 0,3}{0,041} = 0,146$

c) $P(H \cap S) = P(S|H)P(H) = 0,05 \cdot 0,7 = 0,035$

4.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.9.3 Si un habitante de la ciudad de *Megalópolis* es portador del anticuerpo A, entonces 2 veces de cada 5 es portador del anticuerpo B. Por el contrario, si no es portador del anticuerpo A, entonces 4 veces de cada 5 no es portador del anticuerpo B. Si sabemos que la mitad de la población es portadora del anticuerpo A, calcula:

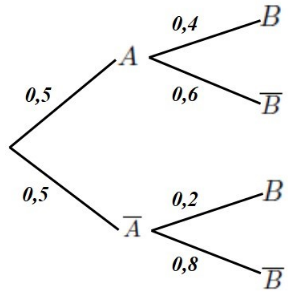
a) La probabilidad de que un habitante de *Megalópolis* sea portador del anticuerpo B.

b) La probabilidad de que si un habitante de *Megalópolis* es portador del anticuerpo B lo sea también del anticuerpo A.

c) La probabilidad de que si un habitante de *Megalópolis* no es portador del anticuerpo B, tampoco lo sea del anticuerpo A.

d) La probabilidad de que un habitante de *Megalópolis* sea portador del anticuerpo A y no lo sea del anticuerpo B.

Solución:
Sea A portador de anticuerpos A y B portador de anticuerpos B
Tenemos: $P(B|A) = \dfrac{2}{5} = 0,4$, $P(\overline{B}|\overline{A}) = \dfrac{4}{5} = 0,8$ y $P(A) = \dfrac{1}{2} = 0,5$



a) $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A}) =$
$0,4 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,5 = 0,3$

b) $P(A|B) = \dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \dfrac{0,4 \cdot 0,5}{0,3} = 0,6667$

c) $P(\overline{A}|\overline{B}) = \dfrac{P(\overline{B}|\overline{A})}{P(\overline{B})} = \dfrac{0,8 \cdot 0,5}{1 - 0,3} = 0,5714$

d) $P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{B}|A)P(A) = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3$

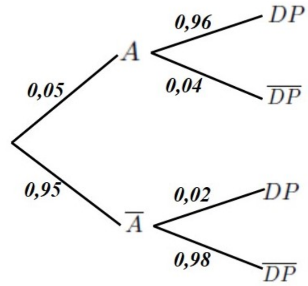
Problema 4.9.4 Un profesor evalúa a sus estudiantes a través de un trabajo final. El profesor sabe por experiencia que el 5 % de los trabajos no son originales, sino que son plagios. El profesor dispone de un programa informático para detectar plagios. La probabilidad de que el programa no clasifique correctamente un trabajo plagiado es 0,04 y la probabilidad de que clasifique como plagio un trabajo original es 0,02.

a) Calcula la probabilidad de que un trabajo final, elegido al azar, sea clasificado como plagio por el programa informático.

b) Un trabajo es inspeccionado por el programa informático y es clasificado como original. ¿Cuál es la probabilidad de que dicho trabajo sea un plagio?

c) ¿Qué porcentaje de trabajos finales son plagios y a la vez son clasificados como tales por el programa?

Solución:
Sean A es un plagio y DP el programa detecta plagio.
Tenemos: $P(A) = 0,05$, $P(\overline{DP}|A) = 0,04$ y $P(DP|\overline{A}) = 0,02$



a) $P(DP) = P(DP|A)P(A) + P(DP|\overline{A})P(\overline{A}) =$
$0,96 \cdot 0,05 + 0,02 \cdot 0,95 = 0,067$

b) $P(A|\overline{DP}) = \dfrac{P(\overline{DP}|A)P(A)}{P(\overline{DP})} = \dfrac{0,04 \cdot 0,05}{1 - 0,067} = 0,0021$

c) $P(A \cap DP) = P(DP|A)P(A) = 0,96 \cdot 0,05 = 0,048 \Longrightarrow 4,8\,\%$

4.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.9.5 De dos sucesos A y B se sabe que satisfacen que $P(A) = 0,4$, $P(A \cup B) = 0,8$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,7$, donde $\overline{A}$ y $\overline{B}$ representan los sucesos complementarios de los sucesos A y B, respectivamente. Se pide:

a) ¿Son independientes los sucesos A y B?

b) La probabilidad de que solo se verifique uno de los sucesos.

c) La probabilidad de que se verifique el suceso $\overline{B}$.

d) La probabilidad de que se verifique el suceso $\overline{A}|B$.

Solución:

a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,7 \Longrightarrow P(A \cap B) = 1 - 0,7 = 0,3$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + P(B) - 0,3 = 0,8 \Longrightarrow$
$P(B) = 0,8 - 0,4 + 0,3 = 0,7$
$P(A) \cdot P(B) = 0,4 \cdot 0,7 = 0,28 \neq P(A \cap B) \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

b) $P(\text{sólo un suceso}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0,4 + 0,7 - 0,6 = 0,5$

c) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,7 = 0,3$

d) $P(\overline{A}|B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,7 - 0,3}{0,7} = 0,5714$

Problema 4.9.6 En una determinada ciudad, se sabe que el 80 % de los hogares están formados por más de una persona. Se sabe también que el 30 % de los hogares de esa ciudad están suscritos al canal *Panoramix*. Por último, se sabe que el 20 % de los hogares están formados por más de una persona y están suscritos al canal *Panoramix*. Seleccionamos al azar un hogar de esta ciudad.

a) Calcula la probabilidad de que el hogar seleccionado no esté suscrito al canal *Panoramix*.

b) Calcula la probabilidad de que el hogar seleccionado esté formado por una única persona y también esté suscrito al canal *Panoramix*.

c) Si sabemos que el hogar seleccionado está formado por una única persona, ¿cuál es la probabilidad de que esté suscrito al canal *Panoramix*?

d) Si sabemos que el hogar seleccionado está suscrito al canal *Panoramix*, ¿cuál es la probabilidad de que esté formado por más de una persona?

Solución:
Sea A hogares con más de una persona y PX hogares suscritos a *Panoramix*.
Tenemos: $P(A) = 0,8$, $P(PX) = 0,3$ y $P(A \cap PX) = 0,2$

	A	$\overline{A}$	Totales
PX	$0,2$		$0,3$
$\overline{PX}$			
Totales	$0,8$		1

$\Longrightarrow$

	A	$\overline{A}$	Totales
PX	$0,2$	$0,1$	$0,3$
$\overline{PX}$	$0,6$	$0,1$	$0,7$
Totales	$0,8$	$0,2$	1

a) $P(\overline{PX}) = 0,7$

b) $P(\overline{A} \cap PX) = 0,1$

c) $P(PX|\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap PX)}{P(\overline{A})} = \dfrac{0,1}{0,2} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

d) $P(A|PX) = \dfrac{P(A \cap PX)}{P(PX)} = \dfrac{0,2}{0,3} = \dfrac{2}{3} = 0,6667$

4.10. Extremadura

4.10.1. Modelo de 2020

Problema 4.10.1 En un bosque hay 50 abetos, 30 cipreses y 120 pinos. Una enfermedad provocada por una oruga afecta a 25 abetos, 9 cipreses y 48 pinos. Se pide, justificando las respuestas:

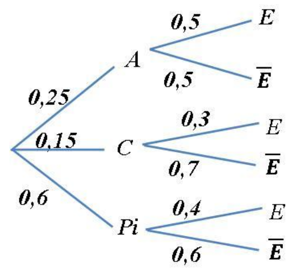
a) Calcular la probabilidad de que un pino elegido al azar esté infectado por la oruga.

b) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga.

c) Si se selecciona un árbol al azar y está infectado por la oruga, ¿cuál es la probabilidad de que sea un pino?

Solución:
Sean A abetos, C cipreses, Pi pinos y E enfermos.

$$P(A) = \frac{50}{200} = 0,25, \quad P(C) = \frac{30}{200} = 0,15, \quad P(Pi) = \frac{120}{200} = 0,6$$
$$P(E|A) = \frac{25}{50} = 0,5, \quad P(E|C) = \frac{9}{30} = 0,3, \quad P(E|Pi) = \frac{48}{120} = 0,4$$



a) $P(E|Pi) = 0,4$

b) $P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|C)P(C) + P(E|Pi)P(Pi) =$
$0,5 \cdot 0,25 + 0,3 \cdot 0,15 + 0,4 \cdot 0,6 = 0,41$

c) $P(Pi|E) = \dfrac{P(E|Pi)P(Pi)}{P(E)} = \dfrac{0,4 \cdot 0,6}{0,41} = 0,585$

4.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.10.2 Una biblioteca cuenta con 1000 socios, de los cuales 350 son jóvenes, 400 adultos y 250 mayores. Encuestados sobre la puesta en marcha de un nuevo servicio, se muestran favorables 210 jóvenes, 300 adultos y 125 mayores.
Se pide, justificando las respuestas:

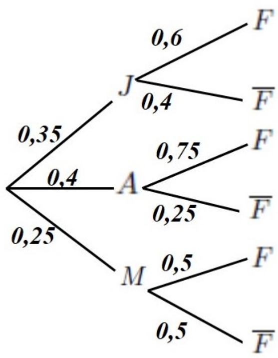
a) Calcular la probabilidad de que un adulto sea contrario a la puesta en marcha del servicio.

b) Calcular la probabilidad de que un socio elegido al azar sea favorable a la puesta en marcha del servicio.

Solución:
Sean J socios jóvenes, A socios adultos, M socios mayores y F favorables al nuevo servicio.

$$P(J) = \frac{350}{1000} = 0,35, \quad P(A) = \frac{400}{1000} = 0,4, \quad P(M) = \frac{250}{1000} = 0,25$$

$$P(F|J) = \frac{210}{350} = 0,6, \quad P(F|A) = \frac{300}{400} = 0,75, \quad P(F|M) = \frac{125}{250} = 0,5$$



a) $P(\overline{F}|A) = 1 - P(F|A) = 1 - 0,75 = 0,25$

b) $P(F) = P(F|J)P(J) + P(F|A)P(A) + P(F|M)P(M) =$
$0,6 \cdot 0,35 + 0,75 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,25 = 0,635$

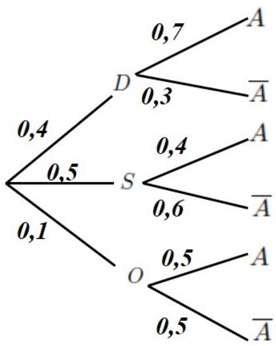
4.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.10.3 En Portugal, el 40 % del café consumido es de marca Delta, el 50 % de marca Sical y el 10 % restante se lo reparten otras marcas. Delta utiliza la variedad arábiga para el 70 % de sus envases y la variedad robusta para el 30 % restante. Sical utiliza la variedad arábiga en el 40 % de sus envases y la robusta en el 60 %. Las otras marcas de café utilizan ambas variedades en el 50 % de sus envases. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que un envase de café comprado en Portugal sea Sical y de variedad arábiga.

b) Calcular la probabilidad de que un envase de café portugués se haya utilizado la variedad robusta.

Solución:



Sean D café marca Delta, S café marca Sical, O café otras marcas, A utiliza Arábiga y $\overline{A}$ utiliza robusta.

Tenemos: $P(D) = 0,4$, $P(S) = 0,5$, $P(O) = 0,1$, $P(A|D) = 0,7$, $P(A|S) = 0,4$ y $P(A|O) = 0,5$

a) $P(S \cap A) = P(A|S)P(S) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2$

b) $P(\overline{A}) = P(\overline{A}|D)P(D) + P(\overline{A}|S)P(S) + P(\overline{A}|O)P(O) =$
$0,3 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,1 = 0,47$

4.11. Galicia

4.11.1. Modelo de 2020

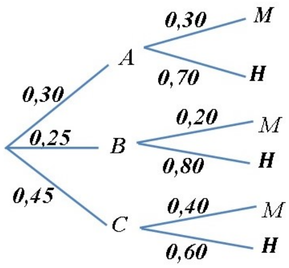
Problema 4.11.1 En una población, de cada 100 consumidores de agua mineral 30 consumen la marca A, 25 la marca B y el resto la marca C. Además, el 30 % de consumidores de A, el 20 % de consumidores de B y el 40 % de consumidores de C son mujeres.

a) Se selecciona al azar un consumidor de agua mineral de esa población: ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

b) Si se ha seleccionado al azar una mujer, halla la probabilidad de que consuma la marca B.

Solución:

Sean A consumen de la marca A, B consumen de la marca B, C consumen de la marca C, M son mujeres y H son hombres.
Tenemos: $P(A) = \dfrac{30}{100} = 0,3$, $P(B) = \dfrac{25}{100} = 0,25$ y $P(C) = \dfrac{45}{100} = 0,45$.



a) $P(M) = P(M|A)P(A) + P(M|B)P(B) + P(M|C)P(C) =$
$0,3 \cdot 0,3 + 0,20 \cdot 0,25 + 0,40 \cdot 0,45 = 0,32$

b) $P(B|M) = \dfrac{P(M|B)P(B)}{P(M)} = \dfrac{0,20 \cdot 0,25}{0,32} = 0,15625$

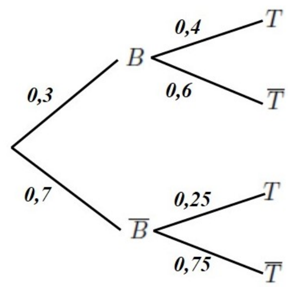
Problema 4.11.2 El 30 % de las estudiantes de un instituto practica baloncesto. De entre las que practican baloncesto, el 40 % practica además tenis. De entre las que no practican baloncesto, un cuarto practican tenis. Elegida una estudiante al azar

a) ¿cuál es la probabilidad de que practique ambos deportes?

b) ¿son independientes los sucesos ”practicar tenis” y ”practicar baloncesto”?

Solución:

Sean B ”practicar baloncesto” y T ”practicar tenis”.
Tenemos: $P(B) = 0,3$, $P(T|B) = 0,4$ y $P(T|\overline{B}) = 0,25$.



a) $P(T) = P(T|B)P(B) + P(T|\overline{B})P(\overline{B}) =$
$0,4 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,7 = 0,295$
$P(T|B) = \dfrac{P(B \cap T)}{P(B)} \Longrightarrow P(B \cap T) = P(T|B)P(B) =$
$0,4 \cdot 0,3 = 0,12$
$P(B \cup T) = P(B) + P(T) - P(B \cap T) = 0,3 + 0,295 - 0,12 =$
$0,475$

b) $P(B)P(T) = 0,3 \cdot 0,295 = 0,0885 \neq P(B \cap T) \Longrightarrow B$ y T no son independientes.

4.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.11.3 Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,4$, $P(\overline{B}) = 0,7$ y $P(\overline{B}|A) = 0,75$. Calcule las siguientes probabilidades:

a) $P(A \cap \overline{B})$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$

b) ¿son A y B sucesos independientes? Justifique la respuesta.

Solución:

a) $P(\overline{B}|A) = \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} \Longrightarrow P(\overline{B} \cap A) = P(\overline{B}|A)P(A) = 0,75 \cdot 0,4 = 0,3$
$P(\overline{B} \cap A) = P(A) - P(A \cap B) = 0,4 - P(A \cap B) = 0,3 \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,1$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,3 - 0,1 = 0,6$

b) $P(A)P(B) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12 \neq P(A \cap B) \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

4.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

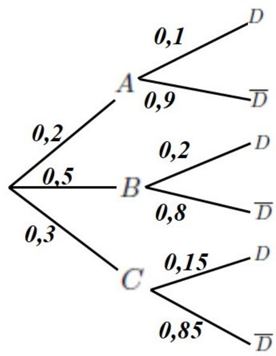
Problema 4.11.4 Una empresa de transporte decide renovar su flota de vehículos. Para ello encarga 240 vehículos al distribuidor A, 600 al distribuidor B y 360 al distribuidor C. Se sabe que el 10 % de los vehículos suministrados por el distribuidor A tienen algún defecto, siendo estas proporciones del 20 % y 15 % para los distribuidores B y C respectivamente. Para aceptar o rechazar el pedido la empresa revisa un vehículo elegido al azar del total de vehículos, rechazando todo el pedido si el vehículo tiene algún defecto.

a) Determine el porcentaje de pedidos rechazados.

b) Si el vehículo revisado resulta ser NO defectuoso, calcule la probabilidad de que provenga del distribuidor A.

Solución:

Sea A proceden del distribuidor A, B proceden del distribuidor B, C proceden del distribuidor C y D algún defecto.
Tenemos: $P(A) = \dfrac{240}{1200} = \dfrac{1}{5} = 0,2$, $P(B) = \dfrac{600}{1200} = \dfrac{1}{2} = 0,5$, $P(C) = \dfrac{360}{1200} = \dfrac{3}{10} = 0,3$, $P(D|A) = 0,1$, $P(D|B) = 0,2$ y $P(D|C) = 0,15$.



a) $P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) =$
$0,1 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,5 + 0,15 \cdot 0,3 = 0,165 \Longrightarrow 16,5\,\%$

b) $P(A|\overline{D}) = \dfrac{P(\overline{D}|A)P(A)}{P(\overline{D})} = \dfrac{0,90 \cdot 0,2}{1 - 0,165} = 0,2156$

4.12. Islas Baleares

4.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

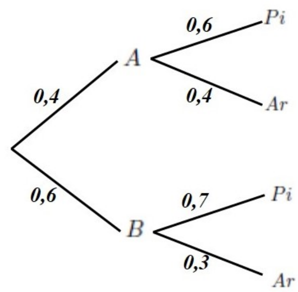
Problema 4.12.1 Una almazara recibe cajas de aceitunas de dos productoras, A y B, que cultivan dos variedades, picual y arbequina. El 40 % de las aceitunas proviene de la productora A, de estas el 60 % es de la variedad picual. De las que provienen de la productora B, el 30 % es de la variedad arbequina. Se elige una caja de aceitunas al azar.

a) Interpretar los datos proporcionados en términos de sucesos, probabilidades y probabilidades condicionadas.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la variedad picual?

c) Si se sabe que es de la variedad picual, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la productora A?

Solución:
Sea Pi aceituna picual, Ar aceituna arbequina, A productora A y B productora B.



a) Tenemos $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,6$, $P(Pi|A) = 0,6$, $P(Ar|A) = 0,4$, $P(Pi|B) = 0,7$ y $P(Ar|B) = 0,3$

b) $P(Pi) = P(Pi|A)P(A) + P(Pi|B)P(B) = 0,6 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,6 = 0,66$

c) $P(A|Pi) = \dfrac{P(Pi|A)P(A)}{P(Pi)} = \dfrac{0,6 \cdot 0,4}{0,66} = 0,3636$

4.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.12.2 Sean A y B dos sucesos tales que $P(A \cup B) = 0,8$, $P(\overline{A}) = 0,5$ y $P(A \cap B) = 0,3$, donde $\overline{A}$ es el complementario de A.

a) Calcular $P(B)$ y $P(A|B)$.

b) Calcular $P(A \cap \overline{B})$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

c) ¿Son independientes los sucesos A y B? justificar la respuesta.

Solución:

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = 0,8 + 0,3 - (1 - 0,5) = 0,6$
$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,3}{0,6} = 0,5$

b) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,5 - 0,3 = 0,2$
$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,3 = 0,7$

c) $P(A)P(B) = 0,5 \cdot 0,6 = 0,3 = P(A \cap B) \Longrightarrow A$ y B son independientes.

Problema 4.12.3 En una población, el porcentaje de personas que miran un cierto programa de televisión ès del 40 %. Se sabe que el 60 % de las personas que lo miran tienen estudios superiores y que el 30 % de las personas que no lo miran no tienen estudios superiores.

a) Interpreta los datos proporcionados en términos de sucesos, probabilidades y probabilidades condicionadas.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga estudios superiores?

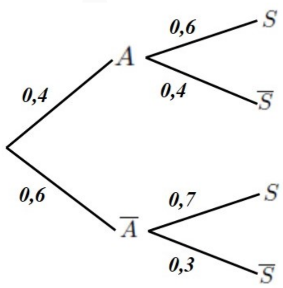
c) Buscar la probabilidad de que una persona que tenga estudios superiores, mira el citado programa.

Solución:

a) Sea A ver el programa de televisión y S tiene estudios superiores.
Tenemos: $P(A) = 0,4$, $P(\overline{A}) = 0,6$, $P(S|A) = 0,6$, $P(\overline{S}|A) = 0,4$, $P(S|\overline{A}) = 0,7$ y $P(\overline{S}|\overline{A}) = 0,3$

b) $P(S) = P(S|A)P(A) + P(S|\overline{A})P(\overline{A}) = 0,6 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,6 = 0,66$

c) $P(A|S) = \dfrac{P(S|A)P(A)}{P(S)} = \dfrac{0,6 \cdot 0,4}{0,66} = 0,3636$



4.13. Islas Canarias

4.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.13.1 Una multinacional dedicada a la fabricación de vehículos fabrica el 40 % de sus vehículos en España, el 35 % en Francia y el resto en Italia. Los vehículos fabricados son de tres modelos (Ancer, Beam y Celestial). En España se fabrican los tres modelos a partes iguales. En Francia dos terceras partes de los vehículos que se fabrican son del modelo Ancer y el resto son Beam. En Italia se fabrican los modelos Beam y Celestial a partes iguales.

a) Construye el diagrama de árbol de probabilidades.

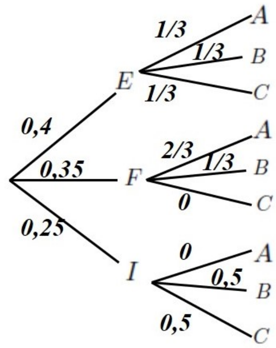
b) Se elige un vehículo al azar de entre todos los producidos por la multinacional, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo Beam?

c) Si poseyéramos un vehículo modelo Ancer, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en España?

Solución:

Sean E fábrica de España, F fábrica de Francia, I fábrica de Italia, A modelo Ancer, B modelo Beam y C modelo Celestial.
Tenemos: $P(E) = 0,4$, $P(F) = 0,35$, $P(I) = 0,25$, $P(A|E) = P(B|E) = P(C|E) = \dfrac{1}{3}$, $P(A|F) = \dfrac{2}{3}$, $P(B|F) = \dfrac{1}{3}$, $P(C|F) = 0$, $P(B|I) = P(C|I) = \dfrac{1}{2}$ y $P(A|I) = 0$

a) El diagrama a la derecha de la página:



b) $P(B) = P(B|E)P(E) + P(B|F)P(F) + P(B|I)P(I) = \dfrac{1}{3}\cdot 0,4 + \dfrac{1}{3}\cdot 0,35 + \dfrac{1}{2}\cdot 0,25 = \dfrac{3}{8} = 0,375$

c) $P(A) = P(A|E)P(E) + P(A|F)P(F) + P(A|I)P(I) = \dfrac{1}{3}\cdot 0,4 + \dfrac{2}{3}\cdot 0,35 + 0\cdot 0,25 = \dfrac{11}{30} = 0,3667$

$$P(E|A) = \frac{P(A|E)P(E)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0,4}{\frac{11}{30}} = \frac{4}{11} = 0,3636$$

4.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.13.2 Un distribuidor reparte verduras procedentes de tres fincas: A (dos séptimas partes), B (dos quintas partes) y C (el resto). Durante el periodo de reparto, el porcentaje de verduras que presentan deterioros es el 4 %, el 6 % y el 5 %, respectivamente.

a) Dibujar el correspondiente diagrama de árbol.

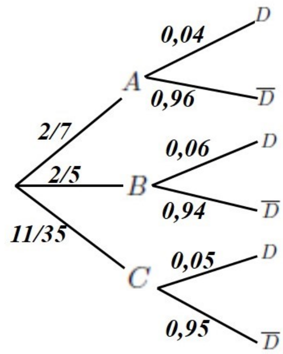
b) En un determinado envío se han repartido 4000 kilogramos de verduras ¿Cuál es la cantidad esperada que no presenta deterioros?

c) Si se elige una verdura al azar y se observa que está deteriorada, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la finca C?

Solución:

Sean A finca A, B finca B, C finca C y D deterioro.
Tenemos: $P(A) = \dfrac{2}{7}$, $P(B) = \dfrac{2}{5}$, $P(C) = \dfrac{11}{35}$, $P(D|A) = 0,04$, $P(D|B) = 0,06$ y $P(D|C) = 0,05$

a) El diagrama a la derecha de la página:



b) $P(\overline{D}) = P(\overline{D}|A)P(A) + P(\overline{D}|B)P(B) + P(\overline{D}|C)P(C) = 0,96\cdot\dfrac{2}{7} + 0,94\cdot\dfrac{2}{5} + 0,95\cdot\dfrac{11}{35} = \dfrac{3321}{3500} = 0,9489$
Si el envío es de 4000 kg tendremos sin deteriorar $4000\cdot\dfrac{3321}{3500} = 3795,429$ kg

c) $P(C|D) = \dfrac{P(D|C)P(C)}{P(D)} = \dfrac{0,05\cdot\frac{11}{35}}{1-\frac{3321}{3500}} = \dfrac{55}{179} = 0,3073$

4.14. La Rioja

4.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.14.1 En una clase hay 24 estudiantes, 12 de ellos han aprobado inglés, 16 han aprobado matemáticas y 4 han suspendido las dos asignaturas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar un alumno de esa clase resulte que haya aprobado matemáticas y haya suspendido inglés?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar un alumno de esa clase resulte que haya aprobado las dos asignaturas?

c) ¿Son independientes los sucesos aprobar matemáticas y aprobar inglés

Solución:
Sean I aprobar inglés y M aprobar matemáticas.
Tenemos: $P(I) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} = 0,5$, $P(M) = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} = 0,667$ y $P(\overline{I} \cap \overline{M}) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} = 0,167$

	I	$\overline{I}$	Totales
M			2/3
$\overline{M}$		1/6	
Totales	1/2		1

$\Longrightarrow$

	I	$\overline{I}$	Totales
M	1/3	1/3	2/3
$\overline{M}$	1/6	1/6	1/3
Totales	1/2	1/2	1

a) $P(M \cap \overline{I}) = \frac{1}{3}$

b) $P(M \cap I) = \frac{1}{3}$

c) $P(I)P(M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = P(M \cap I) \Longrightarrow I$ y M son independientes.

Problema 4.14.2 Un hospital está especializado en el tratamiento de 3 enfermedades A, B, C. El 40 % de los pacientes ingresan con la enfermedad A, el 35 % con la enfermedad B y el 25 % con la enfermedad C. La probabilidad de curación de la enfermedad A es el 80 %, de la B el 60 % y de la C el 90 %.

a) José ingresa en el hospital (no sabemos cuál de las tres enfermedades padece). ¿Cuál es la probabilidad de que se cure?

b) Miguel ingresó en el hospital y se ha restablecido completamente. ¿Cuál es la probabilidad de que ingresara padeciendo la enfermedad B?

c) Rosa ingresó en el hospital y se ha restablecido completamente. ¿Cuál es la probabilidad de que NO padeciera la enfermedad B?

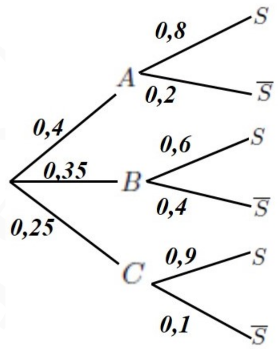
Solución:

Sean A enfermedad A, B enfermedad B, C enfermedad C y S se curan.
Tenemos: $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,35$, $P(C) = 0,25$, $P(S|A) = 0,8$, $P(S|B) = 0,6$ y $P(S|C) = 0,9$

a) $P(S) = P(S|A)P(A) + P(S|B)P(B) + P(S|C)P(C) = 0,8 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,35 + 0,9 \cdot 0,25 = 0,755$

b) $P(B|S) = \dfrac{P(S|B)P(B)}{P(S)} = \dfrac{0,6 \cdot 0,35}{0,755} = 0,2781$

c) $P(\overline{B}|S) = 1 - P(B|S) = 1 - 0,2781 = 0,7219.$



4.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.14.3 En una residencia canina hay en total 120 perros; de ellos 40 son pastores alemanes (35 negros y 5 blancos), 30 pekineses (18 negros y 12 blancos) y 50 mastines (42 negros y 8 blancos)

a) Hemos elegido un perro al azar, ¿cuál es la probabilidad de que NO sea pekinés?

b) Elegido al azar un perro, ¿cuál es la probabilidad de que sea de color blanco?

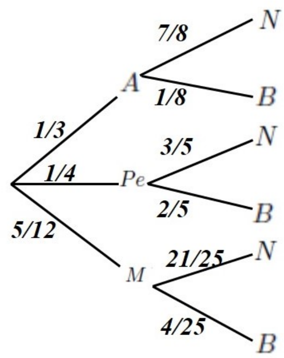
c) Se ha elegido al azar un perro que ha resultado ser blanco, ¿cuál es la probabilidad de que sea un mastín?

Solución:
Sean A pastor alemán, Pe pekinés, M mastín, N negro y B blanco.
Tenemos: $P(A) = \dfrac{40}{120} = \dfrac{1}{3}$, $P(Pe) = \dfrac{30}{120} = \dfrac{1}{4}$, $P(M) = \dfrac{50}{120} = \dfrac{5}{12}$, $P(N|A) = \dfrac{35}{40} = \dfrac{7}{8}$, $P(B|A) = \dfrac{5}{40} = \dfrac{1}{8}$, $P(N|Pe) = \dfrac{18}{30} = \dfrac{3}{5}$, $P(B|Pe) = \dfrac{12}{30} = \dfrac{2}{5}$, $P(N|M) = \dfrac{42}{50} = \dfrac{21}{25}$, $P(B|M) = \dfrac{8}{50} = \dfrac{4}{25}$

a) $P(\overline{Pe}) = 1 - P(Pe) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} = 0,75$

b) $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|Pe)P(Pe) + P(B|M)P(M) = \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{4} + \dfrac{4}{25} \cdot \dfrac{5}{12} = \dfrac{5}{24} = 0,2083$

c) $P(M|B) = \dfrac{P(B|M)P(M)}{P(B)} = \dfrac{\dfrac{4}{25} \cdot \dfrac{5}{12}}{\dfrac{5}{24}} = \dfrac{8}{25} = 0,32$



Problema 4.14.4 Luis ha hecho una cartulina con cada una de las siete letras de $LA\ RIOJA$ y las ha introducido en una urna.

a) Si extrae una cartulina, ¿cuál es la probabilidad de que sea la R?, ¿cuál es la probabilidad de que NO sea la A?

b) Luis extrae una cartulina y, a continuación, sin volver a introducir la primera, saca otra y se las muestra en ese orden a María, ¿Cuál es la probabilidad de que María vea LA?

c) Luis repite la operación y le vuelve a mostrar las cartas a María. ¿Cuál es la probabilidad de que María pueda formar la palabra LA?, ¿y de que pueda formar la palabra LO?

d) Luis extrae ahora tres cartulinas sin reemplazar después de cada extracción. ¿Cuál es la probabilidad de que María lea RIO si se las muestra en el orden en el que Luis las ha extraído? ¿Y de que lea RIA?

Solución:

a) $P(R) = \dfrac{1}{7} = 0,1429$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{2}{7} = \dfrac{5}{7} = 0,7143$

b) $P(LA \text{ en este orden}) = P(L \text{ primero}) \cdot P(A \text{ segundo}) = \dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{21} = 0,0476$

c) $P(L,A) = P(LA) + P(AL) = \dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{2}{6} + \dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{21} = 0,0952$

$P(L,O) = P(LO) + P(OL) = \dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{21} = 0,0476$

d) $P(RIO \text{ en este orden}) = P(R \text{ primero}) \cdot P(I \text{ segundo}) \cdot P(O \text{ tercero}) = \dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{210} = 0,0048$

$P(RIA \text{ en este orden}) = P(R \text{ primero}) \cdot P(I \text{ segundo}) \cdot P(A \text{ tercero}) = \dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{105} = 0,0095$

4.15. Madrid

4.15.1. Modelo de 2020

Problema 4.15.1 En un mercado agropecuario el 70 % de las verduras que se comercializan son de proximidad y el resto no. El 30 % de las verduras de proximidad son ecológicas, mientras que de las que no son de proximidad, solo son ecológicas el 10 %. Si un cliente elegido al azar ha realizado una compra de una verdura, calcule las siguientes probabilidades:

a) Probabilidad de que la verdura comprada no sea ecológica.

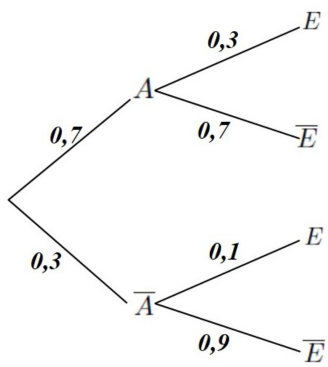
b) Probabilidad de que la verdura sea de proximidad o ecológica.

Solución:

Sean A proximidad, $\overline{A}$ no proximidad, E ecológica y $\overline{E}$ no ecológica.

a) $P(\overline{E}) = P(\overline{E}|A)P(A) + P(\overline{E}|\overline{A})P(\overline{A}) =$
$0,7 \cdot 0,7 + 0,9 \cdot 0,3 = 0,76$

b) $P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E) =$
$P(A) + (1 - P(\overline{E})) - P(E|A)P(A) =$
$0,7 + 1 - 0,76 - 0,3 \cdot 0,7 = 0,73$



Problema 4.15.2 Sean C y D dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(C) = 0,4$, $P(D) = 0,6$ y $P(C \cup D) = 0,8$. Calcule:

a) $P(C|D)$.

b) $P(\overline{C \cap D}|C)$.

Solución:

a) $P(C|D) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(C) + P(D) - P(C \cup D)}{P(D)} = \dfrac{0,4 + 0,6 - 0,8}{0,6} = \dfrac{1}{3} = 0,333$

b) $P(\overline{C \cap D}|C) = \dfrac{P(\overline{C \cap D} \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(C) - P(C \cap D)}{P(C)} = \dfrac{0,4 - 0,2}{0,4} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

4.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.15.3 Una asociación de senderismo ha programado tres excursiones para el mismo fin de semana. El 40 % de los socios irá al nacimiento del río Cuervo, el 35 % a las Hoces del río Duratón y el resto al Cañón del río Lobos. La probabilidad de lluvia en cada una de estas zonas se estima en 0,5, 0,6 y 0,45, respectivamente. Elegido un socio al azar:

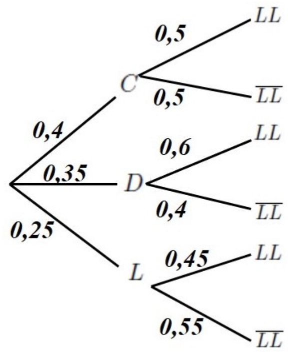
a) Calcule la probabilidad de que en su excursión no llueva.

b) Si en la excursión realizada por este socio ha llovido, ¿cuál es la probabilidad de que este socio haya ido al nacimiento del río Cuervo?

Solución:
Sean C ir al río Cuervo, D ir a las Hoces del Duratón, L ir al Cañón del rio Lobo, LL llueve y $\overline{LL}$ no llueve.

a) $P(\overline{LL}) = P(\overline{LL}|C)P(C) + P(\overline{LL}|D)P(D) + P(\overline{LL}|L)P(L) = 0,5 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,35 + 0,55 \cdot 0,25 = 0,4775$

b) $P(C|LL) = \dfrac{P(LL|C)P(C)}{P(LL)} = \dfrac{0,5 \cdot 0,4}{1 - 0,4775} = 0,38277$



Problema 4.15.4 Un estudio sobre la obsolescencia programada en una marca de electrodomésticos reveló que la probabilidad de que un microondas se estropee durante el período de garantía es 0,02. Esta probabilidad se eleva a 0,05 para sus hornos eléctricos y se sabe que estos sucesos son independientes. Cuando el microondas se ha estropeado en el período de garantía, la marca amplía esta por dos años más. El 40 % de los clientes con garantía ampliada no conserva la factura de compra durante los dos años de ampliación.

a) Un cliente compra un horno y un microondas de esta marca. Obtenga la probabilidad de que se estropee al menos uno de ellos durante el período de garantía.

b) Un cliente ha comprado un microondas. Calcule la probabilidad de que se le estropee durante el período de garantía y conserve la factura durante los dos años de ampliación.

Solución:
Sean los sucesos M se estropea el microondas, H se estropea el horno y F conserva la factura. $P(M) = 0,02$, $P(H) = 0,05$. Como M y H son independientes $P(M \cap H) = P(M)P(H) = 0,02 \cdot 0,05 = 0,001$. También tenemos $P(\overline{F}|M) = 0,4$.

a) $P(M \cup H) = P(M) + P(H) - P(M \cap H) = 0,02 + 0,05 - 0,001 = 0,069.$

b) $P(\overline{F}|M) = \dfrac{P(\overline{F} \cap M)}{P(M)} \Longrightarrow P(\overline{F} \cap M) = P(M) \cdot P(\overline{F}|M) = 0,02 \cdot 0,4 = 0,008.$

$P(\overline{F} \cap M) = P(M) - P(F \cap M) \Longrightarrow P(F \cap M) = P(M) - P(\overline{F} \cap M) = 0,02 - 0,008 = 0,012.$

4.15.3. Convocatoria Ordinaria junio de 2020-coincidente

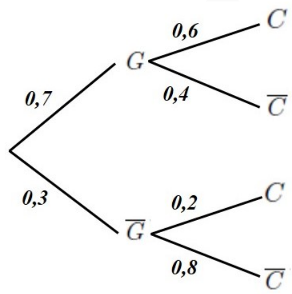
Problema 4.15.5 En un festival de circo de verano el 70 % de los espectáculos son gratuitos y el resto de pago. El 60 % de los espectáculos gratuitos se realizan en las calles, mientras que de los de pago sólo se realizan en la calle el 20 %. Si un visitante del festival, elegido al azar, decide ir a un espectáculo, calcule la probabilidad de que:

a) El espectáculo sea gratuito y no se realice en la calle.

b) El espectáculo se realice en la calle.

Solución:
Sean G espectáculos gratuitos, $\overline{G}$ espectáculos de pago, C espectáculos en las calles y $\overline{C}$ espectácu-

los en interiores.



a) $P(G \cap \overline{C}) = P(\overline{C}|G)P(G) = 0,4 \cdot 0,7 = 0,28$

b) $P(C) = P(C|G)P(G) + P(C|\overline{G})P(\overline{G}) = 0,6 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,48$

Problema 4.15.6 En un kiosco de prensa del aeropuerto de Madrid el 40 % de las ventas son periódicos y el resto revistas. Un 90 % de las publicaciones están en castellano. Además se sabe que un 8 % del total de las publicaciones son revistas en otro idioma. Calcule la probabilidad de que una publicación elegida al azar:

a) Sea un periódico, dado que está publicado en otro idioma distinto del castellano.

b) Sea un periódico o esté publicado en otro idioma distinto del castellano.

Solución:
Sean Pe periódico, R revista, C castellano y $\overline{C}$ otra lengua.

	Pe	R	Total
C			0, 9
$\overline{C}$		0, 08	
Total	0, 4		1

$\Longrightarrow$

	Pe	R	Total
C	0, 38	0, 52	0, 9
$\overline{C}$	0, 02	0, 08	0, 1
Total	0, 4	0, 6	1

a) $P(Pe|\overline{C}) = \dfrac{P(Pe \cap \overline{C})}{\overline{C}} = \dfrac{0,02}{0,1} = 0,2$

b) $P(Pe \cup \overline{C}) = P(Pe) + P(\overline{C}) - P(Pe \cap \overline{C}) = 0,4 + 0,1 - 0,02 = 0,48$

4.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.15.7 Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que: $P(A|B) = \dfrac{1}{4}$, $P(B) = \dfrac{1}{6}$ y $P(A) = \dfrac{2}{3}$. Calcule:

a) $P(A \cup \overline{B})$.

b) $P((\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A))$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

Solución:

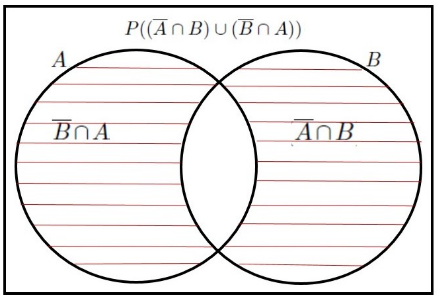
a) $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \Longrightarrow$

$P(A\cap B) = P(A|B)P(B) = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{24}$.

$P(A\cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A\cap \overline{B}) =$

$P(A) + (1-P(B)) - (P(A) - P(A\cap B) =$

$1 - P(B) + P(A\cap B) = 1 - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24} = \dfrac{7}{8}$.



b) $P((\overline{A}\cap B)\cup(\overline{B}\cap A)) =$

$P(\overline{A}\cap B) + P(\overline{B}\cap A) - P((\overline{A}\cap B)\cap(\overline{B}\cap A)) =$

$P(B) - P(A\cap B) + P(A) - P(A\cap B) - P(\phi) =$

$P(A) + P(B) - 2P(A\cap B) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{6} - 2\cdot\dfrac{1}{24} = \dfrac{3}{4}$.

Problema 4.15.8 En un instituto se decide que los alumnos y alumnas solo pueden utilizar un único color (azul o negro) al realizar los exámenes. Dos de cada tres exámenes están escritos en azul. La probabilidad de que un examen escrito en azul sea de una alumna es de 0,7. La probabilidad de que un examen esté escrito en negro y sea de un alumno es 0,2. Se elige un examen al azar. Determine la probabilidad de que

a) Sea el examen de un alumno.

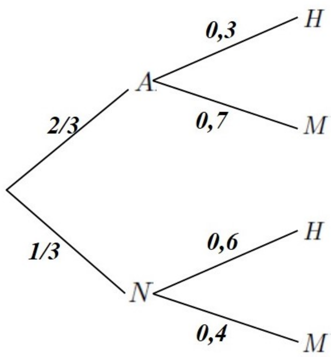
b) Sabiendo que está escrito en negro, sea de un alumno.

Solución:

Sean A: azul, N: negro, H: alumno y M: alumna.

$P(A) = \dfrac{2}{3}$, $P(N) = \dfrac{1}{3}$, $(M|A) = 0,7$ y $P(N\cap H) = 0,2$

$P(N\cap H) = 0,2 \Longrightarrow P(H|N) = \dfrac{P(N\cap H)}{P(N)} = \dfrac{0,2}{1/3} = 0,6$



a) $P(H) = P(H|A)P(A) + P(H|N)P(N) =$

$0,3\cdot\dfrac{2}{3} + 0,6\cdot\dfrac{1}{3} = 0,4$

b) $P(H|N) = \dfrac{P(N\cap H)}{P(N)} = \dfrac{0,2}{\frac{1}{3}} = 0,6$

4.16. Murcia

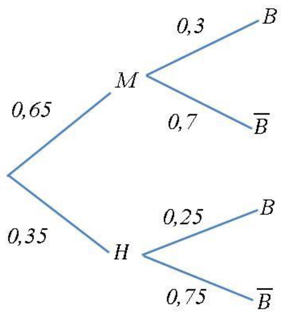
4.16.1. Modelo de 2020

Problema 4.16.1 En el coro universitario el 65 % de sus componentes son mujeres. El 30 % de las mujeres y el 25 % de los hombres son bilingües. Si elegimos al azar a un componente del coro:

a) ¿Cuál es la probabilidad que sea bilingüe?

b) Sabiendo que es bilingüe, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Solución:
Sean H hombre, M mujer y B bilingue.



a)

$$P(B) = P(B|M)P(M) + P(B|H)P(H) =$$

$$0,3 \cdot 0,65 + 0,25 \cdot 0,35 = 0,2825$$

b)

$$P(M|B) = \frac{P(B|M)P(M)}{P(B)} = \frac{0,3 \cdot 0,65}{0,2825} = 0,69$$

Problema 4.16.2 Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,2$ y $P(A|B) = 0,5$. Calcular $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$.

Solución:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,2 - 0,1 = 0,4$$

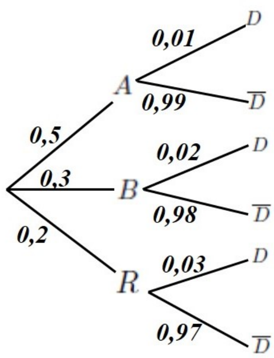
4.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.16.3 En una ferretería se encuentran mezclados 100 tornillos de color azul, 60 de color blanco y 40 de color rojo. La probabilidad de que un tornillo sea defectuoso es de 0,01 si es azul, 0,02 si es blanco y de 0,03 si es rojo. Un comprador elige un tornillo al azar.

a) Calcule la probabilidad de que el tornillo sea defectuoso.

b) Sabiendo que el tornillo es defectuoso, ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanco?

Solución:
Sean A tornillos de color azul, B tornillos de color blanco, R tornillos de color rojo y D defectuoso. Tenemos: $P(A) = \frac{100}{200} = 0,5$, $P(B) = \frac{60}{200} = 0,3$, $P(R) = \frac{40}{200} = 0,2$, $P(D|A) = 0,01$, $P(D|B) = 0,02$ y $P(D|R) = 0,03$.



a)

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|R)P(R) =$$

$$0,01 \cdot 0,5 + 0,02 \cdot 0,3 + 0,03 \cdot 0,2 = 0,017$$

b)

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \frac{0,02 \cdot 0,3}{0,017} = 0,3529$$

Problema 4.16.4 Dado dos sucesos independientes A y B se conoce que $P(A) = 0,3$ y que $P(\overline{B}) = 0,4$. Calcular las siguientes probabilidades:

a) $P(A \cup B)$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

c) $P(A|\overline{B})$

Solución:
Tenemos: $P(A) = 0,3$, $P(B) = 1 - 0,4 = 0,6$ y $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18$ por ser A y B independientes.

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,6 - 0,18 = 0,72$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,72 = 0,28$

c) $P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{P(\overline{B})} = \dfrac{0,3 - 0,18}{0,4} = 0,3$

4.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.16.5 Entre los alumnos *ERASMUS* que han llegado este curso a la Universidad de Murcia el 75 % hablan inglés, el 50 % hablan francés y un 5 % no hablan ninguno de estos dos idiomas. Elegido un alumno al azar:

a) Calcule la probabilidad de que hable inglés o francés.

b) Calcule la probabilidad de que hable inglés y francés.

c) Calcule la probabilidad de que, hablando inglés, no hable francés.

Solución:
Sean I hablan inglés y F hablan francés.
Tenemos: $P(I) = 0,75$, $P(F) = 0,5$ y $P(\overline{I} \cap \overline{F}) = 0,05 \Longrightarrow$

a) $P(\overline{I} \cap \overline{F}) = P(\overline{I \cup F}) = 1 - P(I \cup F) = 0,05 \Longrightarrow P(I \cup F) = 0,95$

b) $P(I \cup F) = P(I) + P(F) - P(I \cap F) \Longrightarrow P(I \cap F) = P(I) + P(F) - P(I \cup F) = 0,75 + 0,5 - 0,95 = 0,3$

c) $P(\overline{F}|I) = \dfrac{P(\overline{F} \cap I)}{P(I)} = \dfrac{P(I) - P(I \cap F)}{P(I)} = \dfrac{0,75 - 0,3}{0,75} = 0,6$

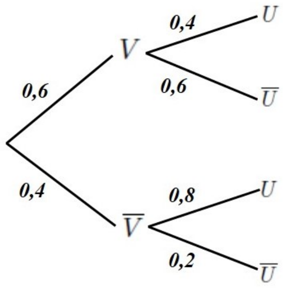
Problema 4.16.6 En una empresa multinacional el 60 % de las reuniones se realizan a través de videoconferencia. El 40 % de los empleados que asisten a estas videoconferencias son de países de la Unión Europea, mientras que en las reuniones presenciales solo el 20 % son trabajadores que no pertenecen a la Unión Europea. Si elegimos un trabajador al azar:

a) Calcule la probabilidad de que pertenezca a la Unión Europea

b) Sabiendo que el trabajador es de la Unión Europea, ¿Cuál es la probabilidad de que haya asistido a la reunión por videoconferencia

Solución:

Sean V asisten por videoconferencia y U Unión Europea.
Tenemos: $P(V) = 0,6$, $P(\overline{V}) = 0,4$, $P(U|V) = 0,4$ y $P(\overline{U}|\overline{V}) = 0,2$



a)
$$P(U) = P(U|V)P(V) + P(U|\overline{V})P(\overline{V}) =$$
$$0,4 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,4 = 0,56$$

b)
$$P(V|U) = \frac{P(U|V)P(V)}{P(U)} = \frac{0,4 \cdot 0,6}{0,56} = 0,4286$$

4.17. Navarra

4.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

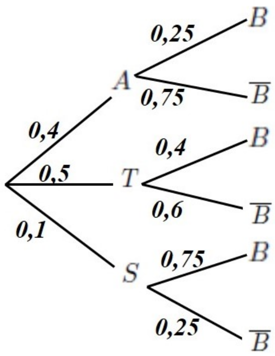
Problema 4.17.1 Una empresa tecnológica clasifica a sus 40 empleados en tres secciones: Portátiles (16 empleados), Telefonía (20 empleados) y Sonido (4 empleados). El 25 % de los trabajadores de la sección Portátiles, el 40 % de Telefonía y 3 trabajadores de Sonido tienen titulación $C1$ en inglés. Se selecciona al azar un empleado de la empresa.

a) Calcule la probabilidad de que no tenga titulación $C1$ en inglés y trabaje en la sección de Sonido.

b) Calcule la probabilidad de que trabaje en la sección de Telefonía, sabiendo que tiene titulación $C1$ en inglés.

c) Consideremos los sucesos A "el empleado trabaja en la sección Portátiles" y el suceso B "el empleado tiene titulación $C1$ en inglés". Compruebe si los suceso A y B son o no independientes.

Solución:
Sean A el empleado trabaja en la sección Portátiles, T el empleado trabaja en la sección telefonía, S el empleado trabaja en la sección sonido y B el empleado tiene titulación $C1$ en inglés.
Tenemos: $P(A) = \frac{16}{40} = \frac{2}{5} = 0,4$, $P(T) = \frac{20}{40} = \frac{2}{4} = 0,5$, $P(S) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0,1$, $P(B|A) = 0,25$, $P(B|T) = 0,4$ y $P(B|S) = \frac{3}{4} = 0,75$



a) $P(S \cap \overline{B}) = P(\overline{B}|S)P(S) = 0,25 \cdot 0,1 = 0,025$

b) $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|T)P(T) + P(B|S)P(S) =$
$0,25 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,5 + 0,75 \cdot 0,1 = 0,375$

$$P(T|B) = \frac{P(B|T)P(T)}{P(B)} = \frac{0,4 \cdot 0,5}{0,375} = 0,5333$$

c) $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0,25 \cdot 0,4 = 0,1$
$P(A)P(B) = 0,4 \cdot 0,375 = 0,15 \neq P(A \cap B) \Longrightarrow$
A y B no son independientes.

4.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

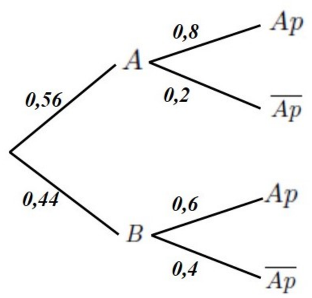
Problema 4.17.2 En un centro de bachillerato aprobaron la prueba de acceso a la universidad 112 estudiantes de los 140 que se presentaron. En un segundo centro aprobaron la prueba el 60 % de los 110 estudiantes presentados.

a) Se selecciona un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de que haya aprobado.

b) Se selecciona un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de que proceda del segundo centro, sabiendo que el estudiante ha suspendido.

c) Se seleccionan tres estudiantes al azar sin reemplazamiento. Calcule la probabilidad de que pertenezcan al mismo centro.

Solución:
Sea A el centro A, B el centro B y Ap aprobado.
Tenemos: $P(A) = \dfrac{140}{250} = \dfrac{14}{25} = 0,56$, $P(B) = \dfrac{110}{250} = \dfrac{11}{25} = 0,44$, $P(Ap|A) = \dfrac{112}{140} = \dfrac{4}{5} = 0,8$ y $P(Ap|B) = 0,6$.



a) $P(Ap) = P(Ap|A)P(A) + P(Ap|B)P(B) =$
$0,8 \cdot 0,56 + 0,6 \cdot 0,44 = 0,712$

b) $P(B|\overline{Ap}) = \dfrac{P(\overline{Ap}|B)P(B)}{P(\overline{Ap})} = \dfrac{0,4 \cdot 0,44}{1 - 0,712} = 0,6111$

c) $P(\text{mismo centro}) = P(AAA) + P(BBB) =$
$\dfrac{140}{250} \cdot \dfrac{139}{249} \cdot \dfrac{138}{248} + \dfrac{110}{250} \cdot \dfrac{109}{249} \cdot \dfrac{108}{248} = \dfrac{107}{415} = 0,2578$

4.18. País Vasco

4.18.1. Modelo de 2020

Problema 4.18.1 Sean A y B dos sucesos tales que, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, y la probabilidad de la unión de ambos sucesos es $\frac{3}{4}$. Calcular:

a) La probabilidad de que ocurra el suceso A, condicionada a que se ha producido el suceso B.

b) La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

c) La probabilidad de que ocurra el suceso A y no ocurra el suceso B.

d) La probabilidad de que ocurra solo uno de los dos sucesos.

Solución:

$$P(A) = \frac{1}{2},\ \ P(B) = \frac{1}{3},\ \ P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) =$

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{12}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

b) $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$

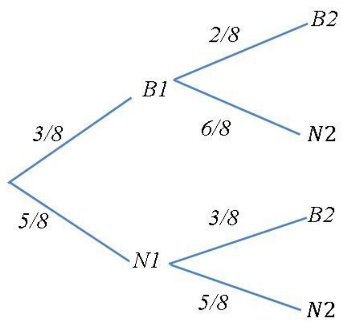
c) $P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{5}{12}$

d) $P(\text{sólo uno}) = P(A\cap\overline{B}) + P(\overline{A}\cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A\cap B) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$

Problema 4.18.2 Se dispone de dos urnas diferentes: A y B. La urna A contiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras, mientras que la urna B contiene 10 bolas negras. Se toma al azar una bola de cada una de las urnas al mismo tiempo y se intercambian (es decir, la bola extraída de la urna A se introduce en la urna B y la bola extraída de la urna B se introduce en la urna A). Si a continuación se extrae una bola de la urna A, ¿cuál es la probabilidad de que sea negra?

Solución:

En la urna A:



$$A : \begin{cases} 3 & B \\ 5 & N \end{cases} \qquad B : \begin{cases} 0 & B \\ 10 & N \end{cases}$$

$$P(N2) = P(N2|B1)P(B1) + P(N2|N1)P(N1) =$$
$$\frac{6}{8}\cdot\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8} = \frac{43}{64} = 0,672$$

4.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.18.3 En una caja hay una bola roja y una bola azul. Se han extraído dos bolas de la caja como se explica a continuación: se ha extraído una bola, y antes de sacar la segunda se ha devuelto a la caja la primera bola extraída, añadiendo otra bola del mismo color.

a) Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja si la primera que se ha sacado era azul

b) Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea azul.

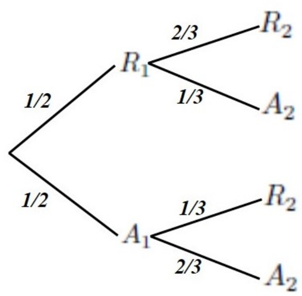
c) Si la segunda bola ha sido azul, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja?

Solución: Sean A_1 azul en la primera extración, A_2 azul en la segunda extración, R_1 rojo en la primera extración y R_2 rojo en la segunda extración.
Tenemos: $P(A_1) = P(R_1) = \dfrac{1}{2}$, $P(R_2|R_1) = \dfrac{2}{3}$, $P(A_2|R_1) = \dfrac{1}{3}$, $P(R_2|A_1) = \dfrac{1}{3}$, $P(A_2|A_1) = \dfrac{2}{3}$,

a) $P(R_2|A_1) = \dfrac{1}{3}$

b) $P(A_2) = P(A_2|R_1)P(R_1) + P(A_2|A_1)P(A_1) =$
$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

c) $P(R_1|A_2) = \dfrac{P(A_2|R_1)P(R_1)}{P(A_2)} = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$



Problema 4.18.4 Sean A y B dos sucesos compatibles asociados a un experimento aleatorio. Se sabe que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$ y $P(A\cap B) = 0,4$. Calcula:

a) $P(A\cup B)$

b) $P(\overline{A}\cap\overline{B})$

c) $P(\overline{A}\cap B)$

d) $P(A|B)$

Solución:

a) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0,6 + 0,5 - 0,4 = 0,7$

b) $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - 0,7 = 0,3$

c) $P(\overline{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B) = 0,5 - 0,4 = 0,1$

d) $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,4}{0,5} = 0,8$

4.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.18.5 En un instituto, el 90 % del alumnado matriculado ha nacido en la ciudad en la que está localizado dicho centro. El 42 % del alumnado son chicos, y el 54 % son chicas nacidas en la ciudad en la que se ubica el instituto.

a) Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea nacida en la ciudad donde se ubica el instituto?

b) ¿Y la probabilidad de que sea chica y no haya nacido en la ciudad donde se ubica el instituto?

c) Se ha elegido una persona al azar entre el alumnado y ha resultado ser nacida en la ciudad donde se ubica el instituto. ¿Cuál es la probabilidad de que sea chico?

Solución:
Sean N nacido en la ciudad, V chico y M chica.

Tenemos: $P(N) = 0,9$, $P(V) = 0,42)$ y $P(M \cap N) = 0,54$

	V	M	Totales
N		$0,54$	$0,9$
$\overline{N}$			
Totales	$0,42$		1

$\Longrightarrow$

	V	M	Totales
N	$0,36$	$0,54$	$0,9$
$\overline{N}$	$0,06$	$0,04$	$0,1$
Totales	$0,42$	$0,58$	1

a) $P(\overline{N}) = 0,1$

b) $P(M \cap \overline{N}) = 0,04$

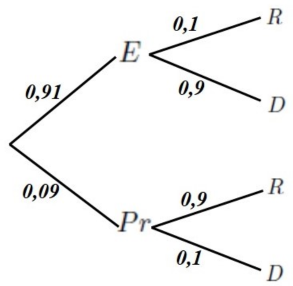
c) $P(V|N) = \dfrac{P(V \cap N)}{P(N)} = \dfrac{0,36}{0,9} = 0,4$

Problema 4.18.6 En un centro de enseñanza de Estados Unidos hay 1000 estudiantes y 100 profesores. El 10 % de los profesores son demócratas y el resto republicanos. Entre los estudiantes las proporciones son las contrarias, es decir, el 10 % de ellos son republicanos y el resto son demócratas. Se elige una persona al azar.

a) Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea republicana?

b) Se ha elegido al azar una persona de dicho centro y ha resultado ser republicana. ¿Cuál es la probabilidad de que se trate de un estudiante?

Solución:
Sean E estudiante, Pr profesor, D demócrata y R republicano.
Tenemos: $P(E) = \dfrac{1000}{1100} = 0,91$, $P(Pr) = \dfrac{100}{1100} = 0,091$, $P(D|E) = 0,9$, $P(R|E) = 0,1$, $P(D|Pr) = 0,1$ y $P(R|Pr) = 0,1$



a) $P(R) = P(R|E)P(E) + P(R|Pr)P(Pr) =$
$0,1 \cdot \dfrac{1000}{1100} + 0,1 \cdot \dfrac{100}{1100} = \dfrac{19}{110} = 0,1727$

b) $P(E|R) = \dfrac{P(R|E)P(E)}{P(R)} = \dfrac{0,1 \cdot \dfrac{1000}{1100}}{\dfrac{19}{110}} = \dfrac{10}{19} = 0,5263$

Capítulo 5

Estadística

5.1. Resúmenes teóricos

Gráficos:

- Variable discreta: con diagrama de barras.

$$x_i,\ \ p(x_i) = p_i,\ \ \sum p_i = 1$$

$$\text{Media} = \mu = \sum x_i p_i,\ \ \text{Varianza} = \sigma^2 = \sum p_i(x_i - \mu)^2 = \sum p_i x_i - \mu^2$$

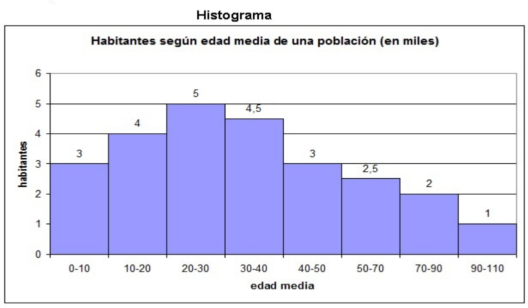
$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$

- Variable continua: histogramas (intervalos)

$$x_i,\ \ f_i,$$

$$\text{Media} = \overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum x_i},\ \ \text{Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i(x_i - \overline{X})^2}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \overline{X}^2$$

$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$



Distribución Binomial $\mathrm{B}(n, p)$:

$$P(X = a) = \binom{n}{a} p^a q^{n-a}$$

p es la probabilidad de éxito y $q = 1 - p$ la probabilidad de fracaso. Por ejemplo, si $\mathrm{B}(7, 0,4) \Longrightarrow n = 7$, $p = 0,4$ y $q = 0,6$:

$$P(X = 2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} 0,4^2 0,6^5 = 0,261$$

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3), \text{ ó}$$

$$P(X \leq 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - (P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7))$$

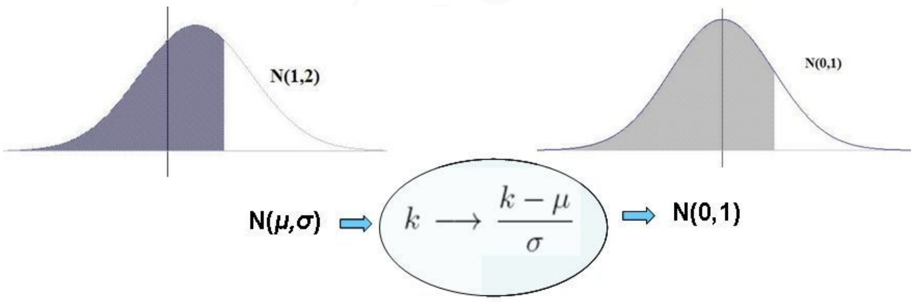
Su Media$= \mu = np$, su Varianza$= \sigma^2 = npq$ y su Desviación Típica$= \sqrt{\text{Varianza}}$.

Distribución Normal $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$:

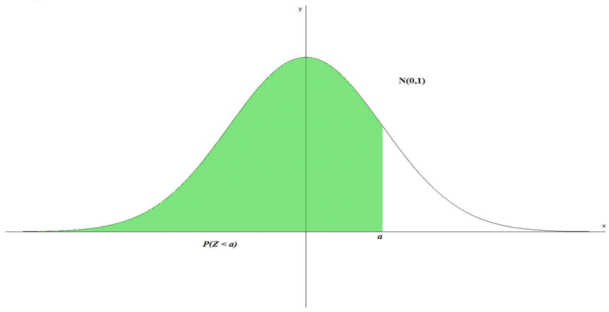
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Tipificación Paso de una normal $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$ a otra $\mathrm{N}(0, 1)$: $k \longrightarrow \dfrac{k - \mu}{\sigma}$, si queremos calcular $P(a < X < b)$ y X es de una normal $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$ entoces Z seguirá una normal $\mathrm{N}(0, 1)$

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < Z < \frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$



Cuando una distribución binmial $B(n, p)$ cumple $np > 3$ y $nq > 3$, se aproxima a una normal $N(np, \sqrt{npq})$, si son mayores de 5 la aproximación es perfecta.



$$P(Z > a) = 1 - P(Z < a), \quad P(Z < -a) = 1 - P(Z < a)$$

$$P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$$

La corrección por continuidad de Yate seguirá las siguientes reglas:
$P(x = a) = P(a - 0,5 \leq X \leq a + 0,5)$

$P(X \leq a) = P(X \leq a + 0,5)$
$P(X < a) = P(X \leq a - 0,5)$
$P(X > a) = P(X \geq a + 0,5)$
$P(X \geq a) = P(X \geq a - 0,5)$
Cálculo de $z_{\alpha/2}$ con un **Nivel de confianza** del 95 %: $NC = 0,95 = 1 - \alpha$ ($\alpha =$**Nivel de significación**)$\Longrightarrow$ $\alpha = 0,05$. Para una distribución bilateral tendremos $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025 \Longrightarrow P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975$ se busca en la tabla $N(0,1)$ y obtenemos $z_{\alpha/2} = 1,96$
Para muestras aleatorias de tamaño n con media $\overline{X}$ de una $N(\mu,\sigma)$ la media $\overline{X}$ se distribuye como una normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
Error: $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Intervalo de Confianza: $(\overline{X} - E, \overline{X} + E) = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de medias.
Proporciones: Sea $\hat{p}$ proporción de la muestra de tamaño n, se distribuye como una $N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$
Error: $E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
Intervalo de Confianza: $(\hat{p} - E, \hat{p} + E) = \left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de proporciones.

Problemas

5.2. Andalucía

5.2.1. Modelo de 2020

Problema 5.2.1 Se desea estimar la proporción de individuos que piensan votar a un cierto partirlo político en una determinada ciudad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 300 individuos de la ciudad, resultando que 135 de ellos piensan votar a ese partido.

a) Calcule un intervalo de confianza al 97 % para la proporción de individuos que piensen votar a ese partido en dicha ciudad.

b) Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestre para estimar la proporción con un error inferior al 2 %.

(Escriba las fórmulas necesarias)

Solución:

$$n = 300, \quad \hat{p} = \frac{135}{300} = 0,45 \ \text{ y } \ \hat{q} = \frac{165}{300} = 0,55$$

a) $NC = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,015 = 0,988 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,17$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \Longrightarrow$$

$$E = 2,17\sqrt{\frac{0,45\cdot 0,55}{300}} = 0,0623$$

$IC = (\hat{q}-E;\hat{q}+E) = (0,45-0,0623; 0,45+0,0623) = (0,3877; 0,5123) = (38,77\,\%; 51,23\,\%)$

b) $Z_{\alpha/2} = 2,17$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,02 = 2,17\sqrt{\frac{0,45\cdot 0,55}{n}} \Longrightarrow$$
$$n \ge 2913,632 \Longrightarrow n = 2914$$

Problema 5.2.2 Los directivos de una empresa desean estimar el tiempo medio que tardan los empleados en llegar al puesto de trabajo desde sus domicilios. Admitimos que dicho tiempo sigue una distribución Normal de desviación típica 8 minutos. Se elige al azar una muestra de 9 empleados de esa empresa, obteniéndose los siguientes resultados, expresados en minutos:

10 17 8 27 6 9 32 5 21

a) Determine un intervalo de confianza al 92 % para la media poblacional.

b) Con una confianza del 95,5 %, ¿qué tamaño muestral mínimo sería necesario para estimar el tiempo medio con un error inferior a 1,5 minutos?

(Escriba las fórmulas necesarias)
Solución:

$$N(\mu; 8)$$

a) $n = 9$, $\overline{X} = 15$ y $NC = 0,92 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,08 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,04$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,04 = 0,96 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,75$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,75\frac{8}{\sqrt{9}} = 4,67$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (15 - 4,67; 15 + 4,67) = (10,33; 19,67)$$

b) $E = 1,5$, y $Z_{\alpha/2} = 2,005$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1,5 = 2,005\frac{8}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 114,35 \Longrightarrow n = 115$$

5.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.2.3 La vida útil, en años, de las lavadoras de un determinado modelo, se distribuyen según una ley Normal de varianza 7,84. En una muestra de 12 lavadoras, la vida útil en años ha sido:

$$9,5 \quad 9 \quad 10,2 \quad 8,6 \quad 11,4 \quad 10,8 \quad 12,6 \quad 11 \quad 11,8 \quad 14,5 \quad 10,4 \quad 9,8$$

a) Con estos datos, determine un intervalo de confianza al 93,5 % para estimar la vida útil de estas lavadoras.

b) Calcule el error máximo que se puede cometer al estimar la vida útil media de este modelo de lavadoras, si se toma una muestra de 50 lavadoras y asumimos un nivel de confianza del 99 %.

Solución:

$$N(\mu; \sqrt{7,84}) = N(\mu; 2,8)$$

a) $n = 12$, $\overline{X} = 10,8$ y $NC = 0,935 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,065 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,0325$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,0325 = 0,9675 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,845$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,845\frac{2,8}{\sqrt{12}} = 1,4913$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (10,8 - 1,4913; 10,8 + 1,4913) = (9,3087; 12,2913)$$

b) $E = 1,5$, $n = 50$ y $Z_{\alpha/2} = 2,575$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\frac{2,8}{\sqrt{50}} = 1,0196$$

Problema 5.2.4 La renta anual de los hogares andaluces, en miles de euros, se distribuye según una ley Normal con desviación típica 5 y media desconocida μ.

a) Si se desea que en el 99 % de las posibles muestras del mismo tamaño, elegidas de entre los hogares andaluces, la media muestral no difiera de la renta media anual poblacional de dichos hogares en más de una unidad, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de las muestras?

b) Si se consideran muestras de hogares andaluces de tamaño 100, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria "Renta media anual muestral"?

c) Suponiendo que la renta media anual poblacional de los hogares andaluces es $\mu = 24$,¿cuál es la probabilidad de que en una muestra de tamaño 100 la renta media anual muestral sea superior a 25?

Solución:

$$N(\mu; 5)$$

a) $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 2,575\frac{5}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge (2,575 \cdot 5)^2 = 165,77 \Longrightarrow n = 166$$

b) $n = 100 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(\mu, \dfrac{5}{\sqrt{100}}\right) = N(\mu; 0,5)$

c) $N(24; 0,5)$

$$P(\overline{X} \ge 25) = P\left(Z \ge \frac{25-24}{0,05}\right) = P(Z \ge 2) = 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

5.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.2.5 Se pide:

a) Una población de 25000 personas se ha dividido en cuatro estratos con tamaños 15000, 5000, 3000 y 2000 personas respectivamente. En esa población se ha realizado un muestreo estratificado con afijación proporcional, en el que se han elegido al azar 36 personas del tercer estrato. Determine el tamaño de la muestra total obtenida con este muestreo y su composición.

b) Dada la población $P = (2, 4, 6)$, construya todas las muestras posibles de tamaño 2 que se puedan formar mediante muestreo aleatorio simple y halle la desviación típica de las medias muestrales obtenidas con todas esas muestras.

Solución:

a) Sea n el tamaño total de la muestra $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ donde n_1 es el tamaño de la muestra del estrato de 15000, n_2 es el tamaño de la muestra del estrato de 5000, $n_3 = 36$ es el tamaño de la muestra del estrato de 3000 y n_4 es el tamaño de la muestra del estrato de 2000. Tenemos:

$$\frac{n}{25000} = \frac{n_1}{15000} = \frac{n_2}{5000} = \frac{36}{3000} = \frac{n_4}{2000} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{n}{25000} = \dfrac{36}{3000} \Longrightarrow n = 300 \\ \dfrac{n_1}{15000} = \dfrac{36}{3000} \Longrightarrow n_1 = 180 \\ \dfrac{n_2}{5000} = \dfrac{36}{3000} \Longrightarrow n_2 = 60 \\ \dfrac{n_4}{2000} = \dfrac{36}{3000} \Longrightarrow n_4 = 24 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} n = 300 \\ n_1 = 180 \\ n_2 = 60 \\ n_3 = 36 \\ n_4 = 24 \end{array}\right.$$

b) El número de muestras es $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3$ y serían $P_1 = \{2,4\}$, $P_2 = \{2,6\}$ y $P_3 = \{4,6\}$. Sus medias muestrales son:
Para P_1 tenemos la media $\overline{X_1} = \dfrac{2+4}{2} = 3$, para P_2 tenemos la media $\overline{X_2} = \dfrac{2+6}{2} = 4$ y para P_3 tenemos la media $\overline{X_3} = \dfrac{4+6}{2} = 5$.
La media de las medias muestrales es $\overline{X} = \dfrac{\overline{X_1} + \overline{X_2} + \overline{X_3}}{3} = \dfrac{3+4+5}{3} = 4$
La desviación típica es

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\overline{X} - \overline{X_1})^2 + (\overline{X} - \overline{X_1})^2 + (\overline{X} - \overline{X_1})^2}{3}} = \sqrt{\frac{(4-3)^2 + (4-4)^2 + (4-5)^2}{3}} \Longrightarrow$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,8165$$

Problema 5.2.6 Se ha tomado una muestra de 16 pacientes tratados por un especialista y se ha observado que el tiempo de espera en su consulta, en minutos, ha sido de::

$$8 \quad 9,2 \quad 10 \quad 8,5 \quad 12 \quad 9 \quad 11,3 \quad 7 \quad 8,5 \quad 8,3 \quad 7,6 \quad 9 \quad 9,4 \quad 10,5 \quad 8,9 \quad 6,8$$

Supongamos que el tiempo de espera en esta consulta se distribuye según una ley Normal de varianza 4 y media desconocida.

a) Halle un intervalo de confianza al 97,5 % para estimar el tiempo medio de espera de los pacientes tratados por este especialista.

b) ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para asegurar, con un nivel de confianza del 90 %, que el error cometido sea, a lo sumo, de 0,3 minutos.

Solución:

$$N(\mu; \sqrt{4}) = N(\mu; 2)$$

a) $n = 12$, $\overline{X} = 9$ y $NC = 0,975 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,025 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,0125$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,0125 = 0,9875 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,24$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 2,24\frac{2}{\sqrt{16}} = 1,12$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (9 - 1,12; 9 + 1,12) = (7,88; 10,12)$$

b) $E = 0,3$ y $NC = 0,9 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{2}{\sqrt{n}} = 0,3 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,645 \cdot 2}{0,3}\right)^2 = 120,268 \Longrightarrow n = 121$$

5.3. Aragón

5.3.1. Modelo de 2020

Problema 5.3.1 Tras poner en marcha unos programas de prevención de tabaquismo en la universidad, se quiere estimar, a partir de una muestra aleatoria, la proporción actual de fumadores en la universidad.

a) Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0,08 ¿qué tamaño de la muestra debemos escoger?

b) Decidimos tomar una muestra de tamaño de 175 consumidores; les preguntamos y un total de 126 responden que conocen la marca. Calcular el intervalo de confianza al 91 % para la proporción de consumidores que conocen la marca.

Solución:

a) $NC = 0,91 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,09 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,045$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,045 = 0,955 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,695$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow 0,04 = 1,695\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,695 \cdot 0,5}{0,08}\right)^2 = 448,91 \Longrightarrow$$

$$n = 449$$

b) $n = 175$ y $\hat{p} = \dfrac{126}{175} = 0,72$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,695\sqrt{\frac{0,72 \cdot 0,28}{175}} = 0,0575$$

$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,72-0,0575; 0,72+0,0575) = (0,6625; 0,7775) = (66,25\,\%; 77,75\,\%)$

5.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.3.2 Se sabe que la altura de los estudiantes que se presentan a la EVAU tiene distribución normal con desviación típica igual a 10 cm. Queremos construir un intervalo de confianza para la media de la altura de los estudiantes.

a) Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 97 % tenga una amplitud menor o igual que 4 cm.

b) Decidimos tomar una muestra de tamaño 9. Medimos a los estudiantes y tenemos los siguientes resultados en cm: 175, 187, 183, 162, 161, 164, 180, 171, 158
Calcular un intervalo de confianza al 97 % para la media de la altura de los estudiantes que se presentan a la EVAU.

c) Calcular la varianza de la muestra del apartado anterior.

Solución:

$$N(\mu; 10)$$

a) $NC = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,015 = 0,985 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,17$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2 = 2,17\sqrt{\frac{10}{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{2,17\cdot 10}{2}\right)^2 = 117,7225 \Longrightarrow$$

$$n = 118$$

b) $n = 9$, $\overline{X} = 171,22$ y $Z_{\alpha/2} = 2,17$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17\frac{10}{\sqrt{9}} = 7,233$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (171,22 - 7,233; 171,22 + 7,233) = (163,987; 178,453)$$

c)

$$Var(X) = \frac{175^2 + 187^2 + 183^2 + 162^2 + 161^2 + 164^2 + 180^2 + 171^2 + 158^2}{9} - 171,22^2 \Longrightarrow$$

$$Var(X) = 99,506$$

5.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.3.3 El ayuntamiento de una ciudad quiere estimar la proporción de hogares que tiene Internet de alta velocidad. Para ello, va a visitar una muestra aleatoria simple de hogares para saber si tienen Internet de alta velocidad y, a partir de los resultados, va a construir el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 94 %.

a) Si quiere que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0,1, ¿qué tamaño de la muestra debe escoger?

b) Decide tomar una muestra de 200 hogares y, de ellos, 112 tienen Internet de alta velocidad. Calcular el intervalo de confianza al 94 % para la proporción de hogares de la ciudad que tienen Internet de alta velocidad.

Solución:
Como no disponemos de una proporción tomamos $p = 0,5 \Longrightarrow q = 1 - p = 0,5$

a) $NC = 0,94 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,06 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,03$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,03 = 0,97 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,885$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow 0,05 = 1,885\sqrt{\frac{0,5\cdot 0,5}{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{1,885\cdot 0,5}{0,05}\right)^2 = 355,3225 \Longrightarrow$$

$$n = 356$$

b) $n = 200$ y $\hat{p} = \dfrac{112}{200} = 0,56$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,885\sqrt{\frac{0,56\cdot 0,44}{200}} = 0,0662$$

$$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,56-0,0662; 0,56+0,0662) = (0,4938; 0,6262) = (49,38\,\%; 62,62\,\%)$$

5.4. Asturias

5.4.1. Modelo de 2020

Problema 5.4.1 Tras poner en marcha unos programas de prevención de tabaquismo en la universidad, se quiere estimar, a partir de una muestra aleatoria, la proporción actual de fumadores en la universidad.

a) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de fumadores en la universidad a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,02 y un nivel de confianza del 90 %?

b) Si se toma una muestra aleatoria de 2000 universitarios, de los que se obtiene que 180 son fumadores, obtén, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo para estimar la proporción de fumadores en la universidad.

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)
Solución:

a) $NC = 0,90 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,64$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow 0,02 = 1,64\sqrt{\frac{0,5\cdot 0,5}{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{1,64\cdot 0,5}{0,02}\right)^2 = 1681$$

b) $n = 2000$ y $\hat{p} = \dfrac{180}{2000} = 0,09$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,64\sqrt{\frac{0,09\cdot 0,91}{2000}} = 0,0108$$

$$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,09-0,0108; 0,09+0,0108) = (0,0792; 0,1008) = (7,92\,\%; 10,08\,\%)$$

Problema 5.4.2 En un estudio sobre el gasto diario por turista en una determinada región, se tomó una muestra aleatoria de 3600 turistas, para los que el gasto total en un día, entre todos, había sido de 244800 euros. Suponiendo que el gasto diario sigue una distribución normal con desviación típica 40, se pide:

a) Construir un intervalo de confianza para el gasto medio diario de los turistas de esa región, al 95 % de confianza.

b) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse el verdadero gasto medio diario a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 1 euro y un nivel de confianza del 95 %?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)
Solución:

$$N(\mu; 40)$$

a) $NC = 0,95 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$n = 3600$ y $\overline{X} = \frac{244800}{3600} = 68$:

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{40}{\sqrt{3600}} = 1,3067$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (68 - 1,3067; 68 + 1,3067) = (66,6933; 69,3067)$$

b)

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{40}{\sqrt{n}} = 1 \Longrightarrow n \ge (1,96 \cdot 40)^2 = 6146,56 \Longrightarrow n = 6147$$

5.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.4.3 Para estudiar la evolución del precio medio de un producto en determinada ciudad, se consideró una muestra aleatoria de 40 comercios de dicha ciudad y se obtuvo que el precio medio de dicho producto en la muestra era de 36 euros. Se supone que el precio de dicho producto se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 5,5 euros.

a) Construye un intervalo de confianza para el precio medio de dicho producto en esa ciudad, al 90 % de confianza.

b) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero precio medio en esa ciudad a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 1,5 euros y un nivel de confianza del 90 %?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)
Solución:

$$N(\mu; 5,5)$$

a) $NC = 0,90 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,64$

$n = 40$ y $\overline{X} = 36$:

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,64\frac{5,5}{\sqrt{40}} = 1,4262$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (36 - 1,4262; 36 + 1,4262) = (34,5738; 37,4262)$$

b) $E = 1,5$ y $Z_{\alpha/2} = 1,64$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1,5 = 1,64\frac{5,5}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{1,64 \cdot 5,5}{1,5}\right)^2 = 36,1602 \Longrightarrow n = 37$$

Problema 5.4.4 En una determinada comunidad autónoma se ha seleccionado una muestra aleatoria de 500 personas, de las que 190 leen el periódico habitualmente

a) Halla, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo para estimar la proporción de personas que leen el periódico habitualmente en esa comunidad autónoma.

b) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese disminuido el tamaño muestral?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

Solución:

$$\hat{p} = \frac{190}{500} = 0,38 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,62$$

a) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,38 \cdot 0,62}{500}} = 0,0425$$

$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,38-0,0425; 0,38+0,0425) = (0,3375; 0,4225) = (33,75\,\%, 42,25\,\%)$

b) $E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 0,0425$ el tamaño muestral va en el denominador, si mantenemos sin variar los otros datos de la fórmula y sólo cambiamos el tamaño muestral tendremos: al aumentarlo se reduce el error y al disminuirlo aumenta el error.

5.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.4.5 Se supone que el precio de un determinado producto sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 5 euros.

a) Para estimar el precio medio, se considera una muestra aleatoria de 100 de estos productos, los cuales han costado en total 10400 euros. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el precio medio de ese producto, al 95 % de confianza.

b) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero precio medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,5 euros y un nivel de confianza del 95 %?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

Solución:

$$N(\mu; 5)$$

a) $n = 100$, $\overline{X} = \dfrac{10400}{100} = 104$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{5}{\sqrt{100}} = 0,98$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (104 - 0,98; 104 + 0,98) = (103,02; 104,98)$$

b)

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,5 = 1,96\frac{5}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96\cdot 5}{0,5}\right)^2 = 384,16 \Longrightarrow n = 385$$

Problema 5.4.6 En una ciudad se ha encuestado a 1250 vecinos, de los cuales 525 han manifestado estar a favor de la gestión económica del ayuntamiento.

a) Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción de vecinos de esa ciudad que están a favor de la gestión económica del ayuntamiento, al 99 % de confianza.

b) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese aumentado el tamaño de la muestra?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)
Solución:

$$\hat{p} = \frac{525}{1250} = 0,42 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,58$$

a) $n = 1250$, $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,58$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,58\sqrt{\frac{0,42\cdot 0,58}{1250}} = 0,0360$$

$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,42 - 0,0360; 0,42 + 0,0360) = (0,384; 0,456) = (38,40\,\%; 45,60\,\%)$

b) $E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 0,0360$ el tamaño muestral va en el denominador, si mantenemos sin variar los otros datos de la fórmula y sólo cambiamos el tamaño muestral tendremos: al aumentarlo se reduce el error y al disminuirlo aumenta el error.

5.5. Cantabria

5.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.5.1 Se pide:

a) El precio de alquiler de viviendas en un determinado barrio de una gran ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 265 euros. Queremos que el error cometido al estimar el precio medio de alquiler con un nivel de confianza del 97 % sea 20,7 euros. ¿Cuántas viviendas hemos de tomar aleatoriamente para calcular la estimación?

b) En el caso de una población de tamaño pequeño, el precio de alquiler sigue una distribución normal con desviación típica 134 euros. Una muestra aleatoria de 357 viviendas da como resultado un alquiler medio de 448 euros. Obtener el intervalo de confianza del 93 % para el precio medio de alquiler.

Solución:

a) $N(\mu; 265)$, $n = 350$ y $NC = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,015 = 0,985 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,17$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 20,7 = 2,17\frac{265}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{2,17 \cdot 265}{20,7}\right)^2 = 771,7391 \Longrightarrow n = 772$$

b) $N(\mu; 134)$, $n = 357$ y $\overline{X} = 448$ y $NC = 0,93 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,07 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,035$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,035 = 0,965 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,815$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,815\frac{134}{\sqrt{357}} = 12,8720$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (448 - 12,8720; 448 + 12,8720) = (435,128; 460,872)$$

5.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.5.2 El número de horas semanales que los habitantes de determinada población dedican a la lectura de libros, sigue una distribución normal con desviación típica 2 horas. Una muestra aleatoria de 375 personas da como resultado un tiempo medio de 4 horas.

a) Obtener el intervalo de confianza del 94 % para el tiempo medio.

b) ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 90 % sea un cuarto del obtenido en el apartado anterior?

Solución:

$$N(\mu; 2)$$

a) $n = 375$, $\overline{X} = 4$ y $NC = 0,94 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,06 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,03$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,03 = 0,97 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,885$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,885\frac{2}{\sqrt{375}} = 0,1947$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (4 - 0,1947; 4 + 0,1947) = (3,8053; 4,1947)$$

b) $E = \frac{0,1946819628}{4} = 0,04867049071$ y $NC = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,04867049071 = 1,645\frac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 4569,4123 \Longrightarrow n = 4570$$

5.6. Castilla La Mancha

5.6.1. Modelo de 2020

Problema 5.6.1 El tiempo de uso de móvil por día de los alumnos de un instituto sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 20$ minutos. Se eligió una muestra aleatoria de 36 alumnos y se observó que la media de tiempo usando el móvil para esa muestra era de 2 horas.

a) Halla un intervalo de confianza para la media de tiempo de uso de móvil por día con un nivel de confianza del 95 %.

b) ¿Se puede admitir que la media poblacional sea $\mu = 2,3$ horas con un nivel de confianza del 95 %? Explica razonadamente cómo se podría aumentar o disminuir la amplitud del intervalo. Razona tus respuestas.

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 94,64 %?

Solución:

a) $n = 36$, $\overline{X} = 2$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{0,3}{\sqrt{36}} = 0,098$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (2 - 0,098; 2 + 0,098) = (1,902; 2,098)$$

b) $\mu = 2,3$ horas no está dentro del intervalo de confianza y no se aceptaría que pueda ser la media con una confianza del 95 %.

c) $NC = 0,9464 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,0536 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,0268$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}0268 = 0,9732 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,93$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,93\frac{0,3}{\sqrt{100}} = 0,0579$$

Problema 5.6.2 El contenido en grasas saturadas por litro de leche sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 0,1$ g/l. Se tomó una muestra aleatoria de 100 litros de leche obteniéndose el intervalo de confianza $(0,682; 0,718)$ para el contenido medio de grasas saturadas en la muestra.

a) Calcula el contenido medio de grasas saturadas para los 100 litros de leche de la muestra.

b) Calcula el nivel de confianza con el que se ha obtenido dicho intervalo.

c) Halla un intervalo de confianza para la el contenido medio de grasas saturadas con un nivel de confianza del 95 %.

d) ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con un nivel de confianza del 95 %, el error máximo admisible sea menor que 0,01 g/l?

Solución:

a) $IC = (0,682; 0,718) = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) \Longrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{X} - E = 0,682 \\ \overline{X} + E = 0,718 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{X} = 0,7 \\ E = 0,018 \end{array} \right.$$

b)

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,018 = Z_{\alpha/2}\frac{0,1}{\sqrt{100}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,8$$

$$P(Z < 1,8) = 0,9641 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0{,}0718 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 0,9282 \Longrightarrow 92,82\,\%$$

c) $n = 100$, $\overline{X} = 0,7$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{0,1}{\sqrt{100}} = 0,0196$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (0,7 - 0,0196; 0,7 + 0,0196) = (0,6804, 0,7196)$$

d)

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,01 = 1,96\frac{0,1}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 384,16 \Longrightarrow n = 385$$

5.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.6.3 Para hacer un estudio de las horas de duración de la batería de un juguete, se tomó una muestra aleatoria de 10 de estas baterías, siendo el número de horas de duración obtenida de:
4,2, 4,6, 5, 5,7, 5,8, 5,9, 6,1, 6,2, 6,5 y 7,3 respectivamente.
Sabiendo que la variable "número de horas de duración de la batería" sigue una distribución normal de desviación típica 2,1 horas, se pide:

a) Halla el intervalo de confianza para el número medio de horas de duración de la batería con un nivel de confianza del 97 %.

b) Explica razonadamente cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza.

c) ¿Crees que la media poblacional μ del número de horas es de 4 horas con una probabilidad del 90 %? Razona tu respuesta.

Solución:

$$N(\mu; 2,1)$$

a) $n = 10$, $\overline{X} = 5,73$ y $NC = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,015 = 0,985 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,17$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 2,17\frac{2,1}{\sqrt{10}} = 1,4410$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (5,73 - 1,4410; 5,73 + 1,4410) = (4,289; 7,171)$$

b) Si se aumenta el tamaño muestral, mientras que la desviación típica y el nivel de confianza permanecen inalterables, el error se hace más pequeño y, en consecuencia, la amplitud del intervalo disminuye.

c) $NC = 0,9 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,645\frac{2,1}{\sqrt{10}} = 1,0924$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (5,73 - 1,0924; 5,73 + 1,0924) = (4,6376; 6,8224)$$

4 horas no está dentro del intervalo de confianza y no se aceptaría que puede ser la media con una confianza del 90 %.

Problema 5.6.4 El tiempo medio de espera en una línea de atención al cliente sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 2$ minutos. Se hace un estudio de los tiempos de espera de 10 clientes al azar, siendo estos tiempos: 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15 y 16 minutos respectivamente.

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de espera, con un nivel de confianza del 95 %.

b) ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto?

Solución:

a) $n = 10$, $\overline{X} = 10,3$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{2}{\sqrt{10}} = 1,24$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (10,3 - 1,24; 10,3 + 1,24) = (9,06; 11,54)$$

b)

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1,96\frac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 15,37 \Longrightarrow n = 16$$

5.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.6.5 El tiempo medio diario de consumo de televisión en Castilla-La Mancha sigue una distribución normal con desviación típica $\sigma = 30$ minutos. Se hizo un estudio con 50 personas y se observó que la media de consumo diario de ellas era de 220 minutos. Se pide:

a) Calcula el intervalo de confianza del 95 % para el consumo medio de televisión en Castilla-La Mancha.

b) Razona cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza.

c) ¿Crees que la media poblacional μ de consumo diario de televisión en Castilla-La Mancha es de 230 minutos con una probabilidad del 90 %? Razona tu respuesta.

Solución:

$$N(\mu; 30)$$

a) $n = 50$, $\overline{X} = 220$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{30}{\sqrt{50}} = 8,3156$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (220 - 8,3156; 220 + 8,3156) = (211,6844; 228,3156)$$

b) Si se aumenta el tamaño muestral, mientras que la desviación típica y el nivel de confianza permanecen inalterables, el error se hace más pequeño y, en consecuencia, la amplitud del intervalo disminuye.

c) $\mu = 230$ horas no está dentro del intervalo de confianza y no se aceptaría que pueda ser la media con una confianza del 95 %.

d) $NC = 0,9 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,645\frac{30}{\sqrt{50}} = 6,9791$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (220 - 6,9791; 220 + 6,9791) = (213,0209; 226,9791)$$

230 minutos no está dentro del intervalo de confianza y no se aceptaría que puede ser la media con una confianza del 90 %.

Problema 5.6.6 Se ha tomado una muestra aleatoria de 10 frascos de Berenjenas de Almagro de 1 kilogramo para medir el contenido de fibra en gramos y ha resultado ser: 60, 80, 120, 95, 65, 70, 75, 85, 100 y 90. Suponiendo que el contenido de fibra en cada frasco se distribuye según una ley normal de desviación típica $\sigma = 10$ gramos, se pide:

a) Halla el intervalo de confianza del 97 % para la media poblacional del contenido en fibra de un frasco de Berenjenas de Almagro.

b) Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza.

c) ¿Crees que la media poblacional μ del contenido en gramos de fibra de un frasco de Berenjenas de Almagro es de 85 gramos con una probabilidad del 98,5 %? Razona tu respuesta.

Solución:

$$N(\mu; 10)$$

a) $n = 10$, $\overline{X} = 84$ y $NC = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,015 = 0,985 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,17$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 2,17\frac{10}{\sqrt{10}} = 6,8621$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (84 - 6,8621; 84 + 6,8621) = (77,13785747; 90,86214252)$$

b) Si se aumenta el tamaño muestral, mientras que la desviación típica y el nivel de confianza permanecen inalterables, el error se hace más pequeño y, en consecuencia, la amplitud del intervalo disminuye.

c) $n = 10$, $\overline{X} = 84$ y $NC = 0,985 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,015 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,0075$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,0075 = 0,9925 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,43$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 2,43\frac{10}{\sqrt{10}} = 7,6843$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (84 - 7,6843; 84 + 7,6843) = (76,3157; 91,6843)$$

85 gramos si está dentro del intervalo de confianza y se aceptaría que puede ser la media con una confianza del 98,5 %.

5.7. Castilla León

5.7.1. Modelo de 2020

Problema 5.7.1 Una academia que prepara oposiciones está evaluando la calidad de sus resultados. Para ello toma una muestra de 50 opositores y comprueba que 20 han aprobado. Con esta información:

a) Determinar los parámetros media y desviación típica de la proporción muestral que estima la proporción de opositores aprobados. Calcular, utilizando la distribución normal asociada, la probabilidad de que la proporción muestral de aprobados esté entre el 35 % y el 45 %.

b) Calcular un intervalo de confianza del 90 % para la proporción de opositores aprobados de la academia.

Solución:

$$\hat{p} = \frac{20}{50} = 0,4 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,6$$

a) Si $n = 50 > 30 \Longrightarrow p \approx N\left(\hat{p}, \sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) \Longrightarrow N(0,4; 0,0693)$, media 0,4 y desviación típica 0,0693.

$P(0,35 \le p \le 0,45) = P\left(\dfrac{0,35 - 0,4}{0,0693} \le Z \le \dfrac{0,45 - 0,4}{0,0693}\right) = P(-0,72 \le Z \le 0,72) = P(Z \le 0,72) - (1 - P(Z \le 0,72)) = 2P(Z \le 0,72) - 1 = 2 \cdot 0,7642 - 1 = 0,5284$

b) $NC = 0,9 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,645\sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{50}} = 0,114$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,4 - 0,114; 0,4 + 0,0425) = (0,2860; 0,514) = (28,60\,\%, 51,40\,\%)$$

Problema 5.7.2 La ficha técnica del estudio social La vida en la Frontera con Portugal indica que se ha encuestado a 4450 individuos mayores de 14 años, residentes en Castilla y León que viven a menos de 25 km de la frontera con Portugal. La muestra se ha tomado de manera estratificada, con muestreo aleatorio simple en cada estrato. El error de estimación de la proporción de individuos de la población satisfechos con su zona de residencia es de ±1,4 % fijada una confianza del 95 %. Para esta ficha técnica, identificar los siguientes elementos: Población, diseño muestral, tamaño muestral, parámetro estimado.
Solución:

- **Población**: Individuos de 14 o más años residentes en Castilla y León que viven a menos de 25 km de la frontera con Portugal.
- **Diseño muestral**: Muestreo estratificado con reparto proporcional y aleatorio simple en cada estrato.
- **Tamaño muestral**: 4450 individuos.
- **Parámetro estimado**: La proporción de individuos satisfechos con su lugar de residencia, con un error de $\pm 1,4\,\%$ y una confianza del 95 %

5.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.7.3 Las pruebas realizadas de un nuevo modelo de teléfono móvil aseguran que la ley de probabilidad de la vida útil del teléfono sin averías (en meses) es normal de media 32 meses y desviación típica 12,5 meses. La campaña de lanzamiento del nuevo modelo ofrece la sustitución gratuita del móvil por cualquier avería aparecida en los primeros 4 meses.

a) Calcular la probabilidad de que haya que sustituir un móvil adquirido durante la campaña de lanzamiento.

b) Si una tienda vende 64 teléfonos móviles del nuevo modelo el primer día de campaña, determinar la probabilidad de que el tiempo medio sin averías de esos móviles sea superior a 36 meses.

Solución:

$$N(32; 12,5)$$

a) $P(X \le 4) = P\left(Z \le \dfrac{4-32}{12,5}\right) = P(Z \le -2,24) = 1 - P(Z \le 2,24) = 1 - 0,9875 = 0,0125$

b) $n = 64 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(32; \dfrac{12,5}{\sqrt{64}}\right) = N(32; 1,5625)$

$$P(\overline{X} \ge 36) = P\left(Z \ge \frac{36-32}{1,5625}\right) = P(z \ge 2,56) = 1 - P(z \le 2,56) = 1 - 0,9948 = 0,0052$$

5.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.7.4 El tiempo que tarda el servidor de una empresa de venta online en registrar un pedido sigue una ley de probabilidad normal de media 0,16 minutos y desviación típica 0,37 minutos. Al comienzo de un viernes negro la empresa recibe 365 pedidos.

a) Calcular la probabilidad de que el servidor tarde más de 73 minutos en registrar los 365 pedidos.

b) Calcular la probabilidad de que el tiempo medio de registro de esos 365 pedidos sea menor o igual que 0,18 minutos.

Solución:

$$N(0,16;0,37)$$

Sea S la distribución suma de tiempos distribuidos según la normal dada entonces se se distribuirá según una normal de media la suma de medias $\mu_S = 365 \cdot 0,16 = 58,4$ la desviación típica sería $\sigma_s = \sqrt{\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2 + \ldots\ldots + \sigma^2} = \sigma\sqrt{365} = 0,37 \cdot \sqrt{365} = 7,0688 \Longrightarrow N(58,4;7,0688)$

a) N(58,4;7,0688). $P(X \geq 73) = P\left(Z \geq \frac{73-58,4}{7,0688}\right) = P(Z \geq 2,07) = 1 - P(Z \leq 2,07) = 1 - 0,9808 = 0,0192$

b) $n = 365 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(0,16; \dfrac{0,37}{\sqrt{365}}\right) = N(0,16;0,0194)$

$$P(\overline{X} \leq 0,18) = P\left(Z \leq \frac{0,18-0,16}{0,0194}\right) = P(z \leq 1,03) = 0,8485$$

Problema 5.7.5 La ficha técnica de un sondeo electoral indica que ha encuestado a 1207 individuos de 18 o más años residentes en España. La muestra se ha tomado de manera estratificada por grupos de edad y sexo, con muestreo aleatorio simple en cada estrato. El error de estimación de la proporción de individuos que acudirá a votar en las próximas elecciones es de $\pm 2,8\,\%$ con un nivel de confianza del 95,5 %. Para esta ficha técnica, identificar los siguientes elementos: población, diseño muestral, tamaño muestral y parámetro estimado.
Solución:

- ☛ **Población**: Individuos de 18 o más años españoles.
- ☛ **Diseño muestral**: Muestreo estratificado con reparto proporcional y aleatorio simple en cada estrato.
- ☛ **Tamaño muestral**: 1207 individuos.
- ☛ **Parámetro estimado**: La proporción de individuos que podrán votar, con un error de $\pm 2,8\,\%$ y una confianza del 95,5 %

5.8. Cataluña

No pusieron problemas de estadística.

5.9. Comunidad Valenciana

No pusieron problemas de estadística.

5.10. Extremadura

5.10.1. Modelo de 2020

Problema 5.10.1 El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono sigue una distribución normal con desviación típica 24 horas. Se pregunta a 100 clientes por el tiempo invertido en la portabilidad, obteniéndose una media de 36 horas. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % para la media de tiempo que tarda dicha compañía en hacer efectiva la portabilidad.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 5?

Solución:

$$N(\mu; 24)$$

a) $n = 100$, $\overline{X} = 36$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{24}{\sqrt{100}} = 4,704$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (36 - 4,704; 36 + 4,704) = (31,296; 40,704)$$

b)

$$E = \frac{5}{2} = 2,5 \Longrightarrow E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2,5 = 1,96\frac{24}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 354,041856 \Longrightarrow n = 355$$

Problema 5.10.2 Se desea conocer la media de ingresos por publicidad de los diarios regionales, variable que se supone con distribución normal de desviación típica 400 euros. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95 % para la media, ¿cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 160 euros? Justificar la respuesta. **Solución:**

$$N(\mu; 400)$$

$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 80 = 1,96\frac{400}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 96{,}275344 \Longrightarrow n = 97$$

5.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.10.3 El peso de los libros de texto es una variable que sigue una distribución normal con una desviación típica de 72 gramos. Se toma una muestra de 36 libros, siendo su peso medio de 800 gramos. Calcular, justificando la respuesta, el intervalo de confianza al 95 % para el peso medio de los libros de texto.

Solución:

$$N(\mu; 72)$$

$n = 36$, $\overline{X} = 800$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{72}{\sqrt{36}} = 23,52$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (800 - 23,52; 800 + 23,52) = (776,48; 823,52)$$

Problema 5.10.4 Se pretende realizar un estudio sobre la renta mensual de las familias. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica 400 euros. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95 % para la media de dicha variable, ¿cuántas familias tenemos que seleccionar (tamaño muestral) para que el intervalo tenga una longitud de 160 euros? Justificar la respuesta.
Solución:

$$N(\mu; 400)$$

$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 80 = 1,96\frac{400}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 96,04 \Longrightarrow n = 97$$

5.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.10.5 Una marca de dulces realiza un control de calidad de sus productos, considerando el diámetro (en cm) de las galletas que produce. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica 2 cm. Se eligen al azar 100 de las galletas producidas en la fábrica, obteniéndose un diámetro medio de 8 cm. Calcular, justificando la respuesta, el intervalo de confianza al 95 % para el diámetro medio de las galletas producidas por dicha marca.
Solución:

$$N(\mu; 2)$$

$n = 100$, $\overline{X} = 8$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{2}{\sqrt{100}} = 0,392$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (8 - 0,392; 8 + 0,392) = (7,608; 8,392)$$

Problema 5.10.6 Se realiza un estudio sobre el precio del pan en distintas tiendas, variable que se supone con distribución normal de desviación típica 20 céntimos. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95 % para la media de dicha variable, ¿cuántas tiendas tenemos que visitar (tamaño muestral) para que el intervalo tenga una longitud de 10 céntimos? Justificar la respuesta.
Solución:

$$N(\mu; 20)$$

$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 5 = 1,96\frac{20}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 61,4656 \Longrightarrow n = 62$$

5.11. Galicia

5.11.1. Modelo de 2020

Problema 5.11.1 Después de años de utilizarlo se sabe que la puntuación de un test de uso habitual en cierta rama industrial sigue una distribución normal de media 74 y desviación típica 16. En una empresa se decide realizarlo a 100 de sus empleados.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga una media muestral superior a 78 puntos, de seguirse la pauta general?

b) ¿Y la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 74 puntos?

Solución:

$$N(74,16)$$

a) $P(\overline{X} \geq 78) = P\left(Z \geq \dfrac{78-74}{16/\sqrt{100}}\right) = P(Z \geq 2,5) = 1 - P(Z \leq 2,5) = 1 - 0,9938 = 0,0062.$

b) $P(\overline{X} \leq 74) = P\left(Z \leq \dfrac{74-74}{16/\sqrt{100}}\right) = P(Z \leq 0) = 0,5.$

Problema 5.11.2 Un estudio electoral con una muestra de 400 electores obtiene un intervalo para la proporción de votantes de un partido de [0,23;0,31].

a) ¿Cuánto vale la proporción muestral?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza con el que se estableció el intervalo?

c) ¿Cuál es el error máximo cometido con el intervalo anterior?

Solución:

a) $p = \dfrac{0,31+0,23}{2} = 0,27$

b) $E = 0,31 - 0,27 = 0,04$ y $E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,04 = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{0,27\cdot 0,73}{400}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,802 \Longrightarrow P(Z \leq 1,80) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,9641 \Longrightarrow \alpha = 0,0718 \Longrightarrow NC = 1 - 0,0718 = 0,9282$, $NC = 92,82\,\%$

c) Como ya hemos calculado es de $\pm 4\,\%$.

5.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.11.3 La producción diaria de leche, medida en litros, de una granja se puede aproximar por una variable normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 50$ litros.

a) Determine el tamaño mínimo de muestra para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 8 litros.

b) Se toman los datos de producción de 25 días, calcule la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas sea menor o igual a 930 litros si sabemos que $\mu = 950$ litros.

Solución:

$$N(\mu; 50)$$

a) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 4 = 1,96\frac{50}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 600{,}25 \Longrightarrow n = 601$$

b) $N(950; 50)$, $n = 25 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(950; \dfrac{50}{\sqrt{25}}\right) = N(950; 10)$
$P(\overline{X} \leq 930) = P\left(Z \leq \dfrac{930 - 950}{10}\right) = P(Z \leq -2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

5.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.11.4 Una empresa editorial desea conocer el impacto que tendrá la publicación de una nueva obra de un reconocido novelista. Tras entrevistar a 100 personas aficionadas a la lectura, 80 de ellas reconocen que adquirirán esa nueva obra.

a) ¿Con qué nivel de confianza se puede afirmar que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra está entre el 69,7 % y el 90,3 %?

b) Si se sabe que 8 de cada 10 personas aficionadas a la lectura adquirirán la obra y elegimos una muestra de $n = 144$ de esas personas, calcule la probabilidad de que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra sea superior al 75 %.

Solución:

$$\hat{p} = \frac{80}{100} = 0,8 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,2$$

a) La longitud del intervalo es $l = 2E = 0,903 - 0,697 = 0,206 \Longrightarrow E = 0,103$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,103 = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0,8\cdot 0,2}{100}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = P(Z \leq 2,575) = 0,995 = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,01$
Luego $NC = 1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99$.

b) Ahora $n = 144$, $\hat{p} = \dfrac{8}{10} = 0,8$ y $\hat{q} = 0,2 \Longrightarrow p \approx N\left(0,8; \sqrt{\dfrac{0,8\cdot 0,2}{144}}\right) = N(0,8; 0,0333)$

$$P(p \geq 0,75) = P\left(Z \geq \frac{0,75 - 0,8}{0,0333}\right) = P(Z \geq -1,5) = P(Z \leq 1,5) = 0,9332$$

5.12. Islas Baleares

5.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.12.1 En una muestra aleatoria de 256 individuos se ha obtenido una edad media de 17,4 años. Se sabe que la desviación típica de la población normal de la que procede esta muestra es de 2 años.

a) Obtener un intervalo de confianza al 95 % para la edad media de la población.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra que se debe tomar para que en estimar la edad media con un nivel de confianza del 99 %, el error cometido sea inferior a 0,5 años?

Solución:

$$N(\mu; 2)$$

a) $n = 256$, $\overline{X} = 17,4$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{2}{\sqrt{256}} = 0,245$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (17,4 - 0,245; 17,4 + 0,245) = (17,155; 17,645)$$

b) $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2,575\frac{2}{\sqrt{n}} = 0,5 \Longrightarrow n \ge 106{,}09 \Longrightarrow n = 107$$

5.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.12.2 En una población una variable aleatoria sigue una ley normal con desviación típica 8. Se ha elegido, al azar, una muestra de tamaño 100 y su promedio ha sido 67.

a) Calcular el intervalo de confianza del 93 %, para la media de la población.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra que se debe tomar para estimar, con un nivel de confianza del 99 %, la media de la población con un error no superior a 2?

Solución:

$$N(\mu; 8)$$

a) $n = 100$, $\overline{X} = 67$ y $NC = 0,93 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,07 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,035$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,035 = 0,965 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,815$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,815\frac{8}{\sqrt{100}} = 1,452$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (67 - 1,452; 67 + 1,452) = (65,548; 68,452)$$

b) $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2,575\frac{8}{\sqrt{n}} = 2 \Longrightarrow n \ge 106{,}09 \Longrightarrow n = 107$$

5.13. Islas Canarias

5.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.13.1 En una determinada provincia, se seleccionó una muestra al azar de 400 personas cuya media de ingresos mensuales resultó igual a 1250€ con una desviación típica de 210€.

a) Calcular un intervalo de confianza al 90 % para los ingresos medios mensuales.

b) ¿De qué tamaño debe ser la muestra si se desea estimar los ingresos medios mensuales con un error menor de 15€ y con una confianza del 95 %?

Solución:

$$N(\mu; 210)$$

a) $n = 400$, $\overline{X} = 1250$ y $NC = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,645\frac{210}{\sqrt{400}} = 17,2725$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (1250 - 17,2725; 1250 + 17,2725) = (1232,7275; 1267,2725)$$

b) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1,96\frac{210}{\sqrt{n}} = 15 \Longrightarrow n \geq 752{,}9536 \Longrightarrow n = 753$$

Problema 5.13.2 En un Instituto de Enseñanza Secundaria se ha seleccionado una muestra aleatoria de 48 estudiantes a quienes se les preguntó si utilizaban la cafetería del instituto. Contestaron negativamente un total de 12 estudiantes.

a) Estima, con una confianza del 94 %, en qué intervalo se encuentra la proporción de alumnos que utilizan la cafetería del instituto.

b) ¿Qué tamaño muestral hubiese sido necesario tomar para estimar dicha proporción con un error menor del 4 % y una confianza del 90 %?

Solución:

$$\hat{p} = \frac{36}{48} = 0,75 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,25$$

a) $NC = 0,94 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,06 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,03$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,03 = 0,97 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,885$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,885\sqrt{\frac{0,75 \cdot 0,25}{48}} = 0,1178$$

$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,75-0,1178; 0,75+0,1178) = (0,6322; 0,8678) = (63,22\,\%; 86,78\,\%)$

b) $NC = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,04 = 1,645\sqrt{\frac{0,75 \cdot 0,25}{n}} \Longrightarrow n \ge 317,1123046 \Longrightarrow n = 318$$

Problema 5.13.3 El peso de las piñas de plátanos de una cooperativa de una determinada zona, se distribuye normalmente con una desviación típica de 8 kg.

a) Determina el tamaño de la muestra si se desea que el intervalo de confianza al 92 % para el peso medio de las piñas de plátanos tenga una amplitud de 4 kg

b) Si el peso medio de las piñas de plátanos fuera de 40 kg. ¿Cuál sería la probabilidad de que el peso medio de una muestra de 81 piñas estuviese entre 38 y 41 kg?

Solución:

$$N(\mu; 8)$$

a) $NC = 0,92 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,08 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,04$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,04 = 0,96 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,755$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1,755\frac{8}{\sqrt{n}} = 2 \Longrightarrow n \ge 49,2804 \Longrightarrow n = 50$$

b) $\overline{X} \approx N\left(40; \frac{8}{\sqrt{81}}\right) = N(40; 0,8889)$

$P(38 \le \overline{X} \le 41) = P\left(\dfrac{38-40}{0,8889} \le Z \le \dfrac{41-40}{0,8889}\right) = P(-2,25 \le Z \le 1,12) = P(Z \le 1,12) - P(Z \le -2,25) = P(Z \le 1,12) - (1 - P(Z \le 2,25)) = 0,8686 - (1 - 0,9878) = 0,8564$

5.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.13.4 Un medicamento cura una determinada enfermedad en el 80 % de los casos.

a) Si se administra a 10 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, 9 no se curen?

b) Si se administra a 100 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el número de curados esté entre 76 y 88?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que, en una muestra de 64 pacientes a los que se ha administrado el medicamento, la proporción de no curados sea menor o igual que 0,15?

Solución:

$$B(n; 0,8)$$

a) Si $n = 10 \Longrightarrow B(10; 0,2)$(no se curan)

$P(X \le 9) = 1 - P(X > 9) = 1 - P(X = 10) = 1 - \dbinom{10}{10} 0,2^{10} \cdot 0,8^0 = 1 - 0{,}9999998976 \simeq 1$

b) $B(100; 0,8)$, $n = 100 > 10$, $np = 100 \cdot 0,8 = 80 > 5$ y $nq = 100 \cdot 0,2 = 20 > 5 \Longrightarrow X \approx N(np, \sqrt{npq}) = N(80, 4)$

$P(76 \le X \le 88) = P\left(\dfrac{75,5-80}{4} \le Z \le \dfrac{88,5-80}{4}\right) = P(-1,13 \le Z \le 2,13) = P(Z \le 2,13) - P(Z \le -1,13) = P(Z \le 2,13) - (1 - P(Z \le 1,13)) = 0,9834 - (1 - 0,8708) = 0,8542$

c) No curados $B(64;0,2)$, $np = 64 \cdot 0,2 = 12,8 > 5$, $nq = 64 \cdot 0,8 = 51,2 > 5 \Longrightarrow X \approx N(np, \sqrt{npq}) = N(12,8;3,2)$ y $0,15 \cdot 64 = 9,6$
$P(X \le 9,6) = P\left(Z \le \dfrac{10,1 - 12,8}{3,2}\right) = P(Z \le -0,84) = 1 - P(Z \le 0,84) = 1 - 0,7995 = 0,2005$

Problema 5.13.5 Un estudio reciente, realizado sobre 400 internautas de una región, de edades comprendidas entre 16 y 65 años, indica que 344 usan redes sociales.

a) Con una confianza del 97 %, construir un intervalo de confianza para la proporción de internautas de la región que no usan redes sociales.

b) Si, para estimar la proporción de internautas que usan redes sociales, se obtiene el intervalo $[0,826; 0,894]$. ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?

c) Si la población de la región, con edades entre 16 y 65 años, es de 400000 personas, usando el nivel de confianza del apartado b), ¿entre qué límites está el número de los que no usan redes sociales?

Solución:

a) No utilizan las redes sociales: $\hat{p} = \dfrac{400 - 344}{400} = 0,14 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0,14 = 0,86$

$NC = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,015 = 0,985 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,17$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Longrightarrow E = 2,17\sqrt{\frac{0,14 \cdot 0,86}{400}} = 0,0377$$

$IC = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) = (0,14 - 0,0377; 0,14 + 0,0377) = (0,1024; 0,1776) = (10,24\,\%; 17,76\,\%)$

b) Utilizan las redes sociales $\hat{p} = \dfrac{344}{400} = 0,86 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0,86 = 0,14$
La longitud del intervalo $l = 2E = 0,894 - 0,826 = 0,068 \Longrightarrow E = 0,034 \Longrightarrow 0,034 = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0,86 \cdot 0,14}{400}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
$P(Z \le 1,96) = 0,9750 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow NC = 0,95 = 95\,\%$

c) Utilizan las redes sociales: $[0,826; 0,894] \Longrightarrow [1 - 0,826; 1 - 0,894] \Longrightarrow [0,106; 0,174]$ no utilizan las redes sociales con un nivel de confianza del 95 % luego el número de personas que no utilizarán las redes sociales estarán en el intervalo $[400000 \cdot 0,106; 400000 \cdot 0,174] = [42400; 69600]$

Problema 5.13.6 Se toma una muestra de 400 estudiantes al azar y se les pregunta por su gasto anual en libros y material escolar, obteniéndose una cantidad media de 132€. Se sabe, además, que la desviación típica de este gasto en la población estudiantil es de 24€.

a) Calcular un intervalo de confianza al 90 % para la media poblacional de este gasto.

b) Calcular el tamaño muestral necesario para que el correspondiente intervalo de confianza del apartado anterior fuese [128,71, 135,29].

Solución:

$$N(\mu; 24)$$

a) $n = 400$, $\overline{X} = 132$ y $NC = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,645\frac{24}{\sqrt{400}} = 1,974$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (132 - 1,974; 132 + 1,974) = (130,026; 133,974)$$

b) $Z_{\alpha/2} = 1,645$ y $l = 2E = 135,29 - 128,71 = 6,58 \Longrightarrow E = 3,29$.

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1,645\frac{24}{\sqrt{n}} = 3,29 \Longrightarrow n \ge 144 \Longrightarrow n = 144$$

5.14. La Rioja

5.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.14.1 El número de usuarios del transporte metropolitano sigue una distribución normal con desviación típica 108.

a) Si la media de usuarios diarios fuese 1700, ¿cuál sería la probabilidad de que la media de usuarios de 36 días fuese más de 1678?

b) En los 100 primeros días del año, la media diaria de usuarios ha sido 1750, determina un intervalo de confianza del 95 % para la media de viajeros.

Solución:

$$N(\mu; 108)$$

a) Si $\mu = 1700 \Longrightarrow N(1700; 108)$ y $n = 36$

$P(\overline{X} \ge 1678) = P\left(Z \ge \dfrac{1678 - 1700}{108/\sqrt{36}}\right) = P(Z \ge -1,22) = 1 - P(Z \le -1,22) = 1 - (1 - P(Z \le 1,22)) = P(Z \le 1,22) = 0,8888$

b) $n = 100$, $\overline{X} = 1750$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{108}{\sqrt{100}} = 21,168$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (1750 - 21,168; 1750 + 21,168) = (1728,832; 1771,168)$$

5.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.14.2 La vida media de un modelo de grapadoras sigue una distribución normal con una desviación típica de 60 días.

a) Si la media fuese de 950 días, ¿cuál sería la probabilidad de que la duración media de una muestra de 100 grapadoras superase los 959 días?

b) Si una muestra de 64 grapadoras tiene una vida media de 980 días, determina un intervalo de confianza del 90 % para la media de la producción.

Solución:

$$N(\mu; 60)$$

a) Si $\mu = 950 \Longrightarrow N(950; 60)$, $n = 100$, $P(\overline{X} \geq 959)) = P\left(Z \geq \dfrac{959-950}{60/\sqrt{100}}\right) = P(Z \geq 1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$

b) $n = 64$, $\overline{X} = 980$ y $NC = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,645\frac{60}{\sqrt{64}} = 12,3375$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (980 - 12,3375; 980 + 12,3375) = (967,6625; 992,3375)$$

5.15. Madrid

5.15.1. Modelo de 2020

Problema 5.15.1 El número de kilómetros que un corredor entrena a la semana mientras prepara una carrera popular se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ horas y desviación típica $\sigma = 10$ horas

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 atletas, obteniéndose una media muestral de 30 kilómetros. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Suponga que $\mu = 28$ kilómetros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 atletas, la media muestral, $\overline{X}$, esté entre 28 y 30 kilómetros.

Solución:

$$N(\mu; 10)$$

a) $n = 20$, $\overline{X} = 30$ y $NC = 95\,\% \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{10}{\sqrt{20}} = 4,383$$

$$IC = \left(\overline{X} - E, \overline{X} + E\right) = (30 - 4,383; 30 + 4,383) = (25,617; 34,383)$$

b) $\mu = 28$ y $n = 10$:

$$P\left(28 \le \overline{X} \le 30\right) = P\left(\frac{28-28}{10/\sqrt{10}} \le \overline{X} \le \frac{30-28}{10/\sqrt{10}}\right) =$$

$$P(0 \le Z \le 0,63) = P(Z \le 0,63) - P(Z \le 0) = 0,7357 - 0,5 = 0,2357$$

Problema 5.15.2 Las calorías consumidas por un atleta durante una carrera popular se pueden aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ calorías y desviación típica $\sigma = 300$ calorías.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 100 calorías con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 3000$ calorías. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 50$ atletas, la media de las calorías consumidas durante la carrera por los 50 atletas sea mayor que 2700 calorías.

Solución:

$$N(\mu; 300)$$

a) $E = 100$, $NC = 95\,\% \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{300}{\sqrt{n}} = 5 \Longrightarrow n \ge \left(\frac{1,96 \cdot 300}{100}\right)^2 = 34,5744$$

Luego $n = 35$.

b) $\mu = 3000$ y $n = 50$

$$P\left(\overline{X} \ge 2700\right) = P\left(\overline{X} \ge \frac{2700-3000}{300/\sqrt{50}}\right) =$$

$$P(Z \ge -7,07) = 1 - P(Z \le -7,07) = 1 - (1 - P(Z \le 7,07)) = 1 - (1-1) = 1$$

5.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.15.3 La publicidad de una marca de bolígrafos afirma que escriben 2 km. Para realizar un control de calidad, se considera que la longitud de escritura de estos bolígrafos puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica 0,5 km.

a) Obtenga el número mínimo de bolígrafos que deberían seleccionarse en una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, sea como mucho 0,05 km con un nivel de confianza del 95,44 %.

b) Si la longitud media de escritura, μ, es la anunciada en la publicidad, calcule la probabilidad de que, con una muestra de 16 bolígrafos elegidos al azar, se puedan escribir más de 30 km.

Solución:

$$N(\mu; 0,5)$$

a) $z_{\alpha/2} = 2$ y $E = 0,05$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\frac{0,5}{\sqrt{n}} = 0,05 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{2 \cdot 0,5}{0,05}\right)^2 = 400$$

Luego $n = 400$.

b) Tenemos $N(2; 0,5)$, $n = 16$ y $\overline{X} = \frac{30}{16} = 1,875$

$$P(\overline{X} \geq 1,875) = P\left(Z \geq \frac{1,875}{0,5/\sqrt{16}}\right) = P(Z \geq -1) = P(Z \leq 1) = 0,8413$$

Problema 5.15.4 Determinado modelo de lavadora tiene un programa de lavado con un consumo de agua que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es de 7 litros.

a) En una muestra aleatoria simple de 10 lavadoras los consumos de agua en un lavado con este programa fueron los siguientes:

40 45 38 44 41 40 35 50 40 37

Construya el intervalo de confianza al 90 % para estimar el consumo medio de agua de este modelo de lavadoras con dicho programa de lavado.

b) A partir de una muestra de 64 lavadoras elegidas al azar, se obtuvo un intervalo de confianza para la media con una longitud de 5 litros. Obtenga el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

Solución:

$$N(\mu; 7)$$

a) $n = 10$, $\overline{X} = 41$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{7}{\sqrt{10}} = 3,64136$$

$$IC = \left(\overline{X} - E, \overline{X} + E\right) = (37,36; 44,64)$$

b) $n = 64$ y $L = 2E = 5 \Longrightarrow E = 2,5$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2,5 = z_{\alpha/2}\frac{7}{\sqrt{64}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2,5 \cdot 8}{7} = 2,8571$$

$$P(Z \leq 2,86) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9979 \Longrightarrow \alpha = 0,0042 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 0,9958$$

$$NC = 99,58\,\%$$

5.15.3. Convocatoria Extraordinaria junio de 2020-coincidente

Problema 5.15.5 El salario medio bruto mensual en España en 2019 se puede aproximar por una distribución normal con $\sigma = 900$ euros.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, $\overline{X}$, sea a lo sumo de 200 euros, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 1889$ euros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 64 individuos, la media muestral, $\overline{X}$, sea mayor que 1900 euros.

Solución:

$$N(\mu; 900)$$

a) $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $E = 200$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{900}{\sqrt{n}} = 200 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 900}{200}\right)^2 = 77,7924$$

Luego $n = 78$.

b) $\mu = 1889$ y $n = 64$ $P(\overline{X} > 1900) = P\left(Z > \dfrac{1900 - 1889}{900/\sqrt{64}}\right) = P(Z > 0,1) = 1 - P(Z < 0,1) = 1 - 0,5398 = 0,4602$

Problema 5.15.6 Se estima que el coste medio anual de la cesta de la compra de una familia tipo se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 500$.

a) Se ha analizado el consumo de 100 familias tipo, obteniéndose un coste medio estimado de 5100 euros anuales. Calcule un intervalo de confianza al 90 % para la media μ.

b) A partir de una muestra de 36 familias tipo, se ha obtenido un intervalo de confianza para μ con un error de estimación de 160 euros. Determine el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

Solución:

$$N(\mu; 500)$$

a) $n = 100$, $\overline{X} = 5100$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{500}{\sqrt{100}} = 82,25$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (5017,75; 5182,25)$$

b) $n = 36$ y $E = 160$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 160 = z_{\alpha/2}\frac{500}{\sqrt{36}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,92$$

$$P(Z < 1,92) = 0,9726 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,0548 \Longrightarrow 1 - \alpha = 0,9452$$

$$NC = 94,52\,\%$$

5.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.15.7 El peso de una patata, en gramos (g), de una remesa que llega a un mercado se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 60$ g.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 20 g, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponiendo que se selecciona una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 100$, calcule el valor de la media μ para que $P(\overline{X} \leq 220) = 0,9940$.

Solución:

$$N(\mu; 60)$$

a) $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $E = 20$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{60}{\sqrt{n}} = 5 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 60}{20}\right)^2 = 34,57$$

Luego $n = 35$.

b) $P(X \leq 220) = P\left(Z \leq \dfrac{220-\mu}{60/\sqrt{100}}\right) = P\left(Z \leq \dfrac{220-\mu}{6}\right) = 0,9940 \Longrightarrow \dfrac{220-\mu}{6} = 2,51 \Longrightarrow$ $\mu = 204,94 \simeq 205$.

Problema 5.15.8 Una persona se ha propuesto salir a caminar todos los días realizando el mismo recorrido y cronometrando el tiempo que tarda en completarlo. El tiempo que está caminando por este recorrido puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es 10 minutos.

a) Utilizando la información de una muestra aleatoria simple, se ha obtenido el intervalo de confianza $(26,9; 37,1)$, expresado en minutos, para estimar el tiempo medio que tarda en realizar el recorrido, μ, con un nivel de confianza del 98,92 %. Obtenga el tamaño de la muestra elegida y el valor de la media muestral.

b) Si el tiempo medio para completar el recorrido es $\mu = 30$ minutos, calcule la probabilidad de que, en una muestra de 16 días elegidos al azar, esta persona tarde entre 25 y 35 minutos de media para completar el recorrido.

Solución:

$$N(\mu; 10)$$

a) $E = \dfrac{37,1 - 26,9}{2} = 5,1$ y $\overline{X} = \dfrac{37,1+26,9}{2} = 32$.
$NC = 0,9892 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,0108 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,0054 \Longrightarrow P\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,0054 = 0,9946 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,55$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,55\frac{10}{\sqrt{n}} = 5,1 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{2,55 \cdot 10}{5,1}\right)^2 = 25$$

Luego $n = 25$.

b) $\mu = 30$ y $n = 16$:
$P(25 \leq \overline{X} \leq 35) = P\left(\dfrac{25-30}{10/\sqrt{16}} \leq Z \leq \dfrac{35-30}{10/\sqrt{16}}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2) = P(Z \leq 2) - (1 - P(Z \leq 2)) = 2P(Z \leq 2) - 1 = 0,9544$

5.16. Murcia

5.16.1. Modelo de 2020

Problema 5.16.1 El tiempo, en años, de renovación de un ordenador portátil se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica de 0,9 años. Si tomamos al azar a 900 usuarios, se obtiene una media muestral de 3,5 años. Hallar el intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de renovación de un ordenador portátil.
Solución:

$$N(\mu; 0,9), \quad n = 900, \quad NC = 95\,\% \ \text{ y } \ \overline{X} = 3,5$$

$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{0,9}{\sqrt{900}} = 0,0588$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (3,5 - 0,0588; 3,5 + 0,0588) = (3,4412; 3,5588)$$

Problema 5.16.2 El tiempo en minutos de conexión a Internet de los estudiantes de un centro de secundaria, sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. Para poder estimar la media del tiempo de conexión, se construye un intervalo de confianza con un error menor o igual a 5 minutos, con un nivel de confianza del 95 %. Determine cuál es el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar.

Solución:

$$N(\mu; 10), \quad E = 5 \ \text{ y } \ NC = 95\,\%$$

$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 5 = 1,96\frac{10}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 15,3664 \Longrightarrow n = 16$$

5.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.16.3 Se ha estimado que el consumo medio de gasolina de los automóviles de un concesionario se distribuye según una distribución normal con una desviación típica de 0,5 litros. Se han probado 10 automóviles, elegidos aleatoriamente, de este concesionario por conductores con la misma forma de conducir y en carreteras similares, obteniendo un consumo medio de 6,5 litros por cada 100 km.

a) Determine un intervalo de confianza, al 95 % de confianza, para la media del gasto de gasolina de estos vehículos.

b) Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que, con un nivel de confianza del 95 %, el error cometido del consumo de gasolina sea inferior a 0,2.

Solución:

a) $N(\mu; 0,5)$, $n = 10$, $\overline{X} = 6,5$ y $NC = 95\,\%$
$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{0,5}{\sqrt{10}} = 0,3099$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (6,5 - 0,3099; 6,5 + 0,3099) = (6,1901; 6,8099)$$

b)

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,2 = 1,96\frac{0,5}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 24,01 \Longrightarrow n = 25$$

Problema 5.16.4 En un laboratorio farmacéutico se analiza el PH de una solución y se supone que este sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,02. Con un ensayo de 6 mediciones de la misma solución se obtuvo un PH de 7,91.

a) Determine un intervalo de confianza al 95 % para la media de todas las determinaciones de PH de la misma solución obtenida por el mismo método.

b) Con el mismo nivel de confianza anterior. ¿cuál será el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido sea inferior a 0,01?

Solución:

a) $N(\mu; 0,02)$, $n = 6$, $\overline{X} = 7,91$ y $NC = 95\,\%$
$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{0,02}{\sqrt{6}} = 0,016$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (7,91 - 0,016; 7,91 + 0,016) = (7,894; 7,926)$$

b)

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,01 = 1,96\frac{0,02}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 15,3664 \Longrightarrow n = 16$$

5.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.16.5 El precio medio de los aspiradores de una gran superficie se distribuye según una distribución normal de desviación típica 100€. Se toma una muestra aleatoria de 9 aspiradoras de distintas marcas obteniendo un precio medio de 178,89€. Determine un intervalo de confianza al 99 % para el precio medio.
Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que, con un nivel de confianza del 99 % el error cometido de estimación del precio no supere los 50€.

Solución:
$N(\mu; 100)$, $n = 9$, $\overline{X} = 178,89$ y $NC = 99\,\%$
$NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,9795 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 2,575\frac{100}{\sqrt{9}} = 85,8333$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (178,89 - 85,8333; 178,89 + 85,8333) = (93,0567; 264,7233)$$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 50 = 2,575\frac{100}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 26,5225 \Longrightarrow n = 27$$

Problema 5.16.6 Se sabe que el peso de los tarros de cacao de un supermercado es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de 1,8 gramos. Se toma una muestra aleatoria de 9 tarros y se obtiene un peso medio de 89 gramos. Obtenga un intervalo de confianza, al 95 % para la media de esta población.
¿Cuál será el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido de estimación del peso no supere 1 gramo, a un nivel de confianza del 95 %?
Solución:
$N(\mu; 1,8)$, $n = 9$, $\overline{X} = 89$ y $NC = 95\,\%$
$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{1,8}{\sqrt{9}} = 1,176$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (89 - 1,176; 89 + 1,176) = (87,824; 90,176)$$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1,96\frac{1,8}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 12,446784 \Longrightarrow n = 13$$

5.17. Navarra

5.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.17.1 El tiempo que la población de jóvenes de una región dedica mensualmente a hacer deporte sigue una distribución normal con varianza de 16 horas^2. El tiempo medio obtenido a partir de una muestra aleatoria de 64 jóvenes de dicha región es de 25,8 horas.

a) Calcule un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza del 97 %.

b) Con los datos de esa muestra se ha calculado el siguiente intervalo de confianza para el tiempo medio que los jóvenes de dicha región dedican mensualmente a hacer deporte: $[24,9775; 26,6225]$. Determine el nivel de confianza de este intervalo, justificando su respuesta.

(Escriba las fórmulas necesarias)

Solución:

$$N(\mu; \sqrt{16}) = N(\mu; 4)$$

a) $n = 64$, $\overline{X} = 25,8$ y $NC = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,015 = 0,985 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,17$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow$$

$$E = 2,17\frac{4}{\sqrt{64}} = 1,085$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (25,8 - 1,085; 25,8 + 1,085) = (24,715; 26,885)$$

b) La amplitud del intervalo es $l = 2E = 26,6225 - 24,9775 = 1,645 \Longrightarrow E = 0,8225$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,8225 = Z_{\alpha/2}\frac{4}{\sqrt{64}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$$

$$P(Z \leq 1,645) = 0,95 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow NC = 1 - 0,1 = 0,9 \Longrightarrow NC = 90\,\%$$

5.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.17.2 El peso (en toneladas) de los contenedores que transporta una empresa de servicios de transporte marítimo puede aproximarse a una distribución normal con desviación de 3 toneladas.

a) Se realizó un estudio tomando una muestra aleatoria simple de contenedores y se calculó un intervalo de confianza al 97 % para la media poblacional, con un error máximo de 0,651. Calcule el tamaño de la muestra que se tomó en ese estudio.

b) Se decide realizar otro estudio y se selecciona una muestra de contenedores, obteniéndose los siguientes pesos (en toneladas): 20.25, 17.5, 21.8, 15.7, 14.6, 17.2, 23.1, 11.7, 18.3. Construya un intervalo de confianza para el peso medio de los contenedores, con un nivel de confianza del 93 %.

(Escriba las fórmulas necesarias)
Solución:

$$N(\mu; 3)$$

a) $NC = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,015 = 0,985 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,17$

$E = 0,651$, y $Z_{\alpha/2} = 2,17$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,651 = 2,17\frac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 100$$

b) $n = 9$, $\overline{X} = 17,7944$ y $NC = 0,93 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,07 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,035$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,035 = 0,965 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,81$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,81\frac{3}{\sqrt{9}} = 1,81$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (17,7944 - 1,81; 17,7944 + 1,81) = (15,9844; 19,6044)$$

5.18. País Vasco

5.18.1. Modelo de 2020

Problema 5.18.1 En una población se toma una muestra aleatoria de 500 personas y se les pregunta si son aficionadas al deporte o no. De ellas 350 respondieron que sí son aficionadas al deporte y el resto que no. Con esta información se pide:

a) Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que son aficionadas al deporte. Calcular, además, el error máximo para dicho nivel de confianza.

b) Interpretar los resultados obtenidos.

Solución:

a) $n = 500$, $\hat{p} = \frac{350}{500} = 0,7$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{500}} = 0,0402$$

$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,7 - 0,0402; 0,7 + 0,0402) = (0,6598; 0,7402) = (65,98\,\%; 74,02\,\%)$

b) La proporción de población que son aficionados al deporte está entre el 65,98 % y el 74,02 % con una probabilidad del 95 % de que esta afirmación sea correcta.

Problema 5.18.2 En una determinada ciudad el gasto anual en transporte público realizado por las familias sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 75 euros. Se toma una muestra aleatoria de 100 familias, de la que se obtiene un gasto medio de 250 euros.

a) Calcular entre qué valores estará el gasto medio de la población con un nivel de confianza del 99 %.

b) ¿Qué tamaño debería tener la muestra para que el error máximo sea de 10 euros con un nivel de confianza del 99 %?

Solución:

a) $n = 100$, $\overline{X} = 250$ y $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,58$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 2,58\frac{75}{\sqrt{100}} = 19,35$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (250 - 19,35; 250 + 19,35) = (230,65; 269,35)$$

b)

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 10 = 2,58\frac{75}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 374,4225 \Longrightarrow n = 375$$

5.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.18.3 La altura en centímetros de las mujeres de un determinado país sigue una distribución normal de media 163 cm y desviación típica 7 cm.

a) Si se toma una mujer al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su altura sea superior a 171 cm? ¿Y de que su altura esté comprendida entre 155 y 171 cm?

b) Una empresa que fabrica disfraces quiere elaborar cuatro tallas en función de la altura, de tal modo que cada una de ellas sea adecuada para el 25 % de las mujeres. ¿Cuáles serán las alturas que marcarán el cambio de una talla a otra?

Solución:

$$N(163;7)$$

a) $P(X \geq 171) = P\left(Z \geq \dfrac{171-163}{7}\right) = P(Z \geq 1,14) = 1 - P(Z \leq 1,14) = 1 - 0,8729 = 0,1271$

$P(155 \leq X \leq 171) = P\left(\dfrac{155-163}{7} \leq Z \leq \dfrac{171-163}{7}\right) = P(-1,14 \leq Z \leq 1,14) = P(Z \leq 1,14) - P(Z \leq -1,14) = P(Z \leq 1,14) - (1 - P(Z \leq 1,14)) = 2P(Z \leq 1,14) - 1 = 2 \cdot 0,8728 - 1 = 0,7456$

b) Tendremos:

- ☞ $P(X \leq a) = 0,25 \Longrightarrow P\left(Z \leq -\dfrac{a-163}{7}\right) = 1 - 0,25 = 0,75 \Longrightarrow -\dfrac{a-163}{7} = 0,675 \Longrightarrow a = 158,275$ cm
- ☞ $P(X \leq a) = 0,50 \Longrightarrow P\left(Z \leq \dfrac{a-163}{7}\right) = 0,5 \Longrightarrow \dfrac{a-163}{7} = 0 \Longrightarrow a = 163$ cm
- ☞ $P(X \leq a) = 0,75 \Longrightarrow P\left(Z \leq \dfrac{a-163}{7}\right) = 0,75 \Longrightarrow \dfrac{a-163}{7} = 0,675 \Longrightarrow a = 167,725$ cm

Problema 5.18.4 El peso de las truchas de una piscifactoría sigue una distribución normal de media 250 gramos y desviación típica 50 gramos. Únicamente son aptas para las ventas aquellas que superan un determinado peso.

a) ¿Cuál debería ser ese peso si se quiere que el 40 % de las truchas de la piscifactoría sean aptas para la venta?

b) Si dicho peso se establece en 280 gramos y en la piscifactoría hay un total de 6000 truchas, ¿cuántas de ellas se podrán poner a la venta?

Solución:

$$N(250;50)$$

a) $P(X \geq a) = 0,40 \Longrightarrow P\left(Z \leq \dfrac{a-250}{50}\right) = 1 - 0,4 = 0,6 \Longrightarrow \dfrac{a-250}{50} = 0,255 \Longrightarrow a = 262,75$

El peso de la trucha debe ser mayor a 262,75 gramos.

b) $P(X \geq 280) = P\left(Z \geq \dfrac{280-250}{50}\right) = P(Z \geq 0,6) = 1 - P(Z \leq 0,6) = 1 - 0,7257 = 0,2743$

N^{o} de truchas para la venta $= 6000 \cdot 0,2743 = 1645,8 \simeq 1646$ truchas.

5.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.18.5 Las notas obtenidas por los estudiantes de un determinado grupo en una asignatura siguen una distribución normal de media 6,2 puntos y desviación típica 2 puntos.
Se elige un estudiante al azar. Calcula:

a) La probabilidad de que su nota sea superior a 7.

b) La probabilidad de que haya obtenido una nota comprendida entre 5 y 8 puntos.

c) Si el 25 % del alumnado con mejor nota, consiguió la calificación de "sobresaliente", ¿cuál es la nota mínima para obtener dicha calificación?

Solución:

$$N(6,2;2)$$

a) $P(X \geq 7) = P\left(Z \geq \dfrac{7-6,2}{2}\right) = P(Z \geq 0,4) = 1 - P(Z \leq 0,4) = 1 - 0,6554 = 0,3446$

b) $P(5 \leq X \leq 8) = P\left(\dfrac{5-6,2}{2} \leq Z \leq \dfrac{8-6,2}{2}\right) = P(-0,6 \leq Z \leq 0,9) = P(Z \leq 0,9) - P(Z \leq -0,6) = P(Z \leq 0,9) - (1 - P(Z \leq 0,6)) = 0,8159 - (1 - 0,7257) = 0,5416$

c) $P(X \geq a) = 0,25 \Longrightarrow P\left(Z \geq \dfrac{a-6,2}{2}\right) = 0,25 \Longrightarrow P\left(Z \leq \dfrac{a-6,2}{2}\right) = 1 - 0,25 = 0,75 \Longrightarrow \dfrac{a-6,2}{2} = 0,675 \Longrightarrow a = 7,55$ es la mínima nota para tener sobresaliente.

Problema 5.18.6 El tiempo que necesitan los alumnos de un grupo para finalizar el examen de una determinada asignatura se distribuye normalmente, con una media de 60 minutos y una desviación típica de 10 minutos.

a) Si se dan 75 minutos para realizar el examen, ¿qué proporción de alumnos conseguirá finalizarlo?

b) Si se dan 80 minutos para realizar el examen, ¿qué proporción de alumnos no conseguirá finalizarlo?

c) ¿Qué tiempo hay que dar para la realización de dicho examen si se quiere que el 96 % de los alumnos consiga terminarlo?

Solución:

$$N(60;10)$$

a) $P(X \leq 75) = P\left(Z \leq \dfrac{75-60}{10}\right) = P(Z \leq 1,5) = 0,9332 \Longrightarrow 93,32\,\%$

b) $P(X \geq 80) = P\left(Z \geq \dfrac{80-60}{10}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228 \Longrightarrow 2,28\,\%$

c) $P(X \leq a) = P\left(Z \leq \dfrac{a-60}{10}\right) = 0,96 \Longrightarrow \dfrac{a-60}{10} = 1,755 \Longrightarrow a = 77{,}55$ minutos.